Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Barunčić

Svojstveni problem i metoda potencija

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Barunčić

Svojstveni problem i metoda potencija

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2018.

1 Svojstveni problem i metoda potencija

Sažetak

Cilj ovog završnog rada je obraditi iterativne metode za rješavanje svojstvenog problema s naglaskom na metodu potencija, inverznu metodu iteracija i inverznu metodu potencija s pomakom. U uvodu rada upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima vezanim uz svojstvene vrijednosti, te tako napraviti teorijsku podlogu za obradu željenih metoda. Također, napravit ćemo implementaciju svih primjera u programskom jeziku Matlab.

Ključne riječi

svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, metoda potencija, inverzna metoda potencija, inverzna metoda potencija s pomakom

The eigenvalue problem and power method

Summary

The goal of this paper is to study iterative methods for solving the eigenvalue problem with an emphasis on the power method, the inverse power method and the shifted inverse power method. In the introduction to the work we'll learn the basic concepts related to eigenvalues and make a theoretical basis for processing the considered methods. Also, we will implement all examples in the programing language Matlab.

Key words

eigenvalues, eigenvectors, power method, inverese power method, shifted inverse power method

Sadržaj

2 Uvod

2.1 Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je dana matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, te $x \in \mathbb{C}^n$. Kažemo da je λ **svojstvena vrijednost** matrice A, ako vrijedi:

$$Ax = \lambda x, \quad za \quad x \neq 0.$$

U tom slučaju pripadni vektor x zovemo **svojstveni vektor** svojstvene vrijednosti λ, a skup svih svojstvenih vrijednosti zovemo spektar matrice A u oznaci $\Lambda(A)$.

Teorem 1. *$\lambda \in \mathbb{C}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dokaz. Prema definiciji, skalar λ je svojstvena vrijednost matrice A ako postoji vektor x, $x \neq 0$ takav da vrijedi $Ax = \lambda x$. Dakle, ako matrična jednadžba

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{1}$$

ima netrivijalno rješenje. Jednadžbu (1) možemo promatrati kao sustav n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Prema Cramerovom pravilu([4], str. 246.) takav sustav ima jedinstveno trivijalno rješenje $(x_1 = x_2 = \cdots = x_n)$ ako i samo ako $\det(A - \lambda I) \neq 0$. Dakle, pripadna matrična jednadžba (1) imat će netrivijalno rješenje onda i samo onda ako je $\det(A - \lambda I) = 0$. $\square$

Iz definicije determinante matrice A možemo uočiti da je preslikavanje koje skalaru λ pridružuje $\det(A - \lambda I)$ polinom n-tog stupnja što nam motivira sljedeću definiciju.

Definicija 1. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Polinom $\rho_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ zovemo svojstveni ili karakteristični polinom matrice A.

Iz Defınciije 1. i Teorema 1., koje smo preuzeli iz [4], možemo zaključiti da je izračunavanjem nultočki karakterističnog polinoma matrice A možemo pronaći svojstvene vrijednosti matrice A.

Nadalje, neka je dan polinom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$. Definirajmo matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ takvu da vrijedi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_o & -a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem determinante matrice $A - xI$ dobivamo sljedeću jednakost $\det(A - xI) = (-1)^n (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x_n)$. Prema Definiciji 1. znamo da je $\det(A - xI) = \rho_A(x)$, dakle možemo zaključiti da za svaki polinom p možemo pronaći matricu A čiji je on karakteristični polinom. Time smo pokazali da je problem određivanja svojstvenih vrijednosti matrice ekvivalentan problemu određivanja nultočki polinoma.
Sljedećem primjer će, prema [4], pokazat kako nam svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori mogu olakšati prepoznavanje krivulja.

Primjer 1. U pravokutnom kordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ odredimo sva rješenja jednadžbe

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 12x_1 + 8x_2 - 1 = 0. \tag{2}$$

Jednadžbu (2) možemo zapisati i kao

$$Ax \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0, \tag{3}$$

gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrica prisutne kvadratne forme, a vektori a i x su jednaki $a = 12e_1 + 8e_2$ i $x = x_1e_1 + x_2e_2$, dok je $a_o = -1$. Odnosno vrijedi:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 1 = 0.$$

Svojstvene vrijednosti matrice A ćemo izračunati kao nultočke karakterističnog polinoma $\rho_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, te tako dobiti vrijednosti $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 1$. Rješavanjem sustava $Av_1 = 3v_1$ dobivamo svojstveni vektor $v_1 = e_1 + e_2$ koji je pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1, dok rješavanjem sustava $Av_2 = v_2$ dobivamo svojstveni vektor $v_2 = -e_1 + e_2$ pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2. Ortonormiranjem svojstvenih vektora v_1 i v_2 dobivamo vektore $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ i $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2)$ koji nam čine bazu (e_1', e_2') u $\mathbb{R}^2$. Ako napravimo zapise vektora a, x i matrice A u bazi (e_1', e_2'), oni imaju sljedeće oblike: $a = 10\sqrt{2}e_1' - 2\sqrt{2}e_2'$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)e_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1+x_2)e_2'$. Označimo li $\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)$ s y_1 i $\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1+x_2)e_2'$ s y_2, tada nam je zapis vektora x dan s $x = y_1e_1' + y_2e_2'$. Jednadžba (3) u novoj bazi (e_1', e_2') ima oblik

$$3y_1^2 + y_2^2 + 10\sqrt{2}y_1 - 2\sqrt{2}y_2 - 1 = 0.$$

Daljnim sređivanjem gornje jednadžbe dobivamo jednadžbu oblika:

$$\frac{(y_1 + \frac{5\sqrt{2}}{3})^2}{\frac{59}{9}} + \frac{(y_2 - \sqrt{2})^2}{\frac{59}{3}} = 1.$$

Možemo zaključiti da je to elipsa sa središtem u točki $(-\frac{5\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$ i poluosima jednakim $\frac{\sqrt{59}}{3}$ i $\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{3}}$.

Teorem 2. ***[Abel,1824]*** *(Prema [2]) Za svaki $n \geq 5$ postoji polinom p stupnja n s racionalnim koeficijentima koji ima realnu nultočku koja se ne može izraziti koristeći samo racionalne brojeve, zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i vađenje n-tog korijena.*

Posljedica prehodnog teorema, je ta da nije moguće pronaći algoritam koji će računati svojstvene vrijednosti u konačno mnogo koraka jer se traženje svojstvenih vrijednosti, odnosno nultočaka karakterističnog polinoma, uvijek temelji na operacijama spomenutim u teoremu. Upravo zbog toga svaki algoritam za traženje svojstvenih vrijednosti mora biti iterativan.

Sljedeći primjer, kojeg možemo pronaći u [2] str.125., nam pokazuje kako je problem traženja nultočki svojstvenog polinoma vrlo osjetljiv na pogreške zaokruživanja, te kako one mogu imati veliki utjecaj na točnost izračunatih svojstvenih vrijednosti.

Primjer 2. Neka je A dijagonalna matrica čiji dijagonalni elementi su $1, 2, \ldots, 15$, očito je da su oni također svojstvene vrijednosti matrice A.
Ako primjenimo Teorem 1. i Definiciju 1., te tako dobijemo svojstveni polinom $\rho_A(x) = \det(A - xI)$ koji je jednak:
$\rho_A(x) = x^{15} - 120x^{14} + 6580x^{13} - 218400x^{12} + 4899622x^{11} - 78558480x^{10} + 928095740x^9 - 8207628000x^8 + 54631129553x^7 - 272803210680x^6 + 1009672107080x^5 - 2706813345600x^4 + 5056995703824x^3 - 6165817614720x^2 + 4339163001600x - 1307674368000$. Primjetimo koeficijent uz $-x^{15}$ je 120 što je jednako zbroju svojstvenih vrijednosti, a uz $-x^0$ je 15!, što je produkt svojstvenih vrijednosti. Ostali koeficijenti su različite kombinacije zbroja i produkta svojstvenih vrijednosti matrice A. Nadalje, računanjem nultočki gornjeg polinoma pomoću matlab funkcije roots kao rješenja dobili smo: 15.000000268968613, 13.999997689630304, 13.000008647420207, 11.999981276991626, 11.000026161192281, 9.999975134725144, 9.000016483519099, 7.9999994414113502, 7.000002501047653, 5.999999441413502, 5.00000082683621, 3.999999992322418, 3.000000000411776, 1.999999999988686 i 1.000000000000111. Sada možemo zaključiti kako nas je račun s koeficijentima gornjeg polinoma, već pri relativno maloj dimneziji, doveo do određenih pogrešaka zaokruživanja.

3 Iterativne metode rješavanja svojstvenog problema

3.1 Uvod u iterativne metode

Iterativne metode kojima ćemo rješavati svojstveni problem dat će nam određene aproksimacije traženog svojstvenog para. Kako bismo bolje razumjeli njihovu teorijsku pozadinu, te znali procijeniti kvalitetu izračunatih aproksimacija navest ćemo sljedeće teoreme i definicije.

Definicija 2. Realna matrica A je simetrična, ako je $A = A^T$. Kompleksna matrica A je hermitska, ako je $A = A^*$.

Definicija 3. Kompleksna matrica B je normalna, ako je $BB^* = B^*B$.

Sljedeći teorem će nam, prema [2], reći nešto više o svojstvima normalnih matrica.

Teorem 3. Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je normalna ako i samo ako ima n ortonormiranih svojstvenih vektora, odnosno n svojstvenih vektora $x_1, x_2; \ldots, x_n$ takvih da je $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$. δ_{ij} je Kroneckerov simbol i definira se kao: $\delta_{ij} = 1$ kada je $i = j$ i $\delta_{ij} = 0$ kada $i \neq j$.

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normalna matrica, te neka je $U = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ unitarna matrica čiji stupci su svojstveni vektori matrice A i $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ dijagonalna matrica čiji dijagonalni su svojstvene vrijednosti matrice A.
Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

$$A = UDU^* \iff AU = UD \iff$$

$$A \cdot [x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot \operatorname{diag}(_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \iff$$

$$[Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n] \Longleftrightarrow$$
$$Ax_i = \lambda x_i, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Iz čega možemo zaključiti da je svaka normalna matrica unitarno dijagonalizabilna.
Ako je (λ, x) svojstveni par matrice A, onda je iz $Ax = \lambda x$ očito $\lambda = (x^*Ax)/(x^*x)$. Dakle, svojstvenu vrijednost lagano izračunamo iz pripadnog svojstvenog vektora.
No, ako imamo zadanu aproksimaciju svojstvenog vektora $x \approx \tilde{x}$, tada će pripadnu svojstvenu vrijednost najbolje aproksimirati vrijednost ρ koja minimizira $\| Ax - \rho x \|$ u nekoj normi.

Definicija 4. Reyleigh-jev kvocijent matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definira se sa

$$r_A(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

Teorem 4. (Prema [2]) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Tada je (ρ, x) svojstveni par matrice A ako i samo ako je $\bigtriangledown r_A(x) = 0$ i $r_A(x) = \lambda$.

Dokaz. Gradijent od r_A možemo izračunati na sljedeći način:

$$\bigtriangledown r_A(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} \right)_{i=1,\ldots,n}$$

$$= \left(\frac{\left(\sum\limits_{k \neq i} a_{ik} x_k + \sum\limits_{j \neq i} x_j a_{ji} + 2 a_{ii} x_i \right) \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum\limits_{j,k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \cdot 2x_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^2} \right)_{i=1,\ldots,n}$$

$$= \frac{2Ax \cdot \langle x, x \rangle - 2\langle x, Ax \rangle \cdot x}{\langle x, x \rangle^2} = \frac{2}{\| x \|_2^2}(Ax - r_A(x) \cdot x).$$

Pretpostavimo da je $Ax = \lambda x$. Tada je $r_A(x) = \frac{\langle x, \lambda x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda$ i $\bigtriangledown r_A(x) = \frac{2}{\|x\|_2^2}(\lambda x - \lambda x) = 0$.
S druge strane, ako je $\bigtriangledown r_A(x) = 0$, onda je $Ax - r_A(x)x = 0$, pa s toga imamo $Ax = r_A(x) \cdot x$, odnosno $\lambda = r_A(x)$. $\square$

3.2 Metoda potencija

Metoda potencija je jedna od najjednostavnijih iterativnih metoda za rješavanje svojstvenog problema. Posebno je pogodna računanju aproksimacije po modulu najveće svojstvene vrijednosti, te njoj odgovarajućeg svojstvenog vektora. No, određenim modifikacija u algoritmu moguće je odrediti i ostale svojstvene vrijednosti.
Osnovna ideja ove metode ja da s matricom A djelujemo na polazni vektor koji će nam pod određenim uvjetima dati informacije o traženom svojstvenom paru. Pretpostavimo

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normalna, tada prema Teoremu 3. znamo da je matrica A unitarno dijagonalizabilna. Što znači da je $A = S\Lambda S^*$, gdje je Λ dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi svojstvene vrijednosti matrice A, a S unitarna matrica čiji su stupci svojstveni vektori matrice A. Pretpostavimo da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ zadovoljavaju sljedeće nejednakosti: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Svojstveni vektori $s_1, s_2, \ldots, s_n$ matrice A su, prema Teoremu 3., orotonormirani i čine bazu u $\mathbb{C}^n$. Dakle, svaki vektor iz $\mathbb{C}^n$ se može prikazati kao linearna kombinacija $x = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \cdots + \alpha_n s_n$. Sada lako izračunamo:

$$Ax = \alpha_1\lambda_1 s_1 + \alpha_2\lambda_2 s_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n s_n$$

$$\begin{aligned} A^k x &= \alpha_1\lambda_1^k s_1 + \alpha_2\lambda_2^k s_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k s_n \\ &= \lambda_1^k(\alpha_1 s_1 + \alpha_2\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^k s_2 + \cdots + \alpha_n\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\Big)^k s_n) \end{aligned}$$

Kako za sve $i > 1$ razlomak $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$ kada $k \to \infty$, vidimo da $A^k x$ sve više naginje u smjeru vektora s_1, pod uvjetom da $\alpha_1 \neq 0$.
Aproksimacije obično uzimamo normirane u nekoj normi, npr. računamo:

$$y^{(k)} = \frac{A^k x}{\parallel A^k x \parallel} = \frac{\lambda_1^k(\alpha_1 s_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\right)^k s_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k s_n)}{|\lambda_1|^k \parallel \alpha_1 s_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k s_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k s_n \parallel}$$

$$\approx \Big(\frac{\lambda_1}{\parallel \lambda_1 \parallel}\Big)^k \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}\frac{s_1}{\parallel s_1 \parallel} \equiv \mu_k \frac{s_1}{\parallel s_1 \parallel}$$

Iz ovoga je jasno da niz $y^{(k)}$ nije nužno konvergentan, ali da je, sa dovoljno velikim k, uvijek blizu nekog svojstvenog vektora svojstvene vrijednosti λ_1.

3.2.1 Algoritam metode potencija

Algoritam 1. nam daje algoritam pomoću kojeg je moguće pronaći po modulu najveću svojstvenu vrijednost zadane matrice, te pripadni svojstveni vektor.
Algoritam 1.
ulaz: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da vrijedi $|\lambda_1| > |\lambda_2|$
izlaz: $s^{(k)}, \lambda^{(k)}$ takvi da vrijedi $s^{(k)} \approx x_1$, $\lambda^{(k)} \approx \lambda_1$

1. odaberite $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ takav da je $\parallel z^{(0)} \parallel_2 = 1$
2. **for** $k = 1, 2, 3\ldots$ **do**
3. $\quad w^{(k)} = Az^{(k-1)}$
4. $\quad z^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
5. $\quad \lambda^k =< z^{(k)}, Az^{(k)} >$
6. **if** $\|Az^{(x)} - \lambda^{(k)}z^k\|/\|\lambda^{(k)}\|<$tol **break**

7. **end for**

Napomenimo kako u gornjem algoritmu vektor $w^{(k)}$ računamo samo jednom i to u koraku (3), dok ćemo u koracima (5) i (6) iskoristi takav izračunat vektor.

Sljedeći teorem, prema [2], nam govori o brzini konvergencije metode potencija.

Teorem 5. *Neka je* $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ *i* $<z^{(o)}, x_1> \neq 0$. *Tada postoji niz* $(\sigma^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gdje je* $\sigma^k \in \{-1, +1\}$ *za sve* $k \in \mathbb{N}$ *tako da nizovi* $(z^{(k)})$ *i* $(\lambda^{(k)})$ *dobiveni algoritmom metode potencija zadovoljavaju:*

$$\| z^{(k)} - \sigma^{(k)} x_1 \|_2 = \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^2\Big) \tag{4}$$

i

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{2k}\Big) \tag{5}$$

Dokaz.

- Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ortonormalan sustav svojstvenih vektora sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i
$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$
Budući da smo pretpostavili da je $\alpha_1 = \langle z^{(0)}, x_1\rangle \neq 0$, imamo
$$A^k z^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda^k x_i = \alpha_1 \lambda_1^k \Big(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^k x_i\Big),$$
pa iz Pitagorinog teorema slijedi
$$\| A^k z^{(0)} \|_2^2 = |\alpha_1 \lambda_1^k|^2 \left(1 + \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\Big)^2 \Big|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big|^{2k}\right) \leq |\alpha_1 \lambda_1^k|^2 \left(1 + \Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{2k} \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\Big)^{2k}\right).$$
Ako iskoristimo Taylorovu aproksimaciju $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, možemo zaključiti
$$\| A^k z^{(0)} \|_2 = |\alpha_1 \lambda_1^k| \left(1 + \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{2k}\Big)\right).$$
Definirajmo $o^{(k)} = \mathrm{sign}(\alpha_1 \lambda_1^k)$. Tada je
$$\left\|\frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} - o^{(k)} x_1\right\|_2^2 = \left\|\frac{A^k z^{(0)}}{\alpha_1 \lambda_1^k} - x_1\right\|_2^2 = \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\Big)^2 \Big|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big|^{2k} = \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{2k}\Big)$$
i stoga je
$$\begin{aligned}\|z^{(k)} - o^{(k)} x_1\|_2 &\leq \left\|\frac{A^k z^{(0)}}{\|A^k z^{(0)}\|_2} - \frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|}\right\|_2 + \left\|\frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} - o^{(k)} x_1\right\|_2 \\ &\leq \left\|\frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|}\right\| \cdot \left\|\frac{1}{1 + \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{2k}\Big)} - 1\right\|_2 + \left\|\frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} - o^{(k)} x_1\right\|_2 \\ &= \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{2k}\Big) + \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{k}\Big) = \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big|^{k}\Big)\end{aligned}$$
što dokazuje tvrdnju (4).

- Iz Teorema 4. znamo da je $r_A(o^{(k)}x_1) = \lambda_1$ i $\bigtriangledown r_A(o^{(k)}x_1) = 0$. Taylorov razvoj r_A oko $o^{(k)}x_1$ daje nam

$$\begin{aligned} r_A(z) &= r_A(o^{(k)}x_1) + \langle \bigtriangledown r_A(o^{(k)}x_1), z - o^{(k)}x_1\rangle + \Theta(\|z - o^{(k)}x_1\|_2^2) \\ &= \lambda_1 + 0 + \Theta(\|z - o^{(k)}x_1\|_2^2). \end{aligned}$$

  Koristeći tvrdnju (1) slijedi

$$|\lambda^k - \lambda_1| = |r_A(z^{(k)}) - \lambda_1| = \Theta(\|z^{(k)} - o^{(k)}x_1\|_2^2) = \Theta\Big(\Big|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^{2k}\Big)$$

  čime smo dokazali tvrdnju (5).

$\square$

Napomena 1.

1. Brzina konvergencije metode potencija određena je kvocijentom $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$.
2. U konkretnoj primjeni metoda se zaustavlja kada je rezultat "dovoljno blizu" egzaktnom rješenju, odnosno kada je zadovoljen zaustavni kriterij. Neka je ϵ pozitivan realan broj koji nam predstavlja toleranciju. Tada zaustavni kriterij može biti $\frac{|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}|}{|\lambda^{(k)}|} < \epsilon$, gdje su $\lambda^i, \quad i = k, k-1$ izračunate aproksimacije svojstvene vrijednosti. Također, kriterij zaustavljanja može biti i $\frac{\|Ax^{(k)} - \lambda^k x^{(k)}\|}{\|\lambda^{(k)}\|} < \epsilon$, gdje je $(\lambda^{(k)}, x^{(k)})$ aproksimirani svojstveni par.
3. Četvrti korak u algoritmu je posebno bitan jer vektori $Az^{(k-1)}$ mogu postati jako veliki ili jako mali tako da ih se ne može reprezentirati u zadanom formatu.

3.2.2 Implementacija metode potencija u programskom jeziku Matlab

U nastavku dana nam je implementacija metode potencija u matlab-u pomoću funkcije *MetodaPotencija.*

```
function [sv_vr,sv_vkt]=MetodaPotencija(A,z,tol,max_it)
for i=1:max_it
    v=z/norm(z,2);
    z=A*v;
    lambda=v'*z;
    if norm(z-lambda*v,2)/norm(lambda,2)<tol
        sv_vr=lambda;
        sv_vkt=z;
        break
    end

    if i==max_it
            disp('Upozorenje! Dosegnuli smo maksimalan broj koraka.')
            sv_vr='Neodredjena';
            sv_vkt='Neodredjen';
        end
    end

end
```

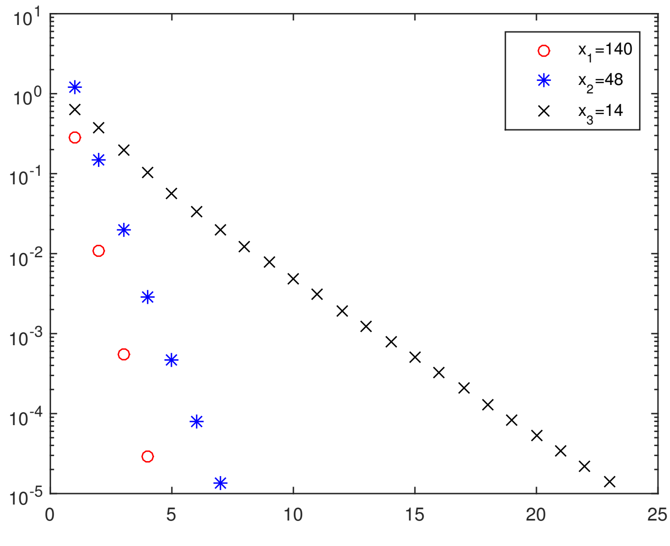
Možemo primjetiti kako *MetodaPotencija* prima četiri argumenta. Argument A nam predstavlja matricu čiju po modulu najveću svojstvenu vrijednost i pripadni svojstveni vektor želimo izračunati, dok nam argument z predstavlja početnu aproksimaciju svojstvenog vektora. Važno je napomenuti da za početnu aproksimaciju uvijek biramo normirani vektor. Nadalje, argument *tol* nam predstavlja toleranciju pogreške, dok nam četvrti argument predstavlja maksimalan broj iteracija do završetka algoritma. Ako metoda nije uspjela izračunati traženu aproksimaciju svojstvenog para za manje od maksimalnog broja iteracija, tada nam funkcija *MetodaPotencija* kao rezultat vraća string "Upozorenje! Dosegnuli smo maksimalan broj koraka". U suprotnom kao rješenje dobivamo traženi svojstveni par.

U sljedećem primjeru pokazat ćemo ovisnost konvergencije metode potencija o kvocijentu $|\lambda_2|/|\lambda_1|$.

Primjer 3. U ovom primjeru napravit ćemo funkciju koja nam vraća unitarno dijagonalizabilnu matricu $D \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ čije su svojstvene vrijednosti $1, 2, \ldots, 9, x$, gdje je x proizvoljni parametar takav da je $x \leq 9$. Implementacija gore navedene funkcije dana je sljedećim Matlab kodom:

```
function [D]=MatricaD(n,x)
D=zeros(n,n);
for i=1:n-1
    D(i,i)=i;
end
D(10,10)=x;
[Q,R]=qr(rand(n,n))
D=Q*D*Q';
end
```

Pomoću takve funkcije generirat ćemo matricu D, u ovisnosti o parametru x, na tri različita načina takva da je $x = 140$, $x = 48$ i $x = 14$. Primjenjujući metodu potencija na matricu D dobit ćemo različite konvergencije koje su grafički prikazane na



Slika 1: Konvergencija metode potencija

Sada možemo zaključiti kako se najmanja brzine konvergencije postigla kada je $x = 14$ jer je tada kvocijent $|\lambda_2|/|\lambda_1|$, odnosno $9/14$, bio najveći. Dok se najveća brzina konvergencije postigla u slučaju kada je $x = 140$ jer je tada pripadni kvocijent $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ bio najmanji. Time smo potvrdili tvrdnju iskazanu u Teoremu 5..

3.3 Inverzna metoda potencija

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dijagonalizabilna matrica, te neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice takve da vrijedi:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \ldots |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati svojstveni par (λ_n, x_n), dakle svojstvenu vrijednost s najmanjim modulom i odgovarajući svojstveni vektor.
Svojstvene vrijednosti matrice A^{-1} su $\frac{1}{\lambda_i}$ za $i = 1, \ldots, n$, te vrijedi:

$$|\frac{1}{\lambda_n}| > |\frac{1}{\lambda_{n-1}}| \geq |\frac{1}{\lambda_{n-2}}| \cdots \geq |\frac{1}{\lambda_1}|.$$

Kako bismo izračunali traženi svojstveni par, iskoristit ćemo ekvivalentnost sljedećih relacija:

$$As_i = \lambda_i s_i$$

i

$$A^{-1}s_i = \Big(\frac{1}{\lambda_i}\Big)s_i.$$

Dakle, budući da je $\frac{1}{\lambda_n}$ po modulu najveća svojstvena vrijednost matrice A^{-1} primjenom metode potencija na nju možemo aproksimirati svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\frac{1}{\lambda_n}$, odnosno traženi svojstveni par (λ_n, x_n) matrice A.
Iterativnu metodu koja koristi ovakav pristup traženju svojstvenog para zovemo **inverzna metoda potencija**. Brzina konvergencije ove metode bit će određena kvocijentom $\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}$, dok će aproksimacija vektora u svakom koraku biti rješenje linearnog sustava $Ax^{(k+1)} = y^{(k)}$.

3.3.1 LU faktorizacija

LU faktorizacija matrice A je zapis matrice kao umnožak $A = LU$, gdje je U regularna gornjetrokutasta matrica, a L donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali.
Pomoću LU faktorizacije možemo rješavati matrične jednadžbe oblika $Ax = z$ na način da pronađemo LU faktorizaciju matrice $A = LU$, te pomoću supstitucija unaprijed riješimo $Ly = z$, a pomoću supstitucija unazad sustav $Ux = y$. Implementacija takvog način rješavanja, prema [2], u programskom jeziku Matlab dana je u sljedećem primjeru:

Primjer 4. 1. Algoritam rješavanja $Ax = z$ pomoću LU faktorizacije

```
function [x]=LUrjesavanje(A,z)
[L,U]=lu(A);
y=SupstitucijeUnaprijed(L,z);
x=PovratneSupstitucije(U,y);
end
```

2. Implementacija LU faktorizacije matrice A u Matlabu

```
function [L,U]=LUfaktorizacija(A)
n=size(A,1);
U=A;
L=eye(n,n);
for k=1:n-1
    for j=k+1:n
        L(j,k)=U(j,k)/U(k,k);
        for m=k:n
            U(j,m)=U(j,m)-L(j,k)*U(k,m);
        end
    end
end
end
```

3. Implementacija supstitucija unaprijed

```
function [x]=SupstitucijeUnaprijed(L,b)
n=size(L,1);
x=zeros(n,1);
x(1)=b(1)/L(1,1);
for j=2:n
    suma=0;
    for k=1:j-1
        suma=suma+L(j,k)*x(k);
    end
    x(j)=(b(j)-suma)/L(j,j);
end
end
```

4. Implementacija supstitucija unazad u Matlabu

```
function [x]=PovratneSupstitucije(U,b)
n=size(U,1);
x=zeros(n,1);
x(n)=b(n)/U(n,n);
for j=n-1:-1:1
    suma=0;
    for k=j+1:n
        suma=suma+U(j,k)*x(k);
    end
    x(j)=(b(j)-suma)/U(j,j);
end
end
```

Upravo ćemo ovakav način rješavanja linearnog sustava $Ax = b$ koristiti pri implementaciji inverzne metode potencija u Matlabu-u jer će nam on smanjiti broj računskih operacija pri izvršavanju algoritma i tako ga učiniti bržim, te učinkovitijim.

3.3.2 Algoritam metode inverznih iteracija

Implementacija algoritma metode inverznih iteracija pomoću Matlab funkcije *InverznaMetodaPotencija* dana je sljedećim kodom:

```
function [sv_vr,sv_vkt]=InverznaMetodaPotencija(A,z,tol,max_it)
n=size(A,1);
I=eye(n,n);
[L,U]=LUfaktorizacija(A);
for i=1:max_it
    v=z/norm(z,2);
    y=SupstitucijeUnaprijed(L,v);
    z=PovratneSupstitucije(U,y);
    lambda=v'*z;

    if norm(z-lambda*v,2)< tol
        sv_vr=1/lambda;
        sv_vkt=z;
        break
    end
    if i==max_it
        disp('Upozorenje! Dosegnuli smo maksimalan broj koraka.')
        sv_vr='Neodredjena';
        sv_vkt='Neodredjen';
    end
end
end
```

Možemo primjetiti kako su ulazni argumenti gore navedene funkcije jednaki kao i argumenti funkcije *MetodaPotencija*. No, zbog različite implementacije ova funkcija nam kao rezultat vraća svojstvenu vrijednost matrice A koja je najmanja po modulu, te pripadni svojstveni vektor.

Primjer 5. U programskom jeziku Matlab generirat ćemo matricu $B \in \mathbb{R}^{20\times 20}$ na način prikazan u sljedećem kodu:

```
n=20;
A=rand(n,n)+diag(1:20);
B=A*A';

tol=1e-5;
max_it=1000;
x=rand(n,1);
x=x/norm(x,2);
format long
```

```
[lambda_n,v_n]=InverznaMetodaPotencija(B,x,tol,max_it)
[lamba_1,v_1]=MetodaPotencija(B,x,tol,max_it)
```

Budući da smo matricu B dobili kao produkt $A * A^T$, gdje je A slučajno generirana matrica reda 20, možemo primjetiti kako je B simetrična. Primjenom ranije spomenute funkcije *InverznaMetodaPotencija* na matricu B kao rješenje dobivamo svojstvenu vrijednost $\lambda_n = 1.075485930015296$, dok primjenom funkcije *MetodaPotencija* dobivamo $\lambda_1 = 548.1709061031766$. Dodatnom provjerom uz pomoć Matlab funkcije eig kao najmanju svojstvenu vrijednost dobili smo 1.0754859299987, dok smo za najveću svojstvenu vrijednost dobili 548.1709062210293, čime smo se uvjerili u ispravnost rješenja koje su nam dale funkcije *MetodaPotencija* i *InverznaMetodaPotencija*..

Iz prethodnog primjera možemo zaključiti kako primjenom metode potencije i metode inverznih iteracijena određenu matricu možemo pronaći samo njezine dvije svojstvene vrijednosti, onu s najvećom apsolutnom vrijednosti i onu s najmanjom, dok nam ostale svojstvene vrijednosti ostaju nepoznate. Upravo nam je zbog toga bitna nova metoda koju ćemo obraditi u sljedećem poglavlju.

3.4 Inverzna metoda potencija s pomakom("shiftom")

Kako bismo usavršili inverznu metodu potencija, uz pretpostavku da je (λ_i, s_i) svojstveni par matrice, pogledat ćemo sljedeće transformacije matrice:

$$(A - \sigma I)s_i = (\lambda_i - \sigma)s_i$$

i

$$(A - \sigma I)^{-1} = \frac{1}{\lambda_i - \sigma} s_i, \sigma \notin \Lambda(A)$$

Primjenom inverzne metode potencija na $A - \sigma I$ možemo izračunati svojstvenu vrijednost koja je po vrijednosti najbliža σ. Brzina konvergencije takve metode zadana je s:

$$\gamma(\sigma) = \left|\frac{\lambda_n - \sigma}{\lambda_{n-1} - \sigma}\right|$$

Ako je σ puno bliže λ_n nego bilo kojoj drugoj svojstvenoj vrijednosti, onda je $\gamma(\sigma) \ll 1$ i imamo brzu konvergenciju. Možemo pogledati još više: ako je σ puno bliže λ_j nego bilo kojoj drugoj svojstvenoj vrijednosti, onda je $\lambda_j - \sigma$ najmanja po modulu svojstvena vrijednost, pa će inverzne iteracije konvergirati k s_j, a pripadni Rayleighev kvocijent k λ_j.
Na takav način definiranu iterativnu metodu nazivamo **inverzna metoda potencija s pomakom**.

3.4.1 Algoritam inverzne metode potencija s pomakom

Algoritam 3.
Ulaz: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična s $\lambda \in \mathbb{R}$
Izlaz: $z^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^k \in \mathbb{R}$ gdje je $z^{(k)} \approx x_j$ i $\lambda^{(k)} \approx \lambda_j$, gdje je λ_j svojstvena vrijednost najbliža λ

1. odaberite $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\| z^0 \|_2 = 1$
2. **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
3. $v = \frac{z^{k-1}}{\|z^{k-1}\|_2}$
4. riješi $(A - \lambda I)z^k = v$
5. $\mu^{(k)} =< v^*, z^k >$
6. **if** $\| z^{(k)} - \mu^k v \|_2 \leq$ tolerancija, **stop**
7. **end for**
8. $\lambda^{(k)} = \lambda + \frac{1}{\mu^k}$

Primjetimo kako u koraku (4) gornjeg algoritma vektor $z^{(k)}$ dobivamo kao rješenje sustava $(A - \lambda I)z^{(k)} = v$, te takav izračunat vektor koristimo u koracima (5) i (6). U koraku (8) pomaku λ moramo pridodati recipročnu vrijednost k-te aproksimaciju svojstvene vrijednosti jer smo u gornjem algoritmu metodu potencija primjenili na matricu $(A - \lambda I)^{-1}$, a želimo izračunati svojstvenu vrijednost matrice A koja je najbliža parametru λ.

3.4.2 Implementacija inverzne metode potencija s pomakom u programskom jeziku Matlab

Primjer 6. Implementacija inverzne metode potencija s pomakom uz pomoć Matlab funkcije *MetodaPotencijaSPomakom* dana je sljedećim kodom:

```
function [sv_vr, sv_vkt]=MetodaPotencijaSPomakom(A, Mi, z, tol, max_it)
n=size(A,1);
I=eye(n,n);
[L,U]=LUfaktorizacija(A-Mi*I);
for i=1:max_it
    v=z/norm(z,2);
    y=SupstitucijeUnaprijed(L,v);
    z=PovratneSupstitucije(U,y);
    lambda=v'*z;

    if norm(z-lambda*v,2)< tol
        sv_vr=Mi+1/lambda;
        sv_vkt=z;
        break
    end
    if i==max_it
        disp('Upozorenje! Dostignut je maksimalan broj iteracija.')
        sv_vr='Neodredjena';
        sv_vkt='Neodredjena';
    end
end
end
```

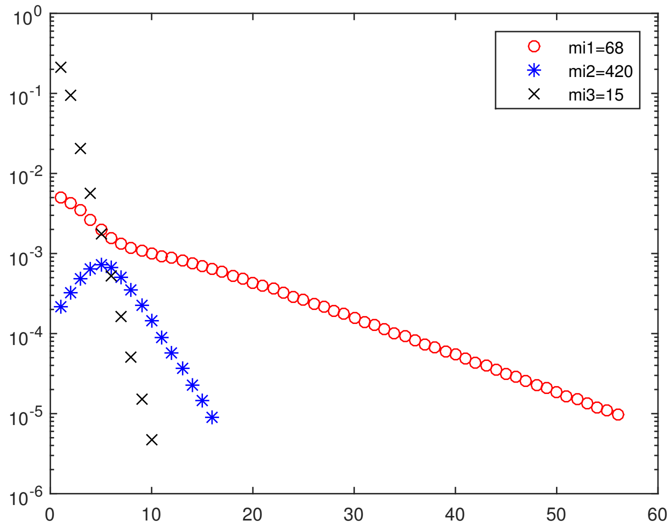
Gore navedenom funkcijom ćemo, u ovisnosti o ulaznom parametru μ, pronaći svojstvenu vrijednost matrice A najbližu parametru μ, te pripadni svojstveni vektor. Možemo primjetiti kako su ostali ulazni parametri jednaki kao i ulazni argumenti funkcija *MetodaPotencija* i *MetodaInverznihIteracija*. Iz gore navedenog koda također možemo zaključiti kako nam je inverzna metoda potencija specijalan slučaj inverzne metode potencija s pomakom kada je $\mu = 0$.

Primjer 7. Neka je dana simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ takva da je

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & 9 & 14 & 17 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 14 & 16 & 8 & 13 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 6 & 67 & 24 & 15 & 4 \\ 9 & 14 & 6 & 2 & 8 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 16 & 67 & 8 & 65 & 53 & 54 & 12 \\ 17 & 8 & 24 & 9 & 53 & 15 & 5 & 7 \\ 2 & 13 & 15 & 3 & 54 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 14 & 12 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primjenom funkcije *MetodaPotencijaSPomakom* izračunat ćemo svojstvenu vrijednost matrice A koja je najbliža ulaznom parametru μ. U ovom primjeru ćemo pokazati kako za različite ulazne parametre μ kao rješenje dobivamo različite svojstvene vrijednosti. Neka je prvi pomak $\mu_1 = 68$, funkcija *MetodaPotencijaSPomakom* će nam u tom slučaju izračunati svojstvenu vrijednost jednaku 22.406520340299139. Kada je pomak $\mu_2 = 420$ izračunata svojstvena vrijednost je 162.821506710504, dok za pomak $\mu_3 = 15$ ona iznosi 17.272288593983586. Primjenom Matlab funkcije eig na matricu A dobivamo sljedeće svojstvene vrijednosti: -52.0246907761715, -23.3925665234179, -14.2164049538006, -4.8184630277322, -4.0521029119706, 17.2722885936083, 22.4066099886477 i 162.825329610370. Iz čega možemo zaključiti kako nam je *MetodaPotencijaSPomakom* za dane ulazne parametre vratila ispravne svojstvene vrijednosti.

Na Slika2. možemo vidjeti različite konvergencije inverzne metode potencija s pomakom u ovisnosti o parametru μ.



mi1=68
mi2=420
mi3=15
10^0
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
0
10
20
30
40
50
60

Slika 2

Literatura

[1] Z. Drmač, *Numerička Matematika*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2010.

[2] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2010.

[3] James W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.

[4] R. Scitovski,D. Jukić, *Matematika 1* Osijek, 2010.