Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mihaela Hrnjkaš

SVD dekompozicija i primjene

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mihaela Hrnjkaš

SVD dekompozicija i primjene

Završni rad

Mentor:

izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2018.

Sadržaj

Sažetak

U prvome dijelu ovoga rada definirat ćemo pojam dekompozicije na singularne vrijednosti te iskazati i dokazati teorem koji govori o egzistenciji ove dekompozicije. Spomenut ćemo neka od najvažnijih svojstava te uočiti poveznicu između singularnih i svojstvenih vrijednosti. U drugome dijelu rada dotaknut ćemo se primjena dekompozicije na singularne vrijednosti. Ukratko ćemo se upoznati s linearnim problemom najmanjih kvadrata te opisati primjenu SVD dekompozicije. Spomenut ćemo kompresiju slike te na primjeru ilustrirati primjenu dekompozicije na singularne vrijednosti u kompresiji koristeći se svojstvom aproksimacije matricom nižeg ranga.

Ključne riječi

dekompozicija na singularne vrijednosti, linearni problem najmanjih kvadrata, kompresija slike, aproksimacija matricom nižeg ranga

Abstract

In the first part of this paper, we will define the concept of singular value decomposition and prove the theorem that states the existence of singular value decomposition. Some of the most important properties will also be mentioned and connection between eigenvalues and singular values will be noticed. In the second part of the paper, attention will be given to applications of singular value decomposition. A brief introduction to linear least square problem will be followed by application of singular value decomposition to this problem. Also, we will touch upon an image compression and illustrate the usage of SVD decomposition in compression using the property of a low-rank matrix approximation.

Keywords

singular value deccomposition, linear least square problem, image compression, low-rank matrix approximation

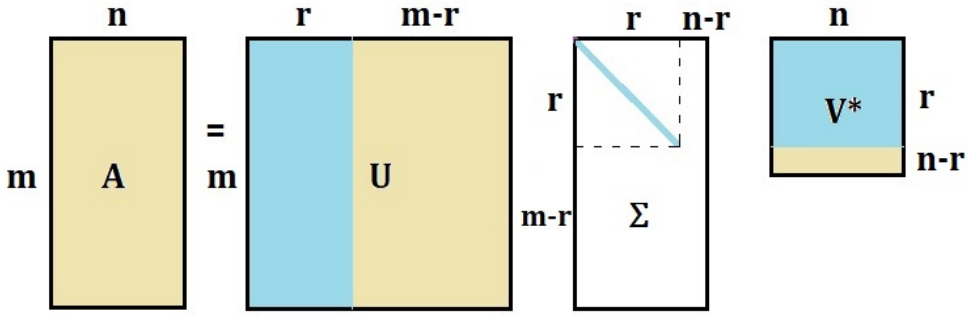
1 Uvod

Jedna od najplodonosnijih ideja u povijesti matrične teorije jest upravo kanonska forma matrice, odnosno dekompozicija matrice. U novije vrijeme, dekompozicija je postala osnovom numeričke linearne algebre, gdje služi kao alat pomoću kojega se mogu riješiti mnogi matematički problemi. Jedna od izričito korisnih dekompozicija jest upravo dekompozicija na singularne vrijednosti.

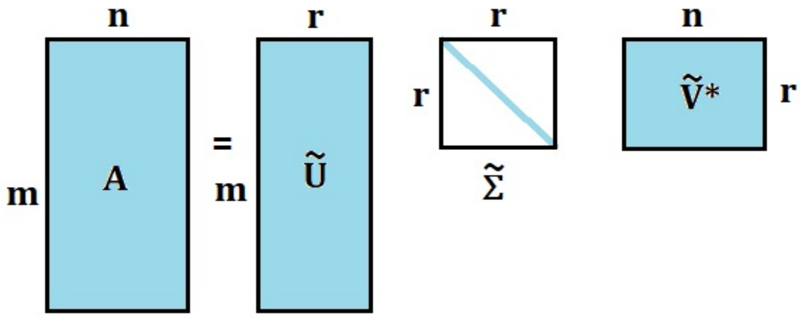
Dekompozicija na singularne vrijednosti matrice (*eng. singular value decomposition*, SVD) A jest faktorizacija prikazana produktom triju matrica $U\Sigma V^*$(Slika 1 (a)), gdje su U i V unitarne matrice, a Σ dijagonalna matrica na čijoj se dijagonali nalaze singularne vrijednosti. Budući su svi elementi u matrici Σ, osim r singularnih vrijednosti na dijagonali, jednaki 0, stupci $r+1,\ldots,m$ matrice U te retci $r+1,\ldots,n$ matrice V^* ne doprinose umnošku $U\Sigma V^*$. Uklonimo li, dakle, preostalih $m-r$ stupaca matrice U, $m-r$ nul-redaka matrice Σ te $n-r$ redaka matrice V^*, dobit ćemo reduciranu SVD dekompoziciju matrice A (Slika 1 (b)).

Za razliku od nekih drugih dekompozicija, dekompozicija na singularne vrijednosti definirana je za sve matrice, i kvadratne i pravokutne. Njezina važnost je u tome što otkriva strukturu matrice. Činjenica da se u SVD dekompoziciji pojavljuju unitarne matrice, čini ovu dekompoziciju izvrsnim sredstvom za diskutiranje geometrije unitarnih prostora. Pomoću nje možemo lako odrediti rang matrice, njezinu jezgru i sliku, uvjetovanost te izračunati generalizirani inverz.

Još jedna dobra karakteristika ove dekompozicije je i stabilnost; male preturbacije u matrici A dovode do malih preturbacija u matrici Σ i obrnuto. Nadalje, dekompozicija na singularne vrijednosti omogućava nam aproksimaciju matrice matricom nižeg ranga. Ovo svojstvo će nam koristiti u primjenama SVD dekompozicije, o čemu će više riječi biti u nastavku rada.



(a) puna



(b) reducirana

Slika 1: Ilustracija *SVD dekompozicije*

2 Dekompozicija na singularne vrijednosti

2.1 Definicija i osnovni teorem

Kao što je već spomenuto, dekompozicija na singularne vrijednosti jedna je od najčešće primjenjivanih dekompozicija u numeričkoj linearnoj algebri. Kako bi se upoznali s ovim pojmom, najprije ćemo uvesti njezinu definiciju.

Definicija 1. (Prema [2]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ za $m, n \in \mathbb{N}$. Rastav matrice

$$A = U\Sigma V^*$$

nazivamo **dekompozicija na singularne vrijednosti** matrice A, ako su $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarne, a $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dijagonalna

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{min(m,n)}),$$

pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{min(m,n)} \geq 0$, a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{min(m,n)}$ nazivamo singularnim vrijednostima matrice A. Stupce matrice U nazivamo lijevi, a stupce matrice V nazivamo desni singularni vektori matrice A.

Jedna od zanimljivih karakteristika dekompozicije na svojstvene vrijednosti jest ta da ona postoji za svaku matricu. Sljedeći teorem, koji se može pronaći i u [2], nam upravo govori o egzistenciji ove dekompozicije.

Teorem 1 (SVD). *Ako je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, tada postoje unitarne matrice $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je*

$$A = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{min(m,n)}),$$

pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{min(m,n)} \geq 0$.

Dokaz. Jedinična je sfera u $\mathbb{C}^n$ ograničen i zatvoren skup, što znači da je kompaktan pa svaka neprekidna funkcija na njemu dostiže minimum i maksimum. Funkcija $f(x) = \|Ax\|_2$ je neprekidna pa postoji jedinični vektor $v \in \mathbb{C}^n$ takav da je

$$\|Av\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1,\ x \in \mathbb{C}^m\}. \tag{1}$$

Ako je $\|Av\|_2 = 0$, onda je $A = 0$ i faktorizacija u iskazu teorema je trivijalna uz $\Sigma = 0$ i s proizvoljnim unitarnim matricama U i V reda m, odnosno n.
Ako je $\|Av\|_2 \geq 0$, stavimo $\sigma_1 = \|Av\|_2$ i formiramo jedinični vektor

$$u_1 = \frac{Av}{\sigma_1} \in \mathbb{C}^m.$$

Nadopunom u_1 s $m-1$ vektora do baze u $\mathbb{C}^m$ i onda primjenom npr. Gram-Schmidtov postupka ortogonalizacije, dobijemo ortonormiranu bazu $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Time smo dobili unitarnu matricu $U_1 = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$. Slično, za $v_1 = v$ postoji $n-1$ ortonormiranih vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$, takvih da je matrica $V_1 = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ unitarna. Tada je

$$\begin{aligned}
A_1 = U_1^* A V_1 &= \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{bmatrix} [Av_1 \ \ Av_2 \ \ \ldots \ \ Av_n] = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{bmatrix} [\sigma_1 u_1 \ \ Av_2 \ \ \ldots \ \ Av_n] \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1 & u_1^* A v_2 & \ldots & u_1^* A v_n \\ 0 & u_2^* A v_2 & \ldots & u_2^* A v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & u_m^* A v_2 & \ldots & u_m^* A v_n \end{bmatrix} \qquad (2) \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

gdje je $w \in \mathbb{C}^{m-1}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(n-1)}$. Za jedinični vektor koji odgovara prvom retku matrice iz jednakosti (2),

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + w^* w}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix},$$

zbog unitarne invarijantnosti euklidske norme, vrijedi

$$\begin{aligned}
\|A(V_1y)\|_2^2 &= \|(U_1A_1V_1^*)V_1y\|_2^2 = \|A_1y\|_2^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + w^*w}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + w^*w}} \right)^2 \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2 + w^*w} \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + w^*w \\ A_2w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \frac{(\sigma_1^2 + w^*w)^2 + \|A_2w\|_2^2}{\sigma_1^2 + w^*w} \geq \sigma_1^2 + w^*w.
\end{aligned}$$

Ako je $w \neq 0$, onda je gornji izraz strogo veći od σ_1^2. Iz (1) i $\sigma_1 = \|Av\|_2$ znamo da je σ_1 maksimalan pa dolazi do kontradikcije te zaključujemo da je $w = 0$.

Stoga je

$$A_1 = U_1^* A V_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Ponavljanjem istog postupka za matricu $A_2 \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(n-1)}$, dobivamo unitarne matrice U i V, kao produkt unitarnih matrica dobivenih nakon svakog koraka. Ako je $m \geq n$, taj postupak vodi do dijagonalne matrice Σ.
Ako je $m \leq n$, primijenimo postupak opisan u dokazu teorema na matricu A^*. Nakon dobivene dekompozicije $A^* = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$ i kompleksnog transponiranja obje matrice u toj jednakosti, dobijemo

$$A = \tilde{V}\tilde{\Sigma}\tilde{U}^*,$$

što je tražena dekompozcija na singularne vrijednosti od A, pri čemu moramo još preimenovati $\tilde{V}$ u U, $\tilde{U}$ u V i $\tilde{\Sigma}$ u Σ. □

Primjer 1. *U nastavku je dana singularna dekompozicija* 3×2 *matrice.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2.2 Svojstva SVD dekompozicije

Dekompozicija na singularne vrijednosti ima velik broj važnih algebarskih i geometrijskih svojstava. Nek od tih najvažnijih svojstava ćemo, po uzoru na [1, str.111.], navesti u sljedećim teoremima.

Teorem 2. *Ako je A hermitska matrica, tj. $A = A^*$, tada su njezine singularne vrijednosti jednake: $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A.*

Ukoliko primijenimo prethodni teorem na konkretnom primjeru, vidjet ćemo da svojstvo uistinu vrijedi.

Primjer 2. *Zadana je hermitska matrica $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice A tražimo kao nultočke karakterističnog polinoma $k_A(\lambda) = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 61\lambda - 84$. Dakle, svojstvene vrijednosti su: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 3$.
Nadalje, pogledajmo SVD dekompoziciju iste matrice.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Pogledamo li singularne vrijednosti matrice A, vidjet ćemo da su one jednake karakterističnim vrijednostima po apsolutnoj vrijednosti.

Također, može se pokazati da su singularne vrijednosti, σ_i, $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$, matrice A kvadratni korijeni svojstvenih vrijednosti matrica A^*A i AA^*. Za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, obje matrice A^*A i AA^* su hermitske i pozitivno semidefinitne pa su njihove svojstvene vrijednosti nenegativne.

Sljedećim teoremom dokazana je veza svojstvenih vrijednosti matrica A^*A i AA^* i singularnih vrijednosti matrice A.

Teorem 3. *Neka je $A = U\Sigma V^*$ singularna dekompozicija matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ranga r. Onda je*

i) $V^*(A^*A)V = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$;

pa su kvadrati singularnih vrijednosti matrice A svojstvene vrijednosti od A^*A s dodatnih $n - r$ nula svojstvenih vrijednosti. Stupci matrice V su odgovarajući svojstveni vektori.

ii) $U^*(AA^*)U = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r})$;

pa su kvadrati singularnih vrijednosti matrice A svojstvene vrijednosti od AA^* s dodatnih $m-r$ nula svojstvenih vrijednosti. Stupi matrice U su odgovarajući svojstveni vektori.

Dokaz. Ako je $\Sigma = U^*AV$, gdje je $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{min(m,n)})$, onda je $\Sigma^* = V^*A^*U$. Slijedi

$$\Sigma^*\Sigma = V^*A^*\underbrace{UU^*}_{I}AV = V^*A^*AV \in \mathbb{C}^{n\times n}$$
$$\Sigma\Sigma^* = U^*A\underbrace{VV^*}_{I}A^*U = U^*AA^*U \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

□

Primjer 3. *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{3\times 2}$ *i*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći prethodni teorem, izračunat ćemo njezinu SVD dekompoziciju. Pogledajmo, za početak, matricu AA^**. Uvrštavanjem za* $A = U\Sigma V^*$*, dobivamo sljedeću jednakost*

$$AA^* = U\Sigma V^* V\Sigma^* U^* = U\Sigma^2 U^*.$$

Pomnožimo li jednakost zdesna s U*, dobivamo sljedeće*

$$AA^*U = U\Sigma^2. \tag{3}$$

Izraz (3) *je svojstveni problem te su svojstvene vrijednosti matrice* AA^* *kvadrati singularnih vrijednosti matrice* A*. Slijedi račun.*

$$AA^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Svojstvene vrijednosti tražimo rješavanjem jednakosti

$$\det(AA^* - \lambda I) = 0,$$

odnosno jednadžbe

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0.$$

Dakle, $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0$*. Korjenovanjem tih vrijednosti, dobivamo singularne vrijednosti matrice* A *te je*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sljedeći korak je pronalaženje svojstvenih vektora za pripadne svojstvene vrijednosti. Za $\lambda_1 = 3$*, iz*

$$AA^*u_1 = \lambda u_1,$$

dobivamo vektor $u_1 = (1,1,1)^T$*. Analogno, za* $\lambda_2 = 2$ *dobivamo vektor* $u_2 = (1,0,-1)^T$ *te za* $\lambda_3 = 0$ *vektor* $u_3 = (1,-2,1)^T$*. Kako je* U *unitarna matrica, vektore* u_1, u_2, u_3 *(koji čine njezine stupce) moramo ortonormirati. Dobivamo*

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Sličnim postupkom, tražeći svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice A^*A*, dobivamo matricu* V*.*

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Time smo izračunali SVD dekompoziciju matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Napomena 1. Ukoliko imamo matricu većih dimenzija, singularne vrijednosti nećemo računati kao nultočke karakterističnog polinoma, kako je to opisano u Primjeru 3. U tu svrhu se u praksi koriste posebni numerički algoritmi, o čemu se više može pogledati u [1].

U sljedećem teoremu, koji se može naći u [2], iskazana su svojstva SVD dekompozicije koja se odnose na rang, sliku te jezgru matrice A.

Teorem 4. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrica sa dekompozicijom na singularne vrijednosti, $A = U\Sigma V^*$ i singularnim vrijednostima $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r \geq 0 = \ldots = 0$. Tada vrijedi:*

a) rang matrice A iznosi r, tj. $\operatorname{rank}(A) = r$,

b) $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_r)$, odnosno stupci $u_1, \ldots, u_r$ matrice U razapinju sliku[1] od A,

c) $\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$, odnosno stupci $v_{r+1}, \ldots, v_n$ matrice V razapinju jezgru[2] od A.

Dokaz. a) Rang dijagonalne matrice Σ, jednak je broju dijagonalnih elemenata različitih od nule. Budući da su U i V^* regularne matrice, slijedi da $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\Sigma) = r$.

b) Znamo da je $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(Av_1, \ldots, Av_n)$, jer je $v_1, \ldots, v_n$ baza (svaki linearan operator jedinstveno je određen svojim djelovanje na bazi). Stoga je $\operatorname{span}(Av_1, \ldots, Av_r) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Međutim, za $1 \leq i \leq r$ vrijedi

$$Av_i = U\Sigma V^* v_i = U\Sigma e_i = \sigma_i U e_i = \sigma_i u_i \qquad i \qquad \sigma_i \geq 0.$$

Vektori u_i linearno su nezavisni pa potprostor

$$\operatorname{span}(\sigma_1 u_1, \ldots, \sigma_r u_r) = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_r)$$

ima dimenziju r kao i $\mathcal{R}(A)$, što znači da je $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_r)$.

c) Budući da je $Av_i = 0$, za $r + 1 \leq i \leq n$, zaključujemo da je

$$\operatorname{span}(v_{r+1}, \ldots, v_n) \subseteq \mathcal{N}(A).$$

Prema teoremu o rangu i defektu, koji kaže da je $\operatorname{defekt}(A) = n - \operatorname{rang}(A) = n - r$, slijedi da je dimenzija potprostora $\operatorname{span}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ ista kao i dimenzija od $\mathcal{N}(A)$ pa je

$$\operatorname{span}(v_{r+1}, \ldots, v_n) = \mathcal{N}(A).$$

□

[1] Slika operatora A$\in L(V, W)$ je potprostor definiran kao $\mathcal{R}(A) = \{Av : v \in V\} \leq W$.

[2] Jezgra operatora A$\in L(V, W)$ je potprostor definiran kao $\mathcal{N}(A) = \{v : Av = 0\} \leq V$.

Primjer 4. *Tvrdnje prethodnog teorema pokazat ćemo na matrici* (4), *dimenzije* 3×3, *iz Primjera 3. Njezina SVD dekompozicija je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T.$$

Znamo da je rang dijagonalne matrice Σ *jednak broju nenul elemenata na dijagonali. Imamo dvije ne-nul singularne vrijednosti pa je* $\operatorname{rang}(\Sigma) = 2$. *Prema a) dijelu Teorema 4. je tada i* $\operatorname{rang}(A) = 2$.
Iz Teorema 3 imamo $A^*AV = V\Sigma^2$. *Pogledajmo kako matrica* A *djeluje na stupce matrice* V.

$$AV = Av_i = U\Sigma V^*V = U\Sigma = \sigma_i u_i$$

Kako je rang matrice A *jednak 2, slika operatora* A *će sadržavati dva vektora, odnosno prva dva stupca matrice* U. *Dakle,*

$$\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2) = \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})^T, (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^T\}.$$

Znamo da za defekt vrijedi: $\operatorname{defekt}(A) = n - \operatorname{rang}(A)$. *Kako je* $\operatorname{rang}(A) = 2$ *i* $n = 3$, *slijedi da je* $\operatorname{defekt}(A) = 1$ *pa je, prema c) dijelu Teorema 4,*

$$\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}\{v_3\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T\right\}.$$

Teorem 5. *Neka je* A *kvadratna matrica reda* n *i neka je* $A = U\Sigma V^T$ *dekompozicija na singularne vrijednosti od* A *uz* $\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), U = [u_1, \ldots, u_n], V = [v_1, \ldots, v_n]$. *Neka je*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti od H *su* $\pm\sigma_i$, *a pripadni svojstveni vektori su*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_i \\ \pm u_i \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Uvrstimo SVD od A u formulu za H. Onda je

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V\Sigma U^T \\ U\Sigma V^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & U^T \\ V^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri da je matrica

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$$

ortogonalna te da vrijedi

$$Q \begin{bmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} Q^T = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix}.$$

Konačno, zaključujemo da je

$$H = \begin{bmatrix} 0 & V \\ U & 0 \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} 0 & U^T \\ V^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ U & 0 \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 0 & U^T \\ V^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Uvrstimo li Q u gornju jednakost, dobivamo

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V^T & U^T \\ V^T & -U^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \right)^T,$$

što je svojstvena dekompozicija matrice H. □

Primjer 5. *Zadana je matrica $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sa svojom SVD dekompozicijom*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice H su $\sigma_{1,2} = \pm 4$ i $\sigma_{3,4} = \pm 1$. Pripadni svojstveni vektori su stupci matrice $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix}$.

Teorem 6. *Neka je $A = U\Sigma V^*$ dekompozicija na singularne vrijednosti kvadratne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*
$\|A\|_2 = \sigma_1$. Ako je A regularna, onda je $\|A^{-1}\|_2^{-1} = \sigma_n$ i $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$, gdje σ_1 najveća, a σ_n najmanja singularna vrijednost od A.

Dokaz. Zbog unitarne invarijntnosti[3] 2-norme, vrijedi

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \|U^* A V\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sqrt{\rho(\Sigma^*\Sigma)} = \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1, \\ \|A^{-1}\|_2 &= \|V^* A^{-1} U\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(\Sigma^{-*}\Sigma^{-1})} = \sqrt{\sigma_1^{-2}} = \sigma_n^{-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

odakle odmah slijedi i formula za $\kappa_2(A)$. □

U sljedećem primjeru ćemo, primjenom prethodnog teorema, izračunati uvjetovanost matrice u standardnoj 2-normi. Za demonstraciju ćemo se poslužiti pravokutnom matricom dimenzije 3×2.

[3] Ako su U i V unitarne matrice odgovarajućih dimenzija, tada matričnu normu $\|\cdot\|$ za koju vrijedi $\|UAV\| = \|A\|$, nazivamo unitarno invarijantna norma.

Primjer 6. *Radi ilustracije Teorema 6, izračunat ćemo uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{C}^{3\times 2}$ iz Primjera 3.*

$$\|A\|_2 = \sigma_{1,max} = \sqrt{3},$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_{2,min}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Teorem 7. *Neka je S^{n-1} jedinična sfera u $\mathbb{R}^n$: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Neka je $A\cdot S^{n-1}$ slika od S^{n-1} kad se jedinična sfera preslika operatorom A,*

$$A \cdot S^{n-1} = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}.$$

Tada je slika $A\cdot S^{n-1}$ elipsoid sa središtem u ishodištu $\mathbb{R}^m$ i glavnim osima $\sigma_i u_i$, za $i = 1,\ldots,m$.

Dekompozicija na singularne vrijednosti također je i vrlo korisan "alat" u aproksimaciji matrice matricom nižeg ranga. Sljedeći teorem nam je važan jer dokazuje da je moguće pomoću SVD dekompozicije aproksimirati matricu i da je ta aproksimacija nabolja moguća, a greška aproksimacije je dana u matričnoj 2-normi. Jedna od najboljih primjena Teorema 8 jest kompresija slike (poglavlje 3.2).

Teorem 8. *Neka je dana matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i njezina dekompozicija na singularne vrijednosti*

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i u_i v_i^T,$$

gdje su $U = [u_1,\ldots,u_n]$, $V = [v_1,\ldots,v_n]$ i $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{min(m,n)})$. Neka je $r = \operatorname{rang}(A)$. Matricu, koja je po 2-normi najbliža matrici A, definiramo s

$$A_k = U\Sigma_k V^T = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i u_i v_i^T, \tag{6}$$

gdje je $k = \operatorname{rang}(A_k) \le r$ i $\Sigma_k = \operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,0,\ldots,0)$.
Tada je

$$\min_{\operatorname{rang}(B)=k}\|A-B\|_2^2 = \|A-A_k\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2.$$

Dokaz. (Prema [1]) Pokazat ćemo da vrijede dvije tvrdnje. Prva je da vrijedi $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.
S obzirom da je

$$U^T A_k V = \operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,0,\ldots,0),$$

slijedi da je $rang(A_k) = k$. Vrijedi

$$\|A - A_k\|_2 = \left\|\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i u_i v_i^T\right\|_2 = \left\|U\begin{bmatrix}0 & \sigma_{k+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r\end{bmatrix}V^T\right\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Preostaje pokazati kako ne postoji, od matrice ranga k, bliža matrica matrici A. Neka je matrica $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ proizvoljna matrica ranga k. Možemo naći ortonormirane vektore $x_1, \dots, x_{n-k}$ takve da je

$$\mathcal{N}(B) = \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\}, \ \ \dim(\mathcal{N}(B)) = n - k.$$

Prostor razapet s $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ ima dimenziju jednaku k+1. S obzirom da je suma dimenzija ovih potprostora $(r - k) + (k + 1) \geq r$, vrijedi

$$span\{x_1, \dots, x_{n-k}\} \bigcap span\{v_1, \dots, \sigma_{k+1}\} \neq \{0\}.$$

Neka je h jedinični vektor koji se nalazi u njihovom presjeku. Zbog $Bh = 0$ i $Ah = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(v_i^* h)u_i$ slijedi

$$\|A - B\|_2^2 \geq \|(A - B)h\|_2^2 = \|Ah\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2(v_i^* h)^2 \geq \sigma_{k+1}^2(v_{k+1}^* h)^2 \geq \sigma_{k+1}^2 = \|A - A_k\|_2^2.$$

Prva nejednakost slijedi iz definicije inducirane norme $\|\cdot\|$ na $\mathbb{C}^{n\times n}$ (vidi [2, str.9.]). Drugu nejednakost aproksimiramo prvo sa zadnjim članom sume, a zatim treća nejednakost slijedi zbog $0 \leq (v_i^* h)^2 \leq 1$ te $\|h\|_2^2 = \|V^* h\|_2^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (v_i^* h)^2 \leq 1$.
Ovime je pokazano da je A_k najbolja aproksimacija nižeg ranga za matricu A. $\square$

Sljedećim primjerom ćemo ilustrirati tvrdnju prethodnog teorema.

Primjer 7. *Zadane su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 3.5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3.5 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

Iz SVD dekompozicije matrice A, raspisane u Primjeru 2., vidimo da su singularne vrijednosti $\sigma_1(A) = 7$, $\sigma_2(A) = 4$, $\sigma_3(A) = 3$ pa je $rang(A) = 3$. SVD dekompozicija matrice B je

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Singularne vrijednosti su $\sigma_1(B) = 7$, $\sigma_2(B) = 4$ pa je $rang(B) = 2$.
Spektralnu normu matrice $A - B$ dobijemo preko njezine SVD dekompozicije

$$A - B = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\|A - B\|_2 = 3 = \sigma_3(A)$.
Vidimo da je udaljenost matrica A i B u 2-normi jednaka najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice A. Ujedno, matrica B je najbolja aproksimacija matrice A.

Teorem 9. *Ako je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, onda*

$$\|A\|_2 = \sigma_1, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2},$$

gdje je $p = \min\{m, n\}$.

Dokaz. Obje tvrdnje slijede iz činjenice da su 2-norma i Frobeniusova norma unitarno invarijantne. Tvrdnju za 2-normu pokazali smo u dokazu Teorema 6, jednakost (5). Za Frobeniusovu normu vrijedi

$$\|A\|_F = \|U^*AV\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(\Sigma^*\Sigma)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2}.$$

□

Primjer 8. *Primijenimo prethodni teorem na matricu $A \in \mathbb{C}^{3\times 2}$,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$\|A\|_2 = \sigma_{max} = 3,$

$\|A\|_F = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$

3 Primjene SVD-dekompozicije

3.1 Linearni problem najmanjih kvadrata

Neka nam je zadan skup mjernih podataka $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n$. Želimo odrediti pravac koji najbolje aproksimira zadane podatke. Ukoliko pretpostavimo da postoji jedinstveni pravac koji prolazi kroz zadane točke, onda taj pravac mora zadovoljavati sustav

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b &= y_n. \end{aligned}$$

Ukoliko gornji sustav zapišemo u matričnom obliku, imamo

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Odnosno, imamo sustav Ax=b, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Kada bi gornji sustav imao rješenje, vrijedilo bi $Ax - b = 0$, tj. $\|Ax - b\|_2 = 0$. Kako to nije slučaj, cilj nam je pronaći vektor x koji će minimizirati rezidual

$$r = Ax - b,$$

odnosno npr. normu $\|Ax - b\|_2$. Minimizacija norme $\|Ax - b\|_2$ ekvivalentna je minimizaciji kvadrata iste norme, tj. minimiziramo

$$\|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2. \tag{7}$$

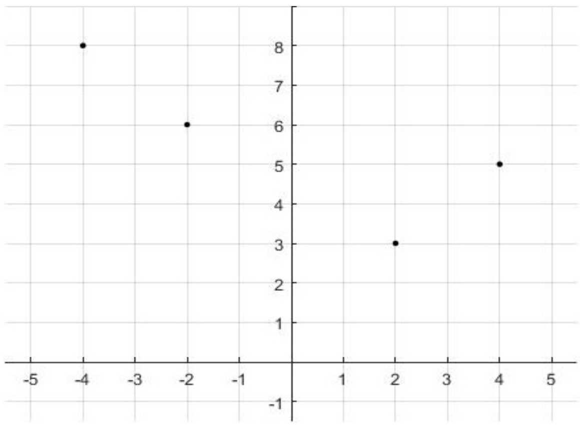
Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 9. *Zadani su podaci*

x	-4	-2	2	4
y	8	6	3	5

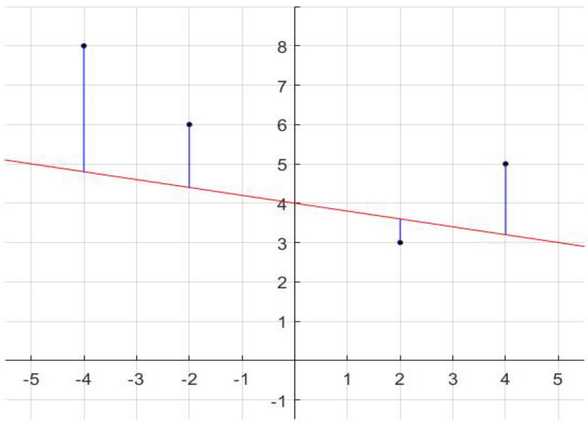
Tablica 1: Zadani podaci

kao što je prikazano na Slici 2. Trebamo naći funkciju $f(x) = ax + b$ tako da njezin graf prolazi što bliže podacima $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, 4$ iz Tablice 1.



Slika 2: Prikaz podataka u koordinatnom sustavu

Odnosno, želimo da suma kvadrata reziduala(pogreški aproksimacije) iz izraza (7)*, s obzirom na naše podatke, bude minimalna. Uočimo da rezidual odgovara udaljenosti točke do pravca po y-osi, što je označeno plavom bojom na Slici 3.*



Slika 3: Prikaz reziduala čiju sumu želimo minimizirati

Za višedimenzionalne probleme, tj. za matricu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^m$ treba pronaći vektor $x \in \mathbb{R}^n$ za koji je

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2.$$

Postoji nekoliko numeričkih metoda za rješavanje ovakvog problema. Ovdje ćemo pokazati rješavanje pomoću dekompozicije na singularne vrijednosti. U nastavku ćemo opisati rješavanje LPNK pomoću SVD-a kada je matrica A punog ranga, odnosno kada matrica nije punog ranga.

Teorem 10 (Prema [1])**.** *Neka je $A = U\Sigma V^*$ dekompozicija na singularne vrijednosti matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, gdje $m \geq n$. Ako matrica A ima puni rang, rješenje problema najmanjih kvadrata,*

$$\min_{x} \|Ax - b\|_2,$$

jest

$$x = V\Sigma^{-1}U^*b.$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\|Ax-b\|_2^2 &= \|U\Sigma V^*x-b\|_2^2 \\
&= \|U\Sigma V^*x-(UU^*+I-UU^*)b\|_2^2 \\
&= \|U\Sigma V^*x-UU^*b+(-I+UU^*)b\|_2^2 \\
&= \|U(\Sigma V^*x-U^*b)+(-I+UU^*)b\|_2^2.
\end{aligned}$$

Primijetimo da su $U(\Sigma V^*x-U^*b)$ i $(-I+UU^*)b$ ortogonalni.

$$\begin{aligned}
(U(\Sigma V^*x-U^*b))^*(-I+UU^*)b &= (\Sigma V^*x-U^*b)^*U^*(-I+UU^*)b \\
&= (\Sigma V^*x-U^*b)^*U^*(-I+I)b \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tada prema Pitagorinom teoremu vrijedi

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|\Sigma V^*x-U^*b\|_2^2+\|(-I+UU^*)b\|_2^2.$$

Ovaj izraz je minimiziran kada je

$$\|\Sigma V^*x-U^*b\|_2^2=0.$$

Tada je $x=V\Sigma^{-1}U^*b$. □

Za matricu A punog ranga ($\text{rang}(A)=n$), rješenje je jedinstveno. Dekompozicija na singularne vrijednosti primjenjuje se i kada matrica A nije punog ranga. U tom slučaju, rješenja LPNK su istog oblika kao i kod matrice punog ranga te ih ima beskonačno mnogo.

Neka je $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ i $b\in\mathbb{C}^m$, pri čemu je $m\geq n$ i $rang(A)=r\leq n$. Tražimo vektor $x\in\mathbb{C}^n$ koji minimizira $\|Ax-b\|_2$. Neka je $A=U\Sigma V^*$ SVD dekompozicija matrice A, gdje su $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ i $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ unitarne, a

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \Sigma_r=\text{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\quad i\quad \sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r\geq 0.$$

Vrijedi

$$\|Ax-b\|=\|U\Sigma V^*x-b\|=\|U(\Sigma V^*x-U^*b)\|=\|\Sigma V^*x-U^*b\|.$$

Označimo li sa $z=V^*x$, imamo

$$\|Ax-b\|^2=\|\Sigma_r z-(U^*b)_r\|^2+\|(U^*b)_{m-r}\|^2\geq\|(U^*b)_{m-r}\|^2.$$

Minimum se postiže kada je $\Sigma_r z-(U^*b)_r=0$. Na taj način smo dobili prvih r komponenti vektora z,

$$z_i=\frac{u_i^*b}{\sigma_i},\quad i=1,\dots,r.$$

Preostalih $n-r$ komponenti vektora z biramo tako da rješenje x ima minimalnu euklidsku normu. Dakle,

$$x=Vz=\sum_{i=1}^{r}\frac{u_i^*b}{\sigma_i}v_i,\quad \|x\|=\min_{r=Ax-b}\|x\|.$$

Riješimo sada Primjer 9.

Primjer 10. *Za svaku točku iz Tablice 1 imamo sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} -4a &+ b = 8 \\ -2a &+ b = 6 \\ 2a &+ b = 3 \\ 4a &+ b = 5. \end{aligned}$$

Taj sustav nema rješenje, stoga rješavamo problem

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \left\| \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|_2 .$$

U rješavanju ovog problema, koristit ćemo se algoritmom za rješavanje LPNK pomoću SVD dekompozicije koji se nalazi u [2, str.116.]. Prvo ćemo izračunati reduciranu SVD dekompoziciju materice A.

$$A^*A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti matrice A^*A su $\lambda_1 = 40$ i $\lambda_2 = 4$, iz čega odmah možemo odrediti pripadne singularne vrijednosti te je

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zatim tražimo svojstvene vektore za matricu V iz $A^*Av_i = \lambda_i v_i$ za pripadne svojstvene vrijednosti. Dobivamo

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, stupce matrice U dobivamo iz

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Reducirana matrica U je tada

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Reducirana SVD dekompozicija

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje,

$$U^*b = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9\sqrt{10}}{10} \\ -11 \end{bmatrix},$$

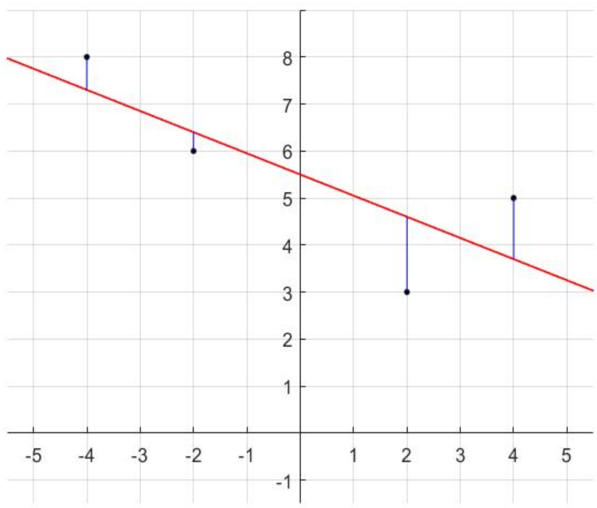
$$y = \Sigma^{-1}U^*b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{9\sqrt{10}}{10} \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} \\ -\frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

Naposlijetku, vektor x računamo iz

$$x = Vy = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} \\ -\frac{11}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

Iz vektora x vidimo da je $a = -\frac{9}{20}$, a $b = \frac{11}{2}$ pa je naša tražena funkcija

$$f(x) = -\frac{9}{20}x + \frac{11}{2}.$$



Slika 4: Rješenje LPNK uz pomoć dekompozicije na singularne vrijednosti

3.2 Kompresija slike

Kompresija slike je postupak sažimanja kod kojeg nova slika zauzima manji prostor uz lošiju kvalitetu, ali na način da svi važni dijelovi ostanu vidljivi. Važnost kompresije je ta da nam omogućava uštedu prostora pri pohranjivanju podataka. Digitalna slika može se prikazati pravokutnom matricom pixela[4] koji predstavljaju sliku. Svakom pixelu odgovara jedan element matrice. Ukupan broj pixela korištenih za prikaz slike naziva se razlučivost zaslona.

U Matlab-u elementi matrice mogu biti klase double. Ukoliko je matrica klase double, svaki element slike se pohranjuje kao 64-bitni *floating-point* broj.
Razlikujemo nekoliko prikaza slika na računalu - crno-bijelu, monokromatsku i RGB[5] sliku. Intenzitet pixela kod crno-bijele slike može biti 0 ili 1, gdje 0 označava crnu, a 1 bijelu boju. U slučaju monokromatske slike, intenzitet pixela je između 0 i 1, što rezultira različitim nijansama sive boje. RGB slika je troslojna, predstavljena je s tri matrice. U svaku se od matrica pohranjuje intenzitet pixela za jednu od tri boje - crvenu, zelenu i plavu.

Dekompozicija na singularne vrijednosti je vrlo efikasan alat u kompresiji jer nam omogućava da originalnu matricu, kojom je predstavljena digitalna slika, aproksimiramo matricom nižeg ranga te tako uštedimo prostor pri pohrani. Odnosno, u matrici originalne slike pojavljuju se kolinearni stupci. Odaberemo li mali broj k, zadržimo npr. prvih k najvećih singularnih vrijednosti, a ostale postavimo na nulu, kao rezultat dobit ćemo matricu ranga k koja je, prema teoremu 8. str. 10, najbolja moguća aproksimacija originalne matrice punog ranga. Na taj način ćemo koristiti manje memorije bez da aproksimirana slika izgubi previše na kvaliteti.

S obzirom da su singularne vrijednosti na dijagonali matrice Σ raspoređene u padajućem poretku, greška će biti manja što je rang aproksimacije veći. Dimenziju originalne slike određene su s $d = m \times n$, dok dimenziju aproksimirane slike računamo iz

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \cdots + \sigma_k u_k v_k^*,$$

gdje svaki stupac u_i matrice U sadrži m komponenti, svaki stupac v_i matrice V sadrži n komponenti, a σ_i predstavlja jednu komponentu. Tada je $d_k = k(m+n+1)$ za k singularnih vrijednosti. Stupanj kompresije računamo kao

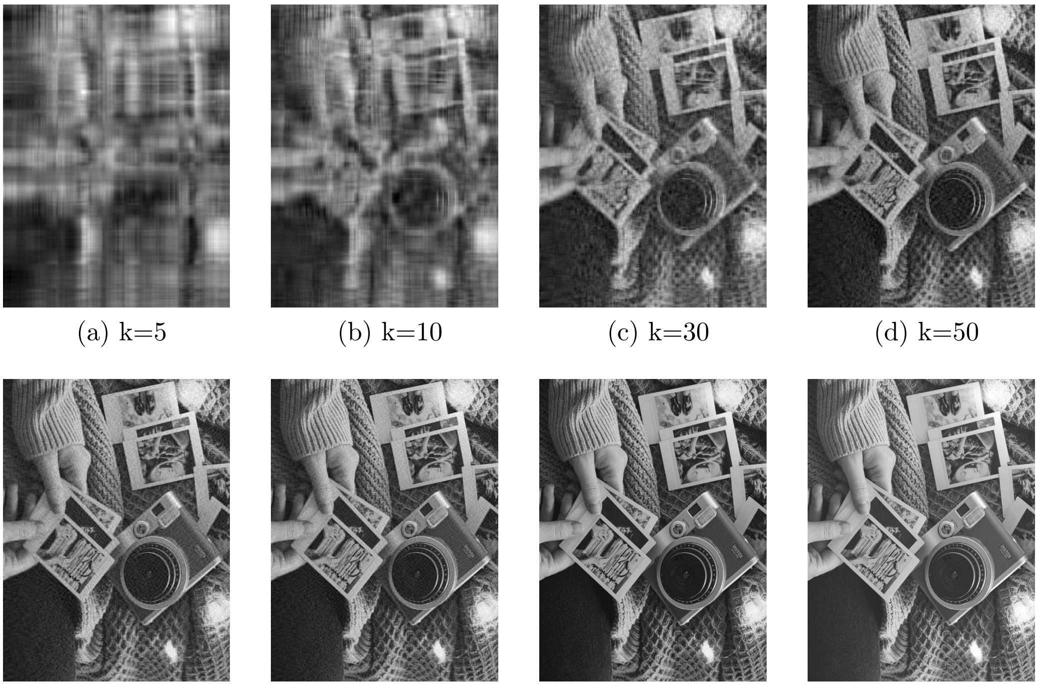
$$\gamma_k = \frac{d_k}{d} \times 100.$$

U nastavku je ilustrirana primjena SVD dekompozicije matrice u kompresiji slike, provedene u programskom jeziku Matlab.

[4]element slike, eng. picture element
[5]eng. Red Green Blue

Slika 5: Originalna monokromatska slika veličine 694×564 pixela

Na sliku 5 proveli smo kompresiju za $k = 5, 10, 30, 50, 80, 100, 200$. Rezultat je sljedeći.



(a) k=5 (b) k=10 (c) k=30 (d) k=50

(e) k=100 (f) k=150 (g) k=200 (h) original

Slika 6: Kompresija slike 5 za k=5, 10, 30, 50, 80, 100, 200, 564

Primjećujemo da je za $k = 5$ slika vrlo zamućena te je nemoguće s točnošću odrediti što ona predstavlja. Nakon povećanja broja singularnih vrijednosti, slika se sve više izoštrava pa već za $k = 30$ možemo uočiti bitne dijelove slike, iako je njezina kvaliteta poprilično niska. U aproksimacijama kada nam je broj singularnih vrijednosti veći od 100, još uvijek se može uočiti razlika između aproksimacije i originalne slike, no ona je gotovo zanemariva.

U sljedećoj tablici prikazan je broj pixela za originalnu i za svaku kompresiranu sliku te stupanj kompresije u postocima.

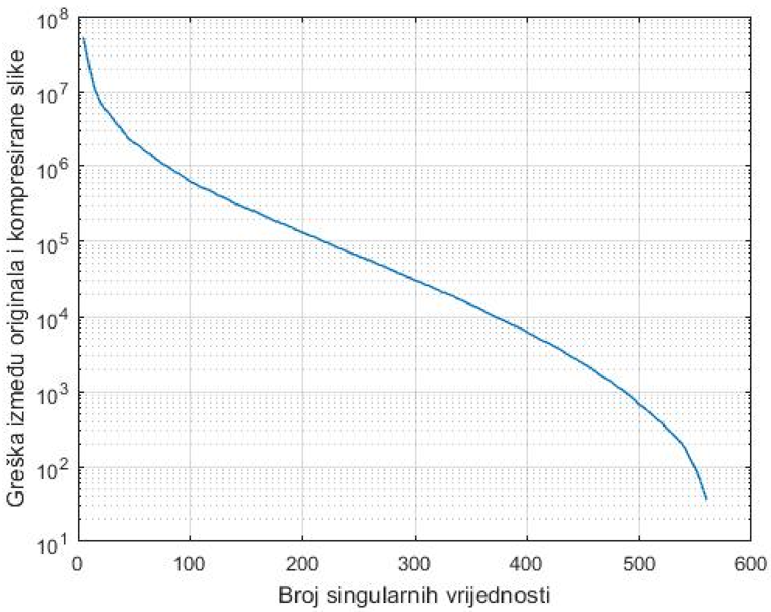
	original	$k = 5$	$k = 10$	$k = 30$
broj pixela	391416	6295	12590	37770
stupanj kompresije	100%	1.61%	3.22%	9.65%

	$k = 50$	$k = 80$	$k = 100$	$k = 200$
broj pixela	62950	100720	125900	251800
stupanj kompresije	16.08%	25.73%	32.17%	64.33%

Tablica 2: Broj pixela kompresirane slike

Analizom podataka iz Tablice 2 možemo zaključiti da se stupanj kompresije povećava proporcionalno sa povećanjem broja singularnih vrijednosti.

Grafom na Slici 7 prikazan je odnos greške i broja singularnih vrijednosti. Kako se greška aproksimacije smanjuje, poboljšava se kvaliteta slike, ali je potrebno i više prostora za pohranu takve slike.



Slika 7: Odnos greške i broja singularnih vrijednosti

4 Literatura

Literatura

[1] James W. Demmel, *Applied Numerical Algebra, University of California*, Berkeley, California, 1997.

[2] Ninoslav Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, 2010.

[3] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix computations, 4th edition, John Hopkins Studies in the Mathematical Sciences*, The John Hopkins Univerity press, 2013.

[4] Rudolf Scitovski, *Numerička matematika, Izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, 2015.

[5] Slobodan Jelić, Zvonimir Ivančević, *Primjena SVD rastava matrice u dohvatu informacija i kompresiji slike*, Osječki matematički list 16, 2016., 49. - 65.str.

[6] https://www.cs.cmu.edu/ venkatg/teaching/CStheory-infoage/book-chapter-4.pdf (Pristupljeno 18. svibnja 2018.)

[7] https://web.math.pmf.unizg.hr/ singer/num_anal/NA_0910/25.pdf (Pristupljeno 14. lipnja 2018.)

[8] https://web.math.pmf.unizg.hr/ rogina/2001096/num_anal.pdf (Pristupljeno 17. srpnja 2018.)