Konveksnost u normiranom prostoru

Habijanić, Ana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Habijanić

Konveksnost u normiranom prostoru

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Habijanić

Konveksnost u normiranom prostoru

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2018.

Sažetak

U ovom radu definirat ćemo normiran prostor i na njemu opisati konveksnost sa pripadnim svojstvima. U uvodnom dijelu rada navest ćemo neke osnovne definicije kao što su definicija vektorskog i unitarnog prostora. Nakon toga, definirat ćemo normu te normirani prostor. Objasnit ćemo što su to konveksan skup, konvkeksna kombinacija i konveksna ljuska i pokušat ćemo približiti te pojmove primjerima. U zadnjem dijelu definirat ćemo strogo konveksan prostor i uniformno konveksan prostor.

Ključne riječi

vektorski prostor, unitaran prostor, norma, normiran prostor, konveksan skup, konveksna kombinacija, konveksna ljuska, konveksan prostor

Summary

In this paper we will define the standard space and describe the convexity with the associated properties on it. In the introduction part of this paper we will investigate basic definitions such as definition of vector and unitary space. After that, we will define norm and standard space. We will explain what convex set, convex combination and convex hull are and approach these concepts to the examples. In the last part of the paper we will define a strictly convex space and a uniformly convex space.

Key words

vector space, unitary space, norm, standard space, convex set, convex combination, convex hull, convex space

Sadržaj

Uvod

Priču o konveksnosti u normiranim prostorima započinjemo uvođenjem osnovnih pojmova nužnih za izgradnju normiranog prostora kao što su polje, vektorski prostor te unitaran prostor. Zatim ćemo dokazati važan teorem koji nam iskazuje svojstva norme te definirati normiran prostor. Iskazat ćemo i Jordan-von Neumannov teorem, koji daje karakterizaciju norme. Prikazat ćemo najvažnije norme, kao i neke druge primjere normi. Nadalje, objasnit ćemo što je to segment i konveksan skup, dokazati bitna svojstva konveksnog skupa te primjerima pokazati svojstva unije i presjeka konveksnih skupova. U daljnjem radu, spomenut ćemo konveksnu kombinaciju i pokazati primjer te dokazati propoziciju koja govori o konveksnoj ljusci. Na kraju rada, definirat ćemo strogo i uniformno konveksan prostor te zaokružiti priču primjerom koji će povezati dosad spomenute pojmove.

Definicija 1. ***Polje*** *je skup X s barem dva elementa na kome su zadane dvije komutativne i asocijativne binarne operacije, zbrajanje*

$$+ : X \times X \to X, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

i množenje

$$\cdot : X \times X \to X, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$$

tako da vrijedi:

1. *$(X, +)$ je grupa s neutralnim elementom 0,*
2. *$(X\backslash\{0\}, \cdot)$ je grupa s neutralnim elementom 1,*
3. *množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.*

Primjer 1. *Primjeri polja su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uz standarne operacije zbrajanja i množenja. $\mathbb{Z}$ nije polje uz standarne operacije zbrajanja i množenja.*

Definicija 2. ***Vektorski prostor*** *nad poljem K je neprazan skup X koji je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanja $(+ : X \times X \to X, (v, w) \mapsto v + w)$ i na kojem je definirana operacija množenja elementima polja K (tj. preslikavanje $+ : K \times X \to X, (\lambda, v) \mapsto \lambda v)$ koja je distributivna s obzirom na obje operacije zbrajanja:*

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \text{i} \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall v, w \in X,$$

ima svojstvo kvaziasocijativnosti:

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall v \in X,$$

i jedinica ima svojstvo:

$$1v = v, \quad \forall v \in X.$$

Primjer 2. *Pogledajmo primjere skupova nad različitim poljima koji jesu i koji nisu vektorski prostori (uz standardne operacije zbrajanja i množenja), ovisno o tome nad kojim poljem ih promatramo.*

1. (a) $\mathbb{R}$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{C}$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$.
   (c) $\mathbb{C}$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathbb{R}$ *nije vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$.
2. (a) $\mathbb{R}^n$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{C}^n$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$.
   (c) $\mathbb{C}^n$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathbb{R}^n$ *nije vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$.

Osim navedenih, promotrimo još neke primjere vektorskih prostora. U Primjeru 3. ćemo pokazati da definiranjem birnarnih operacija zbrajanja i množenja skalarom na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ možemo pokazati da je to vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, dok ćemo u Primjeru 4. vidjeti da možemo promatrati i drugačije skupove, kao što je skup svih neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$ te pokazati da je i on vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Primjer 3. *Ako je X realan vektorski prostor i ako na skupu*

$$X_c = X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$$

definiramo zbrajanje formulom

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

i množenje kompleksnim brojem $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ formulom

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, bx + ay),$$

onda je u odnosu na te operacije X_c kompleksan vektorski prostor.

Primjer 4. *Promotrimo skup $C(\mathbb{R})$ svih neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$. Uz operacije zbrajanja*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C(\mathbb{R})$$

i množenja realnim skalarima

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C(\mathbb{R})$$

$C(\mathbb{R})$ postaje realan vektorski prostor.

Sada ćemo objasniti što je skalarni produkt koji nam je potreban za definiciju unitarnog prostora i u Primjeru 5. pokazat ćemo kako je skalarni produkt definiran na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

Definicija 3. ***Skalarni produkt*** *na vektorskom prostoru X je preslikavanje*

$$(\cdot \mid \cdot) : X \times X \to K$$

(svakom uređenom paru vektora $(x, y) \in X \times X$ pridružen je skalar $(x \mid y) \in K$) sa sljedećim svojstvima:

1. ***linearnost u prvoj varijabli:***

$$(\lambda x + \mu y \mid z) = \lambda(x \mid z) + \mu(y \mid z), \quad \lambda, \mu \in K, \quad x, y, z \in X,$$

2. ***hermitska simetrija:***

$$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}, \quad x, y \in X,$$

   (u slučaju X=$\mathbb{R}$ svojstvo je $(x \mid y) = (y \mid x)$ i kraće se zove simetrija)

3. ***pozitivnost***

$$(x \mid x) \geq 0, \quad x \in X,$$

4. ***definitnost***

$$(x \mid x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Vektorski prostor na kome je zadan skalarni produkt zove se **unitaran prostor**.

Primjer 5. *Pogledajmo kako je definiran standardni skalarni produkt na prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.*

1. *U $\mathbb{R}^n$ je skalarni produkt definiran s* $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

2. *U $\mathbb{C}^n$ je skalarni produkt definiran s* $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.

1 Normirani prostor

Iskoristit ćemo prethodno definirane pojmove kako bismo definirali normu i uz nju usko vezan normiran prostor. Uz to, u ovom poglavlju iskazat ćemo i Jordan-von Neumannov teorem i pogledati primjere nekih normi na različitim vektorskim prostorima.

Teorem 1. *Neka je X unitaran prostoru nad poljem K. Za $x \in X$ stavimo $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ (nenegativan drugi korijen). Tada funkcija $x \mapsto \|x\|$ s vektorskog prostora X u skup $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$ ima sljedeća svojstva:*

1. *za $x \in X$, $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = \vec{0}$,*
2. *za $x \in X$ i $\lambda \in K$ vrijedi $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,*
3. *za $x, y \in X$ vrijedi tzv.* ***nejednakost trokuta:*** *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Nadalje, za bilo koje $x, y \in X$ vrijedi tzv. nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunyakowskog:

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti ako i samo ako su x i y proporcionalni.

Dokaz. Svojstvo 1. neposredna je posljedica definitnosti skalarnog produkta. Svojstvo 2. posljedica je linearnosti i hermitske simetrije:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x \mid x) = |\lambda|^2\|x\|^2.$$

Dokažimo sada nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunyakowskog. Za vektore $x, y \in X$ zbog pozitivnosti norme, linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli i hermitske simetrije imamo redom:

$$\begin{gathered} 0 \leq \|(x \mid x)y - (y \mid x)x\|^2 = ((x \mid x)y - (y \mid x)x \mid (x \mid x)y - (y \mid x)x) = \\ \|x\|^4\|y\|^2 - \|x\|^2|(y \mid x)|^2 - \|x\|^2(y \mid x)(x \mid y) + \|x\|^2|(y \mid x)|^2 = \\ \|x\|^4\|y\|^2 - \|x\|^2|(x \mid y)|^2 = \|x\|^2(\|x\|^2\|y\|^2 - |(x \mid y)|^2). \end{gathered}$$

Ako je $x = 0$, očito je $|(x \mid y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ (obje strane su nula), i tada su x i y proporcionalni ($x = 0 \cdot y$). Ako je $x \neq 0$ tada je $\|x\| \neq 0$ i iz gornje nejednakosti dijeljenjem sa $\|x\|^2$ dobivamo $0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - |(x \mid y)|^2$, a to je upravo nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunyakowskog. Nadalje, iz definitnosti norme primijenjene na normu vektora $(x \mid x)y - (y \mid x)x$ slijedi da u nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowskog vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $(x \mid x)y = (y \mid x)x$, tj. ako i samo ako su x i y proporcionalni.
Ostaje nam da još dokažemo svojstvo 3. Za $x, y \in X$ primjenom svojstava skalarnog produkta i nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowskog nalazimo redom:

$$\begin{gathered} \|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) = \|x\|^2 + 2 \cdot Re(x \mid y) + \|y\|^2 \leq \\ \leq \|x\|^2 + 2 \cdot |(x \mid y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{gathered}$$

Time je dokazana i nejednakost trokuta. $\square$

Funkcija $x \mapsto \|x\|$ definirana na vektorskom prostoru X i s vrijednostima u skupu $\mathbb{R}_+$ koja ima svojstva 1., 2. i 3. iz Teorema 1. zove se **norma** na vektorskom prostoru X. Vektorski prostor na kome je zadana norma zove se **normiran prostor**.

Sada ćemo iskazati važan teorem koji uspostavlja nužne i dovoljne uvjete za normu vektorskog prostora koja je inducirana skalarnim produktom. Teorem pokazuje da jednakost paralelograma zapravo karakterizira norme koje potječu iz skalarnih produkata.

Teorem 2. *(P. Jordan - J. von Neumann)*
Neka je $\|\cdot\|$ norma na X. Sljedeća dva svojstva su međusobno ekvivalentna:

1. *Vrijedi jednakost paralelograma:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

2. *Postoji skalarni produkt $(\cdot \mid \cdot)$ na X takav da je $(x \mid x) = \|x\|^2, \forall x \in X$.*

Skalarni produkt iz 2. je jedinstven i dan sa

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2, \quad \text{za } K = \mathbb{R},$$
$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2, \quad \text{za } K = \mathbb{C}.$$

U sljedećem primjeru navodimo nekoliko najpoznatijih vektorskih normi.

Primjer 6. *Pogledajmo neke najznačajnije vektorske norme te prikaz jedinične kružnice u ravnini u tim normama (Slika 1).*
*Za $1 \le p < \infty$ imamo **p-normu**:*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

*U slučaju $p = 2$ imamo l_2 ili **euklidsku normu**:*

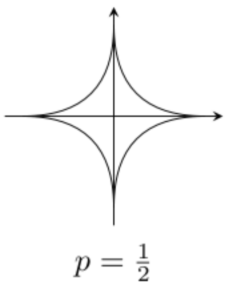
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Za $p = 1$ imamo l_1 normu:

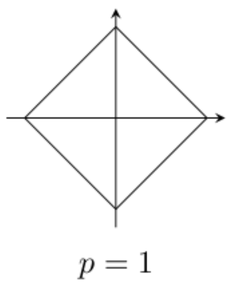
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

*Za $p = \infty$ dobivamo l_∞ ili **Čebiševljevu normu**:*

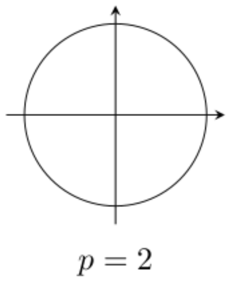
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$



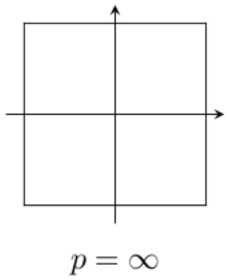
(a) *Prikaz kružnice u normi* $p = \frac{1}{2}$.



(b) *Prikaz kružnice u normi* $p = 1$.



(c) *Prikaz kružnice u normi* $p = 2$.



(d) *Prikaz kružnice u normi* $p = \infty$.

Slika 1: *Prikaz jedinične kružnice u različitim normama.*

U Primjeru 4. zaključili smo da je skup svih neprekidnih funkcija $C(\mathbb{R})$ realan vektorski prostor. Sada možemo promatrati različite vrste normi definirane na tom prostoru i veze između njih.

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ i $C([\alpha, \beta])$ je vektorski prostor svih neprekidnih funkcija $f : [\alpha, \beta] \to K$. Na tom prostoru definiramo norme:

$$\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(x)| dx,$$
$$\|f\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, x \in [\alpha, \beta]\}.$$

Norma $\| \cdot \|_2$ zadovoljava jednakost paralelograma i dolazi od skalarnog produkta

$$(f \mid g) = \int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Lema 1. *Za svaku* $f \in C([\alpha, \beta])$ *vrijede nejednakosti*

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{\beta - \alpha}\ \|f\|_2,$$
$$\|f\|_2 \leq \sqrt{\beta - \alpha}\ \|f\|_\infty,$$
$$\|f\|_1 \leq (\beta - \alpha)\ \|f\|_\infty.$$

Dokaz. Vrijedi $\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx = (1 \mid |f|) \leq \|1\|_2 \|f\|_2 = \sqrt{\beta - \alpha}\ \|f\|_2$. Također, vrijedi $\|f\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_\infty \left(\int_\alpha^\beta dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\beta - \alpha}\ \|f\|_\infty$. Treća jednakost slijedi iz prve dvije. □

Lema 2. *Ne postoji niti jedan od brojeva $M_1 > 0, M_2 > 0, M_3 > 0$ tako da vrijedi neka od sljedećih nejednakosti*

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &\leq M_1\ \|f\|_1, \forall f \in C([\alpha, \beta]), \\ \|f\|_\infty &\leq M_2\ \|f\|_2, \forall f \in C([\alpha, \beta]), \\ \|f\|_\infty &\leq M_3\ \|f\|_1, \forall f \in C([\alpha, \beta]). \end{aligned}$$

Dokaz Leme 2. može se pronaći u [3], str. 15.

Sada ćemo navesti primjer vezan uz Lemu 1. i na njemu pokazati da vrijedi Lema 2.

Primjer 7. *Neka su $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dane funkcije definirane s $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 10x^{10}$. Izračunajmo njihove norme.*

$\|f\|_1 = \int_0^1 |x^2 + 2|dx = \int_0^1 (x^2 + 2)dx = \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} = 2.\dot{3}$,

$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4)dx} = \sqrt{\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{83}{15}} \approx 2.35230$,

$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |x^2 + 2| = 3$,

$\|g\|_1 = \int_0^1 |10x^{10}|dx = \int_0^1 (10x^{10})dx = \frac{10}{11} \approx 0.\overline{90}$,

$\|g\|_2 = \left[\int_0^1 (10x^{10})^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\sqrt{21}} \approx 2.18218$,

$\|g\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |10x^{10}| = 10$.

U našem slučaju je $\sqrt{\beta - \alpha} = \sqrt{1 - 0} = 1$, pa možemo lako vidjeti da vrijedi Lema 1.
Naime, $\|f\|_1 = 2.\dot{3} \leq \|f\|_2 = 2.35230, \|f\|_2 = 2.35230 \leq \|f\|_\infty = 3$, a time je i $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.
Slično vrijedi i za funkciju g.
Provjerimo sada Lemu 2.
Uzmimo prvu nejednakost: $\|f\|_2 \leq M_1\ \|f\|_1, \forall f \in C([\alpha, \beta])$.
Za funkciju f možemo pronaći broj M_1 takav da vrijedi $\|f\|_2 \leq M_1\ \|f\|_1$, npr. $M_1 = 2$.
Uočimo da vrijedi da je $2.35230 \leq 2 \cdot 2.\dot{3} = 4.\dot{6}$.
Odabrani M_1 mora vrijediti za svaku funkciju. Pitamo se vrijedi li i za funkciju g:

$$\begin{gathered} \|g\|_2 \leq M_1 \cdot \|g\|_1, \\ 2.18218 \nleq 2 \cdot 0.\overline{90} = 1.\overline{81}. \end{gathered}$$

Vidimo da odabrani M_1 ne zadovoljava traženu nejednakost.

2 Konveksan skup u normiranom prostoru

U ovom poglavlju objasnit ćemo što su segment i konveksan skup te navesti neke primjere takvih skupova u ravnini. Osim toga, dokazat ćemo da su kugla i zatvarač konveksnog skupa također konveksni skupovi. Na kraju, pokazat ćemo svojstva unije i presjeka konveksnih skupova.

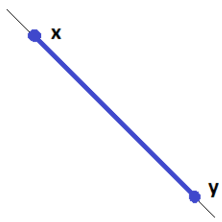
2.1 Konveksan skup

U normiranom prostoru X skup $K(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ je kugla radijusa r sa središtem u točki x_0, a skup $S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$ je sfera radijusa r sa središtem u točki x_0.

Definicija 4. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Za $x, y \in X$ skup*

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$$

*nazivamo **segment** s krajevima x i y.*

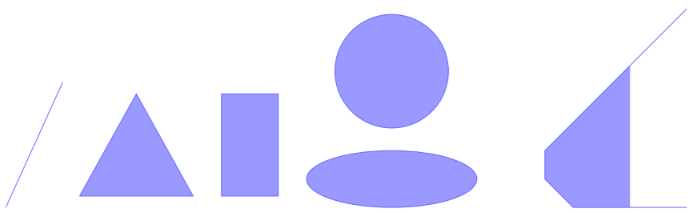


Slika 2: *Pravac kroz točke x i y. Segment [x, y] je označen plavom bojom.*

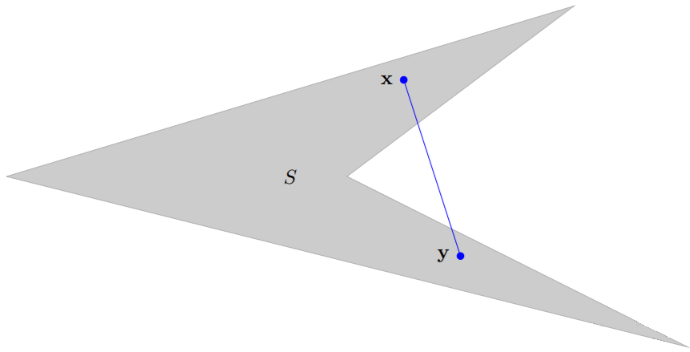
Definicija 5. *Skup $K \subseteq X$ je **konveksan** ako vrijedi*

$$(\forall x, y \in K) \quad [x, y] \subseteq K.$$

Promatrano geometrijski, skup K je konveksan ako za svake svoje dvije točke sadrži i segment koji spaja te dvije točke. Očigledno, jednočlan skup je konveksan. Prazan skup smatramo konveksnim.
Na Slici 3. možemo promotriti neke konveksne skupove u ravnini, dok Slika 4. prikazuje skup u $\mathbb{R}^2$ koji nije konveksan.



Slika 3: *Primjeri konveksnih skupova u ravnini.*



Slika 4: *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ nije konveksan.*

Propozicija 1. *U normiranom prostoru X svaka kugla je konveksan skup.*

Dokaz.
Neka je $K = K(x_0, r)$. Ako je $x, y \in K$ i $t \in [0,1]$, onda za vektor $z = tx + (1-t)y$ imamo:

$$\|z - x_0\| = \|tx + (1-t)y - x_0\| = \|tx + (1-t)y - [t + (1-t)]x_0\| = \|t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\| \leq \|t(x - x_0)\| + \|(1-t)(y - x_0)\| = t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\| \leq tr + (1-t)r = r,$$

dakle $z \in K$, što dokazuje konveksnost kugle $K(x_0, r)$. $\square$

Vrijedi i da je zatvorena kugla $\overline{K(x_0, r)} = K(x_0, r) \cup S(x_0, r)$ konveksan skup.

Propozicija 2. *Ako je K konveksan skup u nomiranom prostoru X, onda je i skup $\overline{K}$ konveksan.* [1]

Dokaz.
Neka su $x, y \in \overline{K}$ i neka je dan $\epsilon > 0$. Postoje $x', y' \in \overline{K}$ takvi da je $\|x - x'\| < \epsilon$ i $\|y - y'\| < \epsilon$. Za $t \in [0,1]$ je

$$\|tx + (1-t)y - (tx' + (1-t)y')\| \leq t\|x - x'\| + (1-t)\|y - y'\| \leq t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon.$$

Budući da je $tx' + (1-t)y' \in K$ zbog konveksnosti skupa K i da je $\epsilon > 0$ proizvoljan broj, to jest $tx + (1-t)y \in \overline{K}$, što i pokazuje konveksnost skupa $\overline{K}$. $\square$

U sljedećem primjeru pokušat ćemo preko definicije pokazati je li neki skup konveksan.

Primjer 8. *Neka je dan skup $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$. Provjerimo je li skup P konveksan skup.*
Uzmimo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$. Pitamo se vrijedi li da je

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in P, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

[1] Neka je $K \subseteq X$. Najmanji zatvoreni skup iz X koji sadrži K zovemo zatvarač skupa K i označavamo s $\overline{K}$.

Znamo da vrijedi $y_1 \geq x_1$ *i* $y_2 \geq x_2$, *a time i*

$$\lambda y_1 \geq \lambda x_1, \quad \forall \lambda \in [0,1] \tag{1}$$

$$(1-\lambda)y_2 \geq (1-\lambda)x_2, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{2}$$

Sada imamo

$$\lambda(x_1,y_1) + (1-\lambda)(x_2,y_2) = \big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big).$$

Iz (1) *i* (2) *slijedi* $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, *odnosno skup* P *je konveksan.*

Napomena 1. *Presjek dva konveksna skupa je također konveksan skup.*
Pokažimo to na proizvoljnim skupovima S_1 *i* S_2. *Označimo* $S = S_1 \bigcap S_2$, *gdje su* S_1 *i* S_2 *konveksni skupovi. Trebamo dokazati da je skup* S *konveksan. Uzmimo proizvoljne* $x_1, x_2 \in S$. *Kako je* $S = S_1 \bigcap S_2$, *onda su* $x_1, x_2 \in S_1$ *i* $x_1, x_2 \in S_2$, *a zbog konveksnosti skupova* S_1 *i* S_2 *vrijedi* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_1$ *i* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_2$. *Iz tog slijedi* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$, *odnosno konveksnost skupa* S.

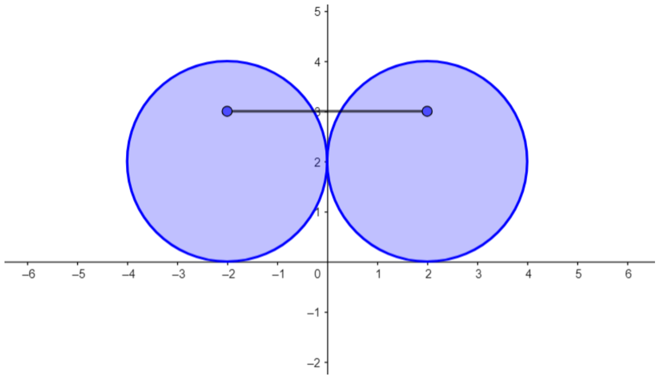
Ta tvrdnja vrijedi i općenito, tj. presjek proizvoljne familije S_i, *za neki* $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ *konveksnih skupova je konveksan skup,* $S = \bigcap S_i$.
Sada se pitamo hoće li i unija konveksnih skupova biti konveksan skup.

Primjer 9. *Unija konveksnih skupova ne mora biti konveksan skup. Pretpostavimo da imamo dva kruga*

$$\overline{K_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4\},$$

$$\overline{K_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$

Trebamo dokazati da $\overline{K_1} \bigcup \overline{K_2}$ *nije konveksan skup. Uzmimo točke* $(2,3), (-2,3)$ *i* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Imamo* $\frac{1}{2}(2,3) + \frac{1}{2}(-2,3) = (0,3)$. *Vidimo da točka* $(0,3)$ *ne pripada niti jednom krugu pa tako ni njihovoj uniji.*
S druge strane, presjek krugova $\overline{K_1} \bigcap \overline{K_2} = \{(0,2)\}$ *je jednočlan skup što je konveksan skup.*



Slika 5: *Na slici vidimo da točka* $(0,3)$ *nije sadržana u krugovima pa tako ni u njihovoj uniji.*

3 Konveksna kombinacija i konveksna ljuska

U zadnjem dijelu ovog rada dotaći ćemo se pojmova poput konveksne kombinacije i konveksne ljuske, pokazat ćemo da konveksan skup sadrži svaku konveksnu kombinaciju svojih elemenata i dat ćemo primjer konveksne kombinacije. Nadalje, definirat ćemo strogo konveksan prostor i pokazati neka njegova svojstva.

3.1 Konveksna kombinacija

Vektor $tx+sy$ pripada segmentu $[x, y]$ ako i samo ako je $t, s \geq 0$ i $t+s=1$. Tada kažemo da je $tx+sy$ **konveksna kombinacija** vektora x i y ako je $t, s \geq 0$ i $t+s=1$.

Definicija 6. ***Konveksna kombinacija*** *vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorskog prostora X je svaki vektor oblika*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

s tim da je

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0 \text{ } i \text{ } \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

Propozicija 3. *Konveksan skup K sadrži svaku konveksnu kombinaciju svojih elemenata. Drugim riječima, ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ i $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ konveksna kombinacija, onda je $x \in K$.*

Dokaz.
Dokaz provodimo pomoću matematičke indukcije. Za $n = 2$ tvrdnja proizlazi iz definicije konveksnosti. Uzmimo da je tvrdnja dokazana za prirodni broj n i da su $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in K$, gdje je $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, uz $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$.
Ako je $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, onda je $x = x_{n+1} \in K$, a ako je $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, onda imamo:

$$x = \mu y + \lambda_{n+1} x_{n+1}, \; y = \frac{\lambda_1}{\mu} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\mu} x_n.$$

Provjerimo je li y također konveksna kombinacija. Kako je

$$\frac{\lambda_1}{\mu} + \frac{\lambda_2}{\mu} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\mu} = \frac{1}{\mu}\Big(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\Big) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

zaključujemo da je y konveksna kombinacija od n vektora iz K, što znači da je po induktivnoj pretpostavci $y \in K$. No, tada x kao konveksna kombinacija vektora y i x_{n+1} iz K ponovno leži u K. $\square$

Vjerojatnost kao matematičko područje često koristimo u svakodnevnom životu, zato ćemo u sljedećem primjeru iskoristiti pojam matematičkog očekivanja iz teorije vjerojatnosti kako bismo bolje predočili ulogu konveksne kombinacije.

Primjer 10. *Matematičko očekivanje konačne slučajne varijable je usko povezano s konveksnošću. Neka konačna slučajna varijabla X ima distribuciju*

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

gdje je $p_i > 0$ vjerojatnost da ta slučajna varijabla primi vrijednost x_i, te $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Njezino matematičko očekivanje $E[X]$, definirano kao

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

je konveksna kombinacija brojeva $x_1, \dots, x_n$.

3.2 Konveksna ljuska

Neka je skup S podskup nekog vektorskog prostora. Najmanji konveksan skup koji sadržava skup S zovemo **konveksnom ljuskom** skupa S i označavamo sa $co(S)$.
Na primjer, ako se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sastoji od tri različite točke, onda je njegova konveksna ljuska trokut s vrhovima u tim točkama.
Sljedeća propozicija nam daje važna svojstva konveksne ljuske.

Propozicija 4. *Neka je S podskup vektorskog prostora X.*

1. *Presjek svih konveksnih skupova $K \subseteq X$ koji sadrže skup S je konveksan skup i to je konveksna ljuska skupa S.*

2. *Skup svih konveksnih kombinacija vektora iz S je konveksan skup i jednak je $co(S)$.*

3. *Ako je X normiran prostor, onda je presjek svih konveksnih zatvorenih skupova $K \subseteq X$ koji sadrže skup S zatvarač $\overline{co(S)}$ skupa $co(S)$ i zove se **zatvorena konveksna ljuska** skupa S.*

Dokaz.

1. Budući da je X konveksan skup, to jest svaki podskup $S \subseteq X$ je sadržan bar u jednom konveksnom skupu. To dokazuje da definicija konveksne ljuske $co(S)$ skupa S ima smisla. Konveksnost skupa $co(S)$ je očita.

2. Neka je K skup svih konveksnih kombinacija elemenata iz S i neka su $x, y \in K$, tj. $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$, gdje su $x_i, y_j \in S$ i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$.
   Tada za $t \in [0,1]$ imamo

   $$tx + (1-t)y = (t\lambda_1)x_1 + \cdots + (t\lambda_n)x_n + ((1-t)\mu_1)y_1 + \cdots + ((1-t)\mu_m)y_m$$

konveksnu kombinaciju elemenata iz S, odnosno $tx+(1-t)y \in K$. Time je konveksnost skupa K dokazana. Budući da je $S \subseteq K$, tada je $co(S) \subseteq K$. Ako konveksan skup L sadrži skup S, onda prema Propoziciji 3. L sadrži i svaku konveksnu kombinaciju vektora iz S, dakle $K \subseteq L$. Odavde je $K \subseteq co(S)$, pa je $K = co(S)$.

3. Ako s L označimo presjek svih konveksnih zatvorenih skupova $K \subseteq X$ koji sadrže skup S, onda je L konveksan i zatvoren skup. Iz Propozicije 2. slijedi da je $\overline{co(S)}$ konveksan skup, odnosno $L \subseteq \overline{co(S)}$. Zato što je $co(S)$ presjek svih konveksnih skupova $K \supseteq S$, slijedi da je $co(S) \subseteq L$. Odavde je $L \subseteq co(S) \subseteq \overline{L} = L$, pa je $L = \overline{co(S)}$.

□

3.3 Konveksan prostor

Definicija 7. *Neka je $S = S(0,1)$ jedinična sfera normiranog prostora X. Prostor X je* ***strogo konveksan*** *(sinonimi: sfera S je strogo konveksna, norma $x \mapsto \|x\|$ je strogo konveksna), ako*

$$(\|x\| = \|y\| = 1 \ i \ x \neq y) \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1. \tag{3}$$

Propozicija 5. *U normiranom prostoru X sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *X je strogo konveksan,*
2. *$(\|x\| = \|y\| = 1 \ i \ [x,y] \subseteq S) \Rightarrow x = y$,*
3. *$(\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ i \ x \neq 0 \ i \ y \neq 0) \Rightarrow (x = \lambda y, \lambda > 0)$.*

Svojstvo 2. pokazuje da je X strogo konveksan ako i samo ako jedinična sfera S (pa i svaka sfera) prostora X ne sadrži nijedan segment $[x,y]$ s različitim krajevima x i y. Svojstvo 3. pokazuje da je X strogo konveksan ako i samo ako jednakost $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, x \neq 0$ i $y \neq 0$ povlači da su vektori x i y proporcionalni, tj. $x = \lambda y$ i da je $\lambda > 0$.

Prije dokaza Propozicije 5. iskazat ćemo i dokazati pomoćni rezultat koji je dan u sljedećoj lemi.

Lema 3.

1. *Ako za vektore x, y normiranog prostora X vrijedi jednakost $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, onda za sve $t, s \geq 0$ vrijedi*
$$\|tx + sy\| = t\|x\| + s\|y\|. \tag{4}$$
2. *Ako je $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, x \neq 0 \ i \ y \neq 0$, onda jedinična sfera S prostora X sadrži segment $\left[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right]$.*

Dokaz.

1. Za $0 \leq s \leq t$ imamo:

$$t\|x\| + s\|y\| \geq \|tx + sy\| = \|t(x+y) - (t-s)y\| \geq \|t(x+y)\| - \|(t-s)y\| = t(\|x\| + \|y\|) - (t-s)\|y\| = t\|x\| + s\|y\|.$$

   Odavde slijedi (4). Na isti način dobiva se (4) za $0 \leq t \leq s$.

2. Za $t \in (0,1)$ prema 1. imamo:

$$\left\| t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)\frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{t}{\|x\|}\|x\| + \frac{1-t}{\|y\|}\|y\| = 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right] \subseteq S.$$

□

Dokaz Propozicije 5.
Pokažimo najprije da 1. $\Rightarrow$ 2.
Ako je $\|x\| = \|y\| = 1$ i $[x,y] \subseteq S$, onda je posebno $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, pa prema svojstvu (3) mora biti $x = y$.
2. $\Rightarrow$ 3. Ako je $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, x \neq 0$ i $y \neq 0$, onda prema Lemi 3. imamo

$$\left[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right] \subseteq S, \text{ pa 2. povlači } \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}, \text{ tj.}$$

$$x = ty \text{ sa } t = \frac{\|x\|}{\|y\|}.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Ako je $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, onda je $\|x+y\| = 2\|x\| = \|x\| + \|y\|$, pa 3. povlači $x = ty$ sa $t > 0$. No, $\|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \|t\| = 1$, što zajedno sa $t > 0$ daje $t = 1$, tj. $x = y$. □

Primjer 11. *Unitaran prostor je strogo konveksan.*
Za vektore x i y takve da je $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$, uz relaciju paralelograma vrijedi

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1 \tag{5}$$

što povlači (3)*, odnosno strogu konveksnost unitarnog prostora.*

Napomena 2. *Iz jednakosti* (5) *vidimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji broj $\delta(\epsilon) > 0$ takav da*

$$(x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \leq \epsilon) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon). \tag{6}$$

Kako bismo to provjerili, dovoljno je uzeti

$$\delta(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}.$$

Naime,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1 - \left(\frac{\|x-y\|}{2}\right)^2 \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2,$$
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}.$$

Propozicija 6. *Ako je X strogo konveksan konačno dimenzionalan prostor, onda za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta(\epsilon) > 0$ takvo da vrijedi* (6).

Dokaz.
Neka je $\|x\| = \|y\| = 1$ i $\|x-y\| \geq \epsilon$. Budući da je X strogo konveksan, to jest $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. Funkcija $(x,y) \mapsto \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ je neprekidna, pa kompaktnost skupa

$$S(\epsilon) = \{(x,y) \in X \times X : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon\}$$

povlači

$$M = \sup \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \max \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1,$$

gdje se supremum uzima po $(x,y) \in S(\epsilon)$. Odavde vidimo da broj $\delta(\epsilon) = 1 - M > 0$ zadovoljava (6). □

Definicija 8. *Normiran prostor X je* ***uniformno konveksan*** *ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta(\epsilon) > 0$ takvo da vrijedi* (6).

Pogledajmo na kraju primjer vektorskog prostora i provjerimo hoće li on biti normiran i strogo konveksan.

Primjer 12. *Neka je $\mathcal{P}([0,1]) = \{p|_{[0,1]} : p \in \mathbb{C}[x]\}$ vektorski prostor restrikcija polinoma s kompleksnim koeficijentima na segment $[0,1]$. Na $\mathcal{P}([0,1])$ definirano je preslikavanje $\|\cdot\| : \mathcal{P}([0,1]) \to \mathbb{R}$ kao*

$$\|p\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \quad \text{gdje je } \; p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Pokažimo da je $\|\cdot\|$ norma na vektorskom prostoru $\mathcal{P}([0,1])$.

1. *Ako je polinom p nulpolinom, svojstvo vrijedi, $\|0\| = 0$.*
   Nadalje, $0 = \|p\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ povlači da je $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, pa je $p = 0$.

2. $\|\lambda p\| = |\lambda a_0| + |\lambda a_1| + \cdots + |\lambda a_n| = |\lambda|(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|) = |\lambda| \cdot \|p\|.$

3. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\|p+q\| &= |a_n| + \cdots + |a_{m+1}| + |a_m + b_m| + \cdots + |a_1 + b_1| + |a_0 + b_0| \leq \\ &\leq |a_n| + \cdots + |a_{m+1}| + |a_m| + |b_m| + \cdots + |a_1| + |b_1| + |a_0| + |b_0| \leq \\ &\leq (|a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0|) + (|b_m| + \cdots + |b_1| + |b_0|) = \|p\| + \|q\|.\end{aligned}$$

Svojstva norme su zadovoljena, pa zaključujemo da je $\mathcal{P}([0,1])$ normiran prostor. Provjerimo je li i strogo konveksan.
Uzmimo dva polinoma $p, q \in \mathcal{P}([0,1])$ takvi da su im norme jednake 1, ali vrijedi $p \neq q$. Neka je npr. polinom p oblika $p(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2$, a polinom q oblika $q(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2$. Vidimo da vrijedi $\|p\| = \|q\| = 1$ i $p \neq q$.
Po definiciji stroge konveksnosti, mora vrijediti da je $\left\|\frac{p+q}{2}\right\| < 1$.

$$(p+q)(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^2 = \frac{5}{6} + \frac{7}{12}x + \frac{7}{12}x^2$$
$$\left\|\frac{p+q}{2}\right\| = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{5}{6}\right| + \left|\frac{7}{12}\right| + \left|\frac{7}{12}\right|\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Norma $\left\|\frac{p+q}{2}\right\|$ nije strogo manja od 1, stoga $\mathcal{P}([0,1])$ nije strogo konveksan prostor.

Literatura

[1] DAMIĆ BAKIĆ, *Linearna algebra*, dostupno na
https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna_algebra_sk_7.pdf

[2] TOMISLAV BERIĆ, *Normirani prostori, vježbe 2015/2016*, dostupno na
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/np-vjezbe-1516.pdf

[3] BORIS GULJAŠ, *Normirani prostori i operatori*, dostupno na
https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/normirani_prostori.pdf

[4] DRAGAN JUKIĆ, *Konveksni skupovi*, dostupno na
https://www.mathos.unios.hr/~jukicd/Konv_Skupovi_skripta.pdf

[5] HRVOJE KRALJEVIĆ, *Vektorski prostori*, dostupno na
http://www.mathos.unios.hr/vektorski/vektorski_skripta2008.pdf

[6] SVETOZAR KUREPA, *Funkcionalna analiza - Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[7] NINOSLAV TRUHAR, *Numerička linearna algebra*, Osijek, 2010., dostupno na
http://www.mathos.unios.hr/nla/TekstNUMELA.pdf