Egipatska i babilonska matematička dostignuća

Majstorović, Ružica

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ružica Majstorović

Egipatska i babilonska matematička dostignuća

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

Tema ovog rada je pregled matematičkih dostignuća u doba Egipćana i Babilonaca. Obje civilizacije razvile su matematiku sličnu po opsegu, ali različitu u pojedinostima.

U drugom poglavlju opisat ćemo razloge nastanka i razvoja matematike te način zapisivanja i svrhu brojeva.

U trećem poglavlju upoznat ćemo se s egipatskom matematikom o kojoj nam govore dva glavna povijesna izvora, Rhindov papirus i Moskovski papirus. Vidjet ćemo kako su Egipćani zapisivali brojeve te da su imali razvijen decimalni brojevni sustav. Zatim ćemo navesti metode pomoću kojih su množili, dijelili i na koji način su zapisivali razlomke.

U četvrtom poglavlju upoznat ćemo babilonsku matematiku. Saznat ćemo kako se razvijalo babilonsko pismo. Vidjet ćemo da su Babilonci koristili pozicijski brojevni sustav te da su bili upoznati s formulama za rješavanje linearnih i kvadratnih jednadžbi. Osim toga, spomenut ćemo najpoznatiju babilonsku pločicu Plimpton 322 iz koje saznajemo da su Babilonci poznavali Pitagorin teorem.

2 Smisao brojeva

Grčka riječ *mathemata* koja se u ranim spisima koristila kao oznaka za bilo koji predmet nastave i proučavanja predstavlja korijen pojma matematika. Kako je učenje odnosno znanje napredovalo, shvatilo se da je prikladno ograničiti područje pojma matematika na točno određeno područje znanja. Pitagorejci navode da su pojam matematika koristili kako bi opisali aritmetiku i geometriju zbog čega se smatra da je zapravo njihovo korištenje imena matematika vjerojatno bila baza za pojam koji je matematika postala u klasičnoj Grčkoj između 600. do 300. godine prije Krista te se zadržala sve do danas. Međutim povijest pojma matematika može se pratiti i u ranijoj povijesti, jer je tri ili pak četiri tisuće godina prije, u starom Egiptu i Babilonu postojalo značajno znanje koje se može opisati kao matematičko. Isto tako ako se pogleda šire, matematika uključuje proučavanje pitanja količine i prostora (brojeve, veličinu, poredak tj. redoslijed i oblik) zbog čega se shvaća da je u konačnici matematika aktivnost koja je prisutna od najranijih dana čovječanstva.

Općenito je prihvaćeno da je matematika nastala zbog praktičnog problema brojanja i zapisivanja brojeva, jer ljudi koji su živjeli prije 2000 godina su osjećali potrebu da označe odnosno numeriraju svoje objekte, stvari za razmjenu te prolaženje dana u tjednu. Međutim razvoj brojanja, uključujući riječi i znakove koji su označavali brojeve, odvijao se postupno te nije dozvolio odrediti i precizirati točan datum nastajanja određenog stadija brojanja i zapisivanja brojeva.

Nadalje, antropolozi tvrde da je gotovo nemoguće utvrditi postojanje kulture koja nije imala svijest o brojevima, makar bila toliko osnovna kao razlika između jedan i dva. Najranija i najizravnija metoda vizualnog izražavanja brojeva je označavanje. Smisao označavanja je prebrojiti skupinu tj. objekte koji se broje korištenjem nekih jednostavnijih stvari, a u slučaju naših predaka za to su služili prsti, školjke ili kamenja. Primjerice ovce su se brojale tako da se usmjeravala jedna po jedna kroz uski prolaz i za svaku baci ili uzme jedan kamen kad prođe. U slučaju kad bi se ovce okupljale noću, kamenja bi se prebacivala s jedne hrpe na drugu sve dok ovce ne bi bile prebrojane. Međutim da bi sačuvali zapis o bilo kojem brojanju, bilo je neophodno imati drugačiji prikaz samih brojeva, jer usmeno govorenje brojeva kao i njihovo brojanje na prste nisu imali trajnosti. Kako bi se prethodno navedeno ostvarilo, ljudi su se s vremenom dosjetili da se događaji i stvari koje se žele zabilježiti, obilježavaju na pogodnom trajnom materijalu i to tako da svaki događaj ili stvar ima vlastitu oznaku. Stoga su brojevi, a u konačnici i brojanje bili očuvani radeći ogrebotine na kamenju, zatim režući crtice u drvenom štapu ili kosti te vežući čvorove na struni ili pak žici različite duljine. Kada je broj ogrebotina odnosno ureza postao preglomazan za prikazati, primitivni ljudi su ga organizirali u lako prepoznatljive grupe kao što su grupe od 5 (za pet prstiju na ruci). Iako je vjerojatno da se grupiranje u parove prvo pojavilo, vrlo brzo je zamijenjeno grupama od 5, 10 ili 20. Organiziranje brojanja u grupe bio je pažnje vrijedan napredak u brojanju. To je bio samo mali korak u dugačkom razvoju odvajanja brojeva od stvari koje se broje.

Nakon kratkog povijesnog osvrta, jasno je vidljivo da na napredak u smišljanju efikasnog načina održavanja i prenošenja numeričke informacije nije počeo dok ljudi nisu napustili nomadski način života. Budući da ljudima, dok su bili sakupljači i lovci, nije bila namjera da njihove zapise koriste ljudi koji su bili jako udaljeni, jer su urezivani znakovi na kostima ili kamenu bili jasni samo osobi koja ih je pravila ili uskoj skupini prijatelja. Međutim kad su postali proizvođači hrane bilo je potrebno promijeniti način numeričkog prikazivanja, jer su dotadašnji načini brojanja poput tehnika zarezivanja ili vezanja čvorova postali spori i mukotrpni. No kasnije, u razvijenijem dobu tih društava, pojavili su se prvi put posebni simboli za brojeve. Od tada su nastale i neke elementarne grane matematike, jer su se pomoću simbola mogli prikazivati veliki brojevi u brojčanim zapisima, što je predstavljalo preduvjet za računanje i mjerenje.

3 Egipatska matematika

Glavna crta razvoja matematike proizašla je iz brojčanog sustava bliskoistočnih civilizacija, Egipćana i Babilonaca. Brojčane riječi nađene su u nekim oblicima riječi od najranijih zapisa tih civilizacija. Njihova uporaba simbola i brojeva, odvojila se od asocijacije objekata sa brojenjem i predstavljala je ogromnu prekretnicu u povijesti civilizacija. Neke od prvih matematičkih ideja pronalazimo upravo kod Starih Egipćana. Imali su svoje oznake za brojeve i razvijen decimalni sustav.

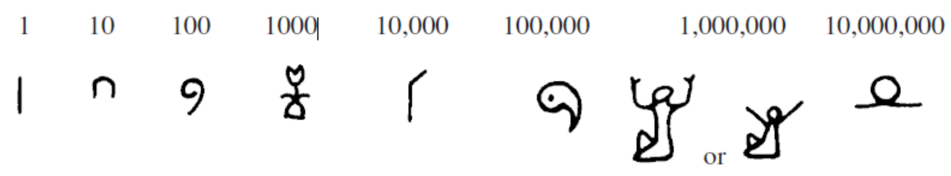
3.1 Zapis brojeva kod Egipćana

3.1.1 Hijeroglifski prikaz brojeva

Nakon ujedinjenja Egipta s jednim vladarom, počeo se graditi opsežan administrativni sustav. Trebao se napraviti popis stanovništva, uzimati porezi, održavati vojska zbog čega su bili potrebni veliki brojevi. Iako su već 3500. g.pr.Kr. imali razvijen brojevni sustav koji im je omogućavao da se brojanje nastavlja u nedogled, s vremenom su unosili nove simbole.

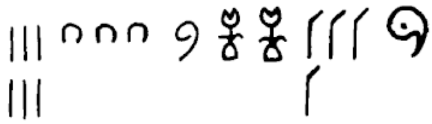
Zapis u slici u kojem svaki znak predstavlja određeni objekt je hijeroglifski sustav pisanja. Pronađen je u jednoj od grobnica u blizini piramide u Gizi. U tom hijeroglifskom sustavu broj 1 je predstavljao okomiti potez ili slika štapa, a znak sličan potkovi je služio kao simbol kojim se zamjenjivalo 10 razdvojenih poteza. Zapravo, egipatski brojevni sustav bio je decimalni i u brojanju je koristio potencije broja 10. Baza brojevnog sustava najčešće je bio 10, posebno u drevnim civilizacijama, što se povezuje s deset prstiju na ljudskoj ruci i navici brojanja na prste.

Za svaku novu potenciju broja 10 koristili su se posebni piktogrami (Slika 1.): zakrivljeno uže je bilo 100, cvijet lotusa 1000, okomit savinuti prst 10000, punoglavac 100000, osoba koja drži ruke prema gore, u čuđenju 1000000 i 10000000 simbol za koji se misli da izgleda kao izlazeće sunce.



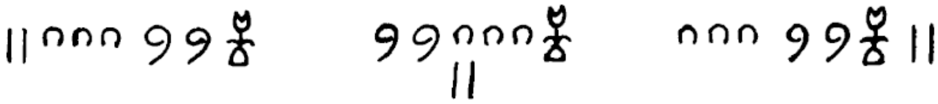
Slika 1: Hijeroglifski prikaz brojeva

Ostali brojevi prikazivali su se istim simbolima i zbrajali odnosno broj prikazan skupom simbola je suma brojeva prikazanih jednim simbolom. Svaki simbol se ponavlja do 9 puta. Najčešće se pisalo s desna na lijevo, a veće jedinice su se pisale prve pa zatim dalje po važnosti. Zapis broja 142136 vidimo na Slici 2.



Slika 2: Hijeroglifski prikaz broja 142136

Povremeno bi se veće jedinice pisale lijevo i zbog toga bi simboli bili okrenuti u onom smjeru u kojem se krenulo pisati. Poprečna mjesta su služila da se simboli pišu u dva ili tri reda, jedan ispod drugog. Kako je za svaku potenciju broja 10 postojao različit simbol, vrijednost broja se sačuvala i nije bila ugrožena poretkom hijeroglifa unutar grupe što možemo vidjeti na Slici 3.



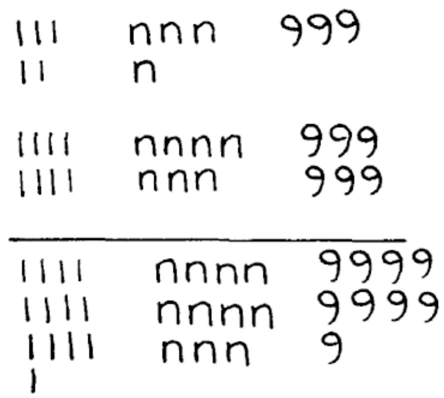
Slika 3: Hijeroglifski prikaz broja 1232

Na temelju toga može se zaključiti da egipatska metoda pisanja brojeva nije bila pozicijska.

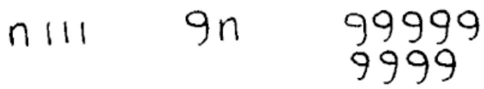
Manje poteškoće u egipatskom brojevnom sustavu je uzrokovalo zbrajanje i oduzimanje. Za zbrajanje bilo je potrebno skupiti simbole i zamijeniti 10 sličnih simbola za prvi veći simbol.

Primjer 1. *Zbroj brojeva* 345 *i* 678.

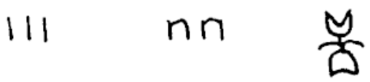
Egipćani bi brojeve 345 i 678 zbrojili na sljedeći način:



Zatim bi uslijedila zamjena kako bi dobili:

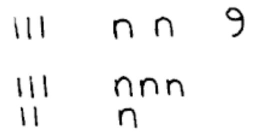


Prethodno navedena zamjena bila bi još pojednostavljena:

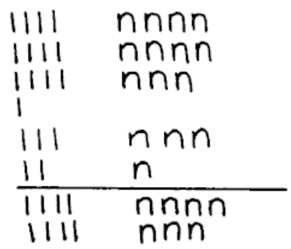


Oduzimanje se radilo obrnutim postupkom. U nekim slučajevima se koristilo "posuđivanje". "Posuđivanje" se koristilo kako bi simbol velikog broja bio zamijenjen za 10 simbola manje vrijednosti i time bi imali dovoljno manjih brojeva za oduzimanje.

Primjer 2. *Razlika brojeva* 123 *i* 45.



Kad se izvrši "posudba", oduzimanje izgleda ovako:

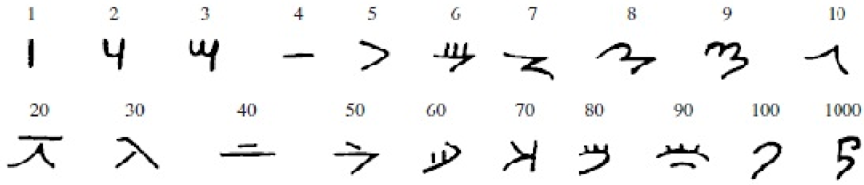


Rješenje je broj 78.

3.1.2 Egipatsko hijeratsko računanje

Zahvaljujući Egipćanima, izumom papirusa, pismo je bilo pojednostavljeno. Među prvima koji su pojednostavili pismo bili su egipatski svećenici. Razvili su manje slikoviti stil kako bi ga bolje prilagodili pisanju olovkom i tintom. U tom takozvanom hijeratskom (svetom) pismu, simboli su rukopisom pisani u kurzivu i na prvi pogled se činilo da nemaju puno veze sa starim hijeroglifima. Zapravo, moglo bi se reći da je hijeratsko pismo sličilo našem rukopisu, a hijeroglifi tiskanim slovima. U hijeroglifskom i hijeratskom pismu, numerički prikaz je aditivan i bazira se na potencijama broja 10. U hijeratskom pismu ponavljajući princip hijeroglifa zamijenjen je korištenjem jednog znaka koji predstavlja više sličnih simbola.

Na primjer broj 5 umjesto skupine od pet crtica prikazivao se znakom $>$. Hijeratski sustav je prikazivao brojeve kao na Slici 4.

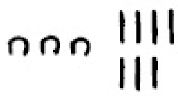


Slika 4: Hijeratski prikaz brojeva

Možemo primjetiti da su znakovi za 1, 10, 100 i 1000 skraćenice piktograma od ranije. U hijeratskom pismu je bilo teško zapamtiti veći broj simbola, ali takav način pisanja bio je brži i sažetiji zbog čega su egipatski pisari opravdavali takav način pisanja.

Primjer 3. *Hijeroglifski i hijeratski prikaz broja* 37.

U hijeroglifima 37 je izgledao:



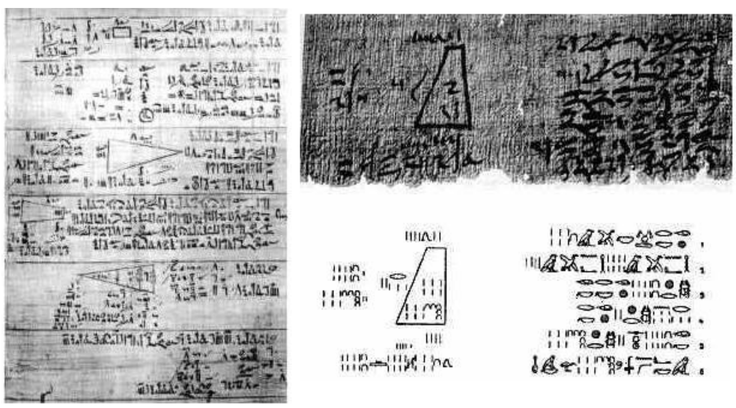
U hijeratskom pismu je zamijenjen s:

3.2 Dva glavna izvora egipatske matematike

Među najstarijim matematičkim izvorima u kojima saznajemo o egipatskoj matematici, bitno je istaknuti Rhindov papirus i Moskovski papirus. U prethodno navedenim papirusima pronađeni su zadaci vezani za praktične probleme, rješavanje linearnih jednadžbi, računanje volumena i još mnogi drugi.

Rhindov papirus dobio je naziv prema Škotu Alexanderu Henryju Rhindu koji ga je kupio u Luxoru 1858. godine. Pisan je hijeratskim pismom, 1650. godine pr. Kr., a pisao ga je pisar Ahmes. Pretpostavlja se da sadržaj predstavlja matematiku poznatu oko 2000. pr. Kr. budući da Ahmes pri pisanju navodi da prepisuje starije dokumente. U originalu papirus je bio zarolan u jednom komadu, imao je dimenzije 18 stopa (5.5 metara) dužine, 13 inča (33 centimetra) širine i sadržavao je 84 zadatka namjenjena školama pisara. Danas se Rhindov papirus nalazi u Londonu u muzeju.

Moskovski papirus poznat je i pod nazivom Goleniščevljev papirus jer ga je pronašao ruski egiptolog Vladimir Goleniščevljev. Goleniščevljev papirus je stariji od Rhindovog papirusa jer potječe iz oko 1850. godine pr.Kr. te je pisan hijeratskim pismom. Duljina papirusa je oko pola metra, širina oko 8 centimetra i sadrži 25 zadataka. Zahvaljujući Goleniščevljevu papirusu pronađena su najveća dostignuća egipatske geometrije.



Slika 5: Rhindov i Moskovski papirus

3.3 Egipatska aritmetika

Egipćani su, osim zbrajanja i oduzimanja, dobro poznavali množenje,dijeljenje i razlomke.

3.3.1 Množenje i dijeljenje

Egipatsko množenje

Budući da se egipatska aritmetika temeljila na zbrajanju, može se zaključiti da je težnja bila olakšati množenje i dijeljenje. Zahvaljujući Rhindovu papirusu, saznajemo kako su Egipćani radili operacije množenja i dijeljenja. Množenje se provodilo udvostručavanjem i zbrajanjem tako da se umnožak dvaju brojeva dobio neprekidnim udvostručavanjem jednog od brojeva te dodavanjem odgovarajućih udvostručenja čime se dobio traženi produkt.

Primjer 4. *Množenje brojeva* 19 *i* 71.

Da bismo pronašli umnožak brojeva 19 i 71, u prvi stupac prvo pišemo broj 1, a u drugi 71. Navedene brojeve paralelno udvostručujemo sve dok u prvom stupcu ne bismo dobili broj veći od 19.

1	71
2	142
4	248
8	568
16	1136

Tada udvostručavanje prestaje, jer bismo daljnjim udvostručavanjem prvog stupca dobili broj 32 koji je veći od broja 19. Brojeve iz prvog stupca, označene kvačicom, zbrajamo te dobivamo broj 19, tj. $19 = 1 + 2 + 16$.

$\surd$	1	71
$\surd$	2	142
	4	248
	8	568
$\surd$	16	1136
ukupno:	19	1349

Zatim zbrajanjem brojeva u desnom stupcu, suprotno brojevima označenim kvačicama, egipatski matematičar bi dobio traženo rješenje 1349, odnosno $1349 = 71 + 142 + 1136 = (1 + 2 + 16) \cdot 71 = 19 \cdot 71$.

Navedena metoda množenja udvostručavanjem i zbrajanjem uvijek je primjenjiva, zato što se svaki pozitivan cijeli broj može zapisati kao zbroj različitih potencija broja 2, odnosno kao zbroj izraza $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ Ovu činjenicu Egipćani vjerojatno nisu dokazali, iako je njihova pouzdanost u ispravnost tog postupka vjerojatno bila temeljena na mnogobrojnim primjerima. Budući da se ovakav način množenja udvostručavanjem i zbrajanjem često koristi među ruskim seljacima, može se nazivati i ruskim množenjem.

Egipatsko dijeljenje

Kod egipatskog dijeljenja, koje opisujemo kao obrnuto množenje, djelitelj se udvostručuje sve dok rezultat udvostručenja ne postane manji od djeljenika.

Primjer 5. *Dijeljenje brojeva* 91 *i* 7.

Da bismo podijelili 91 s 7 potrebno je pronaći x takav da je $7 \cdot x = 91$. Budući da je broj 7 djelitelj, udvostručujemo ga sve dok ne dođemo do broja 91, koji je u ovom slučaju djeljenik. Postupak je prikazan sljedećom tablicom:

	1	7	$\surd$
	2	14	
	4	28	$\surd$
	8	56	$\surd$
ukupno:	13	91	

Iz prethodno navedene tablice uočavamo kako je $7 + 28 + 56 = 91$ te da je kvocijent $1 + 4 + 8 = 13$. Kvocijent odnosno traženi x smo dobili na način da smo odgovarajućim označenim brojevima iz desnog stupca dodavali potencije broja dva.

Međutim, dijeljenje nije uvijek bilo jednostavno kao u prethodno navedenom primjeru i zbog toga su se često morali uvoditi i razlomci. Kako bi podijelili 35 s 8, postupak bi započeo udvostručavanjem djelitelja, dakle broja 8 i trajalo bi sve dok ne bi bilo veće od djeljenika, u ovom slučaju od broja 35.

Zatim, kako bi se dobio potrebni ostatak, djelitelj se morao prepolavljati. Račun bi se zapisao na sljedeći način:

Primjer 6. *Dijeljenje brojeva* 35 *i* 8.

Broj 35 treba podijeliti s 8.

	1	8	
	2	16	
	4	32	$\surd$
	$\frac{1}{2}$	4	
	$\frac{1}{4}$	2	$\surd$
	$\frac{1}{8}$	1	$\surd$
ukupno:	$4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	35	

U računu je vidljivo da je traženi kvocijent $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Primjer 7. *Dijeljenje brojeva* 16 *i* 3.

Dijeljenje broja 16 s brojem 3 možemo zapisati na sljedeći način:

	1	3	$\surd$
	2	6	
	4	12	$\surd$
	$\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{1}{3}$	1	$\surd$
ukupno:	$5 + \frac{1}{3}$	16	

Suma brojeva koji se nalaze u lijevom stupcu i odgovaraju onima koji su označeni s kvačicama daje kvocijent $5 + \frac{1}{3}$. Neobično je što su Egipćani, kako bi dobili jednu trećinu broja prvo pronašli dvije trećine tog broja i onda uzeli polovinu tog rezultata. To možemo vidjeti u više od deset problema na Rhindovom papirusu.

3.3.2 Razlomci

Egipatski matematičar nije mogao pojmiti razlomke poput $\frac{2}{5}$ i kad je trebao računati s razlomcima bio je suočen s mnoštvom poteškoća. Egipatski način računanja priznavao je samo razlomke oblika $\frac{1}{n}$ gdje je n prirodan broj odnosno jedinične razlomke. Jedinični razlomci su se označavali stavljanjem produženog ovalnog znaka iznad hijeroglifa za broj koji se trebao pojaviti u nazivniku. Poseban simbol imao je samo razlomak $\frac{2}{3}$ dok su se svi ostali razlomci morali prikazati kao zbroj jediničnih razlomaka od kojih je svaki imao različit nazivnik.

Na primjer razlomak $\frac{6}{7}$ bi bio zapisan na sljedeći način:

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} \text{ umjesto } \frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}.$$

Oba načina zapisivanja su ispravna, međutim Egipćani su smatrali da je besmisleno i kontradiktorno dopustiti takav način prikazivanja razlomaka. Smatrali su kako postoji samo jedan dio koji može biti sedmina nečega. Jedinične razlomke ekvivalentne $\frac{6}{7}$ bi pronašli postupkom dijeljenja 6 sa 7.

Primjer 8. *Dijeljenje brojeva* 6 *i* 7.

$$\begin{array}{rrlc}
 & 1 & 7 & \\
 & \frac{1}{2} & 3+\frac{1}{2} & \checkmark \\
 & \frac{1}{4} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \checkmark \\
 & \frac{1}{7} & 1 & \\
 & \frac{1}{14} & \frac{1}{2} & \checkmark \\
 & \frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \checkmark \\
\hline
\text{ukupno:} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28} & 6 &
\end{array}$$

Tablica jediničnih razlomaka

Kako Egipćani ne bi morali sve pamtiti, postojale su mnogo tablice koje su olakšavale rastavljanje razlomaka na jedinične razlomke. Na početku Rhindovog papirusa nalazila se tablica na kojoj je bio zapis razlomaka s brojnikom 2 i nazivnikom neparnih brojeva od 5 do 101. Pisar je najprije rekao koji rastav $\frac{2}{n}$ je izabrao, a zatim kako bi pokazao da su navedene vrijednosti točne, radio množenje. Dakle, to bi značilo da je množio odabrane izraze neparnim brojem n kako bi dobio 2. Međutim nigdje ne postoji objašnjenje tehnike kojom se dolazi do rastava.

Općenito pravilo vrijedi za razlomke tipa $\frac{2}{n}$ čiji su nazivnici djeljivi s brojem 3.

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}.$$

Primjer 9. *Primjer takvog razlomka je razlomak* $\frac{2}{15}$ *gdje je* $k = 5$.

Razlomak $\frac{2}{15}$ zapisujemo u obliku zbroja jediničnih razlomaka:

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

Ukoliko razlomak nije oblika $\frac{2}{3k}$, njegov zapis kao zbroj jediničnih razlomaka čitamo iz sljedeće tablice:

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$

$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$

$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$

$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$

$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$

$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$

$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$

$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$

$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$

$\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$

$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$

$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$

$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$

$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$

$\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$

$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$

$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$

$\frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$

$\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$

$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$

$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$

$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$

$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$

$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$

$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$

$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$

$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$

$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$

$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$

$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$

$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$

$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Od pojave prvog prijevoda Rhindusovog papirusa i dešifriranja prethodno navedene tablice, matematičari su pokušavali objasniti pisarevu metodu izrade tablice. Pri tome su se pitali zašto je za $n = 19$ razlomak $\frac{2}{19}$ zapisan kao $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$, a ne na primjer $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}$?

Od mnogih mogućih rastava na jedinične faktore, nije otkriveno određeno pravilo koje daje rezultate u tablici. Otkriveno je samo jedno pravilo i ono proizlazi iz posljednjeg zapisa $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$.

Može se prikazati i općom formulom:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Prema naznačenoj općoj formuli, moguće je izvesti novu $\frac{2}{n}$ tablicu koja se sastoji samo od četveročlanih izraza:

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3} &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{18} \\
\tfrac{2}{5} &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{30} \\
\tfrac{2}{7} &= \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{42} \\
\tfrac{2}{9} &= \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{54}.
\end{aligned}$$

Pisar vrijednost te tablice nigdje nije prihvatio osim u posljednjem slučaju $\frac{2}{101}$, zato što je postojalo mnogo drugih, jednostavnijih načina rastavljanja razlomaka na jedinične razlomke.

Današnjem čovjeku se čini kao da je pisar pratio određena pravila u pisanju listi i prema tome možemo zapaziti sljedeće:

1. Prednost se daje malim nazivnicima, ne većim od 1000.
2. Kod razlomka koji se može zapisati na više načina, prednost ima onaj koji ima najmanji broj jediničnih razlomaka, ali nikad više od 4.
3. Složeni nazivnici su poželjniji od prostih, pogotovo za početni izraz.
4. Manji nazivnici se koriste prvi i nikad ne postoje dva ista.
5. Prvi nazivnik (koji je najmanji) može se povećati ako to znači da će vrijednost ostalih biti smanjena (npr. $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$ ima prednost nad $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$).

Ne možemo odrediti kako ili zašto su baš ova pravila odabrana.

Množenje i dijeljenje razlomaka pokazat ćemo na sljedeća dva primjera.

Primjer 10. *Umnožak razlomaka* $2+\frac{1}{4}$ *i* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$.

Primijećujemo da udvostručavanje $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ dobivamo $3+\frac{2}{7}$ što bi Egipćani zapisali kao $3+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$. Posupak rješavanja prikazujemo na sljedeći način:

$$\begin{array}{lrl}
 & 1 & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} \\
\checkmark & 2 & 3+\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14} \\
 & \frac{1}{7} & 1 \\
\checkmark & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28} \\
\hline
\text{ukupno:} & 2+\frac{1}{4} & 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}
\end{array}$$

Matematičar je znao da ako udvostručimo $\frac{1}{2n}$, dobijemo $\frac{1}{n}$, tako da je traženi produkt izgledao kao $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}$.

Primjer 11. *Problem* 33 *na Rhindusovom papirusu. Primjer malo težeg dijeljenja u koji su uključeni razlomci.*

Trebamo podijeliti 37 s $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$. U standardnoj formi egipatskog dijeljenja, račun počinje ovako:

$$\begin{array}{rl}
1 & 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} \\
2 & 4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\
4 & 8+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14} \\
8 & 18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} \\
16 & 36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}
\end{array}$$

sa vrijednosti $\frac{2}{7}$ zapisane kao $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$. Sad nam je suma $36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ blizu 37. Ali koliko nam nedostaje do 37? Odnosno kako bi pisar rekao: "Što dovršava $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ do 1?". U modernoj notaciji potrebno je dobiti razlomak x za koji vrijedi:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+x=1.$$

Ili ako problem preformuliramo, tražimo brojnik y tako da zadovoljava:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{y}{84}=1,$$

Gdje je nazivnik 84 uzet kao najmanji zajednički višekratnik nazivnika $3, 4,$ i 28. Množeći obje strane prethodne jednadžbe s 84 dobivamo : $56 + 21 + 3 + y = 84$ iz čega slijedi da je $y = 4$. Dakle, ostatak koji mora biti dodan izrazu $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ da bi iznosio 1 je $\frac{4}{84}$ ili $\frac{1}{21}$. Sljedeći korak je odrediti s kolikim iznosom možemo množiti $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ kako bi dobili $\frac{1}{21}$. To znači da trebamo riješiti sljedeću jednadžbu po z:

$$z\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{21}.$$

Množeći s 42 dobivamo $97z = 2$ ili $z = \frac{2}{97}$, što je egipatski pisar napisao da je jednako $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$. Tako cijeli izračun izgleda ovako:

$$\begin{array}{rrll}
 & 1 & 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} & \\
 & 2 & 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} & \\
 & 4 & 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} & \\
 & 8 & 18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} & \\
 & 16 & 36 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} & \surd \\
 & \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} & \frac{1}{21} & \surd \\
\hline
\text{ukupno} & 16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} & 37 &
\end{array}$$

4 Babilonska matematika

Saznanja o matematici u Mezopotamiji, koju su izgradili Sumerani, a kasnije razvili Akađani poznata su pod nazivom Babilonska matematika.

4.1 Zapis brojeva kod Babilonaca

4.1.1 Babilonsko klinasto pismo

Nakon 3000. pr.Kr. Babilonci su razvili sustav pisanja koji se sastojao od piktograma, načina slikovnog pisanja poput hijeroglifa. Zbog ograničenosti materijala koji se koristio za pisanje, piktogrami nisu nalikovali onomu što su predstavljali. Zapisi su morali biti kratki jer se glina brzo sušila, a nakon pečenja bili su praktički neuništivi. U odnosu na Egipćane koji su koristili olovku i tintu za svoje zapise, Babilonci su prvo koristili trsku, a kasnije iglu s trokutastim završetkom. Prilikom korištenja igle s trokutastim završetkom, baza je ostavljala otisak u obliku trokuta, a vertikalni potezi radili su se uz pomoć oštrih krajeva igle. U konačnici bi nastali otisak dao figure koje su podsjećale na klin te je tako i nastao naziv klinasto pismo.

Klinasto pismo je nastalo kao prirodna posljedica odabira gline za pisanje. Pisanje iglom nije dozvoljavalo pisanje zakrivljenih linija što je uzrokovalo da svi simboli budu sastavljeni od klinova (trokuta). Klinovi su bili okrenuti u različitim smjerovima, vodoravni, vertikalni i ukošeni. Međutim, kasnije je dodan još jedan simbol koji je izgledao kao trokutasta zagrada s otvorom prema desno što možemo vidjeti na Slici 6.

Slika 6: Babilonski simboli

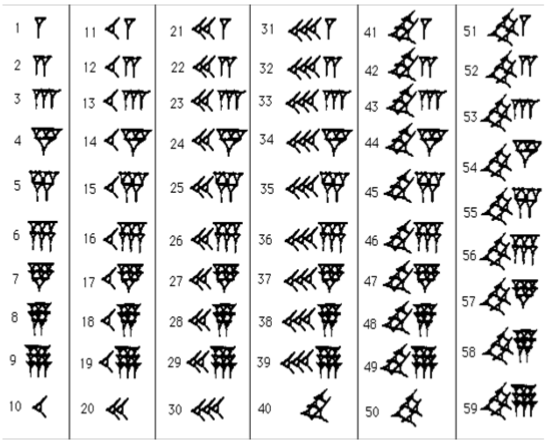
Ove četiri vrste simbola su služile za sve crteže, pošto su ostali bili preteški za crtanje i oduzimali su previše vremena.

4.1.2 Babilonski brojevni sustav

Babilonci su bili jedina kultura prije Grka koja se djelomično služila pozicijskim brojevnim sustavom. Takav se sustav temeljio na ideji mjesnih vrijednosti te je vrijednost simbola ovisila o poziciji koju zauzima u zapisu broja. Određeni niz simbola predstavljao je neki broj, koliko god on mali ili veliki bio, što je zapravo bila velika prednost u odnosu na druge zapise. Babilonska baza nije bila decimalna već seksagezimalna. Na primjer, babilonski 3 25 4 je broj $3 \cdot 60^2 + 25 \cdot 60 + 4 = 12304$.

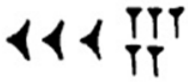
Uporaba seksagezimalnog pozicijskog sustava potvrđena je s dvije ploče pronađene 1854. godine u Senkerahu na Eufratu. Pronašao ih je geolog W.K. Lotus. Ploče su najvjerojatnije iz doba vladavine Hamurabija (2000. g.pr.Kr.) i sadrže kvadrate prirodnih brojeva od 1 do 59 i njihove kubove do broja 32. Ploču s kvadratima je lagano pročitati do 7^2, tj. 49. Nadalje, očekujući 64, na ploči piše 1 4 i tada se dolazi do zaključka da jedinica predstavlja 60. Prethodno navedeni zaključak može se potvrditi i sljedeće navedenim primjerom: nakon 8^2, slijedi 9^2 čija je vrijednost izražena brojem 1 21. Isti princip je prisutan na cijeloj ploči, sve do zadnjeg unosa 58 1, što jedino može biti $58\ 1 = 58 \cdot 60 + 1 = 3481 = 59^2$.

Nedostaci egipatskog načina označavanja su vrlo uočljivi, jer je i za označavanje malih brojeva bio potreban relativno velik broj simbola. Na primjer, za predstavljanje broja 999 trebalo je 27 hijeroglifa također i sa svakom novom potencijom broja 10 trebalo je pronaći novi simbol. Unatoč tome, babilonsko označavanje naglašavalo je uporabu dvo-klinastih simbola. Vertikalni klin (Y) imao je vrijednost 1 i mogao se koristiti 9 puta, dok je klinasti (trokutasti) simbol s otvorom prema desno (<) predstavljao 10 i mogao se koristiti najviše 5 puta. Babilonci su, jednako kao i Egipćani, ostale simbole zapisivali kombinacijom ova dva simbola, a svaki je korišten onoliko puta koliko je bio potreban. Zapis brojeva u babilonskom brojevnom sustavu vidimo na Slici 7.

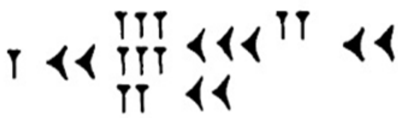


Slika 7: Babilonski brojevni sustav

Prilikom korištenja oba simbola, sa Slike 7 se može uočiti da se simboli koji predstavljaju desetice nalaze lijevo od onih koji predstavljaju jedinice. Na primjer zapis broja 37 se prikazivao na sljedeći način:



Razmak između gustih skupina simbola odgovarao je padajućim potencijama broja 60. Npr. prikaz broja



mogao bi se protumačiti kao: $1 \cdot 60^3 + 28 \cdot 60^2 + 52 \cdot 60 + 20 = 319940$.

Babilonci su ponekad nespretnost svojega sustava olakšali korištenjem znaka za oduzimanje, koji je prikazan na Slici 8.

Slika 8: Znak za oduzimanje

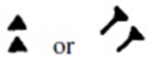
Na primjer broj 19, umjesto korištenja simbola za broj 10 i 9 simbola za 1

mogli su zapisati kao 20-1.

U početku je babilonski pozicijski zapis doveo do proturječnih tumačenja, jer nije postojao simbol za 0 te se nije mogala primjetiti razlika među $1 \cdot 60 + 24 = 84$ i $1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 24 = 3624$, jer su oba broja izgledala jednako:

Prilikom prepisivanja ploče je praznina mogla ostati neprimijećena te tako simbole staviti bliže jedan drugom što bi naposljetku promijenilo pravu vrijednost broja. Samo u pozicijskom sustavu mora biti označeno prazno mjesto, tako da Egipćani nisu imali ovaj problem.

Od 300. g.pr.Kr. Babilonci koriste poseban simbol nazvan razdjelnik



koji je služio kao prazno mjesto među znamenkama. Tako da je broj 84 bilo moguće razlikovati od broja 3624 koji se kasnije prikazivao na sljedeći način:

No, pogreške time nisu završile, jer se babilonski razdjelnik koristio kao sredina, odnosno unutar broja te još uvijek nije postojao simbol koji predstavlja kraj broja. Oko 150. g. aleksandrijski astronom Ptolemej počeo je koristiti *omicron* (o, prvo slovo grčke riječi $o\upsilon\delta\epsilon\nu$, "ništa") u smislu današnje nule, ali ne samo kao sredinu nego i za kraj. Međutim ne postoje dokazi da je Ptolemej o uzimao kao broj s kojim se moglo računati.
Ako nema nule na kraju broja, ne možemo reći je li završno mjesto jedinica ili umnožak broja 60 ili 60^2 ili $\frac{1}{60}$. Vrijednost simbola 2 24 zapisanog klinastim pismom

mogao je predstavljati brojeve $2 \cdot 60 + 24 = 144$ ili $2 \cdot 60^2 + 24 \cdot 60 = 8460$ te broj prikazan pomoću razlomka $2 + \frac{24}{60} = 2\frac{2}{5}$. Tako zapravo Babilonci od davnina nikad nisu koristili pozicijski sustav u pravom smislu.

Pitanje kako je nastao seksagezimalni sustav s vremenom je dobilo puno različitih odgovora. Prema Theonu iz Aleksandrije, 60 je bio najpovoljniji, jer je bio najmanji prirodan broj s većim brojem djelitelja i zato je bilo najlakše za rukovati s njim.

Theonovo je gledište dakle bilo da 60 ima velik broj pravih djelitelja, redom 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, i 30, pa su se određeni korisni razlomci kao što su $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ mogli prikladno prikazivati pomoću prirodnih brojeva 30, 20 i 15:

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0;30,$$
$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 0;20,$$
$$\frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 0;15.$$

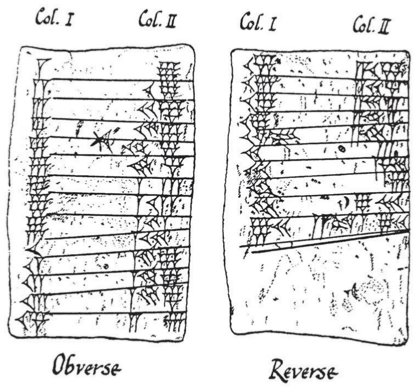
No, drugi navode teoriju da je Babiloncima godina trajala 360 dana i prvo su izabrali veću bazu 360, a kasnije su je spustili na 60. Možda je najbolje objašnjenje da se razvio iz spajanja dvaju naroda od kojih su jedni prihvatili decimalni sustav, dok su drugi imali sustav s bazom 6.

4.2 Babilonske matematičke tablice

U istraživanju babilonske matematike imamo puno manje sreće nego pri istraživanju egipatske matematike. Babilonski način zapisivanja glinenih pločica obeshrabrila je brojne rasprave, jer babilonski zapisi nisu usporedivi sa zapisom na Rhindovom papirusu. Procjenjuje se da danas postoji više od 400 000 babilonskih glinenih pločica koje su većinom veličine dlana, a nalaze se u muzejima raznih zemalja. Od tih 400 000 pločica ili njihovih dijelova, sadržaj 400 pločica vezan je uz matematiku. Njihovo odgonetavanje i interpretacija odvijala se sporo zbog različitih dijalekata i prirodnih promjena u jeziku kroz nekoliko tisuća godina. Iscrpna istraživanja Otta Neugebauera, koja su dosegla vrhunac 30-ih godina 20. stoljeća, otkrila su mnoge matematičke tablice i tekstove, kao i ključne elemente potrebne za čitanje i dešifriranje njihovih sadržaja. Dešifriranje, prevođenje i interpretacija navedenih tablica predstavljali su sasvim novi pogled na Babilonce i njihov doprinos razvoju matematike. Na većini prevedenih tablica uočava se da je babilonska matematika temeljena na iskustvu i kako teži prema teorijskom izražavanju. (Babilonci su prvi došli do nekoliko otkrića, prvo i osnovno Pitagorinog poučka, koje je zapisano u kasnijim matematičkim školama). Temelj babilonskog napretka u matematici se nalazi u jednostavnosti njihova brojevnog sustava. Seksagezimalni zapis omogućio im je da računaju s razlomcima kao s prirodnim brojevima što je dovelo do visoko razvijene algebre. Za Egipćane je takav napredak bio nemoguć, jer je svaki razlomak bio zbroj jediničnih razlomaka zbog kojih je svako računanje i dijeljenje bilo problematično.

Oslobođeni od teškoća sa svojim izvanrednim brojevnim sustavom, Babilonci su postali neumorni sakupljači aritmetičkih tablica od kojih su neke vrijedne divljenja zbog svoje kompleksnosti i veličine. Mnoštvo sačuvanih pločica zapravo su tablice množenja dok se tablice sa zbrajanjem ne pojavljuju. Zahvaljujući analizi više od 200 babilonskih tekstova, može se pretpostaviti da tablice sa zbrajanjem nisu postojale, jer su pisari dovoljno dobro poznavali postupak zbrajanja. S druge strane, postoji mnogo primjera "pločica s nacrtima" na koje su pisari zapisivali izvode raznih računa u procesu rješavanja problema. Iz razloga što je babilonski brojevni sustav bio sustav mjesnih vrijednosti, algoritmi za zbrajanje i oduzimanje, uključujući prenošenje i posuđivanje, bili su slični modernijim verzijama. Na primjer, za zbrajanje $23,37$ $(= 1417)$ i $41,32$ $(= 2492)$ prvo se moralo dodati 37 i 32 da bi se dobilo $1,09$ $(= 69)$. Zapisivalo se 09 i prenijelo 1 u sljedeći stupac. Zatim, $23 + 41 + 1 = 1,05$ $(= 65)$, te krajnji rezultat iznosi $1,05,09$ $(= 3909)$.

Tablice množenja bile su opsežne, budući da je sustav mjesnih vrijednosti temeljen na broju 60. Svaka od tablica davala je popis umnožaka određenog broja, recimo 9, od $1 \cdot 9$ do $20 \cdot 9$, zatim su dale $30 \cdot 9$, $40 \cdot 9$ i $50 \cdot 9$ (Slika 9). Ukoliko je tražen produkt $34 \cdot 9$, jednostavno su se zbrajala dva umnoška: $30 \cdot 9 = 4,30$ $(= 270)$ i $4 \cdot 9 = 36$ kako bi se dobilo $5,06$ $(= 306)$. Za umnožak brojeva s dvije ili tri znamenke seksagezimalnog sustava trebalo se koristiti nekoliko takvih tablica. Nije poznat točan postupak kojim su se Babilonci prilikom takvih množenja koristili, ali je moguće da je bio sličan onom koji i mi koristimo.



Slika 9: Babilonska tablica množenja brojem 9

Brojne tablice daju kvadrate brojeva od 1 do 50, zatim njihove kubove, druge i treće korijene. Tablica koja se nalazi u Berlinskom muzeju daje tablicu ne samo za n^2, n^3 za $n = 1, 2, \ldots, 20, 30, 40, 50$ već i za sume oblika $n^2 + n^3$. Nagađa se da su se koristile za rješavanje kubnih jednadžbi koje su se mogle reducirati na oblik $x^3 + x^2 = a$. Druga grupa tablica bavi se recipročnim brojevima (Tablica 1). Tablica se sastoji od dva stupca brojeva kojima je umnožak svakog para brojeva u pojedinom retku uvijek 60. Odnosno, svaki par sastoji se od lijevog stupca i seksagezimalnog recipročnog broja iz desnog stupca.

Tablica 1: Tablica recipročnih brojeva

4	15
5	12
6	10
8	$7;30$
9	$6;40$
10	6
12	5
15	4
16	$3;45$
18	$3;20$

Može se pomisliti da su Babilonci za cjelokupan sustav tablica imali algoritam za svaki pojedinačni cijeli broj od 2 do 59. No, to ipak nije bio slučaj. Ove tablice imaju određene rupe, tj. nedostaju brojevi 7, 11, 13, 14, 17 i još neki. Razlog tome je što su jedino konačni seksagezimalni razlomci bili razumljivi Babiloncima, te su takve brojeve zvali regularni ili pravilni brojevi.

Što se tiče dijeljenja, Babilonci su dijeljenje radili na sljedeći način: oni su a dijeljeno sa b računali tako da su a pomnožili recipročnim brojem broja b, tj, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Nakon što su pronašli recipročan broj (ili pomoću tablica ili direktnim računom), trebali su ga pomnožiti s djeljenikom.

Primjer 12. *Dijeljenje brojeva* 7 *i* 2.

$7 : 2 = 7 \cdot \frac{1}{2}$, tj. $7(0;30) = 0;210 = 3;30$.

4.2.1 Rješavanje jednadžbi

Postoji mnoštvo glinenih pločica koji pokazuju kako su Babilonci bili upoznati s formulama za rješavanje linearnih i kvadratnih jednadžbi.

Primjer 13. Primjer iz starog babilonskog teksta VAT 8389.
Jedno od dva polja iznosi $\frac{2}{3}$ *sila po sar, drugo iznosi* $\frac{1}{2}$ *sila po sar, gdje su sila i sar mjere zapremnine i površine, tim redom. Iznos prvog polja je bio 500 sila više nego drugi, površine dvaju polja su zajedno iznosile 1800 sar. Koliko je veliko svako polje?*

Taj problem je riješen pomoću sustava dviju jednadžbi gdje x i y predstavljaju nepoznate površine:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{2}y &= 500 \\ x + y &= 1800. \end{aligned}$$

Pisar je prvo pretpostavio da su x i y jednaki 900. Zatim je izračunao da je $\frac{2}{3} \cdot 900 - \frac{1}{2} \cdot 900 = 150$. Uočavamo da je razlika između željenog broja 500 i izračunatog 150 jednaka 350. Kako bi prilagodio rješenja, pisar je pretpostavio da svaka rastuća vrijednost za x te pripadna padajuća vrijednost za y, daje porast "funkciji" $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$ od $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$. Radi toga je trebao riješiti samo jednadžbu $\frac{7}{6}s = 350$ da bi dobio traženi porast $s = 300$. Dodamo li broju 900 broj 300 dobijemo da je $x = 1200$, zatim y izračunamo iz $x + y = 1800$. Slijedi da je $y = 600$.

Primjer 14. Problem koji je prikazan na pločici YBC 4652.
Pronašao sam kamen, ali ga nisam izvagao. Nakon toga sam dodao jednu sedminu i jednu jedanaestinu (cjelokupne težine) i težio je 1 mina (= 60*gin*). *Kolika je početna težina kamena?*

Zapišemo li problem u obliku jednadžbe dobijemo sljedeće:

$$\left(x + \frac{x}{7}\right) + \frac{1}{11} \cdot \left(x + \frac{x}{7}\right) = 60.$$

Pisar je rješenje dobio koristeći metodu lažne pretpostavke, koje iznosi $x = 48\frac{1}{8}$. Nadalje, pretpostavio je da $y = x + \frac{x}{7} = 11$ te uvrstio u početnu jednadžbu, u kojoj je umjesto 60 dobio da je $y + \frac{1}{11}y = 12$, što je 5 puta manje od polaznog rezultata. Zatim, da bi riješio $x + \frac{x}{7} = 55$ pretpostavio je $x = 7$, te dobio $7 + \frac{7}{7} = 8$ umjesto 55. Dakle, zadnji korak bi bio pomnožiti nepoznanicu $x = 7$ s $\frac{55}{8}$ kako bi dobio $\frac{385}{8} = 48\frac{1}{8}$, što je točan odgovor.

Primjer 15.
Dodao sam površinu i dvije trećine stranice kvadrata i dobio 0;35. Kolika je stranica kvadrata?

Navedeni problem može se lako riješiti ukoliko zamijenimo riječi dužina i širina sa x i y. U modernoj notaciji problem bi glasio:

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{35}{60}.$$

Detalji rješenja opisani su riječima i glase :
Uzmeš 1, koeficijent (od x). Dvije trećine od 1 je 0;40. Polovinu toga pomnožiš s 0;20 i rezultatu dodaš 0;35. Zatim izračunaš drugi korijen iz dobivenog rezultata. Od toga svega oduzmeš 0;20 i dobiješ da je 0;30 stranica kvadrata.
Ako prethodno navedeno prevedemo u modernu algebarsku notaciju, koraci nam govore:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\tfrac{0;40}{2})^2 + 0;35} - \tfrac{0;40}{2} \\ &= \sqrt{0;6,40 + 0;35} - 0;20 \\ &= \sqrt{0;41,40} - 0;20 \\ &= 0;50 - 0;20 \\ &= 0;30. \end{aligned}$$

Iz prethodnog primjera zaključujemo da su Babilonci koristili formulu koja je ekvivalentna opće poznatom pravilu za rješavanje kvadratne jednadžbe oblika
$x^2 + ax = b$:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}.$$

Iako babilonski matematičari nisu imali "kvadratnu formulu" koja je rješavala sve kvadratne jednadžbe, upute u konkretnim primjerima su toliko sistematične tako da možemo biti poprilično sigurni kako ima je namjera bila pokazati nekakav općeniti postupak.

Povijesno gledano, kvadratne jednadžbe je prigodnije nazvati pravokutnim, jer su problemi pravokutnika doveli do takvih jednadžbi.
Problem povezanosti opsega pravokutnika i površine sistematično se istraživao od davnina. U antičkom svijetu proširila se pogrešna pretpostavka da površina nekog lika u ravnini ovisi samo o njegovom opsegu, ljudi su vjerovali da isti opseg uvijek zauzima istu površinu. Vojni zapovjednici su procjenjivali broj vojnika protivničke vojske u skladu sa opsegom njihovog kampa, a mornari veličinu otoka po vremenu koje im treba da ga obiđu.
Tipičan problem babilonske matematike bio je sljedeći:

Primjer 16.
Ako je dan poluopseg $x+y=a$ i površina $x \cdot y=b$ nekog pravokutnika, treba pronaći dužinu x i širinu y.

U matematičkim zapisima toga vremena nigdje nije pisao način na koji su došli do rješenja. Svoja su saznanja Babilonski matematičari temeljili na iskustvu te se koristili tablicama. Vrlo vjerojatno su konstruirali tablice gdje su površine mogle poprimiti različite vrijednosti dok je opseg bio konstantan.
Za pravokutnik čiji je poluopseg $x+y=a=20$, površinu su izračunali za različite vrijednosti $x=\frac{a}{2}+z$ i $y=\frac{a}{2}-z$, gdje je z broj od 0 do 9.

	$x=\frac{a}{2}+z$	$y=\frac{a}{2}-z$	$b=xy$	$(\frac{a}{2})^2-b$
$z=0$	10	10	100	0
$z=1$	11	9	99	1^2
$z=2$	12	8	96	2^2
$z=3$	13	7	91	3^2
$z=4$	14	6	84	4^2
$z=5$	15	5	75	5^2
$z=6$	16	4	64	6^2
$z=7$	17	3	51	7^2
$z=8$	18	2	36	8^2
$z=9$	19	1	19	9^2

Iz tablice vidimo da se površina smanjuje kako z raste, a razlika između $(\frac{a}{2})^2-b$ je uvijek jednaka kvadratu od z, tj. $(\frac{a}{2})^2-b=z^2$.

U jednom trenutku je Babiloncima sigurno sinulo kako bi mogli obrnuti postupak i dobiti z iz vrijednosti $(\frac{a}{2})^2 - b$. Iz toga slijedi da je $z = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$, te uvrštavanjem dobivamo:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Istu ideju možemo iskoristiti ako je dana razlika $x-y$ umjesto sume $x+y$. Analogno nastavljajući Babilonci bi riješili sustav

$$x - y = a$$

$$x \cdot y = b$$

tako što bi stavili $x = z + \frac{a}{2}$ i $y = z - \frac{a}{2}$ iz čega bi dobili rješenje:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}, \quad y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}.$$

Dvije karakteristike babilonskih problema

Kompliciranije algebarske probleme su Babilonci koristeći različite načine nastojali reducirati na probleme oblika

$$x \pm y = a$$

$$x \cdot y = b$$

koji ćemo zvati standardni oblik.

Standardni oblik babilonskog problema sastojao se od uvjeta $x \cdot y = b$ koji se smatrao fiksnim, dok je druga jednadžba varirala kako bi se došlo do jednostavnijeg izraza za x i y.

Primjer 17. *Riješite sustav:*

$$\begin{aligned} xy &= 600 \\ (x+y)^2 + 120(x-y) &= 3700. \end{aligned}$$

Očito su Babilonci bili svjesni algebarskog identiteta $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ zbog čega su mogli napisati da je $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 2400$. Kada uvrstimo ovu supstituciju u drugu jednadžbu ona postaje $(x-y)^2 + 120(x-y) = 1300$ što je kvadratna jednadžba po $x-y$. Primjena njihove kvadratne formule daje nam vrijednost $x-y$:

$$x - y = \sqrt{\left(\tfrac{120}{2}\right)^2 + 1300} - \tfrac{120}{2} = \sqrt{4900} - 60 = 70 - 60 = 10.$$

Babilonski matematičari tada su trebali riješiti sljedeći sustav jednadžbi s kojim nisu imali problema:

$$\begin{aligned} xy &= 600 \\ x - y &= 10. \end{aligned}$$

Daljnjim rješavanjem došli su do rješenja $x = 30$ i $y = 20$.

Osim kvadratne jednadžbe oblika $x^2 + ax = b$, Babilonci su znali rješiti i kvadratnu jednadžbu oblika $x^2 = ax + b$ čije je rješenje dano formulom $x = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b} + \frac{a}{2}$, što ćemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 18. U ovom primjeru pokazat ćemo problem u kojem se trska, uobičajena mjera dužine, nepoznate duljine koristi za mjerenje dužine i širine pravokutnog polja.
Imam trsku. Ne znam koja joj je dimenzija. Slomio sam joj jedan cubit i hodao 60 puta njenom dužinom. Vratio sam joj ono što sam slomio i onda hodao 30 puta njenom širinom. Površina je 6,15. Kolika je dužina trske?

Uobičajena jedinica za mjerenje duljine zemlje bila je *ninda* koja je iznosila 12 *cubita*, znači $\frac{1}{12}$ ninde je otkinuta od trske nepoznate duljine. Ako je mjera dužine bila x, tada je dužina polja $60 \cdot (x - \frac{1}{12})$, jer je polje 60 puta dugačko kao skraćena mjera

dužine. Kada vratimo *cubit*, širina polja je 30 puta te duljine cijele mjere dužine, tj. $30 \cdot x$. Budući da je površina 375, iz toga slijedi $30x \cdot 60(x - \frac{1}{12}) = 375$.
Time dolazimo do sljedeće kvadratne jednadžbe

$$1800x^2 = 150x + 375.$$

Množeći prethodnu jednadžbu sa 1800, autor pločice dobio je

$$(1800x)^2 = 150 \cdot (1800x) + 375 \cdot 1800.$$

Ako primjenimo supstituciju $y = 1800x$ dobivamo

$$(y)^2 = 150y + 375 \cdot 1800.$$

Uočimo li da je prethodna jednadžba oblika $y^2 = ay + b$, do rješenja ćemo doći koristeći formulu $y = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b} + \frac{a}{2}$.
Uvrštavanjem pripadnih brojeva u formulu dobivamo

$$y = \sqrt{\left(\frac{150}{2}\right)^2 + 375 \cdot 1800} + \frac{150}{2} = 825 + 75 = 900.$$

Vraćanjem u supstituciju dobivamo da je $x = \frac{1}{2}$ *ninda*.

4.2.2 Pitagorin teorem

Veliku važnost u babilonskoj matematici imala je pločica Plimpton 322 (Slika 10). Analizom ove pločice ustanovljeno je da su babilonski matematičari bili upoznati s Pitagorinim teoremom čak tisuću godina prije Pitagore.

Slika 10: Plimpton 322

Teorem 1 (Pitagorin teorem) *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

Odnosno, ako s a i b označimo katete, a s c duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta tada vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$.

Sačuvani dio pločice se sastoji od četiri stupca brojeva. Brojevi na ploči su prikazani Tablicom 2., prikazani su u suvremenom decimalnom obliku s jednim dodatnim stupcem, b, koji nije prikazan na pločici. Dva stupca označena s a i c, koji predstavljaju kraću katetu i dijagonalu pravokutnog trokuta, sadrže u svakom redu dva od tri broja pitagorinih trojki. Pitagorina trojka predstavlja uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Četvrti stupac sadrži brojeve $1, 2, \ldots, 15$, kojima su zapravo numerirani redovi. Pretpostavlja se da ostali stupci lijevo nedostaju zbog oštećenja pločice.

Tablica 2: Pločica Plimpton 322

$(\frac{c}{b})^2$	a	c		b
1.983402778	119	169	1	120
1.949158552	3367	4825	2	3456
1.918802127	4601	6649	3	4800
1.886247907	12709	18541	4	13500
1.815007716	65	97	5	72
1.785192901	319	481	6	360
1.719983674	2291	3541	7	2700
1.692709418	799	1249	8	960
1.642669444	481	769	9	600
1.586122566	4961	8161	10	6480
1.5625	45	75	11	60
1.48941684	1679	2929	12	2400
1.450017361	161	289	13	240
1.43023882	1771	3229	14	2700
1.387160494	56	106	15	45

Postavlja se pitanje kako su Babilonci došli do brojeva a, b i c koji zadovoljavaju jednadžbu $a^2 + b^2 = c^2$. Vrijednosti koje se nalaze na pločici Plimpton 322 su toliko velike da ih je bilo nemoguće dobiti pogađanjem.

Iz prvog stupca tablice koji sadrži vrijednosti $\frac{c^2}{b^2}$ uočavamo da je relaciju $a^2+b^2=c^2$ moguće svesti na

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1.$$

Ako uvedemo supstitucije $\alpha = \frac{c}{b}$ i $\beta = \frac{a}{b}$, tada gornja formula postaje

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1.$$

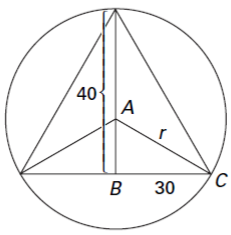
Problem bi se tada svodio na konstrukciju pravokutnog trokuta s katetama α i β gdje je $\alpha^2-\beta^2=1$. Bitan korak je da prepoznamo kako se zadnja jednadžba može prikazati u obliku $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=1$.
Kako je produkt ta dva broja 1, zaključujemo da su oni recipročni. Budući da su α i β racionalni brojevi iz toga slijedi da je jedan $\frac{m}{n}$, a drugi $\frac{n}{m}$ gdje su m i n cijeli brojevi.
Iz $\alpha+\beta=\frac{m}{n}$ i $\alpha-\beta=\frac{n}{m}$ vidimo da ako ove dvije jednadžbe zbrojimo i oduzmemo dobivamo sljedeće:

$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right).$$

Dakle, $\alpha = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ i $\beta = \frac{m^2-n^2}{2mn}$. Kako je $c=\alpha\cdot b$ te $a=\beta\cdot b$, tada stavimo da je $b=2mn$ kako bi dobili rješenje u skupu cijelih brojeva.
Nadalje, slijedi da je

$$a = m^2-n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2+n^2.$$

Primjer 19. Primjer s pločice TMS 1 pronađene u Susi u Iranu.
Izračunjate polumjer kruga opisanog oko jednakokračnog trokuta visine 40 i osnovice 60.



Primjenjujući Pitagorin teorem na trokut ABC, čija je hipotenuza traženi polumjer, dobivamo:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$(40 - r)^2 + 30^2 = r^2.$$

Daljnjim rješavanjem dolazimo do rješenja $r = \frac{2500}{80}$, tj. $r = 31;15$.

5 Zaključak

Postojeći papirusi i ploče koji sadrže egipatsku i babilonsku matematiku, općenito su obrazovni dokumenti koji su se koristili za prenošenje znanja od jednog pisara do drugog. Njihova svrha bila je pružiti pisarima listu primjera problema čija se rješenja mogu primijeniti i u drugim situacijama. Učenje matematike za njih bilo je učenje kako odabrati i oblikovati prikladni algoritam te zatim ovladati aritmetičkim tehnikama koje su bile potrebne za provođenje algoritama kako bi se riješio novi problem. Objašnjenje koje stoji iza algoritama se očito prenosilo usmeno, tako da su matematičari danas primorani nagađati o njihovom podrijetlu.

Iako je dugačak popis kvadratnih problema na nekim od babilonskih pločica dan kao problem iz "stvarnog svijeta", bilježimo da su ti problemi zapravo izmišljeni kao što su to i oni koje nalazimo i u suvremenim tekstovima iz algebre. Da su autori znali da su izmišljeni dokazuje činjenica da tipično svi problemi danog popisa daju isti odgovor. No kako su problemi često rasli u kompleksnosti, događa se da su pločice korištene za razvijanje tehnika rješavanja. Drugim riječima, nije bilo toliko važno rješavati jednadžbe budući da je malo situacija zahtijevalo njihovu primjenu. Ono što je bilo važno je da učenici općenito razviju vještine rješavanja problema odnosno onih koji se mogu iskoristiti u svakodnevnim problemima. Ove vještine nisu uključivale samo dobro poznavanje algoritama već i znanje kako i kada preoblikovati te metode i kako svesti kompliciranije probleme na one već riješene.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014.

[2] D. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The McGraw-Hill Companies, 2007.

[3] D. Jankov, *Egipatski razlomci*, Osječki matematički list 11 (2011), 11-18.

[4] V. J. Katz, *The History of Mathematics: An Introduction, Third Edition*, University of the District of Columbia, 2009.

Sažetak

U radu su opisana najvažnija matematička dostignuća Egipćana i Babilonaca te je navedeno da se matematika počela razvijati zbog praktičnih ljudskih potreba. Zatim se upoznajemo s njihovim načinom zapisivanja brojeva i brojevnim sustavima kojima su se koristili. Također je kroz brojne primjere prikazano kako su zbrajali, oduzimali, množili i dijelili te zapisivali razlomke.

Ključne riječi: egipatska matematika, babilonska matematika, zapis brojeva, brojevni sustav, zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, razlomak, linearna jednandžba, kvadratna jednadžba.

Summary

This master thesis describes the most important mathematical achievements of Egyptians and Babylonians and highlights the fact that mathematics started to develop as a result of practical human needs. In this master thesis we also meet the methods these civilizations used to write the numbers and their number systems. Through many examples, there are described the methods of addition, subtraction, multiplication and division the numbers, as well as writing the fractions.

Key words: Egyptian mathematics, Babylonian mathematics, numerical notation, number system, addition, subtraction, multiplication, division, fraction, linear equation, quadratic equation.

Životopis

Zovem se Ružica Majstorović. Rođena sam 13. prosinca 1989. godine u Vinkovcima. Živim u Šiškovcima gdje sam pohađala prva četiri razreda osnovne škole, a potom ostatak osnovnoškolskog obrazovanja nastavljam u Osnovnoj školi Matije Antuna Reljkovića u Cerni. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Opću gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima. Godine 2008. upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.