Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Zlatko Trstenjak

Određeni integral i primjene u geometriji

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Zlatko Trstenjak

Određeni integral i primjene u geometriji

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2018.

Sažetak

Tema ovog završnog rada je određeni integral i neke njegove primjene u geometriji. U prvom dijelu rada definirat ćemo određeni integral, iskazati najbitnije teoreme o integrabilnosti funkcije, povezati pojam neodređenog integrala sa problemom rješavanja određenog integrala te uz primjere pokazati osnovne metode za rješavanja određenog i neodređenog integrala. U drugom dijelu rada opisat ćemo kako se određeni integral može primijeniti za rješavanje geometrijskih problema kao što su površina lika, volumen rotacijskog tijela i duljina luka krivulje.

Ključne riječi

Problem površine, Darbouxova suma, određeni integral, Newton-Leibnizova formula, površina lika u ravnini, duljina luka krivulje, volumen rotacijskog tijela, površina rotacijske plohe

A definite integral and its applications in geometry

Summary

The theme of this final work is a definite integral and some of its applications in geometry. In the first part of the paper we will define a definite integral, present the most important theorems about the function integrability, give the relationship between an indefinite integral and the problem of solving definite integrals, and through the different types of examples illustrate the basic methods of solving definite and indefinite integrals. In the second part we will describe how to apply a definite integral in solving of geometric problems such as: area of plane shapes, finding the volume of a solid revolution and the length of a curve.

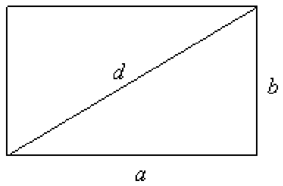
Key words

The area problem, the upper and lower Darboux sum, a definite integral, the fundamental theorem of calculus, area of plane shapes, the length of a curve, the volume of a solid revolution

Sadržaj

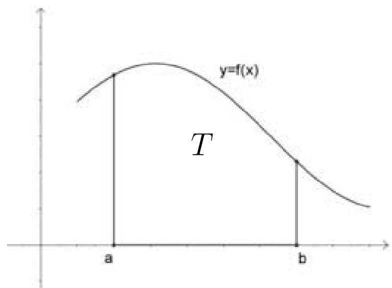
Uvod

Računanje površine pravilnih likova poput kvadrata, pravokutnika, trokuta, itd. jedan je od osnovnih problema u matematici. Rješenja su dobro poznata: površina pravokutnika jednaka je umnošku dvije njegove susjedne stranice; površina pravokutnog trokuta jednaka je polovini umnoška njegovih kateta. To zaključujemo tako da pravokutni trokut "proširimo" do pravokutnika, čiju površinu znamo izračunati te uočimo kako naš pravokutni trokut zauzima točno pola tako dobivene površine. To je prikazano na Slici 1.



Slika 1

Površine mnogih pravilnih likova računaju se tako da ih na neki način svedemo na pravokutnike.
Međutim, što ako naš lik nije pravilan? Primjerice, pogledajmo nenegativnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i skup točaka ravnine omeđen grafom funkcije f, pravcima $x = a$, $x = b$ i x-osi. Takav skup točaka zove se pseudotrapez i prikazan je na Slici 2. Zbog zakrivljenosti grafa funkcije f, taj skup ne možemo rastaviti na pravokutnike.



Slika 2: Pseudotrapez T

Međutim, možemo pokušati nešto slično. Zbog omeđenosti funkcije f postoje realni brojevi $m \geq 0$ i $M \geq 0$ takvi da je $m \leq f(x) \leq M$, za svaki $x \in [a, b]$. Ako uzmemo da je $f(x) = m$, za svaki $x \in [a, b]$, dobivamo pravokutnik p upisan našem pseudotrapezu T. Ako je $f(x) = M$, za svaki $x \in [a, b]$, dobivamo pravokutnik P opisan našem pseudotrapezu T. Time smo dobili jednu aproksimaciju površine pseudotrapeza T. Uočimo kako će ona biti veća od površine pravokutnika p i manja od površine pravokutnika P. Koliko je naša aproksimacija točna ovisi o razlici između M i m.
U nastavku ćemo vidjeti kako poboljšati aproksimaciju površine pseudotrapeza T, a to će nas dovesti do definicije *određenog integrala*.
Korištene grafičke ilustracije preuzeli smo sa web stranica `www.link-elearning.com`, `www.holo.hr`, `https://repozitorij.mathos.hr`

1 Određeni integral

1.1 Problem površine i definicija određenog integrala

Kao što smo rekli u uvodu, površinu pseudotrapeza T možemo aproksimirati pomoću površine pravokutnika p i P. Pravokutnik p ima stranice duljine m i $(b-a)$. Tada njegova površina iznosi $m(b-a)$. Lako zaključujemo kako površina pravokutnika P iznosi $M(b-a)$. Kako je $p \subseteq T \subseteq P$, zbog aditivnosti površine vrijedi

$$m(b-a) \leq P(T) \leq M(b-a), \tag{1}$$

gdje je $P(T)$ površina psudotrapeza T.
Što je razlika $M(b-a) - m(b-a)$ manja, to je aproksimacija (1) bolja.
Ukoliko (1) ne daje zadovoljavajuću aproksimaciju, možemo ju poboljšati na sljedeći način: Na segmentu $[a,b]$ odaberimo bilo koji broj i označimo ga s x_1. Tako smo pseudotrapez T podijelili na dva pseudotrapeza T_1 i T_2, gdje je $[a,x_1]$ baza od T_1, a $[x_1,b]$ baza od T_2. Kako je f omeđena na segmentu $[a,b]$, omeđena je i na segmentima $[a,x_1]$ i $[x_1,b]$. Stoga postoje nenegativni realni brojevi m_1, M_1, m_2, M_2 takvi da je m_1 najmanja i M_1 najveća vrijednost funkcije f na segmentu $[a,x_1]$, odnosno m_2 najmanja i M_2 najveća vrijednost funkcije f na segmentu $[x_1,b]$. Analogno kao i ranije, dobivamo:

$$m_1(x_1-a) \leq P(T_1) \leq M_1(x_1-a), \tag{2}$$

$$m_2(b-x_1) \leq P(T_2) \leq M_2(b-x_2). \tag{3}$$

Znamo da je $P(T) = P(T_1) + P(T_2)$. Tada iz (2) i (3) dobivamo:

$$m_1(x_1-a) + m_2(b-x_1) \leq P(T) \leq M_1(x_1-a) + M_2(b-x_2). \tag{4}$$

Neka je p_1 pravokutnik upisan pseudotrapezu T_1 i p_2 pravokutnik upisan pseudotrapezu T_2. Kako je $T = T_1 \cup T_2$, slijedi da je $p_1 \cup p_2$ skup točaka upisan pseudotrapezu T. Pošto je m najmanja vrijednost funkcije f na segmentu $[a,b]$, vrijedi $m \leq m_1$ i $m \leq m_2$. Iz toga zaključujemo da je $P(p_1 \cup p_2) = m_1(x_1-a) + m_2(b-x_1) \geq P(p) = m(b-a)$. Slično dobivamo i $P(P_1 \cup P_2) \leq P(P)$, gdje je P_1 pravokutnik opisan pseudotrapezu T_1, odnosno P_2 pravokutnik opisan pseudotrapezu T_2. Tako je aproksimacija (4) bolja od aproksimacije (1).

Još precizniju aproksimaciju možemo dobiti podijelimo li segment $[a,b]$ na još više podsegmenata. Pogledajmo kako bismo proveli taj postupak.

Definicija 1. *Konačan skup točaka $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sa svojstvom*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

*nazivamo **razdiobom** segmenta $[a,b]$. **Dijametrom** razdiobe P nazivamo realan broj*

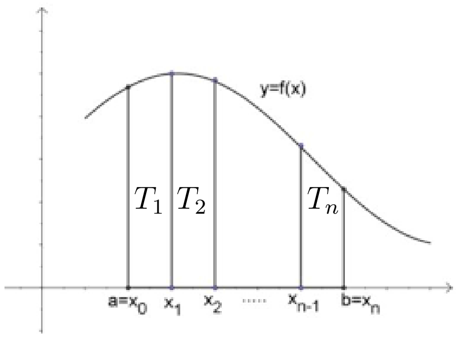
$$\delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

*Za razdiobu P' kažemo da je **profinjenje** razdiobe P ako je $P \subseteq P'$.*

Primjer 1. *Neka je* $I = [a, b]$ *i* $n \in \mathbb{N}$. *Razdiobu* $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *nazivamo ekvidistantna razdioba segmenta* $[a, b]$ *ako vrijedi*

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n\}$ razdioba segmenta $[a, b]$. Pravcima $x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_n$ podijelimo pseudotrapez T na pseudotrapeze $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tako da je $[x_{i-1}, x_i]$ baza pseudotrapeza T_i, $i = 1, \ldots, n$, kao što je prikazano na Slici 3.



Slika 3

Ponovno, omeđenost funkcije f na segmentu $[a, b]$ povlači omeđenost funkcije f na svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ pa postoje nenegativni realni brojevi m_i, M_i takvi da je

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), i = 1, \ldots, n.$$

Zato možemo provesti postupak kao ranije i tada dobivamo sljedeću aproksimaciju površine pseudotrapeza T:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \leq P(T) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}). \tag{5}$$

Što je n veći, donja ograda aproksimacije (5) će rasti, a gornja padati, odnosno *težiti* će prema jednom broju. Zato površinu pseudotrapeza T možemo izračunati na sljedeći način:

$$P(T) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}). \tag{6}$$

Odaberimo sada proizvoljne točke ξ_i na svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Kako je m_i infimum, odnosno M_i supremum funkcije f na podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$, vrijedi

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Također, kako je $m \leq f(x) \leq M$, za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Kako bismo definirali određeni integral, definiramo:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \\ S(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \\ \sigma(f,P,\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Broj $s(f,P)$ nazivamo *donja*, a broj $S(f,P)$ *gornja Darbouxova suma.*
Broj $\sigma(f,P,\{\xi_1,\ldots,\xi_n\})$ nazivamo *integralna suma.*
Pomnožimo li nejednakost (7) s $(x_i - x_{i-1})$ te sumiramo li po svim i-ovima od 1 do n dobivamo

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq \sigma(f,P,\xi_1,\ldots,\xi_n) \leq S(f,P) \leq M(b-a). \tag{8}$$

Promotrimo sada skupove

$$A = \{s(f,\rho); \rho \text{ razdioba od } [a,b]\} \text{ i } B = \{S(f,\rho); \rho \text{ razdioba od } [a,b]\}.$$

Iz (8) vidimo da je $m(b-a)$ minoranta skupa B te $M(b-a)$ majoranta skupa A, što znači da postoje supremum skupa A i infimum skupa B.

Definicija 2. ***Donji Riemanov integral*** *funkcije f na $[a,b]$ definira se kao*

$$\int_{-} f = \sup\{s(f,\rho) : \rho \textit{ razdioba od } [a,b]\}.$$

Definicija 3. ***Gornji Riemanov integral*** *funkcije f na $[a,b]$ definira se kao*

$$\int^{-} f = \inf\{S(f,\rho) : \rho \textit{ razdioba od } [a,b]\}.$$

Teorem 1 (vidi [3])**.** *Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $[a,b]$, onda je*

$$\int_{-} f \leq \int^{-} f. \tag{9}$$

Sada možemo definirati određeni integral.

Definicija 4. *Za omeđenu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je $\mathbb{R}$-integrailna ako je $\int_{-} f = \int^{-} f$. Taj broj tada nazivamo integral, Riemanov integral ili određeni integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označavamo*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Funkciju f nazivamo integrand ili podintegralna funkcija, $[a, b]$ područje integracije, x varijabla po kojoj integriramo, a donja, b gornja granica integracije.
Po definiciji uzimamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{ i } \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ako je f integrabilna na segmentu $[a, b]$, onda površinu pseudotrapeza $P(T)$ definiramo kao

$$P(T) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.2 Osnovni teoremi i svojstva određenog integrala

Navedimo sada nužan i dovoljan uvjet integrabilnosti omeđene funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Teorem 2 (vidi [3])**.** *Omeđena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna na segmentu $[a, b]$ onda i samo onda ako za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[a, b]$ takva da je $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.*

Dokaz teorema može se vidjeti u [3].
Prethodni teorem koristan je za dokaz sljedećeg važnog rezultata. Prije no što ga iskažemo, prisjetimo se definicija:

Definicija 5. *Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je neprekidna u točki $a \in D$ ako:*
Heine: *za svaki niz (a_n) iz D takav da je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.*
Cauchy: *za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$(x \in D; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Kažemo da je funkcija f neprekidna na D ako je ona neprekidna u svakoj točki iz D.

Definicija 6. *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ jednoliko ili uniformno neprekidna na skupu D, ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$(x_1, x_2 \in D; |x_1 - x_2| < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2) < \epsilon|).$$

Ako je funkcija f uniformno neprekidna na skupu D, onda je i neprekidna na skupu D, ali neprekidnost funkcije f općenito ne povlači i uniformnu neprekidnost. Ekvivalencija slijedi u slučaju kada je $D = [a, b]$ segment, odnosno općenitije ako je D zatvoren skup.

Teorem 3 (vidi [3, Riemmanov teorem])**.** *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, onda je ona i integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Funkcija f neprekidna je na segmentu $[a, b]$ pa je i omeđena na $[a, b]$. Po Teoremu 2 f će biti integrabilna ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji razdioba P segmenta $[a, b]$ takva da je $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$. Svaka neprekidna funkcija na segmentu je i uniformno nerekidna na tom segmentu. To znači da postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, za sve $x, y \in [a, b]$ takve da je $|x - y| < \delta$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bilo koja razdioba segmenta $[a, b]$ takva da joj je dijametar $\delta(P) < \delta$. Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu, neprekidna funkcija segment preslikava u segment. To znači da za svaki $x \in [x_{i-1}, x_i]$ postoje $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ takvi da je $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$. Pri tome je $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x')$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x'')$. Vrijedi $M_i - m_i = |f(x'') - f(x')|$. Kako je $|x'' - x'| \leq \delta(P) < \delta$, zbog uniformne neprekidnosti funkcije f je $M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$.
Sada imamo:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \epsilon.$$

□

Općenito ne vrijedi obrat Riemmanovog teorema. Dakle, ako je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$, ona ne mora biti i neprekidna na $[a, b]$. Kako bismo jednostavnije konstruirali primjer takve funkcije, navedimo i dokazom potkrijepimo sljedeći teorem:

Teorem 4 (vidi [1, Teorem 26.]). *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b]$ onda je ona omeđena i integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f monotono rastuća funkcija. To znači da za $x, y \in [a, b]$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Iz toga slijedi da je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, za svaki $x \in [a, b]$, odnosno slika funkcije f na segmentu $[a, b]$ je omeđen skup, dakle f je omeđena funkcija na $[a, b]$.
Uzmimo ekvidistantnu razdiobu $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$.
Za proizvoljan n, svaki će podsegment $[x_k, x_{k-1}]$ biti duljine $\frac{b-a}{n}$. Budući da je f monotono rastuća funkcija, slijedi

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \\ M_k &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k). \end{aligned}$$

Odredimo sada donju Darbouxovu sumu.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= f(x_0)\frac{b-a}{n} + f(x_1)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_{n-1})\frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Slično radimo i za gornju Darbouxovu sumu i dobivamo:

$$\begin{aligned} s_n &= [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}]\frac{b-a}{n}, \\ S_n &= [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n]\frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Promotrimo sada
$$S_n - s_n = [f(x_n) - f(x_0)]\frac{b-a}{n},$$
odakle slijedi
$$S_n = s_n + [f(x_n) - f(x_0)]\frac{b-a}{n}.$$
Kako je
$$s_n \leq \sup\{s(f,P) : P \text{ razdioba od } [a,b]\} = \int_{-} f$$
te
$$S_n \geq \inf\{S(f,P) : P \text{ razdioba od } [a,b]\} = \int^{-} f$$
dobivamo sljedeću nejednakost:
$$\int^{-} f \leq \int_{-} f + [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n}.$$
Ovo vrijedi za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, stoga imamo $\int^{-} f \leq \int_{-} f$. Primjenom Teorema 1 dobivamo $\int^{-} f = \int_{-} f$, odnosno f je integrabilna na $[a,b]$.
Postupak je analogan u slučaju kada je f monotono padajuća funkcija na $[a,b]$. □

Pokažimo na primjeru kako obrat Teorema 4 ne vrijedi.

Primjer 2. *Ispitajmo integrabilnost funkcije* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Rješenje: Funkcija f je neprekidna na segmentu $[0,\pi]$ pa je prema Teoremu 3 i integrabilna na $[0,\pi]$. Uočimo kako funkcija f nije monotona na segmentu $[0,\pi]$. Dakle, ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$, ona nije nužno i monotona na $[a,b]$.

Primjer 3. *Ispitajmo integrabilnost funkcije* $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ *definirane na sljedeći način:*
$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,3\rangle \\ x+2 & , x \in [3,5] \end{cases}.$$

Rješenje: Funkcija f ima prekid u točki $x = 3$, tj. nije neprekidna na segmentu $[0,5]$ pa Teorem 3 ne daje odluku o integrabilnosti funkcije f. No, kako je funkcija f monotono rastuća na segmentu $[0,5]$, prema Teoremu 4 ona je i integrabilna na segmentu $[0,5]$.

Teorem 5 (vidi [3, Darbouxov teorem]). *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija i* (P_n) *bilo koji niz razdioba segmenta* $[a,b]$ *sa svojstvom da* $\delta(P_n) \to 0$ *kada* $n \to \infty$. *Tada su nizovi Darbouxovih suma* $(S(f,P_n))$ *i* $(s(f,P_n))$ *konvergentni i pri tome vrijedi:*
$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \int^{-}(f,[a,b]), \quad \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \int_{-}(f,[a,b]).$$

Dokaz teorema može se vidjeti u [3].

Napomena 1. *Prema definiciji 4, za omeđenu i integrabilnu funkciju f na segmentu $[a,b]$ vrijedi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_- f = \int^- f$. Tada, prema prethodnom teoremu, za svaki niz razdioba P_n takav da je $\lim_{x\to\infty} \delta(P_n) = 0$, vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n).$$

Primjer 4. *Izračunajmo određeni integral:* $\displaystyle\int_0^3 4x\,dx.$

Rješenje:
Očito je podintegrabilna funkcija f monotona na $[0,3]$, pa je prema Teoremu 4 f integrabilna na $[a,b]$. Po Definiciji 4 je $\int_- 4x = \int^- 4x$ i ta zajednička vrijednost jednaka je $\int_0^3 4x\,dx$. Kako bismo izračunali $\int_- 4x$, trebamo odrediti donju Darbouxovu sumu s_n. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Uzmimo ekvidistantnu razdiobu $P_n = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[0,3]$. Svaki podsegment je tada duljine $\frac{3}{n}$. Kako je f monotono rastuća funkcija na $[0,3]$, minimum funkcije f na svakom podsegmentu od $[0,3]$ je vrijednost funkcije f u lijevom rubu podsegmenta, tj. $m_k = f(x_{k-1})$, $k = 1, \ldots n$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} f(x_{k-1}) \\ &= \frac{3}{n}\left[f(0) + f(\frac{3}{n}) + f(2\cdot\frac{3}{n}) + \cdots + f((n-1)\frac{3}{n})\right] \\ &= \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(i\frac{3}{n}) = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{12i}{n} = \frac{36}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i. \end{aligned}$$

Suma $\sum_{i=0}^{n-1} i$ predstavlja zbroj n članova aritmetičkog niza i lako se provjeri da je $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$. Stoga imamo

$$\frac{36}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{36}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{18}{n^2}(n^2 - n) = 18 - \frac{18}{n}.$$

Po Definiciji 2 je $\int_- = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = 18$, odnosno $\displaystyle\int_0^3 4x\,dx = 18.$

Navedimo još neke rezultate s korisnim svojstvima određenog integrala.

Teorem 6 (vidi [1, Teorem 24.]). *Neka su f i g omeđene i integrabilne funkcije na segmentu $[a,b]$ te α i β proizvoljni realni brojevi.*
1) Funkcija $\alpha f + \beta g$ je omeđena i integrabilna na $[a,b]$. Osim toga je

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10}$$

Drugim riječima, skup svih na $[a,b]$ integrabilnih funkcija je vektorski prostor, a preslikavanje

$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

je "linearan funkcional" na tom prostoru.
2) Ako je $f(x) \leq g(x)$, za svaki $x \in [a,b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11}$$

što se zove ***monotonost integrala****.*
3) Funkcija $x \mapsto |f(x)|$ je integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{12}$$

Teorem 7 (vidi [1, Teorem 25.]). *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija i neka je ona integrabilna na svakom od segmenata $[a,c],[c,b]$, gdje je $c \in \langle a,b\rangle$. Tada je f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{13}$$

Napomena 2. *Formulom* (13) *dano je svojstvo aditivnosti određenog integrala po području definicije.*

Kao što ćemo kasnije vidjeti, Teoreme 5 i 6 često koristimo pri rješavanju integrala kako bi ih "rastavili" na više jednostavnijih dijelova.

1.3 Newton-Leibnizova formula

Rješavanje određenih integrala korištenjem definicije nije trivijalno čak ni za jednostavne funkcije. Zato ih u praksi rješavamo na drugačiji način. Prije no što pokažemo neke od metoda integracije navedimo sljedeće definicije i rezultate:

Definicija 7. *Primitivna funkcija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ zove se svaka funkcija F sa svojstvom da je*

$$F'(x) = f(x),\ \ x \in I.$$

Primjer 5. *Funkcija $F(x) = x^3$ jedna je primitivna funkcija funkcije $f(x) = 3x^2$ jer vrijedi $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.*

Sada možemo iskazati sljedeći važan teorem:

Teorem 8 (vidi [3]). *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a,b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{14}$$

Formulu (14) nazivamo **Newton-Leibnizova formula**. Pomoću nje problem rješavanja određenog integrala svodimo na problem pronalaska jedne primitivne funkcije podintegralne funkcije f, odnosno rješavanje pripadnog neodređenog integrala.

Definicija 8. *Neka je I jedan od skupova: segment $[a,b]$, interval $\langle a,b\rangle$, s lijeva zatvoreni interval $[a,b\rangle$ ili s desna zatvoreni interval $\langle a,b]$. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ označava se $\int f(x)\,dx$ i zove* ***antiderivacija*** *ili* ***neodređeni integral*** *funkcije f.*

Napomena 3. *Ako je F jedna primitivna funkcija funkcije f, tada su sve primitivne funkcije od f dane izrazom $F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$.*

Primjer 6. *Izračunajmo neodređeni integral $\displaystyle\int 3x^2\,dx$.*

Rješenje: U Primjeru 5 pokazali smo da je $F(x) = x^3$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x) = 3x^2$. Tada su prema Napomeni 3 sve primitivne funkcije od f dane izrazom $x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$, odnosno $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Primjer 7. *Izračunajmo određeni integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.*

Rješenje: Znamo da je $(sinx)' = \cos x$, tj. $F(x) = \sin x$ je jedna primitivna funkcija podintegralne funkcije $f(x) = \cos x$. Primjenom formule (14) dobivamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

1.4 Metode rješavanja integrala

Ovisno o tipu podintegralne funkcije, postoje razne metode za računanje određenih i neodređenih integrala. Ovdje ćemo navesti neke od njih, a bit će nam potrebne u slijedećem poglavlju.

1.4.1 Direktna integracija

Elementarne funkcije integriramo pomoću tablice neodređenih integrala:

1.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R},\, n \neq -1$
2.	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$	$x \neq 0$
3.	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R},\, a > 0,\, a \neq 1$
5.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
8.	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
9.	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
10.	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
11.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\|x\| < a,\, a \neq 0$
12.	$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$x \in \mathbb{R},\, a \neq 0$
13.	$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$	$\|x\| < a,\, a \neq 0$
14.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$	$x \in \mathbb{R},\, a \neq 0$
15.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$	$\|x\| > a,\, a \in \mathbb{R}$

Tablica 1: Tablica neodređenih integrala

Direktna integracija sastoji se u tome da se podintegralna funkcija primjenom osnovnih svojstava integrala navedenih u Teoremu 6 i Teoremu 7 dovede u vezu s elementarnim funkcijama čije integrale računamo primjenom Tablice 1.

Primjer 8. *Izračunajmo određeni integral* $\int_0^3 4x\,dx$.

Rješenje:

$$\int_0^3 4x\,dx = 4\int_0^3 x\,dx = 4\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3\right] = 4\left[\frac{9}{2} - 0\right] = 18.$$

Primjer 9. *Izračunajmo određeni integral* $\int_0^1 \frac{x^2+5}{x^2+1}\,dx$.

Rješenje:

$$\int_0^1 \frac{x^2+5}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1+4}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1\,dx + 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = x\Big|_0^1 + 4\arctan x\Big|_0^1$$
$$= 1 - 0 + 4\left[\arctan 1 - \arctan 0\right] = 1 + 4\arctan 1 = 1 + \pi.$$

Uočimo kako na ovaj algebarski način računanja integrala primjenom Tablice 1 elegantnije dolazimo do rješenja u odnosu na način računanja integrala primjenom definicije pokazanom u Primjeru 4.

1.4.2 Metoda supstitucije

Često je podintegralna funkcija takva da nije moguće provesti direktnu integraciju. Tada u nekim slučajevima možemo koristiti sljedeći teorem:

Teorem 9 (vidi [1, Teorem 31.]). *Neka su I i I_0 intervali, φ diferencijabilna funkcija na I_0 i f neprekidna funkcija na I takva da je $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in I$. Pretpostavimo da je $\varphi(I_0) \subseteq I$ takvo da je na I_0 definirana kompozicija $f \circ \varphi$. Za svaki par $\alpha, \beta \in I_0$ vrijedi*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt. \tag{15}$$

Dokaz. Jer je $\varphi \subseteq I$, slijedi da je $G = F \circ \varphi$ definirana i diferencijabilna na I_0 (jer je kompozicija diferencijabilnih funkcija). Imamo:

$$\begin{aligned} G'(x) = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx &= G(\beta) - G(\alpha) \\ = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

□

Dakle, iz pravila za deriviranje kompozicije dobili smo pravilo za integriranje metodom supstitucije. Uvođenjem odgovarajuće supstitucije pojednostavljujemo podintegralnu funkciju tako da novodobiveni integral možemo riješiti direktnom integracijom. Odabir supstitucije ovisi o obliku podintegralne funkcije; ne postoji jedno "univerzalno" pravilo, ali kroz vježbu možemo prepoznati najčešće ideje za rješavanje.

Primjer 10. *Izračunajmo neodređeni integral* $\displaystyle\int \sin x \cos 3x\,dx$.

Rješenje: Znamo da vrijedi $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$, pa imamo

$$\int \sin x \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 2x + \sin 4x)\,dx.$$

Ako uvedemo supstituciju

$$\begin{aligned} t &= 2x \\ \frac{1}{2}\,dt &= dx \end{aligned}$$

dobivamo:

$$\frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 4x)\,dx=\frac{1}{4}\left[\int\sin t\,dt+\int\sin 2t\,dt\right]=\frac{1}{4}\left[-\cos t-\cos 2t\right]$$
$$=-\frac{1}{4}\left[\cos 2x+\cos 4x\right]+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Primjer 11. *Izračunajmo određeni integral* $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Rješenje: Uzmimo supstituciju:

$$\begin{aligned} t&=x^2+1\\ \frac{1}{2}\,dt&=x\,dx\\ x&=1\Rightarrow t=2\\ x&=4\Rightarrow t=17. \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\frac{1}{2}\int_2^{17}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{t}\Big|_2^{17}=\sqrt{17}-\sqrt{2}.$$

Prilikom računanja određenog integrala nije nužno pri korištenoj supstituciji napraviti i zamjenu granica integracije, već možemo najprije riješiti pripadni neodređeni integral, pa na kraju primijeniti Newton-Leibnizovu formulu za rješavanje polaznog integrala u danim granicama.

Primjer 12. *Izračunajmo određeni integral* $\int_0^1 \frac{x}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

Rješenje: Riješimo najprije neodređeni integral $I_1=\int\frac{x}{x^4+3x+2}\,dx$.
Primjenom supstitucije:

$$\begin{aligned} t&=x^2\\ \frac{1}{2}\,dt&=x\,dx \end{aligned}$$

dobivamo

$$\int\frac{x}{x^4+3x^2+2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+3t+2}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt.$$

Ako podintegralnu funkciju rastavimo na parcijalne razlomke, imamo

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{t+1}\,dt-\int\frac{1}{t+2}\,dt\right]=\frac{1}{2}\left[\ln(t+1)-\ln(t+2)\right].$$

Sada vratimo supstituciju i dobivamo

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2+2)\right].$$

Na kraju primjenom Newton-Leibnizove formule riješimo određeni integral:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+3x^2+2}\,dx = \frac{\ln(x^2+1)-\ln(x^2+2)}{2}\Big|_0^1 = \frac{2\ln 2-\ln 3}{2}.$$

1.4.3 Metoda parcijalne integracije

Ukoliko ni metodom supstitucije ne možemo izračunati traženi integral, ponekad nam može pomoći formula za derivaciju produkta iz koje dobivamo formulu za metodu parcijalne integracije:

Teorem 10 (vidi [3]). *Ako su u, $v : I \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne funkcije na intervalu I, onda su funkcije $u'v$ i uv' integrabilne na I i pri tome vrijedi:*

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Dokaz. Neprekidnost funkcija u' i v' na I povlači neprekidnost funkcija $u'v$ i uv' pa su prema Teoremu 3 one i integrabilne na I. Za svaki $x \in I$, vrijedi $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Integriranjem dobivamo

$$(uv)(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx,$$

odnosno

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

□

Odgovarajuća formula za računanje određenog integrala metodom parcijalne integracije glasi

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \tag{16}$$

Primjer 13. *Izračunajmo neodređeni integral* $\displaystyle\int \frac{x\sin 2x}{3}\,dx$.

Rješenje: Kako bismo proveli parcijalnu integraciju, uvodimo supstituciju

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{3} \qquad & dv &= \sin 2x\,dx \\ du &= \frac{1}{3}\,dx \qquad & v &= -\frac{\cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\int \frac{x\sin 2x}{3}\,dx = -\frac{x\cos 2x}{6} + \int \frac{\cos 2x}{6}\,dx = -\frac{x\cos 2x}{6} + \frac{\sin 2x}{12} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primjer 14. *Izračunajmo određeni integral* $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

Rješenje: Uzimamo supstituciju

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= \frac{1}{x^2}\, dx \\ du &= \frac{1}{x}\, dx & v &= -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Prema formuli (16) imamo:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 \\ &= -\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = -\frac{1 + \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

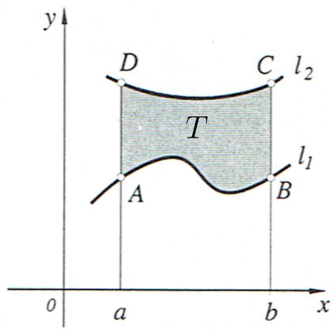
2 Primjene određenog integrala u geometriji

Riemannov integral može se koristiti za računanje površine složenijih likova i ploha, kao i za računanje duljine i volumena. Postoji mnogo literature koja proučava takve teme. Veliki broj zadataka i primjera ilustriranih odgovarajućim slikama može se vidjeti i u [4].
U ovom poglavlju navodimo neke od najčešćih upotreba određenog integrala u geometriji.

2.1 Površina lika u ravnini

Već znamo da je površina pseuodotrapeza omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i grafom funkcije $y = f(x)$ jednaka $\int_a^b f(x)\,dx$. Ako je psudotrapez omeđen sa y-osi, pravcima paralelnim sa x-osi, $y = c$, $y = d$ te nekom krivuljom $x = f(y)$, tada slično vrijedi da je njegova površina jednaka $\int_c^d f(y)\,dy$.
Ukoliko tražimo površinu T između dvije krivulje l_1 i l_2 dane jednadžbama $y = f_1(x), y = f_2(x)$ takve da je $f_1(x) \leq f_2(x)$, za svaki $x \in [a, b]$ (vidjeti Sliku 4), dovoljno je primijetiti da je ta površina jednaka razlici površine pseudotrapeza omeđenog krivuljom l_2 i pseudotrapeza omeđenog krivuljom l_1.
Prema tome, vrijedi:

$$P(T) = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{17}$$



Slika 4

Ako se graf funkcije f nalazi ispod x-osi, tada je površina tog pseudotrapeza jednaka

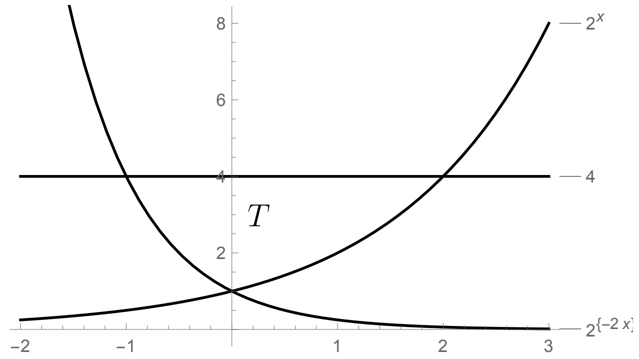
$$P(T) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako je f takva da je $f(x) > 0$, za svaki $x \in [a, c\rangle$, $f(x) < 0$, za svaki $x \in \langle c, b]$, $f(c) = 0$, tada je površina lika omeđenog grafom funkcijom f, x-osi i pravcima $x = a$, $x = b$ jednaka:

$$P = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Primjer 15. *Izračunajmo površinu lika omeđenog krivuljama $y = 2^x$, $y = 2^{-2x}$ i $y = 4$.*

Rješenje: Skicirajmo dane krivulje kako bismo lakše uočili područje čiju površinu tražimo.



Slika 5

Pronađimo točke presjeka krivulja i pravca:

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2, \quad 2^{-2x} = 4 \Rightarrow x = -1.$$

Dakle, granice našeg integrala su -1 i 2. Uočimo da je naš lik omeđen odozgo pravcem $y = 4$ na cijelom segmentu $[-1, 2]$, a odozdo krivuljom 2^{-2x} na segmentu $[-1, 0]$ te krivuljom 2^x na segmentu $[0, 2]$. Primjenom Teorema 7 dobivamo

$$\begin{aligned} P(T) &= \int_{-1}^{0} (4 - 2^{-2x})\, dx + \int_{0}^{2} (4 - 2^x)\, dx = 4x\Big|_{-1}^{0} + \frac{2^{-2x}}{2\ln 2}\Big|_{-1}^{0} + 4x\Big|_{0}^{2} - \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{0}^{2} \\ &= 4 - \frac{3}{2\ln 2} + 8 - \frac{3}{\ln 2} = 12 - \frac{9}{2\ln 2}. \end{aligned}$$

Traženu površinu možemo dobiti i promatrajući naše krivulje kao funkcije varijable y:
$x = \log_2 y$, $x = -\frac{1}{2}\log_2 y$.
Sada su granice integrala 1 i 4. Dobiveni lik omeđen je odozgo krivuljom $\log_2 x$, a odozdo krivuljom $-\frac{1}{2}\log_2 y$ na cijelom segmentu $[1, 4]$. Prema tome, traženu površinu možemo izračunati i na slijedeći način:

$$P(T) = \int_{1}^{4} (\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 y)\, dy.$$

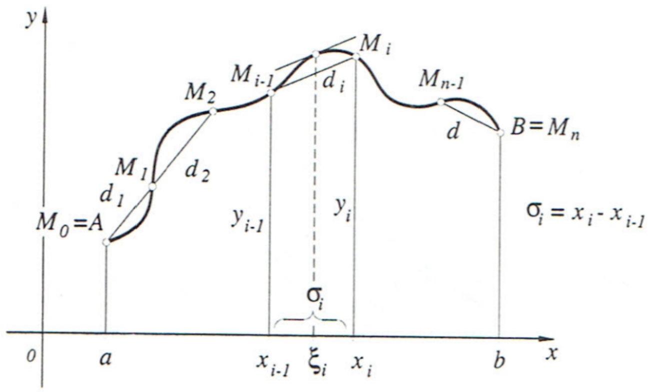
2.2 Duljina luka krivulje

Definicija 9. *Duljina s luka $\overset{\frown}{AB}$ na nekoj krivulji $y = f(x)$ je granična vrijednost kojoj teži duljina upisane poligonske crte $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ kada broj tetiva neograničeno raste, a duljina najveće (dakle i svake) tetive teži k nuli.*
Simbolički to pišemo kao

$$s = \lim_{m(\delta)\to 0} \sum_{n=1}^{n} d_i,$$

gdje je $m(\delta) = \max \sigma_i, \quad \sigma_i = x_i - x_{i-1}, \quad d_i = \overline{M_iM_{i-1}},\ i = 1, \dots, n.$

Slika 6 ilustrira prethodnu definiciju.



Slika 6

Duljina svake tetive $\overline{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, \ldots, n$ iznosi

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka u tom intervalu ima neprekidnu prvu derivaciju f'. Iskoristit ćemo sljedeći teorem:

Teorem 11 (vidi [3, Lagrangeov teorem])**.** *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$, onda postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Primjenom Teorema 11 slijedi

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Sada je

$$s = \lim_{m(\delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\sigma_i.$$

To je integralna suma neprekidne funkcije $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, pa je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{18}$$

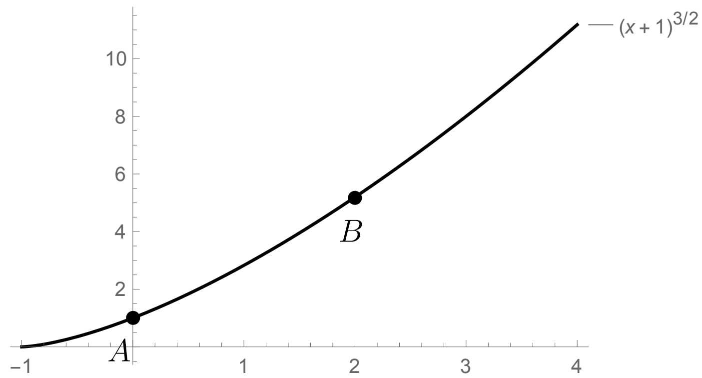
Ako je krivulja zadana parametarski, $x = x(t)$, $y = y(t)$, duljinu luka računamo kao

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2}\, dt,$$

za t_1, t_2 vrijednosti parametara koji pripadaju krajevima luka $\overset{\frown}{AB}$.

Primjer 16. *Izračunajmo duljinu luka krivulje* $y = (\sqrt{x+1})^3$ *između točaka* $A = (0, 1)$ *i* $B = (2, \sqrt{3}^3)$.

Rješenje: Slika 7 prikazuje zadanu krivulju te točke A i B.



Slika 7

Derivacija funkcije y iznosi $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$.
Prema formuli (18) slijedi

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}\, dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{13}{4} + \frac{9}{4}x}\, dx.$$

Uzimamo supstituciju

$$t = \frac{13}{4} + \frac{9}{4}x$$
$$dt = \frac{9}{4}\, dx.$$

Imamo

$$s = \frac{4}{9}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{8}{27}\sqrt{t}^3.$$

Vraćamo supstituciju i uvrštavamo granice

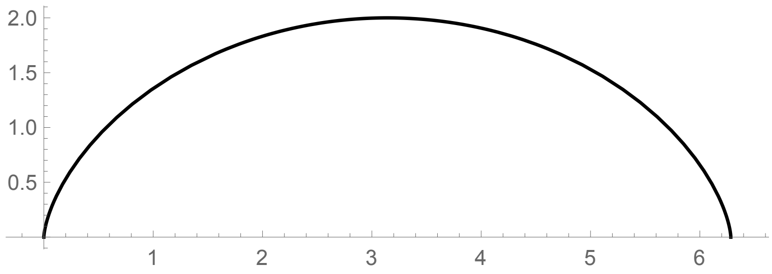
$$s = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\frac{13}{4} + \frac{9}{4}x}\right)^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{27}\left[\left(\sqrt{\frac{31}{4}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^3\right].$$

Primjer 17. *Izračunajmo duljinu luka krivulje zadane parametarski s*

$$x(t) = t - \sin t$$
$$y(t) = 1 - \cos t,$$

za $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje: Na intervalu $[0, 2\pi]$ naša je krivulja grafički prikazana na Slici 8.



Slika 8

Imamo

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t,$$

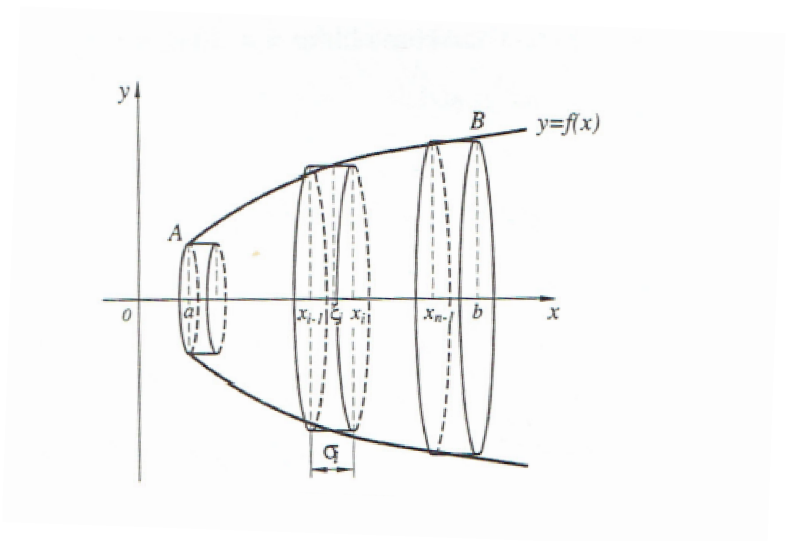
pa duljina luka krivulje na intervalu $[0, 2\pi]$ iznosi

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$
$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\int_0^{\pi} \sin u\, du = -4[\cos u]\Big|_0^{\pi} = 8.$$

2.3 Volumen rotacijskog tijela

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Rotacijsko tijelo je tijelo nastalo rotacijom luka krivulje $y = f(x)$ na segmentu $[a, b]$ oko koordinatne osi. Neka je x-os dana os rotacije.

Svakoj razdiobi $\rho = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ segmenta $[a, b]$ na podsegmente $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ odgovara podjela rotacijskog tijela na slojeve sa visinama σ_i. Neka je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Volumen cilindričnog tijela visine σ i polumjera osnovke $\eta_i = f(\xi_i)$ iznosi $\pi\eta_i^2\sigma_i$ (vidjeti Sliku 9).



Slika 9

Suma svih volumena takvih cilindričnih tijela iznosi

$$\sum_{n=1}^{n} \pi\eta_i\sigma_i = \pi \sum_{n=1}^{n} f(\xi_i)^2\sigma_i.$$

To je integralna suma za neprekidnu funkciju πf^2. Zato je volumen V_x tijela nastalog rotacijom površine ispod grafa funkcije $y = f(x)$ oko x-osi za $x \in [a, b]$ dan formulom

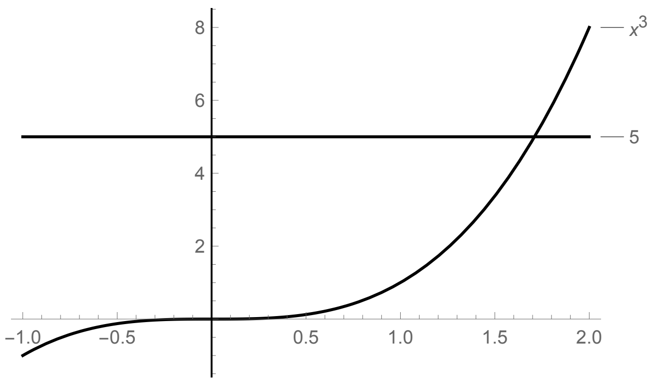
$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Analogno se dobije i volumen tijela nastalog rotacijom površine ispod grafa funkcije $x = f(y)$ oko y-osi za $y \in [c, d]$

$$V_y = \pi \int_c^d f(y)^2\, dy.$$

Primjer 18. *Izračunajmo volumen tijela nastalog rotacijom oko y-osi lika omeđenog krivuljama $y = x^3$, $y = 5$, $x = 0$ u xy-ravnini.*

Rješenje:



Slika 10

Kako se radi o rotaciji oko y-osi, krivulju $y = x^3$ treba izraziti kao funkciju varijable y, tj. $x = \sqrt[3]{y}$. Sada je traženi volumen jednak:

$$V_y = \pi \int_0^5 (\sqrt[3]{y})^2\, dy = \pi \int_0^5 y^{\frac{2}{3}}\, dy = \frac{3\pi}{5} y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^5 = \frac{3\pi}{5}\sqrt[3]{5^5}.$$

Izračunajmo sada volumen tijela nastalog rotacijom istog lika oko x-osi. Donja granica integracije iznosi 0, dok gornju granicu integracije dobivamo uvrštavanjem $y = 5$ u funkciju $y = x^3$, tj. gornja granica integracije iznosi $\sqrt[3]{5}$. Zato traženi volumen iznosi:

$$V_x = \pi \int_0^{\sqrt[3]{5}} (5 - x^3)^2\, dx = \pi \int_0^{\sqrt[3]{5}} (25 - 10x^3 + x^6)\, dx = \pi \left(25x - \frac{5x^4}{2} + \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^{\sqrt[3]{5}}$$

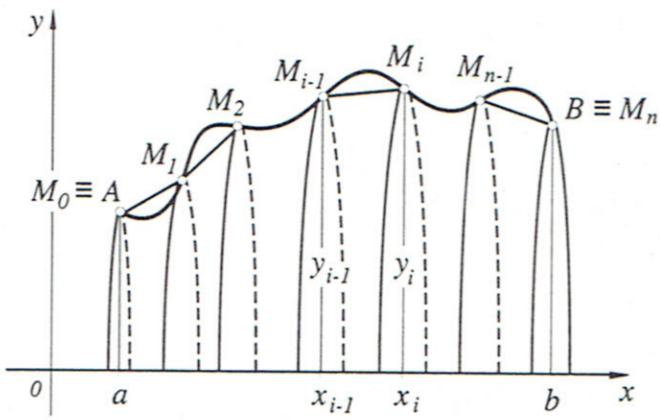
$$= \pi \left(25\sqrt[3]{5} - \frac{5(\sqrt[3]{5})^4}{2} + \frac{(\sqrt[3]{5})^7}{7}\right) = \pi \left(\sqrt[3]{5^7} - \frac{\sqrt[3]{5^7}}{2} + \frac{\sqrt[3]{5^7}}{7}\right) = \frac{9\pi\sqrt[3]{5^7}}{14}.$$

2.4 Površina rotacijske plohe

Površina rotacijske plohe podrazumijeva površinu plašta rotacijskog tijela, tj. plohe dobivene rotacijom grafa funkcije $x \mapsto y = f(x)$, $x \in [a, b]$ oko x-osi. Uzmimo luk $\overset{\frown}{AB}$, označimo $M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$ i podijelimo ga na parcijalne lukove

$$\overset{\frown}{M_0M_1}, \overset{\frown}{M_1M_2} \dots \overset{\frown}{M_{i-1}M_i} \dots \overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$$

kao što je prikazano na Slici 11.
Sada konstruirajmo poligonsku crtu $M_0M_1M_2 \dots M_i \dots M_{n-1}M_n$. Pri rotaciji svaki dio poligonske crte opisat će površinu plašta krnjeg kružnog stošca.



Slika 11

Definicija 10. *Površinom rotacijske plohe naziva se granična vrijednost kojoj teži površina nastala rotacijom upisane poligonske crte.*

Neka je S duljina luka $\overset{\frown}{AB}$. Podijelimo interval $\overline{OS}$ točkama

$$s_0 = O < s_1 < s_2 < \cdots < s_{i-1} < s_i < \cdots < s_n = S,$$

te neka je $s_i - s_{i-1}$ duljina parcijalnog luka $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.
Površina plašta krnjeg kružnog stošca jednaka je

$$P_p = \pi s(R + r) = 2\pi \frac{R + r}{2} s.$$

Uvrštavanjem $R = y_i$, $r = y_{i-1}$, $s = \overline{M_{i-1}M_i}$, površina plašta krnjeg kružnog stošca dobivenog rotacijom dijela $\overline{M_{i-1}M_i}$ poligonske crte iznosi

$$P_{p_i} = 2\pi \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \overline{M_{i-1}M_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tada je površina rotacijske plohe nastala rotacijom poligonske crte jednaka

$$P = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1}) \overline{M_{i-1}M_i}.$$

Zamijenimo li duljine $\overline{M_{i-1}M_i}$ duljinama odgovarajućih lukova dobivamo

$$P = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i+1}(s_i - s_{i-1}).$$

Neka je $\sup |y(s)| = N$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i+1}(s_i - s_{i-1}) - \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i+1}\overline{M_i - 1M_i} \\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1})((s_i - s_{i-1}) - \overline{M_{i-1}M_i}) \leq 2\pi N (\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i}). \end{aligned}$$

Kako je $\sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})$ jednaka duljini luka $\overset{\frown}{AB}$, a $\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i}$ je jednaka duljini upisane poligonske crte u luku $\overset{\frown}{AB}$, slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i}) = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} (\pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1})\overline{M_{i-1}M_i}) = \lim_{n\to\infty} (\pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1}). \tag{19}$$

Zbroj dvije integralne sume za funkciju y iznosi $\pi \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1})$ te vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (\pi \sum_{i=1}^{n} y_i(s_i - s_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} (\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(s_i - s_{i-1}) = \pi \int_0^s y\, ds,$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} (\pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1})(s_i - s_{i-1})) = 2\pi \int_0^s y(s)\, ds. \tag{20}$$

Iz (19) i (20) dobivamo formulu za računanje površine rotacijske plohe:

$$P = 2\pi \int_0^s y(s)\, ds. \tag{21}$$

Ako je krivulja dana u parametarskom obliku $x = x(t)$ $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, onda je

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Ako je luk $\overset{\frown}{AB}$ dan jednadžbom $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, onda je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Primjer 19. *Izračunajmo površinu plohe dobivene rotacijom luka krivulje* $y = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in [0, 2]$, *oko* x*-osi.*

Rješenje: Uvrštavanjem u formulu (21), površina nastale rotacijske plohe iznosi

$$P = 2\pi \int_0^2 \frac{x^3}{3} \sqrt{1 + \left[\left(\frac{x^3}{3}\right)'\right]^2}\, dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + x^4}\, dx.$$

Integral rješavamo uvođenjem supstitucije

$$\begin{aligned} t &= 1 + x^4 \\ \frac{1}{4}\, dt &= x^3\, dx \\ x &= 0 \Rightarrow t = 1 \\ x &= 2 \Rightarrow t = 17. \end{aligned}$$

Slijedi

$$P = \frac{2\pi}{12} \int_1^{17} \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right] \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{9} \left[\sqrt{17}^3 - \sqrt{1}^3\right] = \frac{\pi\sqrt{17}^3 - \pi}{9}.$$

Primjer 20. *Integralnim računom izvedimo formulu za oplošje kugle.*

Rješenje: Kuglu možemo shvatiti kao tijelo nastalo rotacijom oko x-osi kružnice K radijusa r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava koja je zadana jednadžbom $x^2 + y^2 = r^2$. Oplošje kugle je tada površina nastale rotacijske plohe. Iz jednadžbe kružnice dobivamo $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, odnosno kružnica je unija lukova $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ i $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Očito je da su površine P_1 i P_2 nastale rotacijom tih lukova jednake. Zato površinu rotacijske plohe računamo kao

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 = 2P_1 &= 2 \cdot 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'\right]^2}\, dx \\ &= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi [rx] \Big|_0^r = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] T. Bradić, J. Pečarić, R. Roki, M. Strunje, *Matematika za tehnološke fakultete*, Element, Zagreb, 1998.

[3] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[4] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkije jedne varijable*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.