Sveučilište J.J. Stossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Sanja Stjepanović

Reprezentacija linearnog funkcionala i hermitsko adjungiranje

Završni rad

Osijek, 2018

Sveučilište J.J. Stossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Sanja Stjepanović

Reprezentacija linearnog funkcionala i hermitsko adjungiranje

Završni rad

Mentor:
doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2018

Sažetak

Ovaj rad predstavlja teoriju koja vodi do iskaza i dokaza Teorema o reprezentaciji linearnog funkcionala pomoću kojeg ćemo uvest pojam hermitski adjungiranih operatora. U radu ćemo se prvo osvrnuti na unitarne i normirane prostore te pojmove koji se na njima definiraju kao što su okomitost vektora, ortogonalni komplement i normiranost vektora. Zatim ćemo definirati linearne operatore i, sa njima usko povezane, antilinearne operatore te proučiti njihove razlike. Nadalje, objasniti ćemo što su to monomorfizmi, epimorfizmi i izomorfizmi, te navesti kriterije i dodatne uvijete pomoću kojih ih možemo raspoznati ili čak poistovjetiti. Osim toga, obraditi ćemo konjugirane prostore koje možemo pridružiti proizvoljnim vektorskim prostorima te se uz primjere dotaći linearnih funkcionala i izreći Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala koji nam omogućuje jedinstven zapis funkcionala. Na kraju rada ćemo se posvetiti hermitski adjungiranom operatoru i njegovim svojstvima.

Ključne riječi: Unitarni i normirani prostori, linearan operator, izomorfizam, antilinearno preslikavanje, konjugirani prostor, lineani funkcional, Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala, Teorem o reprezentacij linearnog funkcionala, Hermitski adjungirani operator.

Abstract

This paper represents the theory leading up to the Representation theorem of a linear functional, which we will use later to introduce the Hermitian adjoint operators. The paper first introduces unitary and normed vector spaces and mentions some terms accompanying them such as orthogonal vectors, orthogonal complements and the norm of a vector. Afterwards we will define linear and antilinear operators, which are closely related, and analyze the differences between them. Furthermore, we will explain what monomorphisms, epimorphisms and isomorphisms are, and mention different criteria and additional conditions for identifying them or even make them indistinguishable. We will also consider conjugate spaces of a vector space and, through examples, touch upon the subject of linear functionals and state the Riesz representation theorem which enables us to have a unique depiction of a functional. The end of this paper will be reserved for the explanation of the Hermitian adjoint and its properties.

Key words: Unitary and normed spaces, linear operator, isomorphism, antilinear mapping, conjugate space, linear functional, Riesz representation theorem, Representation theorem of a linear functional, Hermitian adjoint.

Sadržaj

1 Uvod

Glavni zadatak ovog rada je upoznati nas s Teoremom o reprezentaciji linearnih funkcionala kojeg ćemo iskoristiti kako bi dokazali postojanje hermitski adjungiranih operatora. Zbog svojih specifičnih svojstava, hermitski adjungirani operaori su iznimno važni u različitim područjima matematike i kvantne mehanike, a neka najvažnija svojstva ćemo iskazati i dokazati u zadnjem poglavlju.

U prvom poglavlju ćemo se upoznati sa prostorima na kojima su definirane osnovne funkcije linearne algebre kao što su skalarni produkt i norma te njihovim svojstvima. Također ćemo definirati linearne operatore i navesti nekoliko tvrdnji o izomorfizmima vektorskih prostora.

U poglavlju **Reprezentacija linearnog funkcionala i hermitsko adjungiranje** ćemo uvesti sve pojmove koji će nam biti potrebni za razumjevanje Teorema o reprezentacij linearnog funkcionala i hermitski adjungiranog operatora, a to su antilinearna preslikavanja i njihova povezanost s linearnim preslikavanjima, konjugiranim prostorima i njegovim svojstvima te samim linearnim funkcionalom.

1.1 Unitarni i normirani prostori

U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa specifičnim preslikavanjima na vektorskom prostoru, njihovim svojstvima i kako oni utječu na sam vektorski prostor kako bi ih mogli u daljnjim poglavljima koristiti. Nadalje, sa K ćemo označavati polje realnih ili kompleksnih brojeva nad kojim promatramo te vektorske prostore.

Definicija 1.1. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru V je preslikavanje $(\cdot \,|\, \cdot) : V \times V \to K$ sa svojstvima:*

1. ***pozitivnost:*** $(v \,|\, v) \geq 0, \ \forall v \in V$,
2. ***definitnost:*** $(v \,|\, v) = 0 \iff v = 0$,
3. ***linearnost u prvoj varijbli:***
   $(\lambda v_1 + \mu v_2 \,|\, v_3) = \lambda(v_1 \,|\, v_3) + \mu(v_2 \,|\, v_3), \ \forall v_1, v_2, v_3 \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K$,
4. ***hermitska simetrija:*** $(v_1 \,|\, v_2) = \overline{(v_2 \,|\, v_1)}, \ \forall v_1, v_2 \in V$.

Vektorski prostor na kojemu je definiran skalarni produkt se zove **unitaran prostor**. Primjetimo da iz svojstva linearnosti u prvoj varijabli i hermitske simetrije slijedi da je skalarni produkt antilinearan po drugoj varijabli. U slučaju kada je $K = \mathbb{R}$, skalarni produkt će biti i u drugoj varijabli linearan jer je $\bar{\lambda} = \lambda, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Osim za dvočlane linearne kombinacije, općenito za neke vektore $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$,

$w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_m w_m$ redom iz vektorskih prostora $V = [\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}]$ i $W = [\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}]$ vrijedi:

$$(v \mid w) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \bar{\mu_j} (v_i \mid w_j).$$

Sada na unitarnom prostoru V možemo uvesti još neke važne pojmove:

- Za vektore $v_1, v_2 \in V$ kažemo da su **ortogonalni (okomiti)** i pišemo $v_1 \perp v_2$ ako je $(v_1 \mid v_2) = 0$.
- Za skup $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq V$ kažemo da je **ortogonalan** ako je $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$.
- **Ortogonalni komplement** potprostora S od V definiramo kao

$$S^{\perp} = \{x \in V : (x \mid v) = 0, \ \forall v \in S\}.$$

Također, na unitarnom prostoru V možemo definirati preslikavanje $u \mapsto \|u\|$, gdje je

$$\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}.$$

Primjetimo da je izraz na lijevoj strani gornje jednakosti dobro definiran zbog 1. i 2. svojstva skalarnog produkta. Preslikavanje $\|u\|$ nazivamo normom na V i ona predstavlja duljinu vektora u.

Definicija 1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Vektorska norma $\|\cdot\|$ na V je preslikavanje $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ sa svojstvima:*

1. $\|u\| \geq 0, \ \forall u \in V,$
2. $\|u\| = 0 \iff u = 0,$
3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \ \forall u \in V, \ \forall \lambda \in K,$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in V.$

Unitaran prostor na kojemu je definirana norma zove se **normiran prostor**.
Norma općenito ne mora biti zadana pomoću skalarnog produkta, dovoljno je da zadovoljava svojstva iz prethodne definicije. Sljedeći teorem će nam dati kriterij po kojem možemo zaključiti da li je neka norma inducirana skalarnim produktom ili nije.

Teorem 1.1 (Jordan von Neuman). *Neka je V normiran prostor s normom $u \mapsto \|u\|$. Tada su slijedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

a) Postoji skalarni produkt $(\cdot \mid \cdot) : V \times V \to K$ na V, takav da je $\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$.

b) Za svaki $u_1, u_2 \in V$ vrijedi jednakost paralelograma, odnosno

$$\|u_1 + u_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2 = 2 \cdot \|u_1\|^2 + 2 \cdot \|u_2\|^2.$$

U tom je slučaju skalarni produkt sa svojstvom $\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$ jedinstven i u slučaju polja $K = \mathbb{R}$ zadan je sa:

$$(u_1 \mid u_2) = \frac{1}{4}(\|u_1 + u_2\|^2 - \|u_1 - u_2\|^2),$$

a u slučaju $K = \mathbb{C}$ sa:

$$(u_1 \mid u_2) = \frac{1}{4}(\|u_1 + u_2\|^2 - \|u_1 - u_2\|^2 + i\|u_1 + iu_2\|^2 - i\|u_1 - iu_2\|^2).$$

Dokaz: Dokaz možete pronaću u [1].

Sada kada smo se upoznali s definicijom norme možemo uvesti sljedeće pojmove na normiranom prosotru V:

- Vektor $v \in V$ za koji vrijedi $\|v\| = 1$ kažemo da je **normiran**.
- Za skup $S \subseteq V$ kažemo da je **ortonormiran** ako je ortogonalan i ako vrijedi $\|v\| = 1, \ \forall v \in S$.
- Prostor V ima ortonormiranu bazu (ova važna činjenica slijedi iz Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije, vidi [2]).

1.2 Izomorfizam vektorskih prostora

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K i A operator sa prostora V u prostor W, odnosno $A : V \to W$. U nastavku ćemo navesti neka važna svojstva operatora koja ćemo koristiti u radu.

Definicija 1.3. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. Preslikavanje $A : V \to W$ se naziva linearan operator ako vrijedi:*

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K.$$

Skup svih takvih operatora označavamo s $L(V, W)$ što je vektorski prostor nad poljem K. Ako su prostori V i W konačnodimenzionalni tada će i prostor $L(V, W)$ biti konačnodimenzionalan, te vrijedi:

$$\dim(L(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Posebni potprostori od V, odnosno W, koje dobivamo pomoću operatora A su dani u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.4. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Prostori*

$$\mathrm{Im}A = \{Av : v \in V\} \leq W \quad \text{i}$$

$$\mathrm{Ker}A = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra operatora A.

U slučaju kada su V i W konačnodimenzonalni, možemo uvesti pojmove **ranga** i **defekta** operatora A koje definiramo kao brojeve

$$r(A) \coloneqq \dim(\mathrm{Im}A),$$

odnosno,

$$d(A) \coloneqq \dim(\mathrm{Ker}A).$$

Postoji važna poveznica između ranga i defekta nekog linearnog operatora A i ona je dana u sljedećem teoremu.

Teorem 1.2 (Teorem o rangu i defektu)**.** *Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te neka je* $\dim(V) < \infty$*. Tada je* $r(A) + d(A) = \dim(V)$.

Dokaz: Dokaz Teorema možete pronaći u [1].

Naravno, kao za svako preslikavanje, možemo provjeriti da li je linearan operator $A : V \to W$ **injekcija**, **surjekcija** ili **bijekcija**. Takvim operatorima ćemo dodijeliti posebne nazive.

Definicija 1.5. *Operator $A \in L(V, W)$ naziva se:*

i) monomorfizam ako je A injekcija,

ii) epimorfizam ako je A surjekcija,

iii) izomorfizam ako je A bijekcija.

U nekim slučajevima može biti teško dokazati spomenuta svojstva, no pomoću pojmova iz Definicije 1.4 imamo kriterije pomoću kojih lako možemo ispitati je li je operator A jedan od navedenih preslikavanja iz gornje definicije.

Propozicija 1.1. *Operator $A \in L(V, W)$ je injekcija akko je* $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

Dokaz:

$\Rightarrow$: Neka je A injekcija, to znači da za sve $x, y \in V$, $x \neq y$, vrijedi $Ax \neq Ay$. Sigurno je $0 \in \mathrm{Ker}A$ jer je A linearan, a kako je A injekcija niti jedan drugi element se neće moći preslikati u nulu pa je $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

$\Leftarrow$: Neka je $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ i uzmimo da je $Ax = Ay$. Tada je
$Ax - Ay = 0 \iff A(x - y) = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$

□

Propozicija 1.2. *Operator $A \in L(V, W)$ je surjekcija akko je* $r(A) = \dim(W)$.

Dokaz:

$\Rightarrow$: Neka je A surjekcija. Po definiciji surjekcije slijedi da je
$\mathrm{Im}A = W \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}A) = \dim(W)$, tj. $r(A) = \dim(W)$.

$\Leftarrow$: Vrijedi $\dim(\mathrm{Im}A) = \dim(W)$ i znamo da je $\mathrm{Im}A \leq W$, pa iz toga slijedi da je $\mathrm{Im}A = W$.

$\square$

Može se pokazati da je operator A koji je monomorfizam i epimorfizam također i izomorfizam. Međutim, sljedeći korolar nam govori kako uz neke dodatne uvjete i korištenjem Teorema o rangu i defektu možemo izjednačiti ta tri pojma.

Korolar 1.1. *Neka je $A \in L(V, W)$ i neka je $\dim(V) = \dim(W)$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

i) A je monomorfizam,

ii) A je epimorfizam,

iii) A je izomorfizam.

Dokaz:
i) $\Rightarrow$ *ii)*
A je monomorfizam pa vrijedi $d(A) = 0$ (trivijalna jezgra zbog Propozicije 1.1). Prema Teoremu 1.2 slijedi: $r(A) = \dim(V)$, a prema pretpostavci ovog korolara imamo $\dim(V) = \dim(W) \Rightarrow r(A) = \dim(W)$, pa vrijedi $\mathrm{Im}A = W$ što znači da je A epimorfizam.
ii) $\Rightarrow$ *iii)*
A je epimorfizam pa vrijedi $\mathrm{Im}A = W$ iz čega slijedi, $r(A) = \dim(W) = \dim(V)$. Prema Teoremu o rangu i defektu imamo, $d(A) = \dim(V) - r(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}A = \{0\}$.
A je monomorfizam i epimorfizam što znači da je A izmorofizam.
iii) $\Rightarrow$ *i)* Očigledno.

$\square$

Primjer 1.1. Pokažimo da je operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

izomorfizam.

Prvo trebamo provjeriti da li je operator A linearan, a zatim pokazati da je ili injektivan ili surjektivan kako bi mogli iskoristiti Korolar 1.1.

Provjerimo linearnost operatora A prema Definiciji 1.3 za vektore $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) &= A(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \\ &\overset{def.}{=} (\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), \alpha(x_2 + x_3) + \beta(y_2 + y_3), \\ &\quad \alpha(x_1 + x_3) + \beta(y_1 + y_3)) \\ &= \alpha(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3) + \beta(y_1 + y_2, y_2 + y_3, y_1 + y_3) \\ &= \alpha A(x_1, x_2, x_3) + \beta A(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Operator A je linearan. Dokažimo sada da je A monomorfizam, tj. prema Propoziciji 1.1 da je $\mathrm{Ker}A = \{0\}$. Prema definiciji jezgre znamo da je

$$\mathrm{Ker}A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : A(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

$\Rightarrow A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3) = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Jezgra operatora A je trivijalna što znači da je on monomorfizam, tj. izomorfizam prema Korolaru 1.1. Naravno, mogli smo umjesto injektivnosti dokazati da je A surjektivan što bi nas dovelo do istog zaključka.

2 Reprezentacija linearnog funkcionala i hermitsko adjungiranje

U ovom poglavlju ćemo obraditi važan teorem koji govori o postojanju hermitski adjungiranog operatora koji ima široku primjenu kako u području matematike tako i u kvantnoj mehanici. Prije nego što se dotaknemo glavne teme ovog poglavlja moramo prvo spomenuti i objasniti pojmove koji će nam biti potrebni za razumjevanje dokaza teorema i svojstava hermitski adjungiranog operatora.

2.1 Antilinearna preslikavanja

U Poglavlju 1.2 smo definirali što je to linearno preslikavanje, sada ćemo uvesti definiciju antilinearnog preslikavanja i uočiti razlike između ta dva pojma.

Definicija 2.1. *Antilinearno preslikavanje $B : V \to W$ je preslikavanje sa svojstvom:*

$$B(\lambda u + \mu v) = \bar{\lambda} Bu + \bar{\mu} Bv, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K.$$

Jedina razlika između linearnog i antilinearnog preslikavanja su konjugirani skalari pa možemo zaključiti da su u slučaju kada je polje K= $\mathbb{R}$ linearnost i antilinearnost ista svojstva. Međutim, ako je $K = \mathbb{C}$ općenito neće vrijediti $\bar{\lambda} = \lambda$.

Navedimo neke primjere linearnih i antilinearnih preslikavanja.

Primjer 2.1.

a) Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirano s $f(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i, \ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, je linearan operator.

Neka su $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha v + \beta w) &= f(\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \dots, \alpha v_n + \beta w_n) \\
&\overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha v_i + \beta w_i) \overset{\substack{asoc.\\komut.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta w_i \\
&\overset{dist.}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i + \beta \sum_{i=1}^{n} w_i \overset{def.}{=} \alpha f(v) + \beta f(w).
\end{aligned}$$

b) Skalarni produkt na V je antilinearno preslikavanje u drugoj varijabli.
Neka su $v_1, v_2, v_3 \in V$,$\lambda, \mu \in K$:

$$(v_1 \mid \lambda v_2 + \mu v_3) \overset{4.}{=} \overline{(\lambda v_2 + \mu v_3 \mid v_1)} \overset{3.}{=} \bar{\lambda}\overline{(v_2 \mid v_1)} + \bar{\mu}\overline{(v_3 \mid v_1)} \overset{4.}{=} \bar{\lambda}(v_1 \mid v_2) + \bar{\mu}(v_1 \mid v_3).$$

2.2 Konjugirani vektorski prostor

Svakom vektorskom prostoru V nad poljem K možemo pridružiti novi vektorski prostor u oznaci $\overline{V}$. Binarna operacija zbrajanja će biti isti kao u prostoru V, dok ćemo operaciju množenja sa skalarom definirati na sljedeći način:

$$\lambda \odot v := \bar{\lambda} v, \ \forall v \in \overline{V}, \lambda \in K.$$

Lako se dokaže da $\overline{V}$ zaista je vektorski prostor. Pošto znamo da je operacija zbrajanja isto kao i u vektorskom prostoru V, potrebno je provjeriti samo svojstva koja u sebi imaju operaciju množenja.

i) distributivnost s obzirom na zbrajanje u $\overline{V}$:

$$\lambda \odot (u + v) \overset{def.}{=} \bar{\lambda}(u + v) = \bar{\lambda} u + \bar{\lambda} v = \lambda \odot u + \lambda \odot v.$$

ii) distributivnost s obzirom na zbrajanje u K:

$$(\lambda + \mu) \odot v \overset{def.}{=} (\overline{\lambda + \mu}) v = (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) v = \bar{\lambda} v + \bar{\mu} v = \lambda \odot v + \mu \odot v.$$

iii) kvaziasocijativnost:

$$(\lambda \mu) \odot v \overset{def.}{=} \overline{\lambda \mu} v = (\bar{\lambda} \bar{\mu}) v = \bar{\lambda}(\bar{\mu} v) = \lambda \odot (\mu \odot v).$$

iv) $1 \odot v = v$.

Vektorski prostor $\overline{V}$ s navedenim svojstvima se naziva **konjugirani vektorski prostor prostora** V. Analogno kao što smo zaključili kod antilinearnog preslikavanja, u slučaju kada je $K = \mathbb{R}$ razlike između V i $\overline{V}$ nema.

Pošto konjugirani prostor $\overline{V}$ nastaje iz V, možemo reći da ih razapinju isti skupovi, tj. $\overline{V} = V = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$. Dakle, vrijedi $\dim(V) = \dim(\overline{V})$.
Prema tome možemo definirati

$$A \in L(V, \overline{V}) \text{ s } Ae_i = e_i \tag{1}$$

tj. postoji linearni operator koji bazu od V preslikava u bazu od $\overline{V}$. Očigledno je operator A epimorfizam, jer je $\mathrm{Im}A = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}] = \overline{V}$, pa je prema Korolaru 1.1 A izomorfizam. Drugim riječima prostori V i $\overline{V}$ su međusobno izomorfni.

Ostaje nam još ispitati u kakvom su odnosu linearna preslikavanja i konjugirani prostori. Ako uzmemo antilinearno preslikavanje $A : V \to W$ znamo da vrijedi:

$$A(\lambda u + \mu v) = \bar{\lambda} Au + \bar{\mu} Av, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K.$$

Po definiciji množenja skalarom na konjugiranom prostoru možemo napisati:

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda \odot Au + \mu \odot Av, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K.$$

Slijedi, preslikavanje $A : V \to \overline{W}$ je linearno, tj. $A \in L(V, \overline{W})$. Uočimo još da vrijedi ako je $A : V \to W$ izomorfizam, onda je to i $A : V \to \overline{W}$ (Vidi definiran operator (1)).

2.3 Reprezentacija linearnog funkcionala

U ovom poglavlju upoznat ćemo se najprije sa samim pojmom linearnog funkcionala, a zatim navesti važan teorem u vezi njega koji ćemo iskoristiti za definiciju hermitski adjungiranog operatora u Poglavlju 2.4.

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Uočimo da je samo polje K također vektorski prostor nad K i $\dim(K) = 1$. Linearni operatori s prostora V u prostor K su dobro definirani i skup svih takvih operatora čini vektorski prostor.

Definicija 2.2. *Vektorski prostor $V' = L(V, K)$ zove se dualni prostor vektorskog prostora V.*

Pošto je $\dim(K) = 1$ lako se vidi da vrijedi:

$$\dim(V') = \dim(L(V, K)) = \dim(V) \cdot \dim(K) = \dim(V) \cdot 1 = \dim(V).$$

Također primjetimo da su elementi od V' linearni operatori specijalnog oblika, $f \in V'$, $f : V \to K$, koje nazivamo **linearnim funkcionalima**.

Navedimo osnovne primjere nekih linearnih funkcionala.

Primjer 2.2.

a) i-ta projekcija $\pi_i : K^n \to K$ definirana s

$$\pi_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$$

je linearan funkcional.

Dokažimo ovu tvrdnju za $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^n$ i $\alpha, \beta \in K$:

$$\begin{aligned}\pi_i(\alpha a + \beta b) &= \pi_i(\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \beta(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \\ &= \pi_i(\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \ldots, \alpha a_n + \beta b_n) \\ &= \alpha a_i + \beta b_i \\ &= \alpha \pi_i(a) + \beta \pi_i(b).\end{aligned}$$

b) Operator integracije $I : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definiran s

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

je linearan funkcional.

Dokažimo ovu tvrdnju za funkcije $f, g \in C([a, b])$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}I(\alpha f + \beta g) &= \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \int_a^b \alpha f(t)dt + \int_a^b \beta g(t)dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt \\ &= \alpha I(f) + \beta I(g).\end{aligned}$$

c) Trag matrice $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiran s

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

gdje je $A = [a_{ij}]$, je linearan funkcional.

Dokažimo tvrdnju za matrice $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}tr(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) \\ &\overset{komut.}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \beta b_{ii} \\ &\overset{dist.}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \alpha tr(A) + \beta tr(B).\end{aligned}$$

U nastavku poglavlja uzmimo da je V unitarni prostor nad poljem K sa skalarnim produktom $(\cdot\,|\,\cdot) : V \times V \to K$. Definirajmo linearan funkcional $f_w : V \to K$ za svaki $w \in V$ s:

$$v \mapsto (v\,|\,w), \text{ tj. } f_w(v) = (v\,|\,w), \ \forall v \in V.$$

Prema definiciji skalarnog produkta iz Poglavlja 1.1 znamo da je on linearan u prvoj varijabli pa je i preslikavanje f_w linearno.

Time smo definirali preslikavanje $w \mapsto f_w$, ali preostalo nam je pokazati da zaista za svaki linearni funkcional postoji vektor koji omogućuje zapis oblika $f_w(v) = (v\,|\,w)$. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.1 (Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala)**.** *Za svaki $f_w \in V'$ postoji jedinstveni $w \in V$ takav da je $f_w(v) = (v\,|\,w)$, $\forall v \in V$.*

Dokaz: Neka je $f_w \in V'$, odnosno $f_w : V \to K$. Ako je $f_w = 0$, onda očito $\exists\, w \in V$ $(w = 0)$ takav da vrijedi:

$$f_w(v) = (v\,|\,w), \quad \forall v \in V.$$

Neka je $f_w \neq 0$. Za ovaj dio dokaza ćemo iskoristiti Teorem o ortogonalnoj projekciji čiji se dokaz može naći u [1].

Teorem o ortogonalnoj projekcij: *Neka je X unitaran prostor i Y njegov potprostor. Tada vrijedi $X = Y \dot{+} Y^{\perp}$. Drugim riječima, za svaki vektor $x \in X$ postoje jedinstveni vektori $y \in Y$ i $z \in Y^{\perp}$ takvi da je $x = y + z$.*

Znamo da je $\mathrm{Ker} f_w \leq V$ i da tada, prema gornjem teoremu, on ima svoj ortogonalni komplement za koji vrijedi:

$$V = \mathrm{Ker} f_w \dot{+} \mathrm{Ker} {f_w}^{\perp}. \tag{$*$}$$

Uočimo da je rang funkcionala f_w jednak 1 $(r(f_w) = \dim(K) = 1)$. Prema Teoremu o rangu i defektu slijedi da je $\dim(V) = d(f_w) + 1$, a iz toga i $(*)$ se može lako vidjeti da je prostor $\mathrm{Ker} {f_w}^{\perp}$ jednodimenzionalan.

Neka je $e \in \mathrm{Ker} f^{\perp}$ takav da je $\|e\| = 1$, tada $\{e\}$ čini ortonormiranu bazu od $\mathrm{Ker} f^{\perp}$. Označimo $w = \overline{f_w(e)}e$ i uzmimo neki $v \in V$. Znamo da postoje skalar $\lambda \in K$ i vektor $z \in \mathrm{Ker} f_w$ takvi da je $v = \lambda e + z$. Sada imamo:

$$f_w(v) = f_w(\lambda e + z) \overset{lin.}{=} \lambda f_w(e) + f_w(z) \overset{z \in Ker f_w}{=} \lambda f_w(e),$$

$$\begin{aligned}(v\,|\,w) &= (\lambda e + z\,|\,\overline{f_w(e)}e) = (\lambda e\,|\,\overline{f_w(e)}e) + (z\,|\,\overline{f_w(e)}e) \\ &= \lambda f_w(e)(e\,|\,e) + f_w(e)(z\,|\,e) = \lambda f_w(e),\end{aligned}$$

jer je $z \perp e$ i $(e\,|\,e) = 1$. Pokazali smo da postoji vektor w koji zadovoljava

$$f_w(v) = (v\,|\,w), \quad \forall v \in V.$$

Dokažimo još da je takav vektor w jedinstven. Pretpostavimo da $\exists\, w' \in V$ takav da je $f_w(v) = (v \,|\, w')$, $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned} f_w(v) = (v \,|\, w) = (v \,|\, w') &\iff (v \,|\, w) - (v \,|\, w') = 0 \\ &\iff (v \,|\, w - w') = 0 \\ &\iff w - w' = 0 \\ &\iff w = w'. \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje $w \mapsto f_w$ je zaista dobro definirano.

□

Sada kada znamo da je preslikavanje $w \mapsto f_w$ dobro definirano, pogledajmo njegova svojstva.

Teorem 2.2 (O reprezentacij linearnog funkcionala)**.** *Preslikavanje $w \mapsto f_w$ je antilinearan izomorfizam vektorskih prostora V i V'.*

Dokaz: Prvo označimo preslikavanje $w \mapsto f_w$ s g, tj.

$$g(w) = f_w(v) = (v \,|\, w),\ v \in V.$$

Znamo da je skalarni produkt antilinearan u drugoj varijabli pa se lako pokaže da je i funkcija g također antilinearna (vidi Primjer 2.1 pod b)):

$$\begin{aligned} g(\alpha w_1 + \beta w_2) &= (v \,|\, \alpha w_1 + \beta w_2) = \overline{\alpha}(v \,|\, w_1) + \overline{\beta}(v \,|\, w_2) \\ &= \overline{\alpha} g(w_1) + \overline{\beta} g(w_2), \quad \forall v, w_1, w_2 \in V, \alpha, \beta \in K. \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da je preslikavanje g antilinearno. Prisjetimo se sada veze između antilinearnog preslikavanja i konjugiranih prostora iz Poglavlja 2.2. Ako gledamo g kao $g : V \to \overline{V'}$ ono je linearno preslikavanje, tj. $g \in L(V, \overline{V'})$.
Dalje primjetimo da vrijedi,

$$\dim(V) = \dim(V') = \dim(\overline{V'}).$$

S ovime imamo sve potrebne pretpostavke za Korolar 1.1. Preostaje nam samo još pokazati da je g injekcija kako bi mogli zaključiti da je g izomorfizam.
Pretpostavimo da je $g(w_1) = g(w_2)$, $w_1, w_2 \in V$. Pa po definiciji od g slijedi:

$$\begin{aligned} f_{w_1}(v) = f_{w_2}(v) &\iff (v \,|w_1) = (v \,|\, w_2) \iff (v \,|\, w_1 - w_2) = 0 \\ &\iff w_1 - w_2 = 0 \iff w_1 = w_2, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

□

Pogledajmo sada na primjeru kako možemo iskoristiti gore navedene teoreme.

Primjer 2.3. Neka je zadan linearan funkcional $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiran s $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$. Trebamo pronaći jedinstven vektor $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ takav da vrijedi:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2, x_3) \,|\, (z_1, z_2, z_3)), \ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Općenito, može se lako pokazati da je za $f : V \to K$ jedinstveni vektor $w \in V$, za koji vrijedi $f(v) = (v \,|\, w)$, dan u obliku:

$$w = \overline{f(e_1)}e_1 + \overline{f(e_2)}e_2 + \cdots + \overline{f(e_n)}e_n, \tag{2}$$

gdje je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V.

Uzmimo proizvoljan $v \in V = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ takav da je:

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \ \lambda_i \in K, i = 1, 2, \ldots n. \tag{$**$}$$

Tada imamo:

$$f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) \overset{lin.}{=} \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$$

$$\begin{aligned} (v \,|\, w) &\overset{pretp.}{=} (v \,|\, \overline{f(e_1)}e_1 + \overline{f(e_2)}e_2 + \cdots + \overline{f(e_n)}e_n) \\ &= f(e_1)(v \,|\, e_1) + f(e_2)(v \,|\, e_2) + \cdots + f(e_n)(v \,|\, e_n) \\ &\overset{(**)}{=} \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n). \end{aligned}$$

Dakle, zaista je vektor w dobro zadan s (2).

U našem primjeru imamo:

$$(z_1, z_2, z_3) = \overline{\varphi(e_1)}e_1 + \overline{\varphi(e_2)}e_2 + \overline{\varphi(e_3)}e_3.$$

Uzmimo standardnu ortonormiranu bazu za prostor $\mathbb{R}^3$, tj. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ i pogledajmo kako zadan funkcional φ djeluje na nju:

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,0) &= 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 1 \\ \varphi(0,1,0) &= 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2 \\ \varphi(0,0,1) &= 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

Tada naš vektor (z_1, z_2, z_3) izgleda ovako:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) &= 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0) + 3 \cdot (0,0,1) \\ &= (1,2,3) \end{aligned}$$

i vrijedi:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2, x_3) \,|\, (1,2,3)), \ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

što se lako može provjeriti direktnim računanjem standardnog skalarnog produkta na prostoru $\mathbb{R}^3$.

2.4 Hermitski adjungirani operator

Neka je V unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot\,|\,\cdot)_V$, W unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot\,|\,\cdot)_W$ i $A \in L(V,W)$. Prisjetimo se sada Rieszovog teorema o reprezentaciji funkcionala iz prijašnjeg poglavlja i pogledajmo preslikavanje $v \mapsto (Av\,|\,w)_W,\ v \in V, w \in W$. Očigledno je to preslikavanje linearan funkcional sa V u K što znači da postoji jedinstven vektor iz V, mi ćemo ga označiti s $A^*w \in V$, za koji vrijedi:

$$(Av\,|\,w)_W = (v\,|\,A^*w)_V,\ \forall v \in V, w \in W. \tag{3}$$

Na taj način smo dobro definirali preslikavanje

$$A^* : W \to V, \quad A^*(w) = A^*w$$

koje zadovoljava jednakost (3). Takav operator ima poseban naziv.

Lema 2.1. *Operator $A^* : W \to V$ je linearan i naziva se hermitski adjungirani operator operatora A. Nadalje, A^* je jedinstveno određen s* (3).

Dokaz: Pokažimo prvo da je operator A^* linearan. Neka su $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\lambda, \mu \in K$. Iz jednakosti (3) dobivamo:

$$\begin{aligned}(v\,|\,A^*(\lambda w_1 + \mu w_2))_V &= (Av\,|\,\lambda w_1 + \mu w_2)_W \\ &= \bar{\lambda}(Av\,|\,w_1)_W + \bar{\mu}(Av\,|\,w_2)_W \\ &= \bar{\lambda}(v\,|\,A^*w_1)_V + \bar{\mu}(v\,|\,A^*w_2)_V \\ &= (v\,|\,\lambda A^*w_1)_V + (v\,|\,\mu A^*w_2)_V \\ &= (v\,|\,\lambda A^*w_1 + \mu A^*w_2)_V.\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki $v \in V$ imamo:

$$A^*(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda A^*w_1 + \mu A^*w_2.$$

Dakle, vrijedi linearnost. Preostaje pokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji još jedan operator $B \in L(W,V)$ koji zadovoljava:

$$(Av\,|\,w)_W = (v\,|\,A^*w)_V = (v\,|\,Bw)_V,\ \forall v \in V, w \in W.$$

Iz čega dobivamo:

$$0 = (v\,|\,A^*w)_V - (v\,|\,Bw)_V = (v\,|\,A^*w - Bw)_V,\ \forall v \in V, w \in W.$$

Posebno, ako stavimo $x = v = A^*w - Bw$ imamo:

$$(x\,|\,x)_V = 0 \iff x = 0 \Rightarrow A^*w = Bw$$

iz čega slijedi jedinstvenost.

□

Teorem 2.3. *Neka su V, W unitarni prostori. Tada je preslikavanje $A \mapsto A^*$ antilinearna involucija prostora $L(V,W)$ i $L(W,V)$, tj.*

i) ***(involutivnost)*** $(A^*)^* = A$, *za sve* $A \in L(V,W)$,

ii) ***(antilinearnost)*** $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$, *za sve* $A, B \in L(V,W), \alpha, \beta \in K$.

Posebno, $A \mapsto A^*$ je izomorfizam sa $L(V,W)$ u $L(W,V)$.

Dokaz: Koristeći jednakost (3) imamo sljedeće:

$$(Av \mid w)_W = (v \mid A^* w)_V.$$

Konjugiramo li gornji izraz dobivamo:

$$(\overline{Av \mid w})_W = (\overline{v \mid A^* w})_V \Rightarrow (w \mid Av)_W = (A^* w \mid v)_V. \tag{4}$$

Nadalje, raspišimo $(A^*)^*$ prema jednakosti (3):

$$(A^* w \mid v)_V = (w \mid (A^*)^* v)_W. \tag{5}$$

Dakle, iz (4) i (5) imamo:

$$(w \mid Av)_W = (w \mid (A^*)^* v)_W.$$

Prema prijašnjoj Lemi 2.1 operator s tim svojstvom je jedinstven, iz čega slijedi da je $(A^*)^* = A$. Time smo dokazali tvrdnju pod i). Za dokaz tvrdnje ii) ćemo raspisati sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
(v \mid (\lambda A + \mu B)^* w)_V &\overset{def.}{=} ((\lambda A + \mu B) v \mid w)_W \\
&\overset{lin.}{=} (\lambda A v + \mu B v \mid w)_W \\
&= \lambda (Av \mid w)_W + \mu (Bv \mid w)_W \\
&\overset{def.}{=} \lambda (v \mid A^* w)_V + \mu (v \mid B^* w)_V \\
&= (v \mid \bar{\lambda} A^* w)_V + (v \mid \bar{\mu} B^* w)_V \\
&= (v \mid \bar{\lambda} A^* w + \bar{\mu} B^* w)_V.
\end{aligned}$$

Ovo vrijedi za sve $v \in V$, $w \in W$, $\lambda, \mu \in K$ i $A, B \in L(V,W)$, pa dobivamo jednakost:

$$(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*.$$

Zadnja tvrdnja je direktna posljedica svojstva involutivnosti, tj.

Injektivnost: Pretpostavimo da je $A_1^* = A_2^*$ za neke $A_1, A_2 \in L(V,W)$. Iskoristimo ii): $(A_1^*)^* = (A_2^*)^* \Rightarrow A_1 = A_2$.

Surjektivnost: Neka je $B \in L(W,V)$ i nađimo neki operator iz $L(V,W)$ koji se u njega preslika. Označimo $A = B^* \in L(V,W)$, iz čega slijedi da je $A^* = B$.

Preslikavanje $A \mapsto A^*$ je izomorfizam.

$\square$

Teorem 2.4. *Neka su V, W, U unitarni prostori. Neka je $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, U)$. Onda vrijedi*

$$(BA)^* = A^*B^*.$$

Dokaz: Najprije trebamo pokazati da je takva kompozicija zaista dobro definirana i da gornja jednakost ima smisla. Zbog $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, U)$ kompozicija je $BA \in L(V, U)$. Iz čega se vidi da je $(BA)^* \in L(U, V)$. Nadalje, imamo da su $A^* \in L(W, V)$ i $B^* \in L(U, W)$ pa je njihova kompozicija $A^*B^* \in L(U, V)$. Preostaje nam pokazati da vrijedi:

$$(BA)^*u = A^*B^*u, \ \forall u \in U.$$

Koristeći jednakost (3) dobivamo:

$$(v \,|\, (BA)^*u) = (BAv \,|\, u) = (Av \,|\, B^*u) = (v \,|\, A^*B^*u), \ \forall v \in V, u \in U.$$

Iz čega smo dobili traženu jednakost.

$\square$

Prijašnji teoremi i korolari su bili za slučaj da operator A preslikava vektore iz jednog u neki drugi vektorski prostor. Naravno da tvrdnje i dalje vrijede za $W = V$, ali tada imamo još jedno dodatno svojstvo uz već prijašnje navedena. O tome nam govori sljedeći korolar.

Korolar 2.1. *Neka je V unitaran prostor. Tada preslikavanje $A \mapsto A^*$ (hermitsko adjungiranje) zadovoljava:*

i) ***(involutivnost)*** $(A^*)^* = A$, *za sve* $A \in L(V)$,

ii) ***(antilinearnost)*** $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$, *za sve* $A, B \in L(V), \alpha, \beta \in K$,

iii) $(BA)^* = A^*B^*$, *za sve* $A, B \in L(V)$,

iv) $I^* = I$, *gdje je I jedinični operator.*

Dokaz: Dokazi tvrdnja $i) - iii)$ direktno slijede iz teorema 2.3 i 2.4, a $iv)$ se lako dokaže koristeći ponovno jednakost (3) sa oznakama $A = I$ i $V = W$:

$$(Iv_1 \,|\, v_2)_V = (v_1 \,|\, v_2)_V = (v_1 \,|\, Iv_2)_V$$
$$(Iv_1 \,|\, v_2)_V \stackrel{def.}{=} (v_1 \,|\, I^*v_2)_V.$$

Jedinstvenost povlači $I = I^*$.

$\square$

Primjer 2.4. Pogledajmo kako izgleda hermitski adjungirani operator operatora $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ zadan s

$$A(z_1, z_2, z_3) = (2z_1 - iz_2 + z_3, iz_1 + 2z_3, z_2).$$

U tu svrhu, poslužit ćemo se matričnim zapisom operatora s kojim ćemo to postići jednostavnije. Prvo ćemo općenito pokazati kako se dobiva matrični zapis operatora pa ćemo to iskoristiti na našem primjeru.

Neka su V i W unitarni prostori nad poljem K i neka je $A \in L(V,W)$. Tada redom postoje ortonormirane baze $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ prostora V, odnosno W. Kako je $Av \in W, \forall v \in V$, on se može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz baze od W, pa posebno za $v = e_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ možemo pisati:

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m \\
Ae_2 &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m \\
&\vdots \\
Ae_n &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{mn}f_m,
\end{aligned}$$

gdje su $a_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots, n$. Pomoću takvog raspisa operatora A, možemo mu na sljedeći način pridružiti matricu u paru baza f i e:

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(K).$$

Za naš primjer imamo prostor $V = W = \mathbb{C}^3$ nad poljem $\mathbb{C}$, pa je tada naša ortonormirana baza polaznog i dolaznog prostora $e = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Pogledajmo kako zadani operator A djeluje na bazu:

$$\begin{aligned}
A(1,0,0) &= (2,i,0) = 2\cdot(1,0,0) + i\cdot(0,1,0) \\
A(0,1,0) &= (-i,0,1) = -i\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,0,1) \\
A(0,0,1) &= (1,2,0) = 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0).
\end{aligned}$$

Kao što je gore prikazano, sada možemo operator A zapisati u obliku matrice:

$$A(e,e) = \begin{bmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znamo da za neku matricu $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ možemo pronaći njenu hermitski adjungiranu matricu $A^* \in M_{n\times m}(K)$ tako da na mjesto (i,j) stavimo element $\overline{a_{ji}}$, tj. dobijemo ju iz matrice A najprije transponiranjem, a onda kompleksnim konjugiranjem svakog elementa.

Adjungiranjem naše matrice $A(e,e)$ dobivamo:

$$A^*(e,e) = \begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Postoji poveznica između adjungirane matrice i hermitski adjungiranog operatora, a o tome govori sljedeća tvrdnja čiji dokaz možete naći u [2]:

U paru ortonormiranih baza e i f, matrica $A^*(e,f)$ operatora A^* je hermitski adjungirana matrici $A(f,e)$, tj. vrijedi

$$A^*(e,f) = (A(f,e))^*.$$

Dakle, da bi pronašli hermitski adjungirani operator zadanog operatora A preostaje nam jedino još pronaći kako je definiran operator A^* iz njegovog matričnog zapisa $A^*(e,e)$.
Iz matričnog zapisa možemo očitati kako A^* djeluje na bazu od $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} A^*(1,0,0) &= (2,i,1) \\ A^*(0,1,0) &= (-i,0,2) \\ A^*(0,0,1) &= (0,1,0). \end{aligned} \tag{6}$$

Uzmimo proizvoljan vektor $z = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \in \mathbb{C}^3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ i pogledajmo kako operator A^* djeluje na njega:

$$\begin{aligned} A^*(z) &= A^*(\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)) \\ &\overset{lin.}{=} \alpha A^*(1,0,0) + \beta A^*(0,1,0) + \gamma A^*(0,0,1) \\ &\overset{(6)}{=} \alpha(2,i,1) + \beta(-i,0,2) + \gamma(0,1,0) \\ &= (2\alpha - i\beta, i\alpha + \gamma, \alpha + 2\beta). \end{aligned}$$

Dobili smo hermitski adjungirani operator operatora A i on je definiran s:

$$A^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad A^*(z_1, z_2, z_3) = (2z_1 - iz_2, iz_1 + z_3, z_1 + 2z_2).$$

Primjer 2.5.

a) Ako je A regularan onda je to i A^* te vrijedi

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Prema Lemi 2.1 znamo da je operator A^* linearan, samo treba pokazati da i on ima inverz. Prema pretpostavci znamo da operator A ima inverz, odnosno imamo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Iskorisitmo Teorem 2.4 i svojstvo pod *iv*) Korolara 2.1 i adjungiramo gornji izraz:

$$(A^{-1})^* A^* = A^*(A^{-1})^* = I.$$

Slijedi da operator A^* zaista ima inverz i to je operator $(A^{-1})^*$, tj. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

b) Za bilo koji linearan operator T je operator $H = TT^*$ hermitski, tj. $H^* = H$.

Pomoću Teorema 2.4 i svojstva involutivnosti preslikavanja $A \mapsto A^*$ lako se može dokazati ova tvrdnja:

$$H^* = (TT^*)^* = (T^*)^* T^* = TT^* = H.$$

Literatura

[1] H. Kraljević, Vektorski prostori, Osijek, 2008.

[2] S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori, Školska knjiga, Zagreb, 1967.

[3] S. Kurepa, Funkcionalna analiza-Elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[4] https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/vp.pdf