Opcije na tržištima kriptovaluta

Romić, Nikolina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Nikolina Romić

Opcije na tržištima kriptovaluta

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Nikolina Romić

Opcije na tržištima kriptovaluta

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

Cijene dionica fluktuiraju u neprekidnom vremenu. Najveći problem pri kupovini ili prodaji dionica jest naslutiti ili predvidjeti cijenu dionice u nekom vremenskom periodu nakon kupovine ili prije prodaje. Potrebno je kontrolirati nastali rizik, a obavljena kupovina ili prodaja uvelike ovise o stavu prema riziku osobe koja transakciju obavlja. Veći rizik donosi veći prinos i obratno što je mnogima velika motivacija za trgovanje dionicama. Neke od mogućnosti kontroliranja rizika jesu Europske opcije. Način na koji se mogu nearbitražno vrednovati Europske opcije dan je:

- binarnim modelom u slučaju jednoperiodnog financijskog tržišta u diskretnom vremenu
- Cox - Ross - Rubinsteinovim modelom u slučaju n-periodnog financijskog tržišta u diskretnom vremenu
- Black - Sholes - Mertonovom formulom u slučaju financijskog tržišta u neprekidnom vremenu

Ono čime je ovaj rad potaknut je zaokupiranost svjetske javnosti trgovanjem kriptovalutama. Postavlja se pitanje mogu li se kriptovalute nearbitražno vrednovati na način sličan vrednovanju dionica tj. uz pretpostavku postojanja opcija analognih Europskim opcijama na tržištu dionica, nastoji se odrediti nearbitražna cijena opcije i na taj način rizik od trgovine kriptovalutama držati pod nadzorom. U tu će svrhu u radu biti promotrene pretpostavke koje bi trebale biti zadovoljene te daljnja analiza portfelja i vrednovanje opcija.

Portfelj je sastavljen od četiri vrste kriptovaluta i novca položenog u banku. Početni novčani iznos je 150000 USD i od tog je novca dana 2. listopada 2017. godine kupljeno 10 jedinica Bitcoina, 100 jedinica Ethera, 100 jedinica Dasha te 1000 jedinica valute Iota. Jedinične cijene su tog dana redom 4395.81, 302.48, 315.95 i 0.61818. Preostali je iznos od 43580.72 položen u banku uz kamatnu stopu od 1% uz dnevno složeno ukamaćivanje. Vrijednosti kriptovaluta i iznosa u banci te vrijednost portfelja promatrana je do dana 25. veljače 2018. godine, ukupno kroz 147 dana.

Pretpostavljeno je kako nema transakcijskih troškova te poreza i prireza na kamatu radi jednostavnosti, iako se obično prilikom transakcije kriptovaluta obračunava trošak u postotku od vrijednosti transakcije, primjerice 0.25% te se plaća porez u postotku od kamate.

Poglavlje 1

Europske opcije i barijerne opcije

Stav o riziku je osobna karakteristika, a ovisno o tom stavu, postoje osobe koje se više vole upuštati u rizičnije pothvate i one koje to pak izbjegavaju. Kad je u pitanju zarada, velik bi se broj ljudi uključio u trgovanje vrijednosnim papirima kad bi zarada bila zagarantirana. Kako to nije slučaj, osobe koje nisu sklone prihvaćanju većih rizika, nastoje pronaći vrijednosne papire manjeg rizika pri čemu je, prirodno, za takve papire i prinos niži. Stoga su se razvijale tehnike kontrole rizika kojima bi se umanjio rizik i samim time povećala vjerojatnost ostvarivanja zarade. Među najjednostavnijim tehnikama kontrole rizika navode se Europske call i put opcije koje se nazivaju i *vanilla* opcijama.

1. Europske put i call opcije

Definicija 1.1. *Europska put (call) opcija je ugovor koji svojem vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu da u točno određeno vrijeme u budućnosti i po unaprijed dogovorenoj cijeni proda (kupi) dogovorenu financijsku imovinu.*

Točno određeno vrijeme u budućnosti iz definicije naziva se vremenom (trenutkom) dospijeća, a unaprijed dogovorena cijena je cijena izvršenja opcije.

Za osobu koja je vlasnik put opcije (u trenutku dospijeća opcije ima pravo prodati vrijednosni papir) pogodna je situacija u kojoj je cijena vrijednosnog papira u trenutku dospijeća opcije viša od cijene na tržištu u istom trenutku. Tada bi on svoju opciju iskoristio i prodao vrijednosni papir te time bilježio profit u iznosu razlike cijene izvršenja i cijene na tršištu u trenutku dospijeća. U slučaju suprotne situacije, odnosno situacije u kojoj je obratan odnos navedenih cijena, njegova bi zarada bila 0. Stoga je takvo pravo kontrole rizika potrebno platiti određenim iznosom *premije*. Na taj bi način maksimalna zarada koju vlasnik opcije može ostvariti iznosila razliku cijene dospijeća i cijene na tržištu umanjenjenu za iznos premije, a maksimalni gubitak koji vlasnik opcije može trpiti je iznos premije koju je potrebno platiti prodavatelju opcije. Slična bi analiza slijedila u slučaju kad je osoba vlasnik call opcije gdje bi pogodna situacija bila niža cijena izvršenja nego što je cijena na tržištu u trenutku dospijeća opcije.

Stoga, ako se s S_t označi vrijednost financijske imovine u trenutku t, s T vrijeme izvršenja, a s K cijena izvršenja opcije, onda vrijedi da je vrijednost europske opcije jednaka $(K - S_T)_+ = \max\{K - S_T, 0\}$ ako je u pitanju put opcija, odnosno $(S_T - K)_+$ za call opciju.

Glavno pitanje koje se postavlja prilikom vrednovanja opcija je kolika bi trebala biti premija kako niti prodavatelj opcije niti kupac opcije ne bi trpili gubitke ili ostvarili sigurnu zaradu, odnosno koliko iznosi nearbitražna vrijednost premije na promatranu opciju. Osim toga, potrebno je definirati i cijenu izvršenja opcije kao iznos na koji bi pristali i prodavatelj i kupac.

Na pitanje nearbitražne visine premije nemoguće je odgovoriti bez postavljanja određenih uvjeta na tržište financijskom imovinom. U jednom od manje nerealnih slučajeva, Black, Sholes i Merton dali su gotovu formulu za izračun nearbitražne cijene put i call opcija za što su osvojili i Nobelovu nagradu 1997. godine.

Jedna od pretpostavki za korištenje Black - Sholes - Mertonove formule je mogućnost trgovanja financijskom imovinom u neprekidnom vremenu. Predmet promatranja ovog rada jesu kriptovalute, a kupovina i prodaja kriptovaluta zaista se može obavljati u neprekidnom vremenu. Stoga je ova pretpostavka za tržište kriptovaluta zadovoljena. Preostale su pretpostavke navedene u sljedećem potpoglavlju.

2. Black - Sholes - Mertonova formula

Prije samog izvoda Black - Sholes - Mertovone formule potrebno je definirati osnovne pojmove te iskazati nužne teoreme koji su potrebni za izvod. Neki od pojmova koje je potrebno poznavati su pojam Brownovog gibanja i geometrijskog Brownovog gibanja, filtracije te martingala.

Definicija 1.2. *Slučajni proces* $\{B_t, t \geq 0\}$ *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *naziva se Brownovo gibanje ako za njega vrijedi:*

(i) $B_0 = 0$ *g.s.*

(ii) $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, $\forall t, s$ *takve da je* $t > s \geq 0$*, odnosno prirasti Brownovog gibanja na jednako dugim vremenskim intervalima su jednako distribuirani*

(iii) za sve $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{m-1} < t_m$ *su* $B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}$, $B_{t_2} - B_{t_1}$, ..., $B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ *nezavisni, odnosno prirasti Brownovog gibanja na disjunktnim vremenskim intervalima su nezavisni.*

Definicija 1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Za familiju* σ*-algebri* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *kažemo da je filtracija ako je to rastuća familija* σ*-algebri, odnosno* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ $\forall s \leq t$.

Svaki slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ ima svoju prirodnu filtraciju $\{\widetilde{\mathcal{F}_t}, t \geq 0\}$, $\widetilde{\mathcal{F}_t} = \sigma(\{X_s, 0 < s < t\})$. Ako postoji neka druga filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ za koju vrijedi da je $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$, odnosno filtracija takva da je X_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla $\forall t \geq 0$, onda kažemo da je proces $\{X_t\}$ adaptiran na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$. Svaki slučajan proces je adaptiran na svoju prirodnu filtraciju. Ako je pak slučajan proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ takav da je za filtraciju $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ X_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva, onda kažemo da je $\{X_n\}$ predvidiv proces u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$.

Definicija 1.4. *Neka je* $\{X_t \, t \geq 0\}$ *slučajan proces na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *takav da je* $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$, $\forall t \geq 0$ *i* $\{X_t\}$ *je adaptiran na filtraciju* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. $\{X_t\}$ *je* $\mathbb{F}$*-martingal ukoliko vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right] = X_s, \forall s \leq t.$$

Iz definicije slijedi kako je očekivanje martingala konstantno. Naime, prema svojstvima uvjetnog očekivanja,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s], \forall s \leq t.$$

Može se pokazati kako je Brownovo gibanje martingal u odnosu na svoju prirodnu filtraciju.

Za potrebe definiranja dinamičkog portfelja i arbitraže, neka je promatran vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, ...T\}\}$ filtracija. Neka je promatrana jedna nerizična financijska imovina čija je količina u trenutku t označena slučajnom varijablom φ_t^0 i $d \in \mathbb{N}$ rizičnih financijskih imovina čije su količine u trenutku t označene redom s $\varphi_t^1, \varphi_t^2, ..., \varphi_t^d$. U trenutku $t = 0$ investitor kreira portfelj $\varphi_1 = \left(\varphi_1^0, \varphi_1^1, ..., \varphi_1^d\right)$. Njega drži u vremenskom intervalu $(0, 1]$, a u trenutku $t = 1$ ga može rebalansirati i stvoriti portfelj φ_2. Prema tome, u trenutku t se stvara portfelj φ_{t+1} na temelju svih informacija skupljenih do trenutka t. Drugim riječima, φ_{t+1} je $\mathcal{F}_t$ izmjeriva, a proces $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, ...T\})$ predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$.

Definicija 1.5. *Portfelj $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, ...T\})$ iz gornjeg paragrafa koji je predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, ..., T\}\}$ zove se dinamički portfelj ili strategija trgovanja.*

Neka je s S_t^i označena vrijednost i-te financijske imovine u trenutku t. Tada je vrijednost portfelja u trenutku t, u oznaci $V_t(\varphi_t)$, dana skalarnim produktom slučajnih vektora $\varphi_t = \left(\varphi_t^0, \varphi_t^1, ..., \varphi_t^d\right)$ i $S_t = \left(S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d\right)$,

$$V_t(\varphi_t) = \langle \varphi_t, S_t \rangle.$$

Definicija 1.6. *Dinamički portfelj φ je samofinancirajući ako $\forall t \in \{0, 1, ..., T\}$ vrijedi*

$$\langle \varphi_t, S_t \rangle = \langle \varphi_{t+1}, S_t \rangle.$$

Definicija 1.7. *Dinamički portfelj φ je arbitraža ako vrijede sljedeća svojstva:*

(i) φ *je samofinancirajući*

(ii) $V_t(\varphi_t) \geq 0, \ \forall t \in \{0, 1, ..., T\}$

(iii) $V_0(\varphi_0) = 0$

(iv) $P(V_T(\varphi_T) > 0) > 0$.

Ako investitor u trenutku t ima portfelj u vrijednosti $V_t(\varphi_t) = \langle \varphi_t, S_t, \rangle$ i njega rebalansira na portfelj φ_{t+1} pri čemu su vrijednosti svih financijskih imovina nepromijenjeni, onda je $\langle \varphi_{t+1}, S_t \rangle = \langle \varphi_t, S_t \rangle$ što znači da je portfelj samofinancirajući. Ako je pak takav portfelj nenegativna slučajna varijabla čija je početna vrijednost jednaka 0, a vjerojatnost da će na kraju promatranog vremenskog intervala biti ostvarena dobit pozitivna, onda je riječ o arbitraži na financijskom tržištu.

Definicija 1.8. *Neka je S_0 pozitivna konstanta i proces $\{B_t, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajan proces $\{S_t, t \geq 0\}$ gdje je*

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

koji je jako rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

U slučaju financijskog tržišta u neprekidnom vremenu, proces koji se najčešće koristi za modeliranje cijene rizične financijske imovine je geometrijsko Brownovo gibanje. To je upravo pretpostavka za Black - Sholes - Mertonov model, pri čemu je S_0 početna cijena, a proces se uglavnom promatra za $t \in [0, T]$, za neki pozitivan realan broj T. Kad bi se cijene rizične financijske imovine modelirale geometrijskim Brownovim gibanjem, to bi značilo da pripadni log-povrati imaju normalnu distribuciju i međusobno su nezavisni što se može vidjeti iz sljedećeg:

$$\ln \frac{S_{t+dt}}{S_t} = \sigma(B_{t+dt} - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt \sim N((\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt, \sigma^2 dt).$$

Nezavisnost log-povrata (zbog nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja) povlači njihovu neprediktivnost, a to je velik nedostatak ovakvog pristupa.

Gornja stohastička diferencijalna jednadžba se može zapisati u ekvivalentnom obliku koji se često naziva naivnom interpretacijom stohastičke diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t)$$

gdje se s lijeve strane jednakosti za $dt = 1$ dobija relativni povrat. Izračunom matematičkog očekivanja i varijance na obje strane i primjenom činjenice da je $\{B_t\}$ Brownovo gibanje dobija se sljedeći rezultat:

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\right] = \alpha dt$$

$$Var\left(\frac{S_{t+dt}-S_t}{S_t}\right)=\sigma^2 dt.$$

Dakle, parametri α i σ geometrijskog Brownovog gibanja mogu se interpretirati kao očekivana (srednja) stopa povrata i standardna devijacija povrata (volatilnost, mjera rizika na financijskom tržištu).

Ako je r intenzitet kamate koji se može ostvariti polaganjem novca u gotovini u banku, onda bi imalo smisla da je $\alpha > r$ zbog faktora rizika koji treba biti uračunat u stopu povrata. Stoga se koeficijent $\alpha - r > 0$ naziva premija na rizik i on je motivacijski faktor za ulaganje u rizičnu financijsku imovinu.

Sljedeći je cilj pokazati i izvesti Black - Sholes - Mertonovu formulu za nearbitražno vrednovanje europskih put i call opcija. Za to je potrebno prvo promotriti identitet koji pokazuje odnos između vrijednosti call i put opcija u trenutku t, a naziva se *call-put paritet*.

Neka je s C_t^{PUT}i C_t^{CALL} označena vrijednost europske put, odnosno call opcije u trenutku $t \in [0,T]$ za neku pozitivnu realnu konstantu T koja je vrijeme dospijeća opcije. Ranije je navedeno kako je $C_t^{PUT}= (K-S_t)_+$ te $C_t^{CALL}= (S_t-K)_+$. Stoga je

$$C_t^{CALL} - C_t^{PUT} = \max\{S_t - K, 0\} - \max\{0, K - S_t\} = S_t - K.$$

Pravedna cijena put, odnosno call opcije koju je potrebno platiti bila bi očekivana diskontirana vrijednost opcije na sadašnje vrijeme uz sve dostupne informacije o tržištu do sadašnjeg trenutka. Budući da je to rizična imovina, diskontiranje je potrebno napraviti uz vjerojatnost neutralnu na rizik, odnosnu takvu da se uz tu vjerojatnosnu mjeru rizična financijska imovina ponaša kao nerizična. Pronaći takvu mjeru nije trivijalno, ali njezino postojanje u promatranim uvjetima garantira Girsanovljev teorem, no čak i više od toga.

Teorem 1.1. ***(Girsanovljev teorem)*** *Neka je $\{B_t, t \in [0,T]\}$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te neka je $\mathbb{F} = \{F_t, t \in [0,T]\}$ njegova prirodna fitracija. Tada je proces*

$$X_t = e^{-qB_t - \frac{1}{2}q^2 t}, \;\; q \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{F}$-martingal. Relacija $P^*(A) = E\left[X_t I_A\right]$ za $A \in \mathcal{F}$ definira vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ takvu da je $P^* \simeq P$ i u odnosu na koju je proces $\{\tilde{B}_t, t \in [0,T]\}$

$$\tilde{B}_t = B_t + qt, \;\; q \in \mathbb{R}$$

Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ adaptirano na $\mathbb{F}$.[1]

[1]dokaz se može pronaći na *Z. Vondraček* - Materijali s predavanja

Kao što je ranije navedeno, pravedna bi cijena opcije bila očekivana cijena rizične financijske imovine diskontirana na sadašnju vrijednost uz dostupne informacije o tržištu do sadašnjeg trenutka, odnosno

$$C_t^{PUT} = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} C_T^{PUT} | \mathcal{F}_t \right]$$

Iz tog izraza dalje slijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned} C_t^{PUT} &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (K - S_T)_+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (K - S_0 e^{\sigma B_T + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T})_+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (K - S_0 e^{\sigma(B_T - B_t + B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t+t)})_+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (K - S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})_+ | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Brownovo gibanje je Markovljev proces, što znači da za njega vrijedi Markovljevo svojstvo koje govori da neposredna budućnost procesa ovisi samo o sadašnjosti i neovisna je o prošlosti. Ovdje je $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, S_2, ..., S_t)$, S_t je transformacija B_t i primjenjujući Markovljevo svojstvo zaključujemo kako S_t ovisi samo o B_t, a ne o ranijim vrijednostima. Iz tog razloga dovoljno je uvjetovati samo na $\sigma(S_t)$ umjesto $\mathcal{F}_t$.

Neka je dana funkcija $c(t,x)$ s

$$c(t,x) := \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (K - x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})_+ \right]$$

Tada je $c(t, S_t) = C_t^{PUT}$.

Ako se stavi $\widetilde{B_u} = B_u + \frac{\alpha - r}{\sigma} u$, onda bi prema Girsanovljevom teoremu uz $q = \frac{\alpha - r}{\sigma}$ proces $\{\widetilde{B_t}, t \in [0,T]\}$ bio Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ gdje je vjerojatnosna mjera zadana s $P^*(A) = \mathbb{E}[S_t I_A]$ za $A \in \mathcal{F}$. Za tako definiran proces vrijedi

$$\begin{aligned} \widetilde{B_u} &= B_u + \frac{\alpha - r}{\sigma} u \\ \sigma \widetilde{B_u} &= \sigma B_u + (\alpha - r) u \\ \sigma(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t}) &= \sigma(B_T - B_t) + (\alpha - r)(T - t). \end{aligned}$$

Koristeći to prilikom izračuna gornjeg matematičkog očekivanja, slijedi

$$c(t,x) = \mathbb{E}^* \left[(K e^{-r(T-t)} - x e^{\sigma(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)})_+ \right]$$

Budući da je slučajna varijabla u eksponentu komponenta Brownovog gibanja na istom vjerojatnosnom prostoru kao i promatrano matematičko očekivanje, može se dalje računati prema definiciji matematičkog očekivanja. Uz to je potrebno primijetiti kako je $\widetilde{B_T}-\widetilde{B_t} \sim N(0,T-t)$ pa je promatrana slučajna varijabla čije je očekivanje potrebno izračunati transformacija normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $T-t$.

$$c(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} (Ke^{-r(T-t)} - xe^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)})_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}\, dy$$

Za dani je integral podintegralna funkcija različita od 0 jedino u slučaju kad je

$$xe^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} < Ke^{-r(T-t)}, \text{ odnosno, onda kad je}$$
$$y < -\frac{1}{\sigma}\bigg(\ln\frac{x}{K} + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)\bigg).$$

Ako se desni izraz prozove s $-d_2$, onda preostaje izračunati

$$c(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{-d_2} (Ke^{-r(T-t)} - xe^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}) e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}\, dy.$$

Nakon množenja, korištenja supstitucije $y = -z$ te razdvajanjem na dva integala, dobija se da je $R = I_1 - I_2$ pri čemu su I_1 i I_2 izračunati u nastavku:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}}\, dz \quad \bigg(\text{supstitucija} \frac{z}{\sqrt{T-t}} = u\bigg) \\
&= \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{T-t}\, du \\
&= Ke^{-r(T-t)} \int_{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= Ke^{-r(T-t)} \cdot \bigg(1 - \Phi\Big(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\Big)\bigg) \\
&= Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi\Big(-\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\Big)
\end{aligned}$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable, a posljednja jednakost vrijedi zbog simetričnosti te distribucije oko 0. Slično se dobije za I_2 gdje se definira vrijednost $d_1 = d_2 + \sigma(T-t)$ pa je rezultat

$$I_2 = x \cdot \Phi\Big(-\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\Big).$$

Sada je

$$c(t,x) = Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi\Big(-\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\Big) - x \cdot \Phi\Big(-\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\Big).$$

Tražena vrijednost je $C_t^{PUT} = c(t, S_t)$ i ona je u konačnici dana formulom:

$$C_t^{PUT} = Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi\left(- \frac{d_2}{\sqrt{T-t}} \right) - S_t \cdot \Phi\left(- \frac{d_1}{\sqrt{T-t}} \right).$$

Potrebno je još pokazati izraz za C_t^{CALL}, a taj se izraz lako dobije korištenjem call-put pariteta koji je već ranije naveden:

$$\begin{aligned} C_t^{CALL} - C_t^{PUT} &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (C_T^{CALL} - C_T^{PUT}) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} K | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t - Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Druga jednakost slijedi iz spomenutog call-put pariteta dok posljednja jednakost slijedi iz toga što je P^* takva vjerojatnosna mjera uz koju se rizična financijska imovina očekivano ponaša kao nerizična pa je vrijednost u trenutku t jednaka očekivanoj diskontiranoj vrijednosti na sadašnju vrijednost. Iz gornjeg izraza i iz izraza za C_t^{PUT} direktno slijedi izraz za C_t^{CALL} uz korištenje svojstva simetričnosti funkcije gustoće standardne normalne slučajne varijable:

$$\begin{aligned} C_t^{CALL} &= S_t \cdot \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}} \right) - Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}} \right) \\ d_1 &= \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right) \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right). \end{aligned}$$

Dobivena dva izraza za C_t^{PUT} i C_t^{CALL} se nazivaju Black - Sholes - Mertonovom formulom za vrednovanje europskih put i call opcija na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu. U daljnjem će se radu korištenjem tih formula u programskom paketu R nastojati povećati dobit odabranog portfelja.

3. Barijerne *knock-out* i *knock-in* te *up* i *down* opcije

Barijerne opcije uključuju barijeru ili ograničenje u vrijednosti financijske imovine koje treba ili ne smije biti zadovoljeno za ostvarenje prava iz ugovora, a mogu se primijeniti na različite tipove opcija. U radu su analizirane europske barijerne opcije i u daljnjem tekstu će se na njih referirati samo s nazivom *barijerne opcije*, iako je moguće pronaći i barijerne američke opcije i neke druge.

Osnovne dvije vrste barijernih opcija su barijerne *knock-in* i *knock-out* opcije. *Knock-in* opcije su one za koje je opcija nevrijedeća sve dok ne dosegne barijeru, a tada postaje obična *vanilla* opcija, ukoliko se to dogodi prije trenutka dospijeća. *Knock-out* opcija je takva da u slučaju dosezanja barijere postaje ništavna, a ako vrijednost financijske imovine ne dosegne barijeru u dogovorenom roku, onda je opcija *vanilla* opcija.

S obzirom na odnos između početne vrijednosti financijske imovine i visine barijere, barijerne opcije mogu biti *up* i *down* opcije. *Up* opcije su one za koje je barijera iznad početne vrijednosti financijske imovine i ukoliko vrijednost dosegne barijeru, to može biti samo odozdo. *Down* opcije su one za koje je barijera ispod početne vrijednosti financijske imovine i ukoliko vrijednost dosegne barijeru, to može biti samo odozgo.

Prilikom definiranja barijerne opcije, potrebno je definirati i tip opcije te visinu barijere. Tako postoje četiri moguće kombinacije, a to su: *down-and-in, up-and-in, down-and-out* te *up-and-out.* Osim toga, opcije i dalje mogu biti ili put ili call. Na taj način se dobija osam mogućih kombinacija za barijerne opcije s pripadnim skraćenicama.

Naziv	Skraćenica	Položaj barijere	Nakon dosezanja barijere
down-and-in call opcija	cdi	ispod	počinje vrijediti
up-and-in call opcija	cui	iznad	počinje vrijediti
down-and-out call opcija	cdo	ispod	ništavna
up-and-out call opcija	cuo	iznad	ništavna
down-and-in put opcija	pdi	ispod	počinje vrijediti
up-and-in put opcija	pui	iznad	počinje vrijediti
down-and-out put opcija	pdo	ispod	ništavna
up-and-out put opcija	puo	iznad	ništavna

Tablica 1.1: Vrste barijernih opcija

Neka je dan primjer investitora koji kupuje *down-and-in* put opciju koja počinje vrijediti nakon što vrijednost imovine dosegne barijeru koja se nalazi ispod početne vrijednosti, a posjedovanje te opcije daje investitoru pravo prodati imovinu po dogovorenoj cijeni. Neka je trenutna vrijednost promatrane rizične financijske imovine 500 u nekoj proizvoljnoj valuti, cijena izvršenja dogovorena opcijom 400, a barijera 300. To znači da u slučaju pada vrijednosti imovine do 300, počinje vrijediti opcija u kojoj financijsku imovinu investitor može prodati po cijeni od 400. On to može učiniti ako sluti da će cijena imovine jako opasti, a na ovaj način se može zaštititi od pretjeranog pada cijene i prodati ju u trenutku dospijeća za možda veći iznos nego što bi to bio na tržištu. Neka druga osoba pak može smatrati ovakav scenarij malo vjerojatnim i vidjeti s druge strane zaradu na premiji pa može ovakvu opciju prodati.

Za drugi primjer neka je promatran investitor koji kupuje *down-and-out* call opciju, odnosno kupuje pravo da u trenutku dospijeća kupi financijsku imovinu po dogovorenoj cijeni, ali ukoliko cijena imovine dosegne razinu barijere koja je ispod početne vrijednosti imovine, onda se to pravo poništava. Neka je početna cijena 500 u nekoj proizvoljnoj valuti, cijena dospijeća 400 i barijera 300. To bi značilo da ukoliko cijena financijske imovine ne padne na razinu 300, onda ju investitor može kupiti u trenutku dospijeća po cijeni od 400, u protivnom je opcija ništavna, a on na tržištu može kupiti tu financijsku imovinu po cijeni od 300.

Barijerne opcije su općenito jeftinije od *vanilla* opcija i to može biti još jedan dodatan motivacijski faktor za kupovinu tih opcija. Osim navedenih barijernih opcija, postoje i barijerne opcije s dvostrukom barijerom: barijerom odozgo i odozdo koja može početi vrijediti nakon što cijena financijske imovine izađe iz intervala barijera ili onakva koja vrijedi samo ako cijena financijske imovine ne izađe iz intervala kojeg zatvaraju barijere, ali takve opcije neće biti promatrane.

U sljedećem potpoglavlju bit će izvedena formula za vrednovanje jedne vrste barijernih opcija.

4. Formula za vrednovanje barijernih opcija

Izvod formule za vrednovanje barijernih opcija velikim dijelom prati izvod u slučaju *vanilla* opcija. Jedina razlika koju treba uzeti u obzir jest barijera.

Neka su promatrane dvije opcije istog tipa pri čemu se razliku u tome što je jedna *out*, a druga *in*. Jedna će vrijediti ako vrijednost imovine ne dosegne barijeru i bit će *vanilla* opcija dok bi tada druga opcija bila ništavna i obratno. Stoga se vidi kako vrijedi *in-out paritet*:

$$\textit{vanilla}\text{ opcija} = \text{odgovarajuća } \textit{out} \text{ opcija} + \text{odgovarajuća } \textit{in} \text{ opcija}$$

Neka je dalje promatrana *down-and-out* call opcija. Vrijednost takve opcije u trenutku t u oznaci C_t^{CDO} može se izračunati na analogan način kao što je to bilo u Black - Sholes - Mertonovom modelu. Stoga neka vrijede sve pretpostavke Black - Sholes - Mertonovog modela. Budući da je u pitanju *out* opcija, vrijednost imovine u trenutku t treba biti veća od iznosa barijere kako bi opcija bila vrijedeća, a jer je u pitanju *down* opcija, to implicira da je cijena izvršenja viša od iznosa barijere, odnosno:

$$K > B, \;\; S_t > B.$$

Neka je P^* vjerojatnost neutralna na rizik iz Black - Sholes - Mertonovog modela. Budući da je opcija ništavna ukoliko vrijednost imovine dosegne barijeru, a u suprotnom je *vanilla* opcija, vrijednost opcije u trenutku t se može računati po formuli:

$$C_t^{CDO} = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \cdot I_{\{S_t > B\}} | \mathcal{F}_t \right]$$

gdje je I_A indikator slučajna varijabla. Slično kao ranije, uz iste argumente, dobija se:

$$C_t^{CDO} = \mathbb{E}^* \left[(S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+ \cdot I_{\{S_t > B\}} | \sigma(S_t) \right].$$

Neka je definirana funkcija $c(t,x)$ na sljedeći način:

$$c(t,x) := \mathbb{E}^* \left[(x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+ \cdot I_{\{x > B\}} \right].$$

Tada je $c(t, S_t) = C_t^{CDO}$. U ovom se trenutku može primijeniti Girsanovljev teorem prema kojem je $\{\widetilde{B_t}\}$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$. Tada je $\sigma(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t}) = \sigma(B_T - B_t) + (\alpha - r)(T - t)$. Osim toga, vrijedi da je $\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t} \sim N(0, T - t)$ pa je slučajna varijabla čije očekivanje treba izračunati transformacija normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $T - t$.

Potrebno je, dakle, izračunati integral po skupu $\mathbb{R}$ takve transformacije. Za slučajnu varijablu čije očekivanje treba izračunati poznato je da se ona razlikuje od 0 u slučajevima kad je umanjenik u zagradi veći od umanjitelja i istovremeno mora vrijediti da je $x > B$. Ako je varijabla u integralu y, onda za y mora vrijediti

$$-\frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{x}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) < y < -\frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{B}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)$$

gdje se prva nejednakost dobila iz prvog navedenog uvjeta, a druga nejednakost dolazi od toga što je $x > B$.

Izraz s lijeve strane je od ranije poznat i označen je s $-d_2$, a desni izraz neka bude označen s $-d_4$. Preostaje izračunati

$$\int_{-d_2}^{-d_4}(xe^{\sigma y-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - Ke^{-r(T-t)})\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}\,dy = I_1 - I_2.$$

Oba su integrala slična onima u izvodu Black - Sholes - Mertonove formule, jedinu razliku čine granice integracije. Prigodnom supstitucijom se integrali svedu na integrale funkcije gustoće standardne normalne distribucije pri čemu su granice integracije

$$\frac{d_4+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} =: \frac{d_3}{\sqrt{T-t}},\ \text{kao donja, a gornja}\ \frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t)}} =: \frac{d_1}{\sqrt{T-t}}$$

odnosno,

$$\frac{d_4}{\sqrt{T-t}}\ \text{kao donja, a gornja}\ \frac{d_2}{\sqrt{T-t}}.$$

Dobiva se sljedeće rješenje za $c(t, S_t)$:

$$C_t^{CDO} = S_t\cdot\left(\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi\left(\frac{d_3}{\sqrt{T-t}}\right)\right)-Ke^{-r(T-t)}\cdot\left(\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi\left(\frac{d_4}{\sqrt{T-t}}\right)\right).$$

Zbog *in-out pariteta* vrijedi

$$C_t^{CDO} + C_t^{CDI} = C_t^{CALL}$$

stoga,

$$\begin{aligned}
C_t^{CDI} &= C_t^{CALL} - C_t^{CDO}\\
&= S_t\cdot\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\cdot\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\cdot\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right)\\
&+ S_t\cdot\Phi\left(\frac{d_3}{\sqrt{T-t}}\right) + Ke^{-r(T-t)}\cdot\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_4}{\sqrt{T-t}}\right)\\
&= S_t\cdot\Phi\left(\frac{d_3}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_4}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

Poglavlje 2

Karakteristike virtualnog portfelja i kriptovaluta

1. Vrijednost portfelja i log-povrati

Vrijednost promatranog virtualnog portfelja u trenutku t bit će označena s V_t. Za portfelj koji je definiran u uvodu, vrijednost portfelja u početnom trenutku iznosi $V_0 = 150000$ USD.

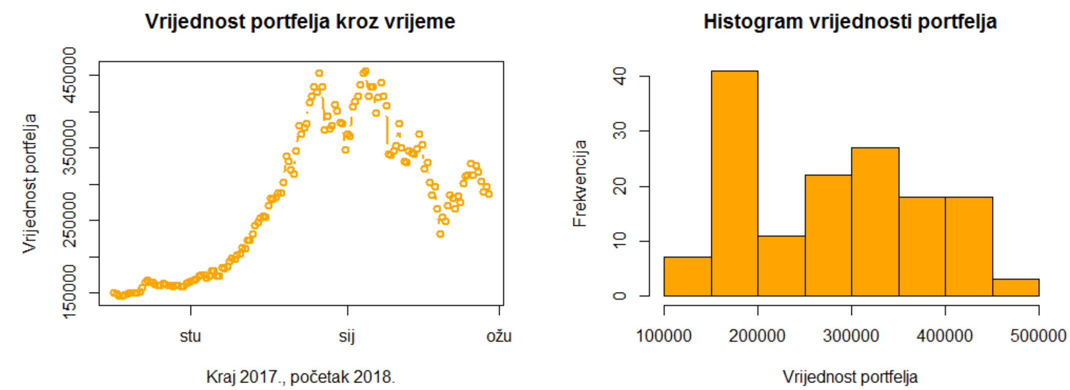
Osnovna deskriptivna obilježja vrijednosti portfelja u vremenskom periodu od 2. listopada 2017. do 25. veljače 2018. dana su sljedećom tablicom.

Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
146247	174108	284898	279547	353676	456691

Tablica 2.1: Deskriptivna statistika vrijednosti portfelja

Prema tablici može se zaključiti kako je ovakvim portfeljom u 147 promatranih dana zabilježen profit od barem 24108 USD u 110 dana, dok je profit od barem 129547 zabilježen u 78 dana. Maksimalna dobit koja se u promatranom vremenskom razdoblju ostvarila iznosi 306691 USD što je čista dobit koja je duplo veća od uloženog, odnosno takvim portfeljom mogao se vratiti ulog i ostvariti dobit u navedenom iznosu.

Neki grafički prikazi mogu dati bolji uvid u distribuciju varijable vrijednost portfelja. Ovdje su u tu svrhu priloženi trajektorija vrijednosti portfelja i histogram frekvencija.



(a) Trajektorija vrijednosti portfelja

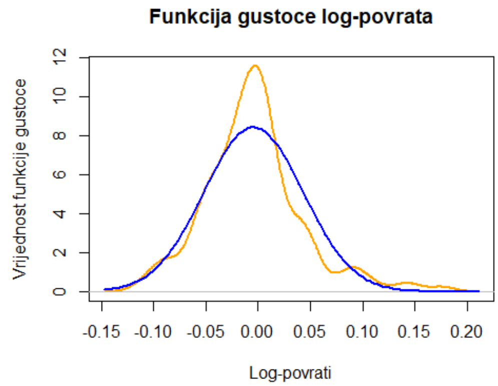
(b) Histogram

Slika 2.1: Trajektorija vrijednosti portfelja i histogram vrijednosti portfelja

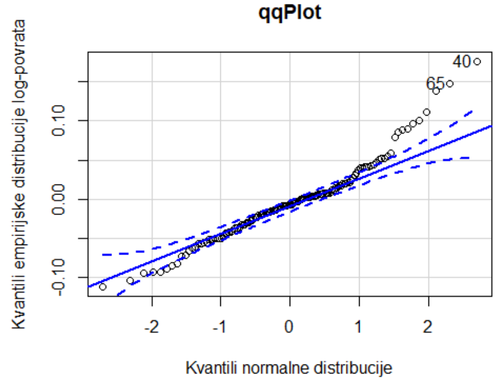
Prema trajektoriji vrijednosti portfelja može se primjetiti veliki rast vrijednosti portfelja tijekom prosinca i krajem 2017. te početkom 2018. godine jače oscilacije u vrijednosti koje poprimaju i padajući i rastući karakter s jačom tendencijom pada što rezultira znatno nižom vrijednosti portfelja na koncu veljače 2018. godine.

Na osnovu log-povrata donose se mnogi zaključci i zato je potrebno promotriti njihovu distribuciju. Potrebno je pronaći interval na kojem se ne odbacuje hipoteza o normalnosti distribucije log-povrata kako bi se vrijednost portfelja mogla modelirati geometrijskim Brownovim gibanjem što je osnovna pretpostavka, a potom uz određene mogućnosti kontrole rizika i povećanja profita (što je učinjeno u radu) računati vrijednosti europskih call i put opcija koristeći Black - Sholes - Mertonovu formulu analogno onome kako bi se koristilo za neku od uobičajenih rizičnih financijskih imovina. Osim te pretpostavke, potrebno je zadovoljiti i pretpostavku o nekoreliranosti log-povrata na odabranom intervalu.

Stoga je prvo provjerena pretpostavka normalnosti. U tu je svrhu priložen graf procijenjene funkcije gustoće u usporedbi s funkcijom gustoće normalne distribucije s očekivanjem -0.0044 i varijancom 0.0022 koji odgovaraju procjenama za očekivanje i varijancu log-povrata te qqPlot koji pokazuje kvantile normalne distribucije i kvantile empirijske distribucije.



(a) Procjena funkcije gustoće log-povrata i graf funkcije gustoće $N(-0.0044, 0.0022)$ distribucije



(b) qqPlot

Slika 2.2: Graf procijenjene funkcije gustoće i qqPlot za log-povrate

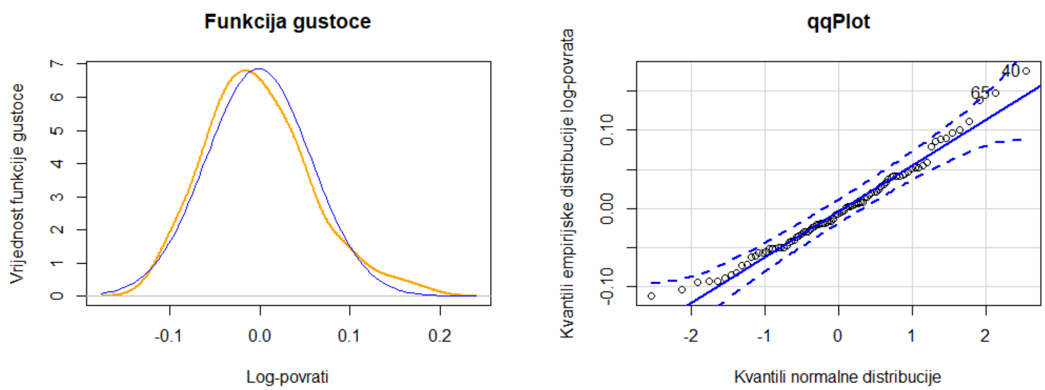
Na temelju Anderson - Darling testa za normalnost na razini značajnosti 0.05 odbacuje se nul-hipoteza (p-vrijednost iznosi 0.000121) i tvrdi kako log-povrati nisu normalno distribuirani, a to podupire i qqPlot gdje je izraženo repno odstupanje te se na grafu funkcija gustoća vidi kako procijenjena funkcija gustoće nije dobro opisana funkcijom gustoće normalne distribucije s gore navedenim koeficijentima, posebno u okolini nule jer na tom dijelu procijenjena funkcija gustoće postiže više vrijednosti. Zbog toga je potrebno naći neki drugi vremenski period, podskup promatranog, na kojem se ne bi odbacila nul-hipoteza o normalnosti.

Ako se za vektor log-povrata uzmu podatci od posljednjih 90 dana, točnije od 28. studenog 2017. do 25. veljače 2018., onda se može donijeti drugačiji zaključak na temelju sljedeće deskriptivne statistike, grafičkih prikaza i testova.

Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
-0.112030	-0.043165	-0.006319	-0.001650	0.035959	0.176122

Tablica 2.2: Deskriptivna statistika log-povrata na kraćem vremenskom intervalu

Na osnovu veoma male razlike između aritmetičke sredine i medijana može se naslutiti simetričnost distribucije.



(a) Procjena funkcije gustoće log-povrata na kraćem vremenskom intervalu i graf funkcije gustoće $N(-0.0017, 0.0034)$ distribucije

(b) qqPlot

Slika 2.3: Graf procijenjene funkcije gustoće i qqqPlot za log-povrate na kraćem vremenskom intervalu

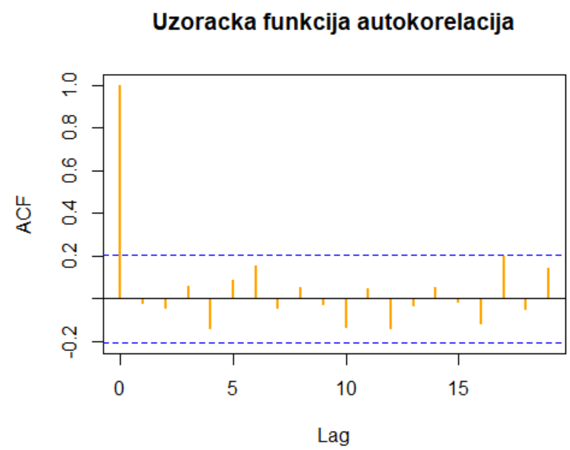
Na osnovu prvog grafičkog prikaza može se naslutiti kako bi podatci mogli biti opisani normalnom distribucijom. Hipoteza o normalnosti testirana je sljedećim testovima uz pripadne p-vrijednosti:

Vrsta testa	p-vrijednost
Shapiro - Wilk	0.08589
Jarque - Bera	0.06622
Anderson - Darling	0.2081

Tablica 2.3: Testiranje hipoteze o normalnosti log-povrata na kraćem vremenskom intervalu - p-vrijednosti

Provedeni testovi na razini značajnosti 0.05 ne daju razloga za sumnju u normalnost distribucije log-povrata na kraćem vremenskom intervalu. Drugi grafički prikaz ovu tvrdnju potkrepljuje jer su sve točke unutar granica pouzdanog intervala. Osim toga, potrebno je testirati hipotezu o nekoreliranosti log-povrata. To je provedeno Durbin - Watsonovim testom (paket *car*). Na osnovu dobivene vrijednosti donose se zaključci na sljedeći način: vrijednost jednaka 2 upućuje na nekoreliranost, manja od 2 na pozitivnu autokorelaciju, a veća od 2 na negativnu. Budući da dobiven rezultat iznosi 2.02763 ne odbacuje se hipoteza o nekoreliranost log-povrata na kraćem vremenskom intervalu.

U istu je svrhu promotrena i uzoračka funkcija autokorelacija log-povrata na kraćem vremenskom intervalu koja sugerira jednak rezultat budući da se sve vrijednosti za pozitivne lagove nalaze unutar granica pouzdanog intervala.



Slika 2.4: Uzoračka funkcija autokorelacija za log-povrate na kraćem vremenskom intervalu

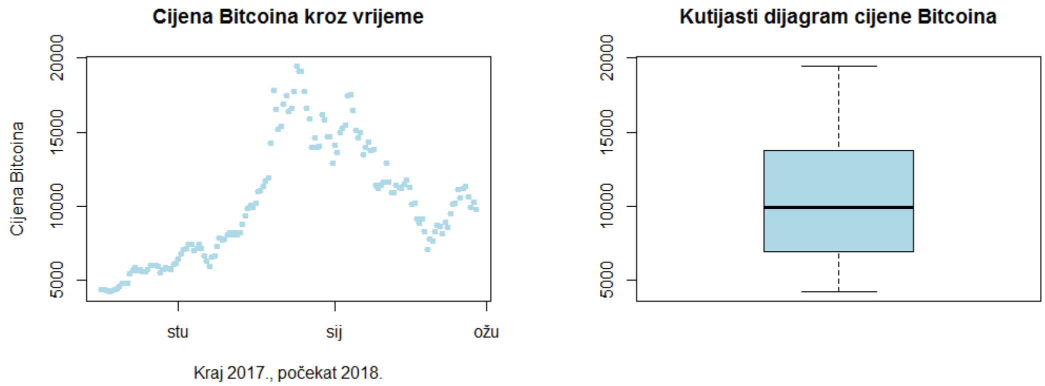
2. Bitcoin i log-povrati

Bitcoin je kao najpopularnija kriptovaluta doživio velik porast u cijeni u 2017. godini. 1. siječnja 2017. godine cijena je iznosila 998.99 USD [1]. Do trenutka kad je obavljena kupovina za promatrani portfelj, 2. listopada 2017., cijena se učetverostručila i iznosila je 4395.81 USD. U nastavku je dana deskriptivna statistika za cijenu jednog Bitcoina te neki grafički prikazi.

Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
4230	6900	9907	10234	13802	19476

Tablica 2.4: Deskriptivna statistika Bitcoina

[1] informacija sa stranice www.investing.com

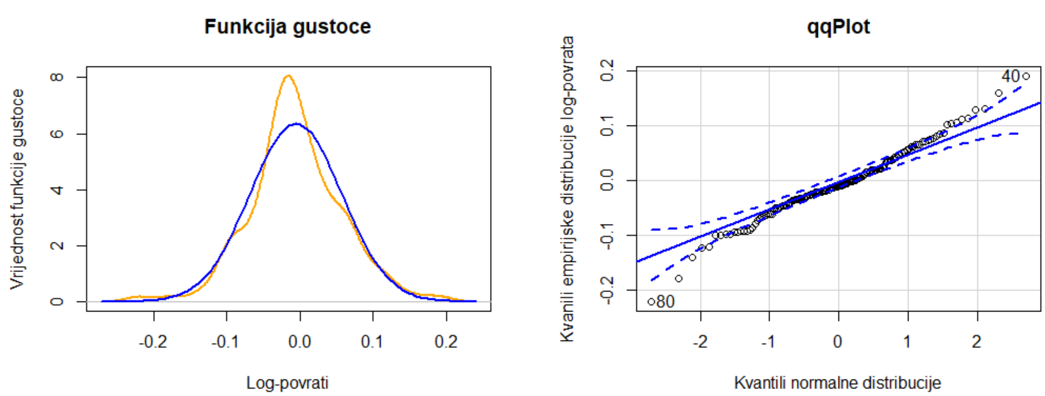


(a) Trajektorija Bitcoina

(b) Kutijasti dijagram

Slika 2.5: Trajektorija i kutijasti dijagram cijene Bitcoina

Prosječna cijena jednog Bitcoina iznosila je 10234 USD, dok je najveća postignuta cijena u ovom periodu (čak ikada) iznosila 19476 USD. Nakon što je Bitcoin dosegao taj najveći iznos, počeo je gubiti na cijeni, a kretanje je slično kao što je kretanje ukupne vrijednosti portfelja. Prema kutijastom dijagramu vidljiva je veća razlika između medijana i maksimuma nego što je između medijana i minimua, a u 50% promatranog vremena je cijena Bitcoina bila u rasponu od 4230 do 9907 USD.



(a) Procjena funkcije gustoće log-povrata Bitcoina i graf funkcije gustoće $N(-0.0055, 0.0039)$ distribucije

(b) qqPlot

Slika 2.6: Graf procijenjene funkcije gustoće i qqPlot za log-povrate Bitcoina

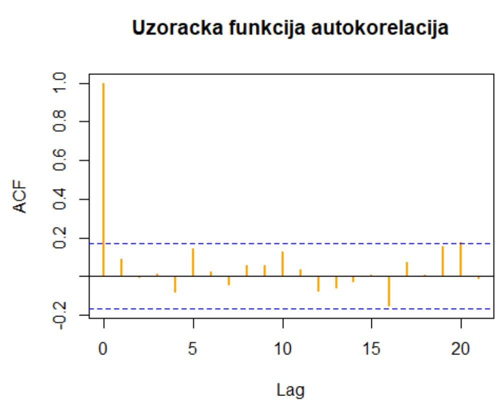
Promatrajući grafičke prikaze za log-povrate Bitcoina, može se uočiti nekoliko točaka koje odstupaju od pouzdanog intervala za kvantile normalne distribucije. Shapiro - Wilkov test daje p-vrijednost 0.1118 što ne sugerira odbacivanje nul-hipoteze o normalnosti log-povrata. Jarque - Bera test uspoređuje odgovaraju li koeficijenti asimetrije i spljoštenosti koeficijentima kod normalne distribucije. U ovoj situaciji ima smisla promatrati spljoštenost procijenjene funkcije gustoće jer se na grafičkom prikazu očituje veća spljoštenost nego u slučaju normalne distribucije s parametrima -0.0055 i 0.0039. Tu slutnju je potkrijepio Jarque - Bera test koji daje p-vrijednost 0.03922 što je manje od 0.05 pa se na razini značajnosti 0.05 odbacuje nul-hipoteza o normalnosti log-povrata. Kad bi se iz promatranja isključilo prvih 6 i posljednja 4 podatka, dobivaju se sljedeće p-vrijednosti te se na razini značajnosti 0.05 ne odbacuje nul-hipoteza o normalnosti ovako restringiranog niza log-povrata cijene Bitcoina:

Vrsta testa	p-vrijednost
Shapiro - Wilk	0.1586
Jarque - Bera	0.07264
Anderson - Darling	0.05715

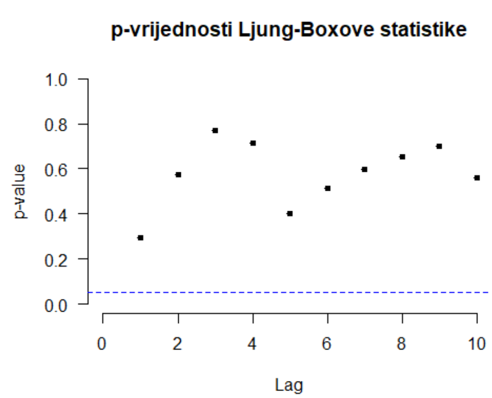
Tablica 2.5: Testiranje hipoteze o normalnosti log-povrata Bitcoina - p-vrijednosti

Niz log-povrata Bitcoina na kraćem vremenskom intervalu na kojemu se ne odbacuje hipoteza o normalnosti će zbog jednostavnosti u daljnjem radu biti nazvan nizom restringiranih log-povrata Bitcoina.

Vrijednost Durbin - Watsonovog testa je 1.798473 što je manje od poželjne vrijednosti 2. Stoga će nekoreliranost biti pomnije promotrena. Iz tog je razloga priložena uzoračka funkcija autokorelacija i p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike.



(a) Uzoračka funkcija autokorelacija



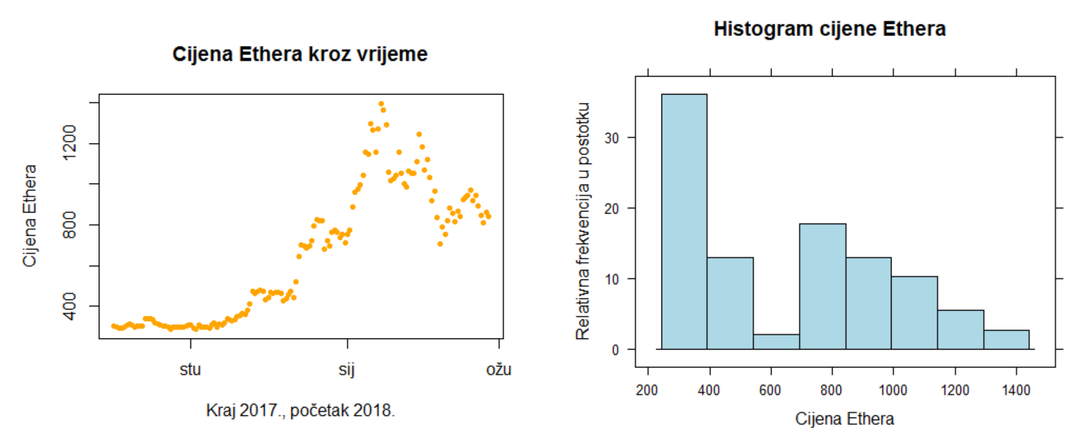
(b) p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike

Slika 2.7: Uzoračka funkcija autokorelacija i p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike za restringirane log-povrate Bitcoina

Na osnovu ova dva grafička prikaza se na razini značajnosti 0.05 ne odbacuje nul-hipoteza o nekoreliranosti restringiranih log-povrata Bitcoina jer su sve vrijednosti na prvom grafičkom prikazu unutar granica pouzdanog intervala. Nul-hipoteza za Ljung-Boxov test je da su svi koeficijenti korelacije na koracima $1, ..., k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ najbliži broju $\ln n$ za broj podataka n jednaki nuli i suprotstavlja joj se alternativna hipoteza u kojoj stoji da postoji barem jedan koeficijent korelacije na koraku $1, ..., k$ koji je različit od nule. Budući da su na desnom grafičkom prikazu sve p-vrijednosti veće od razine značajnosti 0.05 ne odbacuje se nul-hipoteza o nekoreliranosti.

3. Ether i log-povrati

U portfelju je 100 jedinica kriptovalute Ethera. Cijena po kojoj je Ether kupljen je 302.48 USD, maksimalna postignuta cijena je 1395.5 USD, dok je prosječna cijena Ethera 648.6 USD.



(a) Trajektorija (b) Histogram relativnih frekvencija

Slika 2.8: Trajektorija i histogram relativnih frekvencija cijene Ethera

Ono što se može zaključiti iz prvog grafičkog prikaza jest slično kretanje u cijeni kao što je bilo kretanje cijene Bitcoina i vrijednosti portfelja, ali možda malo zakašnjelo. Nešto kasnije je analizirana povezanost između promatranih kriptovaluta.

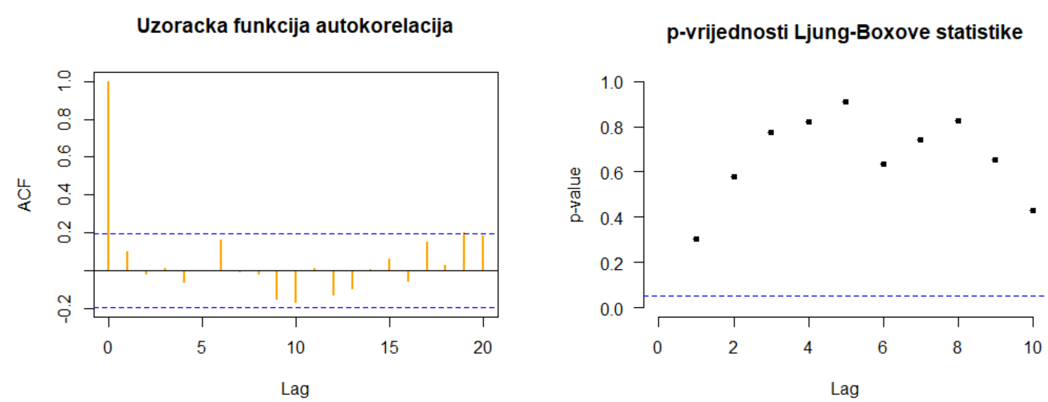
Testiranjem hipoteze o normalnosti log-povrata za cijenu Ethera na razini značajnosti 0.05 i s p-vrijednošću 0.004129 odbacuje se nul-hipoteza. Sada opet dolazi potreba za restringiranjem skupa podataka. U slučaju Ethera, hipoteza o normalnosti se ne odbacuje za vremenski period od 18. studenog 2017. do 25. veljače 2018. godine na temelju testova u tablici.

Vrsta testa	p-vrijednost
Shapiro - Wilk	0.4583
Jarque - Bera	0.2563
Anderson - Darling	0.4312

Tablica 2.6: Testiranje hipoteze o normalnosti log-povrata Ethera - p-vrijednosti

Nadalje su log-povrati na navedenom vremenskom intervalu nazvani restringirani log-povrati.

Vrijednost Durbin - Watsonovog testa za ovako definirane log-povrate je 1.765022. Potrebno je promotriti uzoračku funkciju autokorelacija i p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike kako bi se donijeli zaključci.



(a) Uzoračka funkcija autokorelacija (b) p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike

Slika 2.9: Uzoračka funkcija autokorelacija i p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike za restringirane log-povrate Ethera

Na temelju lijevog grafičkog prikaza može se primijetiti kako su svi koeficijenti unutar granica pouzdanog intervala. Desni grafički prikaz pokazuje p-vrijednosti Ljung - Boxove statistike do laga 10 i prema njima se ne odbacuje nul-hipoteza o nekoreliranosti na razini značajnosti 0.05.

Na temelju grafičkih prikaza trajektorija cijene Bitcoina i Ethera, cijene se na neki način slično kreću. Budući da su oni vremenski nizovi, njihova zavisnost se ne može provjeriti koristeći koeficijent korelacije. Potrebno je provjeriti njihovu kointegraciju.

Definicija 2.1. *Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ je stacionaran (slabo stacionaran ili stacionaran u širem smislu) ako vrijedi:*

(i) $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, $\forall t \in T$

(ii) $\mathbb{E}[X_t] = c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall t \in T$

(iii) $Cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_{t+h} - \mathbb{E}[X_{t+h}])]$ *ovisi samo o* h, $\forall t \in T$.

Neka je s $\{\Delta X_t, t \in T\}$ označen proces prirasta procesa $\{X_t, t \in T\}$. Neka je s B označen operator diferenciranja takav da je $BX_t = X_{t-1}$. Vrijedi:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t, \ \ \forall t \in T.$$

Ako se slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ može reprezentirati kao $ARIMA(p, d, q)$ proces, onda koeficijent d stoji kao potencija faktora $1 - B$, odnosno potencija faktora $1 - z$ u odgovarajućem karakterističnom polinomu[2]. Stoga se provjeravanjem postoji li jedinična nultočka tog polioma može ispitati ima li smisla proces diferencirati barem jednom.

Definicija 2.2. *Dva nestacionarna procesa $\{X_t, t \in T\}$ i $\{Y_t, t \in T\}$ su kointegrirani ako su zadovoljena sljedeća svojstva:*

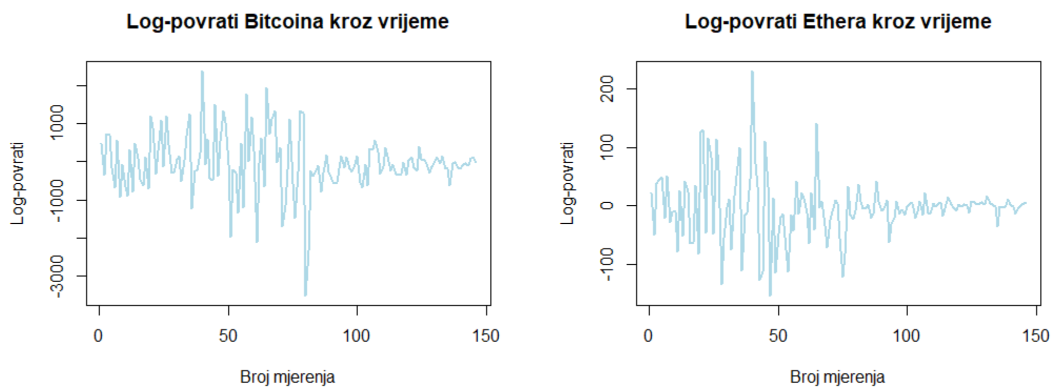
(i) procesi $\{\Delta X_t, t \in T\}$ i $\{\Delta Y_t, t \in T\}$ su stacionarni

(ii) postoji $\beta \neq 0$ takav da je proces $\{Y_t - \beta X_t, t \in T\}$ stacionaran.

Prvo je potrebno provjeriti jesu li nizovi cijena Bitcoina i Ethera takvi koji jednim diferenciranjem postaju stacionarni nizovi. Stacionarnost se ne može testirati, ali Dickey - Fuller test koji testira postojanje jediničnog korijena pomaže pri tome. Ukoliko se ne odbaci nul-hipoteza, onda ima smisla diferencirati polazni niz. Ukoliko se prihvati alternativna hipoteza o nepostojanju jediničnog korijena, onda se treba promotriti trajektorija niza i na osnovu nje donijeti neke zaključke. Dickey - Fuller test za cijenu Bitcoina daje p-vrijednost 0.7673 što znači neodbacivanje hipoteze o postojanju jediničnog korijena na razini značajnosti 0.05, a to implicira kako ima smisla diferencirati niz cijena Bitcoina čime se dobija niz log-povrata Bitcoina. Dickey - Fuller test za cijenu Ethera daje p-vrijednost 0.5279 što rezultira istim slijedom događaja kao za Bitcoin na razini značajnosti 0.05. Dalje se promatraju log-povrati Bitcoina i Ethera.

[2] za više informacija pogledati *J. D. Cryer, K-S. Chan* - Time Series Analysis With Application in R

Ponovnim pozivanjem Dickey - Fuller testa, ovaj put na log-povratima Bitcoina i Ethera, dobivaju se p-vrijednosti redom $< 0.01, 0.01211$ čime se na razini značajnosti 0.05 prihvaća alternativna hipoteza o nepostojanju jediničnog korijena.



(a) Trajektorija log-povrata Bitcoina

(b) Trajektorija log-povrata Ethera

Slika 2.10: Trajektorije log-povrata Bitcoina i Ethera

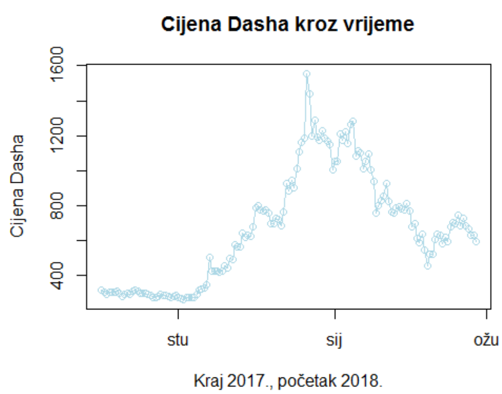
Na temelju priloženih trajektorija, primjećuje se jednolika raspršenost log-povrata oko nule na oba grafička prikaza s većim oscilacijama na određenim dijelovima. Podatci bi se mogli podijeliti na dva dijela s obzirom na vremenski interval s povišenom varijabilnošću i na onaj s manjom. Tada bi promatrani procesi mogli biti na oba intervala shvaćeni kao stacionarni procesi. Unatoč tome, dalje je testirana nekointegriranost.

Nekointegriranost se može provjeriti Phillips-Ouliarisovim kointegracijskim testom koji za svoju nul-hipotezu ima nekointegriranost, dok je kointegriranost u alternativnoj hipotezi. Testirana je hipoteza o nekointegriranosti između cijene Bitcoina i cijene Ethera, a dobivena p-vrijednost iznosi 0.15 što ne sugerira odbacivanje nul-hipoteze na razini značajnost 0.05.

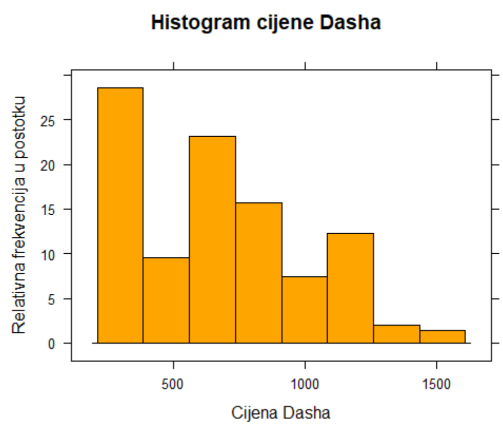
Jedna od taktika prilikom sastavljanja portfelja je odabirati financijsku imovinu koja međusobno nije kointegrirana (ili korelirana u slučaju nezavisnih mjerenja) jer u tom slučaju gubitak na jednoj financijskoj imovini ne implicira lančanu reakciju kao što je to moguće u slučaju kointegracije među odabranom financijskom imovinom. U stvarnosti je teško pronaći dvije rizične financijske imovine koje su nekointegrirane zbog isprepletenosti tržišta.

4. Dash i log-povrati

Cijena po kojoj je Dash kupljen iznosila je 315.95 USD. Minimalna postignuta cijena u promatranom vremenskom periodu iznosila je 263.9 USD, maksimalna 1555.6 USD, a prosječna 666.6 USD.



(a) Trajektorija



(b) Histogram relativnih frekvencija

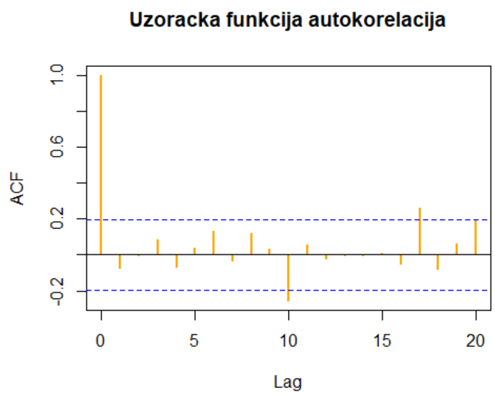
Slika 2.11: Trajektorija i histogram relativnih frekvencija cijene Dasha

Slično kao i ranije, potrebno je pronaći manji vremenski interval na kojemu bi provođenje testova normalnosti na log-povratima rezultiralo neodbacivanjem nul-hipoteze o normalnosti, jer na razini značajnost 0.05 dolazi do odbacivanja nulhipoteze o normalnosti log-povrata na cijelom vremenskom intervalu uz p-vrijednost $< 10^{-4}$ dobivenu Shapiro - Wilkovim testom. Na istom vremenskom intervalu kao i za Ether, dolazi do neodbacivanja nul-hipoteze o normalnosti na razini značajnosti 0.05.

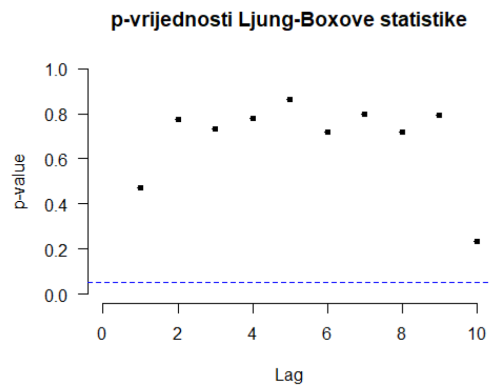
Vrsta testa	p-vrijednost
Shapiro - Wilk	0.5225
Jarque - Bera	0.4381
Anderson - Darling	0.3328

Tablica 2.7: Testiranje hipoteze o normalnosti log-povrata Dasha - p-vrijednosti

Neka su log-povrati na vremenskom intervalu od 18. studenog 2017. do 25. veljače 2018. godine nadalje nazvani restringiranim log-povratima. Vrijednost Durbin - Watsonovog testa iznosi 2.131921 pa je zato potrebno promotriti i uzoračku funkciju autokorelacija te p-vrijednosti Ljung - Boxovog testa.



(a) Uzoračka funkcija autokorelacija



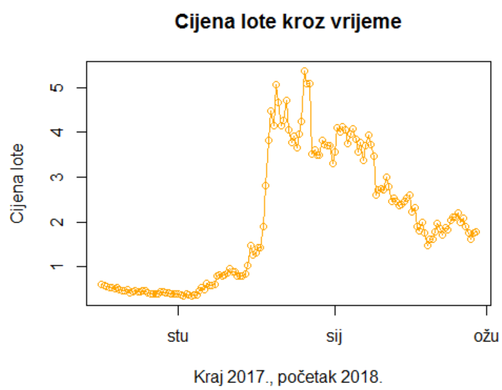
(b) p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike

Slika 2.12: Uzoračka funkcija autokorelacija i p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike za restringirane log-povrate Dasha

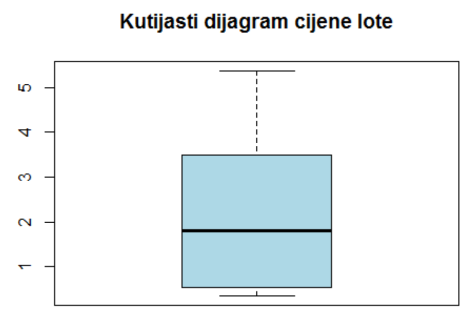
Na lijevom grafičkom prikazu može se vidjeti maleno odstupanje na lagovima 10 i 17. Na desnom je grafičkom prikazu prikazana nešto niži iznos p-vrijednosti na lagu 10 što je konzistentno s rezultatom na lijevom grafičkom prikazu, ali p-vrijednosti su sve i dalje veće od 0.05 što znači da se ne odbacuje nul-hipoteza o nekoreliranosti restringiranih log-povrata.

5. Iota i log-povrati

Cijena po kojoj je kupljena 2. listopada 2017. godine je 0.61818 USD. Minimalna postignuta cijena je 0.351 USD, maksimalna iznosi 5.37 USD, a prosječna 2.0173 USD. U portfelju je 1000 jedinica Iote, ali zbog njezine niske cijene, promjene Iote ne utječu znatno na promjene u vrijednosti portfelja. Sljedeći grafički prikazi daju bolji uvid u distribuciju Iote:



(a) Trajektorija



(b) Kutijasti dijagram

Slika 2.13: Trajektorija i kutijasti dijagram cijene Iote

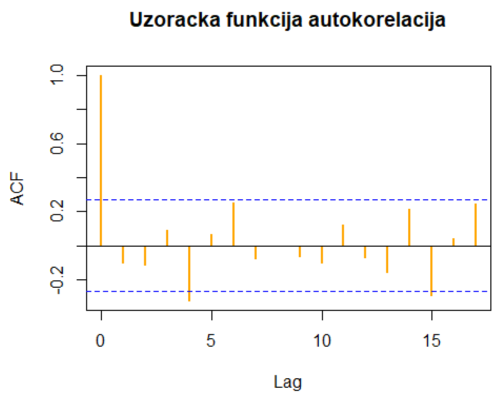
Za log-povrate Iote vrijedi kao i za prethodne log-povrate; odbačena je hipoteza o normalnosti na razini značajnosti 0.05 i uz p-vrijednosti $< 10^{-3}$ dobivenu Shapiro - Wilkovim testom. Potraga za intervalom na kojem nema odbacivanja hipoteze o normalnosti log-povrata bila je uspješna s dobivenim vremenskim periodom od 28. prosinca 2017. do 19. veljače 2018. U ovom je vremenskom periodu nešto manje podataka nego što je to za prethodne log-povrate.

Vrsta testa	p-vrijednost
Shapiro - Wilk	0.1069
Jarque - Bera	0.07179
Anderson - Darling	0.3342

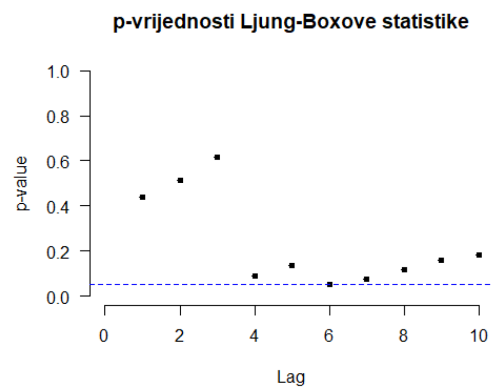
Tablica 2.8: Testiranje hipoteze o normalnosti log-povrata Iote - p-vrijednosti

Neka su log-povrati na odabranom vremenskom intervalu nazvani restringirani log-povrati.

Vrijednost Durbin - Watsonovog testa je 2.14216 pa je opet potrebno promotriti grafičke prikaze. Jedan grafički prikaz prikazuje uzoračku funkciju autokorelacija, a drugi prikazuje p-vrijednosti provedenog Ljung - Boxovog testa.



(a) Uzoračka funkcija autokorelacija



(b) p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike

Slika 2.14: Uzoračka funkcija autokorelacija i p-vrijednosti Ljung-Boxove statistike za restringirane log-povrate Dasha

Na lijevom grafičkom prikazu može se vidjeti kako su pojedine vrijednosti blizu granice. p-vrijednosti dobivene Ljung - Boxovim testom prikazane na desnom grafičkom prikazu su i dalje iznad razine značajnosti 0.05 izuzev p-vrijednosti na lagu 6 koja je na samoj granici. Stoga se nul-hipoteza o nekoreliranosti na razini značajnosti 0.05 ne može odbaciti.

Poglavlje 3

Kontrola rizika uz *vanilla* opcije

1. Opcije za Bitcoin

Pretpostavka cijelog poglavlja je kako se na tržištu kriptovaluta mogu kupiti Europske put i call opcije.

Log-povrati su za Bitcoin zadovoljili pretpostavke o neodbacivanju hipoteza o normalnosti i nekoreliranosti na vremenskom intervalu od 8. listopada 2017. do 21. veljače 2018. godine. Stoga se na tom vremenskom intervalu mogu kupiti put ili call opcije čija je nearbitražna cijena modelirana Black - Sholes - Mertonovom formulom. Budući da je najveću vrijednost Bitcoin postigao sredinom prosinca, cilj je zaštititi se od pada cijene unatoč tome što je krajnja cijena Bitcoina bila viša nego početna. Cijena je 8. listopada 2017. godine bila 4429.67, a 21. veljače 2018. godine iznosila je 11372.20 USD. Želja je umjesto profita od gotovo 7000 USD, taj profit povećati te time povećati ukupnu vrijednost portfelja.

Neka su dane sljedeće pretpostavke: investitor želi i kupiti i prodati call opciju za Bitcoin 1. prosinca 2017. kada je njegova cijena bila 10198.6 USD uz cijenu izvršenja 13000 USD za kupovinu i 13500 USD za prodaju call opcije, a rok dospijeća je 20 dana uz intenzitet kamate 0.01 za potrebe ovog modela. Procijenjena volatilnost iznosi 0.06413956. Tada je visina premija koju treba platiti prema Black - Sholes - Mertonovoj formuli 979.04, a premija koju se dobije prodajom call opcije je 831.63. Trenutno stanje investitora je -147.41 USD. Po dospijeću opcije, za 20 dana, cijena Bitcoina je 16642.40 USD pa se obje opcije realiziraju; investitor kupuje Bitcoin po cijeni od 13000 USD i prodaje ga po cijeni od 13500 USD. Time investitor posjeduje $500 - 147.41 = 352.59$ USD, odnosno, investitor je povećao svoj profit za 352.59 USD po jednoj kupovini i prodaji opcije. Međutim, na tržištu je investitor mogao 1. prosinca kupiti Bitcoin po cijeni od 10198.6 USD, a 20 dana nakon toga ga prodati po cijeni od 16642.4 USD i tako povećati svoj profit za više od 6000 USD. Problem je u tome što bi tijekom tih 20 dana investitor bilježio deficit u vrijednosti cijene kriptovalute koju je platio dok u slučaju kupovine i prodaje opcije bilježi gotovo 100 puta manji minus.

Neka je promotren *Bitcoin vanilla scenarij*: investitor želi i kupiti i prodati put opciju za Bitcoin 5. siječnja kad mu je cijena 15477.2 USD. Investitor vidi kako je Bitcoin nestabilnog karaktera već dva tjedna i želi se zaštititi od pada cijene. Stoga definira cijenu izvršenja za kupljenu put opciju 13500 USD, a cijenu izvršenja za prodanu put opciju 13000 USD. Vrijeme dospijeća je 20 dana, intenzitet kamate 0.01 i procijenjena volatilnost 0.06413956. Tada je primjenom Black - Sholes - Mertonove formule nearbitražna premija za kupljenu put opciju 220.54 USD, a za prodanu opciju 164.55 USD. Time investitor bilježi deficit u iznosu od 55.99 USD. U trenutku dospijeća, cijena Bitcoina iznosi 11421.70 USD i obje se opcije realiziraju čime investitor zarađuje 500 USD i konačno stanje je profit koji iznosi $500 - 55.99 = 444.01$ USD. Bez kupovine i prodaje put opcije, investitor je 5. siječnja mogao Bitcoin kupiti za 15477.2 USD, a 25. siječnja ga prodati za više od 4000 USD manje.

2. Opcije za Ether i Dash

Za Ether i Dash na istom intervalu nisu odbačene hipoteze o normalnosti i nekoreliranosti log-povrata (18. studenog 2017. do 25. veljače 2018.). Procijenjena volatilnost za Ether je 0.07228126, a za Dash 0.08410714.

Neka je dan sljedeći *Ether i Dash vanilla scenarij*: investitor želi kupiti call opciju za Ether i kupiti put opciju za Dash dana 5. siječnja s rokom dospijeća 25. siječnja, cijenom izvršenja 1000 USD za obje opcije, volatilnošću 0.07228126 za Ether i 0.08410714 za Dash, a intenzitetom kamate 0.01. 5. siječnja je cijena Ethera 975.75 te Dasha 1221.63 USD. Prema Black - Sholes - Mertonovoj formuli za nearbitražnu cijenu opcije, premija bi za kupovinu call opcije za Ether bila 210.08 USD, a za kupovinu put opcije za Dash 27.39 USD. Investitor bi plaćanjem tih opcija bilježio deficit od 237.47 USD do trenutka izvršenja. U trenutku izvršenja, cijene valuta su sljedeće: Ether 1063.22 te Dash 788.77 USD. Budući da je cijena Ethera na tržištu viša nego cijena izvršenja call opcije, investitor iskorištava pravo koje mu daje call opcija i kupuje Ether po cijeni od 1000 USD. Nadalje, cijena Dasha je niža nego što je cijena izvršenja put opcije zbog čega investitor iskorištava pravo koje mu daje put opcija i prodaje Dash po 1000 USD. Investitor Ether prodaje na tržištu po redovnoj cijeni i time zarađuje 63.22 USD i kupuje Dash na tržištu po cijeni od 788.77 USD kako bi ga prodao po cijeni od 1000 USD kako nalaže put opcija čime zarađuje 211.23 USD. Ukupna zarada je $211.23 + 63.22 - 237.47 = 36.98$ USD.

Navedena zarada je ona koju investitor može zaraditi po jednoj kupovnoj call opciji i kupovnoj put opciji opisanoj gore. Cijene Dasha i Ethera su puno manje od cijene Bitcoina pa je njihov doprinos i utjecaj na ukupnu vrijednost portfelja time manji.

3. Opcije za Iotu

Log-povrati za Iotu nisu sugerirali odbacivanje hipoteze o normalnosti i nekoreliranosti na vremenskom intervalu od 28. prosinca 2017. do 19. veljače 2018. godine. Time su zadovoljene sve pretpostavke za primjenjivanje Black - Sholes - Mertonove formule. Procijenjena volatilnost iznosi 0.08678825.

Dan je sljedeći *Iota vanilla scenarij*: investitor želi kupiti put opciju za Iotu i prodati call opciju za Iotu dana 5. siječnja s rokom dospijeća 25. siječnja, s cijenom izvršenja obiju opcija 3 USD, intenzitetom kamate 0.01 i volatilnošću 0.08678825. Cijena Iote 5. siječnja iznosi 4.06 USD. Dobivene vrijednosti za nearbitražnu premiju na opcije su 0.06 za kupovinu put opcije te 1.66 USD za prodaju call opcije. Nakon što investitor plati premiju za put opciju i primi premiju za call opciju, zaradio je 1.6 USD. U trenutku dospijeća, cijena Iote je 2.46 USD. Prema tome, investitor iskorištava svoje pravo osigurano kupnjom put opcije te kupuje Iotu na tržištu za 2.46 USD i prodaje ju u okviru opcije po cijeni od 3 USD čime zarađuje 0.54 USD. Prodana call opcija ostaje neiskorištena jer je drugoj strani povoljnije kupiti Iotu na tržištu nego iskoristiti pravo koje mu daje call opcija. Nakon trgovanja, suficit investitora se povećao na $1.6 + 0.54 = 2.14$ USD.

Zarada je vrlo niska zbog toga što je cijena Iote znatno niža od cijene prethodno opisanih kriptovaluta.

4. Kombiniranje scenarija

Tri scenarija koja su ranije diskutirana, *Bitcoin vanilla scenarij, Ether i Dash vanilla scenarij* te *Iota vanilla scenarij*, smještena su u vremenski okvir 5. siječnja do 25. siječnja, sva tri scenarija s određenom zaradom. U slučaju realizacije sva tri scenarija, zarada bi se akumulirala.

Dakle, moguće je 5. siječnja kupiti i prodati put opciju za Bitcoin pri čemu je cijena izvršenja za kupljenu put opciju 13500 USD, a za prodanu 13000 USD. Zatim, isti dan, kupiti call opciju za Ether te put opciju za Dash pri čemu su cijene izvršenja jednake i iznose 1000 USD. Potom kupiti put opciju za Iotu i prodati call opciju za Iotu s cijenom izvršenja 3 USD. Rok dospijeća je 25. siječnja, intenzitet kamate 0.01, a volatilnosti 0.06413956 za Bitcoin, 0.07228126 za Ether, 0.08410714 za Dash te 0.08678825 za Iotu.

Na taj način, ostvarena dobit iznosi $444.01 + 36.98 + 2.14 = 483.13$ USD po jediničnim opcijama. Novac potreban u početku sklapanja ugovora odgovara zbroju iznosa potrebnih za sklapanje svih pojedinih ugovora. Potrebno je 55.99 USD za *Bitcoin vanilla scenarij*, zatim 237.47 USD za ostvarenje *Ether i Dash vanilla scenarija*, a u slučaju *Iota vanilla scenarija* nije potreban novac nego je bilo 1.6 USD viška. To znači da je ukupan iznos potreban za ostvarenje ovih scenarija 291.86 USD.

Budući da je 5. siječnja stanje u banci 43693.73 USD, za taj se novac može ovaj scenarij ostvariti 149 puta, a ukupna zarada bi bila $149 \cdot 483.13 = 71986.37$ USD viša nego bez korištenja opcija.

Poglavlje 4

Kontrola rizika uz barijerne opcije

Kao što je istaknuto u poglavlju o *vanilla* opcijama, sve potrebne pretpostavke su zadovoljene na vremenskom intervalu od 8. listopada 2017. do 21. veljače 2018. godine. Stoga će na navedenom intervalu biti promatrani mogući scenariji povećanja dobiti koristeći barijerne opcije. U tom se slučaju može promotriti nekoliko različitih scenarija za koje je intenzitet kamate 0.01, a procijenjene volatilnosti jednake kao u poglavlju 3.

Neki od navedenih primjera ilustrirat će razliku u cijeni *vanilla* call i put opcija te nekih barijernih opcija. Moći će se primijetiti kako zbog visoke volatilnosti kriptovaluta cijena *vanilla* opcija postaje visoka u usporedbi sa samom cijenom kriptovalute. Takvo kretanje premije u odnosu za cijenu kriptovalute stvara potrebu za nekim jeftinijim opcijama. Barijerne opcije su jedne od jeftinijih rješenja, međutim korištenje barijernih opcija za kriptovalute još nije poznato.

1. Opcije za Bitcoin

Neka je dan *Bitcoin barijerni scenarij*: pretpostavka je kako investitor želi kupiti i prodati *down-and-in* call opciju na dan 5. siječnja s rokom dospijeća 25. siječnja. Cijena Bitcoina na dan sklapanja ugovora iznos 15477.2 USD. On prodaje cdo opciju s barijerom od 10000 USD te cijenom izvršenja 11000 USD. To znači da je u pitanju obična *vanilla* call opcija s pravom kupovine Bitcoina sve dok je cijena Bitcoina iznad barijere. Također, želi kupiti i cdo barijernu opciju s barijerom 11000 USD te cijenom izvršenja 11500 USD. Premija koju prima prodajom cdo iznosi 1054.53, a premija koju je potrebno platiti za kupovinu cdo iznosi 624.06. Razlikom među premijama, subjekt bilježi profit u iznosi od 430.47 USD.

Nakon proteklih 20 dana, cijena Bitcoina na tržištu iznosi 11421.7 USD, a tijekom tih 20 dana cijena se održala na razini iznad barijere što znači da je po isteku roka dospijeća i dalje vrijedeća. Budući da je cijena na tržištu iznad cijene dogovorene ugovorom o prodanoj cdo, kupac ove opcije iskorištava svoje pravo i kupuje Bitcoin po cijeni od 11000. Time je investitor na gubitku u iznosu od 421.7 USD. Budući da je kupljena cdo imala barijeru 11000, ona je postala ništavna u trenutku kad je cijena dosegla tu razinu, a to se dogodilo 23. siječnja. Investitor nema pravo kupiti Bitcoin. S obzirom na velik profit u trenutku sklapanja ugovora, investitor je ipak po isteku roka dospijeća zaradio $430.47 - 421.7 = 8.77$ USD.

Ostvareni je profit vrlo mali, ali vrijedi pogledati što bi bio rezultat u slučaju *vanilla* opcija. Dakle, prodajom i kupovinom call opcija s istim rokom dospijeća i istom cijenom izvršenja primila bi se premija u iznosu od 6509.503 USD, a platila bi se premija od 6119.787 USD čime bi subjekt bilježio profit u iznosu od 389.716 USD. Prodana call opcija bi se realizirala, a kupljena call opcija se ne bi realizirala što rezultira gubitkom u iznosu od 421.7 USD. U konačnici bi subjekt bio na gubitku i to $389.716 - 421.7 = -31.984$ USD. Ishod ostvarenja opcija je u oba slučaja u ovom scenariju bio jednak, a samo zbog različitih iznosa premija, krajnji se rezultat veoma razlikuje. Razlog tome je to što su barijerne opcije generalno jeftinije od *vanilla* opcija što je rezultat *in-out pariteta* i svakako jedan od motivatora za kupovinom barijernih opcija umjesto *vanilla* opcija.

Promatranjem cijene call opcija, može se primijetiti kako je iznos premije više nego polovica cijene Bitcoina. To je rezultat visoke volatilnosti kriptovaluta. Općenito je cijena premija za opcije na dionice na burzi manjeg udjela u cijeni dionice od udjela premije za opcije na kriptovalute u cijeni same kriptovalute. Zbog visoke rizičnosti kriptovaluta, njihova se cijena više mijenja u vremenu, a to uzrokuje višu volatilnost.

Opcije same na tržištu kriptovaluta postoje u obliku put i call opcija. Kao što pokazuje navedeni primjer, ponekad je cijena te opcije vrlo visoka u odnosu na cijenu stvarne cijene kriptovalute. Zato je bolje rješenje kupovina barijerne opcije koja na određeni način još smanjuje rizik, međutim barijerne opcije na kriptovalute u trenutku pisanja rada još nisu realizirane. Kao što je došlo do potrebe za barijernim opcijama na tržištu dionica, jednaka bi opravdanost bila za uvođenjem barijernih opcija i za kriptovalute.

2. Opcije za Ether i Dash

Neka je dan *Ether i Dash barijerni scenarij* s pretpostavkom kako investitor želi kupiti *up-and-in* put opciju za Ether te kupiti *up-and-out* put opciju za Dash na dan 5. siječnja čiji je rok dospijeća 25. siječnja.

Cijena Ethera je 5. siječnja iznosila 975.75 USD, a prije toga je cijena uglavnom rasla. Stoga investitor smatra kako će cijena Ethera i dalje rasti, međutim zbog rizika da ipak cijena ne naraste dovoljno visoko radije će uzeti jeftiniju verziju opcije, što je barijerna opcija, i u slučaju da cijena prijeđe barijeru 1200 USD, opcija kreće vrijediti i tada je obična put opcija s cijenom izvršenja 1300 USD. Premija koju je potrebno platiti za takvu opciju je 25.97 USD za razliku od obične put opcije gdje bi premija iznosila 179.94 USD. Cijena Ethera po isteku roka dospijeća iznosi 1063.22 USD, ali je već 10. siječnja dosegao cijenu od 1300 USD što znači da je tada pui opcija postala običnom put opcijom s cijenom izvršenja 1300 USD. Budući da je cijena na dan roka dospijeća bila niža od cijene izvršenja, investitor se odlučuje za iskorištavanje opcije te Ether prodaje po cijeni od 1300 USD. Na taj način zarađuje $1300 - 1063.22 = 236.78$ USD umanjeno za iznos premije od 25.97 što rezultira iznosom od 210.81 USD.

U slučaju kupovine *vanilla* put opcije, zarada bi bila ostvarena, ali u znatno manjem iznosu. Bila bi manja za više od 150 USD što je razlika u premijama između barijerne pui opcije i *vanilla* opcije.

Dash je 5. siječnja imao cijenu od 1221.63 USD. Od 16. prosinca, kada je cijena Dasha prešla iznos od 1000 USD, njegova je cijena oscilirala od otprilike 1100 do 1500 USD. Investitor kupuje *up-and-out* put opciju 5. siječnja koja mu daje mogućnost, ali ne i obvezu da proda Dash osobi koja je prodala opciju na nadnevak 25. siječnja po cijeni izvršenja od 1100 USD, ali samo u slučaju da cijena Dasha u promatranom periodu ne prijeđe iznos od 1300 USD jer bi tada promatranom subjektu bilo daleko više isplativo Dash prodati na otvorenom tržištu nego iskoristiti pravo koje mu pruža opcija. Premija koju investitor na osnovu kupljene opcije mora platiti iznosi 44.68 USD za razliku od premije koju bi morao platiti prodajom *vanilla* put opcije koja bi iznosila 46.07 USD. Razlika nije velika, ne iznosi niti 2 USD za razliku od velike distancije premija u slučaju scenarija razmotrenog za Ether.

Međutim, ono što se do 25. siječnja dogodi jest ubrzano opadanje cijene Dasha koja u vremenu dospijeća opcije iznosi 788.77 USD, a gotovo neprestalno opadanje cijene rezultira vrijedećom opcijom po vremenu dospijeća jer u cijelom promatranom razdoblju cijena Dasha nije dosegnula iznos od 1300 USD. Stoga investitor po isteku roka dospijeća, odnosno 25. siječnja ima pravo prodati Dash po cijeni od 1100 USD.

On će to pravo iskoristiti jer je cijena na tržištu znatno niža. Dakle, prodajom opcije ostvaruje zaradu u iznosu od $1100 - 788.77 = 311.23$ USD umanjeno za iznos premije koju je platio 44.68 USD što čini ukupnu zaradu od 266.55 USD.

Kupovinom *vanilla* put opcije zarada bi bila gotovo jednaka. Veću razliku između zarada put opcijom i barijernom puo opcijom može se ostvariti povećavanjem barijere, međutim tada je pitanje bi li se mogao naći netko tko bi takvu opciju prodao jer je vjerojatnost njezine realizacije s većom barijerom sve veća. Primjerice, uz iste uvjete kao za navedenu Dash opciju izuzev iznosa barijere, postavljanjem barijere na iznos od 1600 USD iznos premije koju je potrebno platiti za kupovinu puo opcije je 28.56 USD. Za investitora je ovo bolja opcija jer je premija manja, a povijesni podatci za Ether nikada nisu narasli do iznosa od 1600 USD. S druge strane, potrebno je pronaći osobu koja bi takvu opciju prodala. Ta bi osoba bila svjesna da se barijera od 1600 nije do tada ostvarila i da se vrlo vjerojatno neće doseći što znači da će opcija tada biti obična put opcija. Zato bi prodavatelju opcije bilo bolje prodati običnu put opciju čime bi bio siguran da će u vremenu dospijeća kupac imati pravo njemu prodati Dash. Jedino je pitanje koliko on smatra malom vjerojatnost za porastom cijene Dasha do iznosa od 1600 USD. Ukoliko smatra da ta vjerojatnost nije mala i da postoji mogućnost da prodana opcija u konačnici bude ništavna što je odličan rezultat za njega, onda bi promatranom investitoru takva situacija donijela veću zaradu nego što je donio gore naveden scenarij.

3. Opcije za Iotu

Neka je za sljedeći *Iota barijerni scenarij* promatran investitor koji želi prodati *up-and-in* put opciju na dan 5. siječnja s rokom dospijeća 25. siječnja.

Cijena Iote na dan ugovaranja opcije iznosi 4.06 USD. Budući da su cijene za Iotu tako niske u odnosu na cijene prethodno analiziranih kriptovaluta, teže je definirati vrijednosti koje određuju pui opciju. Promatranjem povijesnih cijena može se primijetiti kako unutar posljednjih mjesec dana prije ugovaranja opcije cijene Iote osciliraju postižući vrijednosti i više od 5 i niže od 4 USD.

Investitor ugovara pui opciju s barijerom 4.2 USD i cijenom izvršenja 4.25 USD. To znači da je opcija nevažeća sve dok cijena Iote u razdoblju od 5. do 25. siječnja ne dosegne iznos od 4.2 USD. U slučaju da u cijelom periodu cijena Iote ne naraste do 4.2 USD, kupac opcije nema pravo iskoristiti opciju. U slučaju da cijena Iote dosegne barijeru, opcija postaje *vanilla* put opcija s cijenom izvršenja u iznosu od 4.25 USD.

Prodajom pui opcije investitor prima premiju od 0.002 USD. Kad bi opcija bila *vanilla* put opcija tada bi primljena premija bila viša i iznosila 0.33 USD što je i dalje nizak iznos, ali više od 100 puta veći od trenutno primljene premije, ali je opet pitanje bi li za *vanilla* put opciju bilo lako pronaći kupca. Budući da je barijerna opcija jeftinija, svakako je lakše pronaći kupca za nju nego za odgovarajuću *vanilla* opciju.

Slično kao što su se kretale cijene ostalih analiziranih kriptovaluta, nakon trenutka ugovaranja opcije, cijena Iote počinje padati i na dan isteka roka dospijeća cijena Iote iznosi 2.46 USD. Unutar promatranog razdoblja cijena Iote gotovo nije prelazila iznos od 4 USD, a barijeru nije uspjela dosegnuti. Posljedica toga je što kupac opcije nema pravo iskoristiti ju i tako opcija ostaje neiskorištena. Jedini benefit ima promatrani investitor koji je zaradio upravo iznos premije od 0.002 USD.

4. Kombiniranje scenarija

Na osnovu nekoliko promotrenih situacija može se kreirati scenarij koji bi ujedinio sve navedene primjere i na taj bi se način povećala zarada. *Bitcoin barijerni scenarij, Ether i Dash te Iota barijerni scenariji* su promatrani u vremenskom okviru od 5. siječnja do 25. siječnja. Zato neka investitor želi ugovoriti sve analizirane opcije na dan 5. siječnja s rokom dospijeća 25. siječnja. Budući da osim kriptovaluta portfelj čini i određeni iznos na bankovnom računu, ukoliko je potreban novac za plaćanje premija, on dolazi iz tog dijela portfelja. Za slučaj višestruke kupovine, odnosno prodaje opcija, ograničenje na brojnost postavlja količina novca u portfelju.

Kupovinom i prodajom cdi opcije za Bitcoin, razlika između primljene i plaćene premije iznosi 430.47 USD. Iako ovakva kombinacija opcija u konačnici rezultira vrlo malim profitom, ostvaren je vrlo visok početni kapital kojeg je moguće iskoristiti za financiranje svih ostalih opcija. Kupovinom pui opcije za Ether potrebno je platiti premiju u iznosu od 25.97 USD, a kupovinom puo opcije za Dash, plaćena premija iznosi 44.68 USD. Nadodavši na to primljenu premiju dobivenu prodajom pui opcije za Iotu, početni profit nakon plaćanja i primanja premija iznosi $430.47 - 25.97 - 44.68 + 0.002 = 359.822$ USD. Zahvaljujući tome, jedna kupovina i prodaja cdi opije za Bitcoin može financirati 6 kupovina pui opcija za Ether i 6 kupovina puo opcija za Dash koje rezultiranju vrlo visokim dobitkom na kraju roka dospijeća.

Profit koji se postiže jednim odvijanjem *Bitcoin, Ether, Dash i Iota barijernog scenarija* je zbroj suficita nastalih u svakom od četiri scenarija. Profit nastao *Bitcoin barijernim scenarijem* je 8.77 USD, *Ether i Dash barijernim scenarijem* skupa je investitor zaradio $210.81 + 266.55 = 477.36$ USD, a najmanji je doprinos nastao *Iota* *barijernim scenarijem* sa zaradom od 0.002 USD. Dakle, ukupna zarada kombinacijom scenarija iznosi 486.132 USD.

U slučaju financiranja opcija za Ether i Dash koristeći samo prihod ostvaren kupoprodajom opcija za Bitcoin, dobitak može biti povećan na

$$8.77 + 6 \cdot 210.81 + 6 \cdot 266.55 + 0.002 = 2872.932 \text{ USD}$$

Navedeni je iznos moguće ostvariti po jednoj kupoprodaji opcije za Bitcoin, bez korištenja novca koji je položen u banku i čini jedan dio u portfelju. Dakle, ostvarena zarada može biti multiplicirana onoliko puta koliko je moguće kupiti Bitcoina (zbog ograničene količine Bitcoina u optjecaju) ili pak onoliko puta koliko je moguće kupiti druge odgovarajuće kriptovalute.

Sažetak

Rad se bazira na primjeni teorije o opcijama i načina vrednovanja opcija na tržištu kriptovaluta. Predstavljena je potrebna teorijska podloga o *vanilla* opcijama te barijernim opcijama. U radu je analiziran portfelj koji je sastavljen od kriptovaluta i novca položenog u banku. Dalje su predstavljene pretpostavke koje trebaju biti zadovoljene kako bi se teorijski zaključci mogli primijeniti na promatrani portfelj. Nakon pokazivanja kako nema opravdane sumnje u zadovoljavanje pretpostavki, premije za opcije su se u primjerima računale koristeći Black - Sholes - Mertonovu formulu te analogon te formule za barijerne opcije.

Prokomentirani su neki mogući slučajevi dodatne zarade i kontrole rizika te su sklopljena dva scenarij uz korištenje opcija na tržištu kriptovaluta; jedan primjenom samo *vanilla* opcija i drugi koji primjenjuje barijerne opcije.

Ključne riječi

kriptovalute, Black - Sholes - Mertonova formula, opcije za Bitcoin, opcije za Ether, opcije za Dash, opcije za Iotu, barijerne opcije, knock-out opcije, knock-in opcije, up opcije, down opcije, put opcije, call opcije

Options on cryptocurrency market

Abstract

This work is focused on application of option theory and evaluating options on cryptocurrency market. Necessary theoretical results about *vanilla* options and barrier options are presented. Further is analyzed portfolio which is compound of cryptocurrencies and money in the bank. There are few assumptions that need to be satisfied for application of theoretical results on analyzed portfolio. Those assumptions are all satisfied so price of the options can be measured using the Black - Sholes - Merton formula. Similar formula is presented and applied for barrier options also.

Some ways and examples of risk control and making extra profit are suggested and two scenarios of using options on cryptocurrency market are presented. One of which uses only *vanilla* options and the other one which uses barrier options.

Key words

cryptocurrencies, Black - Sholes - Mertonova formula, Bitcoin options, Ether options, Dash options, Iota options, barrier options, knock-out options, knock-in options, up options, down options, put options, call options

Literatura

[1] B. Basrak, *Matematičke financije*, Materijali s predavanja, PMF-MO, Zagreb, 2009.,
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~bbasrak/pdf_files/MFEsve.pdf`

[2] Z. Vondraček, *Matematičko modeliranje*, Materijali s predavanja, PMF-MO, Zagreb, 2008.

[3] E. Derman, I. Kani, *The Ins and Outs of Barrier Options: Part 1*, Derivatives Quarterly, Institutional Investor Journals, Zima 1996.
`http://www.emanuelderman.com/media/insoutbarriers1.pdf`

[4] J. D. Cryer, K-S. Chan, *Time Series Analysis With Application in R*, Springer - Verlag, 2008.

[5] Investopedia
`https://www.investopedia.com/terms/b/barrieroption.asp`

[6] Investing
`https://www.investing.com/crypto/bitcoin/btc-usd-historical-data`

Životopis

Rođena sam 21. studenog 1994. godine u Vinkovcima. Pohađala sam Osnovnu školu Julija Benešića u Iloku koju sam završila 2009. godine. Ondje sam razvila afinitet za matematiku. Nakon završetka osnovne škole upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Ilok. U svom osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike, fizike, kemije i hrvatskog jezika. Po završetku srednje škole, upisala sam Odjel za matematiku 2013. godine. Preddiplomski studij sam završila 2016. godine s temom završnog rada Nilpotentni operatori i matrice pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Darije Marković, a potom sam upisala diplomski studij na Odjelu za matematiku, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom diplomskog studija obavljala sam stručnu praksu u Allianz osiguranju u Zagrebu te u firmi Gideon Brothers u Osijeku. Osim toga, sudjelovala sam na ECMI Modelling Week-u u Novom Sadu 2018. godine.