

# Matematika u mladoj dobi

---

**Brkić, Kristina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:410958>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2021-09-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Mathematics Osijek](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Kristina Brkić

MATEMATIKA U MLAĐOJ DOBI

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Kristina Brkić

MATEMATIKA U MLAĐOJ DOBI

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2019.

# Sadržaj

Uvod	2
<b>1 Smjernice učenja i teorijski okviri</b>	<b>3</b>
<b>2 Brojevi i kvantitativno mišljenje</b>	<b>6</b>
2.1 Količina, broj, direktno prebrojavanje . . . . .	6
2.2 Verbalno brojanje i brojanje objekata . . . . .	9
2.3 Usporedba, poredak i procjena . . . . .	11
2.4 Pojava aritmetike i strategije brojanja . . . . .	13
2.5 Kompozicija i mjesna vrijednost broja, oduzimanje i zbrajanje višeznamenkastih brojeva . . . . .	15
<b>3 Geometrija i prostorno mišljenje</b>	<b>18</b>
3.1 Prostorno mišljenje . . . . .	18
3.2 Oblici . . . . .	21
3.3 Sastav i rastav oblika . . . . .	25
<b>4 Geometrijsko mjerenje</b>	<b>30</b>
4.1 Duljina . . . . .	30
4.2 Površina, volumen i kutovi . . . . .	33
<b>5 Ostale domene i procesi</b>	<b>38</b>
Sažetak	43
Title and summary	44
Životopis	45

## Uvod

Istraživanja o učenju matematike i matematičkom mišljenju jedna su od najproduktivnijih područja u edukacijskoj psihologiji. U ovom seminaru sistematizirano je učenje matematike od samog rođenja do polaska u osnovnu školu. Razumijevanje razina mišljenja skupine i pojedinca dovodi do zadovoljavanja potreba svakog učenika. Rad se temelji na istraživanjima kojima je cilj bio stvoriti i ocijeniti nastavni plan i program za djecu mlađe dobi.

Postoji najmanje osam razloga za nedavni porast zanimanja za matematiku u ranom djetinjstvu. Prvi razlog je povećanje broja djece koja pohađaju rane programe obrazovanja. Drugi je povećana spoznaja o važnosti matematike. Treće, uspoređuju se znanja učenika u različitim državama i to već u vrtićima i prvim razredima osnovne škole. Četvrti razlog je razlika znanja između djece koja žive u urbanim i ekonomski bogatijim sredinama od onih koja žive u ruralnim i ekonomski ugroženijim sredinama. Razlike nisu samo između država, nego i između socioekonomskih skupina unutar države. Pravedno je zahtijevati uspostavljanje smjernica za kvalitetu ranog matematičkog obrazovanja svakog djeteta. Peto, istraživači su promijenili razmatranja kako mala djeca imaju slabo znanje i malen kapacitet za učenje matematike, sve do teorije koja na prvo mjesto postavlja kompetencije koje su urođene ili se razvijaju u prvim godinama života. Šesto, rano znanje kasnije snažno utječe na daljnji uspjeh u matematici. Sedmi razlog, istraživanja ukazuju da se nedostaci u znanju pojavljuju u velikoj mjeri zbog nedostatka veze između neformalnog znanja i učenja matematike u školama. Posljednji razlog je što tradicionalni pristupi u ranom djetinjstvu nisu doveli da poboljšanja učenja kod djece.

U sljedećim poglavljima opisano je učenje matematičkih ideja i vještina koje su važne za učenje matematike kod mlađe djece. Prvo su spomenuti teorijski okviri i smjernice za učenje. Zatim su opisani brojevi, geometrija i geometrijsko mjerenje, te na kraju algebarsko mišljenje.

# 1 Smjernice učenja i teorijski okviri

Istraživanja podržavaju dva povezana pristupa. Prvi je uspostava jasnih slika matematičkih ideja za malu djecu, a drugi je postavljanje smjernica kada djeca uče te matematičke ideje. Jako mala djeca razumiju određene matematičke ideje, te im one daju smisao u svakodnevnim aktivnostima. Međutim, njihove ideje i shvaćanja se razlikuju od ideja i shvaćanja odraslih. Zato odgojitelji djece predškolske dobi trebaju biti toga svjesni i pokušati promatrati situacije iz njihove perspektive. Na temelju svojih opažanja odgojitelji predviđaju što je dijete u stanju naučiti. Vjeruje se da su smjernice za učenje najmoćniji alat koji odrasli imaju kako bi dobro podučili djecu. Formalna definicija smjernica za učenje jest da su to opisi dječjeg razmišljanja kada i kako postići određene ciljeve u matematičkoj domeni, kao i cijeli povezani i pretpostavljeni put koji se sastoji od određenih zadataka osmišljenih za stvaranje mentalnih akcija i procesa. Smjernice su korisne pedagogima i teoretičarima, a ne samo odgojiteljima. Poznavanje razvoja razina i vještina važno je za kasniju kvalitetu nastave. Postavlja se pitanje koje su teorije najkorisnije za razumijevanje matematičkog mišljenja i učenja matematike kod male djece.

Tri su glavna teorijska okvira za razumijevanje matematičkog razmišljanja kod male djece, a to su: empirizam, nativizam i interakcionizam. U tradicionalnom empirizmu dijete se vidi kao prazna kutija, gdje znanje dobiva od društva ili ponavljanjem određenih postupaka. Nasuprot tome, nativističke teorije naglašavaju urođeno znanje ili rani razvoj djeteta. Na primjer, u djetinjstvu kvantitativne i prostorne strukture podržavaju razvoj matematike, a samim time su onda matematičke vještine urođene. Niti empiristička niti nativistička teorija ne objašnjava u potpunosti učenje i razvoj djece, pa se čini da će odgovor na pitanje koja teorija objašnjava razumijevanje matematike kod male djece biti nešto između. Riječ je o interakcionizmu, konstruktivističkoj teoriji. Djeca aktivno i rekurzivno stvaraju znanje. Struktura i sadržaj tog znanja su isprepleteni i svaka struktura čini komponentu od koje dijete gradi novu složeniju strukturu. Djeca nisu pasivni primatelji znanja, nego aktivni graditelji vlastitog intelekta. Jedna od konstruktivističkih teroja, na koju ćemo se i oslanjati u daljnjem radu, jest hijerarhijski interakcionizam.

Hijerarhijski interakcionizam ukazuje na utjecaj globalnih i lokalnih kognitivnih razina, interakcije urođenih kompetencija, sredstava i iskustva. Matematičke ideje su predstavljene intuitivno, zatim jezikom i onda dolazi do metakognitivnog znanja. Načela hijerarhijskog interakcionizma su sljedeća:

- Razvojni napredak – većina znanja stječe se uz napredovanje razina mišljenja. Napredak u razvoju ima posebnu ulogu u spoznaji i učenju, jer je konzistentan s djetetovim intuitivnim znanjem i obrascima mišljenja na različitim razinama. Kod napretka se svaka razina karakterizira pomoću različitih mentalnih radnji i objekata. Rad s objektima je zapravo najbolji način rada kako da djeca nauče sve o svijetu, a samim time i o matematici.
- Napredak određene domene – ovaj razvojni napredak je često najprikladnije karakteriziran unutar određene matematičke domene ili teme. Dječje znanje, koje uključuje objekte i radnje koje se razvijaju u toj domeni, glavna je odrednica razmišljanja za bilo kakav napredak. Hijerarhijske interakcije pojavljuju se na više razina unutar i između tema, no to se događa i kod općih kognitivnih procesa.
- Hijerarhijski razvoj - ovaj ključni pojam sadrži dvije ideje. Prvo, razvoj je manje

ovisan o pojavi novih procesa i proizvoda, a više o interakciji specifičnih i postojećih znanja i procesa. Drugo, svaka razina se gradi hijerarhijski na konceptima i procesima iz prethodnih razina. Razine mišljenja su koherentne, a razni modeli i vrste mišljenja nastaju ubrzo jedna za drugom. Iz svake razine se treba razviti kritična ideja za sljedeću razinu razmišljanja i ponašanja kod djece. Uspješna primjena dovodi do povećanja upotrebe određene razine. Međutim, u uvjetima gdje vlada stres ili je zadatak izrazito složen, ranija razina služi kao zamjenska pozicija, a niti jedna razina mišljenja se ne briše. Postojanje ranijih razina i društveni utjecaj na svaki dio razine objašnjava zašto se i odrasli ljudi vraćaju na prethodne razine.

- Ciklička konkretizacija – napredak često prolazi osjetilno-konkretne i implicitne razine za koje su neophodne konkretne osjetilne ili auditivne potpore. Obrazloženje je ograničeno na eksplicitnije apstrakcije i generalizacije koje se oslanjaju na mentalne prikaze, a koji služe za operacije koje su složenije. Takav red može kružiti unutar domene i konteksta.
- Zajednički razvoj koncepata i vještina – koncepti ograničavaju postupke i vještine koji se razvijaju u stalnoj interakciji. U neuravnoteženim kulturnim ili obrazovnim okruženjima jedno od njih može imati prednost u mjeri koja može biti štetna. Učinkovita nastava često stavlja prioritet na konceptualno razumijevanje, uključujući dječje kreacije rješavanja problema. Izgradnja koncepata i vještina uključuje simboličke prikaze i opće kognitivne sposobnosti.
- Početni unositelj – djeca imaju početne matematičke i opće kognitivne sposobnosti i predispozicije u trenutku rođenja ili ubrzo nakon toga. Početne sposobnosti i predispozicije uvelike pospješuju daljni razvoj matematičkih kompetencija. Neki su taj proces, u kojima iskustva dovode do interakcije urođenih sposobnosti i vanjskih utjecaja, prozvali razvojem kulture i pojedinca. Druge opće kognitivne i metakognitivne kompetencije čine djecu od rođenja aktivnim sudionicima u svom vlastitom učenju i razvoju.
- Različiti razvojni smjerovi – omogućuju različita ograničenja ovisno o individualnom, okolišnom i socijalnom sastavu. Unutar svakog razvojnog smjera na svakoj razini razvoja djeca imaju različite kognitivne sposobnosti, strategije, vještine i znanja koja međusobno kombiniraju za rješavanje zadataka. Razlike kod pojedinaca stvaraju prepreku razvoja. Međutim, te varijacije nisu toliko velike da mogu naštetiti teorijskim ili praktičnim načelima napredovanja u razvoju.
- Napredak podjele u hijerarhije - unutar razvojnog napretka djeca postupno povezuju različite matematičke pojmove i postupke, izgradnjom razumijevanja koje je hijerarhijsko u smislu njihove upotrebe generalizacije uz održavanje razlika. Ove generalizacije i metakognitivne sposobnosti povezuju se eventualno s logičkim matematičkim oblikom strukture koji praktički prisiljava djecu na odluke u određenim područjima. Djeca s visoko kvalitetnim obrazovnim iskustvom grade slične strukture u širokom rasponu različitih područja.
- Okruženje i kultura – utječu na tempo i smjer tijeka razvoja. Na primjer, iskustvo djece koja promatraju i koriste brojeve, te druge matematičke pojmove i usporedbe, korisno utječu na dubinu njihova učenja tijekom napredovanja u razvoju. Vrijeme kada djeca uče matematičke pojmove razlikuje se u određenim

kulturama i to utječe na razvojni napredak. Zato ne postoji savršeni razvojni napredak. Univerzalni razvojni čimbenici su u interakciji s kulturom i matematičkim sadržajima, pa broj smjernica nije neograničen. Primjerice, obrazovne novosti mogu uspostaviti novi potencijalno povoljniji redoslijed.

- Dosljednost razvojnog napretka i podučavanja – podučavanje temeljeno na učenju u skladu s prirodnim razvojnim napretkom učinkovitije je od podučavanja koje ne slijedi taj put.
- Smjernice za učenje – na temelju hipoteze, specifične mentalne konstrukcije i obrazaca ramišljanja koji čini dječje razmišljanje, stvaraju se i oblikuju nastavni zadaci. Zadaci uključuju vanjske objekte i radnje, koji podržavaju hipotezu u matematičkoj aktivnosti što je više moguće. Također, bit će osobito učinkovite i za obrazovni program, premda smjernice nisu pravila za učenje, one su vrlo dobar pokazatelj znanja.
- Primjer hipotetske smjernice učenja – hipotetske smjernice učenja učitelji moraju interpretirati i ostvarivati kroz društvenu interakciju s djecom. Društveno određene vrijednosti i ciljevi su značajne komponente bilo kojeg nastavnog plana i programa.

Djeca imaju impresivan, često neiskorišten potencijal za učenje matematike. Za mnoge taj potencijal ostaje nerealiziran. Nije kriv njihov ograničeni razvoj, nego ograničeno društvo i njihove škole. Istraživanja i teorije opisane u ovom početnom dijelu pokazuju da smjernice učenja mogu olakšati podučavanje i učenje djece. Zato će u preostalom radu biti opisane smjernice učenje za svaku domenu matematike. Prvo ćemo govoriti o brojevima i aritmetici.



## 2 Brojevi i kvantitativno mišljenje

Za učenje matematike u ranom djetinjstvu najvažniji su brojevi i operacije vezane uz njih. Srećom, proučavanje toga područja je jedna od najčešćih tema matematičkih istraživanja, pogotovo u najranijem razdoblju djetetovog života. U daljnjem radu raspravljat ćemo o konceptima brojeva i operacijama odvojeno, iako su oni prilično međusobno povezani. Kada govorimo o operacijama to se ne odnosi samo na standardne aritmetičke operacije oduzimanja, zbrajanja, množenja i dijeljenja, nego i na brojanje, uspoređivanje, grupiranje. Kompetencije se grade na ranom kvantitativnom mišljenju koje se počinje razvijati već u prve dvije godine života.

### 2.1 Količina, broj, direktno prebrojavanje

Istraživanja o znanju o brojevima prolazi kroz četiri faze. U prvoj fazi se proučavalo verbalno brojanje i brojanje, dok se u drugoj fazi znatno primjećuje Piagetov utjecaj, odnosno razvoj koncepta broja je zasnovan na temeljnim logičkim operacijama. Možda u početku nije jasno što zapravo brojevi imaju s hijerarhijom logičkih klasa, no argument može biti taj da brojevi i brojanje ovise o takvim logičkim operacijama. Na primjer, da bi djeca razumjela brojanje, moraju razumijeti da svaki broj sadrži sve svoje prethodnike. Iako se čini da nije tako, djeca često imaju problema s izgovaranjem brojeva po redu i s izgovaranjem broja samo jednom. Također, moraju shvatiti da je svaki sljedeći broj količinski veći od prethodnog. Sljedeći primjer potiče Piagetove sljedbenike da zanemare verbalno i obično brojanje koja su ranije bila središta istraživanja.

**Primjer 1** *Ukoliko se promatra dva reda objekata poredanih jedan ispod drugog djeca znaju da ih ima jednako, ali kada su u jednom redu objekti jače razmaknuti dolazi do problema. Djeca koja ne razumiju koncept broja smatrat će da objekata ima više u onom redu u kojemu su jače razmaknuti.*

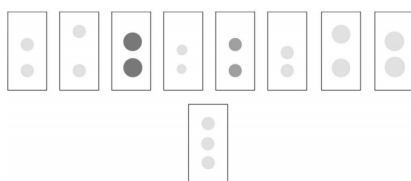


Slika 1: Različito tumačenje broja krugova

Njihovo stajalište je da djeca ne uče prvo što je količina pa to percipiraju, nego da ju otkriju kada ju budu spremni percipirati. Rezultat je vjerovanje u istraživačkoj i obrazovnoj praksi da djeca ne mogu logički razmišljati o količini u godinama do pred polazak u školu. Treća faza je započela kada su nove perspektive i metodologija istraživanja izazvale kritički pogled na Piagetovu teoriju. Podrška novim perspektivama su istraživanja koja su pokazala numeričke i aritmetičke kompetencije koje nisu bile promatrane kod Piagetovih procjena. Ovakva istraživanja su stvorila osnovu za nativistički pogled na rani razvoj broja, to potkrepljujemo sljedećim pokusom. Djeca odgovaraju na niz zadataka na način da u prvom zadatku za točan odgovor pokazuju pločicu s tri miša. U drugom zadatku, kada je odgovor netočan, pokazuju pločicu s dva miša. Zatim se nastavljaju zadavati zadaci, a djeca u ovisnosti o točnosti zadatka pokazuju pločicu s dva ili tri miša. Kasnije mijenjaju lik miša s likom psa, a djeca i dalje razumiju što se događa.

Rezultat njihovog pokusa je da djeca u dobi od tri godine, pa i dvije i pol, znaju da se nekom preobrazbom i zamjenom ne mijenjaju numeričke vrijednosti prikaza, tj. pločicu s tri objekta nazivaju pobjednik. Četvrta faza je današnja faza koja je produžetak treće faze. Čini se da se broj i kvantitativno znanje razvijaju ranije od Piagetovih logičkih operacija, ali grade se i početni temelji za logičke operacije poput klasifikacije i poretka. U nastavku ćemo ilustrirati probleme bazirajući se na početne dječje kompetencije vezane za broj. Nativisti izvještavaju da bebe u prvih šest mjeseci zapažaju razliku između jednog i dva objekta, pa i razliku između dva i tri objekta.

**Primjer 2** *Djeci je pokazan niz slika od kojih svaka sadrži manji broj objekata. Slike se razlikuje po atributima kao što su veličina, gustoća, svjetlina, ali uvijek se sastoje od dva objekta. Zatim im se zadaje novi niz sličan prethodnom, ali na kojemu su slike od tri objekta. Tada se baziraju na novu zbirku i njihovo disanje se ubrzava.*



Slika 2: Niz slika s različitim svojstvima

Ispočetka pažljivo promatraju i njihova pažnja je zadržana zbog uočavanja razlika, no kasnije su naviknuti na to, te počinju gledati uokolo i disanje im postaje opušteno. Nakon što im se prikaže nova zbirka usredotoče se na novu zbirku i njihovo disanje se ubrzava. Pokusi pokazuju da je sposobnost razlikovanja ograničena na male brojeve, odnosno od jedan do tri, te se povećava na razlikovanje četiri od pet, pet od šest tek u dobi od tri ili četiri godine. Opće je prihvaćeno da postoji neka početna kompetencija, no nije jasno što ona točno znači.

Noviji dokazi dovode u pitanje prethodne rezultate i tvrdnje. Smatra se da iako djeca povezuju pojmove to može biti samo posljedica općeg procesa uspoređivanja. Istraživanje koje je najprije uključivalo šestomjesečnu djecu je sada provedeno za djecu u dobi od tri godine. Nije bilo opravdanja zašto bi djeca u toj dobi imala poteškoća sa zadacima za koje šestomjesečne bebe navodno imaju sposobnost. U skladu s time, istraživači nisu pronašli dokaz da šestomjesečne bebe primjećuju kvantitativnu ekvivalentnost između auditivnih i vizualnih prikaza. Dakle, nema razloga vjerovati da tako mala djeca imaju sposobnost baviti se količinama, odnosno brojem. No, to ne znači ni da se striktno podupire empiristička teorija. Velik problem kod istraživanja u kojemu sudjeluju djeca mlađa od jedne godine su teška izvedba i interpretacija. Ipak, djeca razlikuju skupove na nekoj kvantitativnoj razini od samog rođenja.

U drugoj polovici prošlog stoljeća odgojitelji su razvili nekoliko modela brojanja i direktnog prebrojavanja. Direktno prebrojavanje je sposobnost prepoznavanja ili imenovanja broja bez brojanja objekata. Utvrđeno je da djeca mogu prepoznati skupine objekata, ali ih ne mogu brojati. Time je zapravo zaključeno da je direktno prebrojavanje preduvjet za brojanje. Dokaz da se direktno prebrojavanje razlikuje od brzog brojanja su podaci o vremenu reakcije, tj. vrijeme reakcije se povećava brojem stavki koje je potrebno odrediti. Istraživanja pokazuju da mala djeca mogu brzo prepoznati i koristiti broj uzastopno prikazanih slika za predviđanje sljedeće slike u nizu.

Djeca prikazuju brojeve neverbalno i aproksimativno, onda neverbalno i precizno, zatim verbalno. Da bi se količine usporedile rade se podudaranja. Jednom kada dijete

može mentalno predstaviti objekt onda može napraviti točnu usporedbu između tih neverbalnih prikaza. Djeca prvo povezuju izbrojene objekte s nazivom broja, a zatim naziv broja s brojnosti skupa. Tek nakon mnogo takvih ponavljanja i s iskustvom počinju utvrđivati ono što odrasli nazivaju numerička ekvivalencija klasa. Ovaj pristup podržavaju istraživanja u Amazoni gdje obitava pleme Munduruku koje nema nazive za brojeve iznad pet, oni mogu zbrajati i uspoređivati, ali samo aproksimativno, ne i precizno.

Direktno prebrojavanje se razlikuje od brojanja, prebrojavanja i drugih načina klasifikacije pa zaslužuje i drugačije obrazovno razmatranje. Direktno prebrojavanje nije samo urođena sposobnost, ona se kombinira i razvija zajedno s ostalim mentalnim procesima. Istraživanja u prirodnom dječjem okruženju pokazuju da se razvoj ove sposobnosti može dogoditi već s 30 mjeseci i to kod djece s kojom se vježba. Djeca kreću s prepoznavanjem brojeva jedan, dva, tri, četiri i nakon toga nauče prepoznavati i brojati sve veće brojeve. Prostorni raspored zbirke također utječe na teškoću direktnog prebrojavanja. Djeca najbrže pronalaze pravokutne razmještaje, a slijede ih linijski i kružni. To vrijedi i za većinu učenika osnovnih škola, jedino postoji mala razlika kod pravokutnog razmještaja koji se odvija puno brže za djecu koja znaju množiti. Istraživanje je pokazalo da je spontana usredotočenost na brojnost objekata kod četverogodišnjaka povezana sa sposobnošću verbalnog brojanja, te je direktno prebrojavanje posredna veza između ta dva procesa. Zaključno, rane kvantitativne sposobnosti postoje, ali se one u početku ne sastoje od sustava za koji se može reći da sadrži matematičke koncepte. Pogledajmo smjernice za učenje prepoznavanja broja i korištenja direktnog prebrojavanja (Tablica 1).

Godine	Razvojni napredak
0 – 1	- ne postoji izričito namjerno znanje o broju - implicitna osjetljivost na količinu s perceptivnim uzorkom
1 – 2	- imenovanje manjeg skupa od jednog, dva, pa čak i tri objekta - razvijen mentalni neverbalni prikaz za svaki od objekata u tim malim skupinama
3	- neverbalno stvaranje male skupine objekta (ne više od četiri) s istim brojem članova kao što ima neka druga skupina, kod neke djece i verbalno stvaranje
4	- odmah prepoznaju prikazani skup koji se sastoji do najviše četiri objekta i verbalno imenuju brojeve objekata
5	- prepoznaju prikazani skup s najviše pet objekata i imenuju svaki objekt - verbalno označavaju razmještaj do deset objekata, koristeći skupine
6	- verbalno označavaju razmještaj s do 20 objekata, koristeći skupine
7	- verbalno označavaju strukturirani razmještaj objekata koristeći skupine, preskačući brojeve i mjesne vrijednosti, npr. skupine desetki i dvojki
8	- verbalno označavaju strukture kratko prikazane, koristeći skupine, množenje i mjesnu vrijednost

Tablica 1: Smjernice za učenje prepoznavanja broja i korištenja direktnog prebrojavanja

## 2.2 Verbalno brojanje i brojanje objekata

Djeca u dobi do 24 mjeseci nauče svoj prvi naziv broja i to najčešće bude broj dva. Ovisno o okruženju djeca pokušavaju verbalno brojati u dobi od dvije do tri godine. Veliki napredak se događa u predškolskoj dobi. Za verbalno brojanje ne koristimo termin brojanje napamet, jer djeca moraju naučiti načela i uzorke u brojevnom sustavu, barem za nazive brojeva iznad dvadeset. Istraživanja su pokazala da se učenje brojanja razlikuje ovisno o jeziku na kojemu se uči numerički sustav. Primjerice, kineski, kao i većina istočnoazijskih jezika ima pravilniji raspored za nazive brojeva. Najveće poteškoće imaju djeca koja govore njemački ili nizozemski jezik, jer oni prvo izgovaraju jedinice pa desetice. Utjecaj kulturnih čimbenika je velik, pa tako primjerice u Kini roditelji jako rano i vrlo snažno potiču djecu na brojanje.

Učenje verbalnog brojanja unatrag je spor i naporan proces, a temelji se na slijedu normalnog brojanja. Posebna poduka omogućuje djeci da savladaju brojanje unatrag jednako kao i brojanje unaprijed. Djeca prvo uče riječ koja predstavlja brojeve kao različite riječi ovisno o kontekstu. One kasnije postaju međusobno povezane, što na poslijetku rezultira pravim skupom značenja za tu riječ.

Da bi brojali objekte djeca koriste verbalno brojanje i pokazivanje ili pomicanje objekata. Postavlja se pitanje kako se uopće razvija brojanje. Pretpostavlja se da mala djeca poznaju pet načela. Tri načela kako brojati uključuju načela u kojemu se dodijeljuju brojevi u istom redosljedu, jedan broj se dodijeljuje jednom objektu, zadnji izbrojeni broj predstavlja broj objekata u nizu. Druga dva načela kažu da je red kojim se objekti računaju nebitan te da se sva druga načela mogu primjeniti na bilo koji skup objekata. Istraživači su dali dokaze da djeca razumiju sva ta načela do dobi od pet godina, a neka i do tri godine. Do pete godine, većina djece može prebrojavati 20 – 30 objekata, iako njihova točnost ovisi o usredotočenosti i trudu.

Poteškoće se javljaju kod većih skupina objekata, tada dolazi do dvostrukog prebrojavanja i preskakanja. Ukoliko djeca znaju više naziva za brojeve nego što ima objekata za brojati, oni dodatne nazive izgovore brzo na kraju. U suprotnom, ukoliko ima više objekata nego brojeva koje poznaju, ponovo iskoriste neke nazive brojeva. Brojanje pomicanjem i prebrojavanjem objekata može dovesti i do pogrešaka kao što su prestanak izgovaranja naziva broja zbog usredotočenosti na pomicanja i gradnje neke strukture s tim objektima ili premještanje jednog ili više objekta pri izgovaranju jednog broja.

Čini se da kardinalnost nije komponenta ranog dječjeg brojanja, pogotovo za velike brojeve koje ne mogu direktno prebrojiti. Djeci nije jasno zašto se uči brojati, oni u dobi od 51 do 64 mjeseci smatraju da je svrha nabrojanje, zato što drugi to od njih očekuju ili uopće ne vide svrhu. Nakon polaska u školu odgovori postaju sofisticiraniji. Postoje naznake da djeca unatoč točnim odgovorima ne razumiju prebrojavanje brojeva u potpunosti. Na primjer, ako ih se traži da navedu na koje se objekte odnosi zadnji izgovoreni naziv broja, oni kažu samo zadnji objekt. Djeca moraju shvatiti zadnji broj na eksplicitnoj razini kako bi uspostavili vezu između čina brojanja i kardinalnosti. Ne znači da kardinalnost nije nerazumljiva, nego samo da nije urođena u kontekstu brojanja.

Brojanje se pospješuje uz povratne informacije jesu li njihove prosudbe bile valjane, pokazujući im da prosudba možda nije valjana, ali i da se prebrojavanjem sigurno dobi točan odgovor. Postavlja se pitanje koje jedinice dijete može brojati. Djeca od 4 – 5 godina, kada im je primjerice zadano da broje vilice koje su cijele i polomljene na pola, nisu uspjela dvije polomljene povezati kao jednu cijelu. Napredak se ne povećava samo zbog raznolikih situacijama u kojima djeca mogu brojati, nego pomaže i pri razumijevanju jedinica i mješovitih jedinica u područjima aritmetike, mjerenja i razlomaka.

Do sada smo se bavili brojanjem objekata koje djeca mogu vidjeti. Kako djeca napreduju, sve više mogu brojati objekte koje ne čuju i ne vide. Primjer je rad s petogodišnjim djetetom. Pokazana su mu tri kvadrata i rečeno da su još četiri prekrivena platnom. Postavlja mu se pitanje koliko je kvadrata uopće bilo. Dijete pokušava podići platno. Kada ga se zaustavi, ono nabraja samo tri. Podizanje platna ukazuje na svijest o skrivenim kvadratima, te ih je dijete htjelo pribrojiti zbirci. Ipak ih nije pribrojilo, jer nije uspjelo uskladiti nazive brojeva s figurativnim predmetom.

Prilikom učenja brojeva djeca se susreću s pojmovima nula i beskonačno. Predškolska djeca imaju ograničeno razumijevanje oba pojma. Trogodišnjaci predstavljaju nulu kao odsustvo objekta, dok sa četiri godine već koriste nulu kao i ostale manje brojeve. Nula se ne pojavljuje često u prebrojavanju. Razvojni slijed uključuje tri razine. Prva je upoznavanje s imenom nula i simbolom 0, druga je da se nula odnosi na jedinstvenu numeričku količinu nijedan ili ništa i posljednja je povezivanje nule s malim brojevima pri brojanju. Otprilike trećina djece u vrtiću može odgovoriti na pitanja vezana za nulu i skrivene brojeve koji pokazuju novo znanje o algebarskim pravilima kao što je  $a + 0 = a$ . Od prvog do trećeg razreda osnovne škole broj djece s takvim znanjem se znatno povećava.

Prije sedme godine života moguće je razumijeti podjelu pravca na velik broj dijelova, no ne i na beskonačno mnogo njih. Tek nakon 12. godine djeca mogu shvatiti da se podjela može nastaviti na neodređeno vrijeme. Igranje igre čiji je broj veći, gdje jedan učenik prvi kaže broj, zatim drugi učenik drugi broj pa se pogleda koji je veći, za 6 – 7 godina staru djecu pokazuje da ne razumiju neograničenost cijelih brojeva. Tek nakon 12. godine većina može shvatiti zašto bi trebali igrati drugi. Veliki značaj za razumijevanje beskonačnosti temelji se na dječjem razmišljanju da je uvijek moguće dodati jedan.

Jezik i kultura se isprepliću, a kulturološki običaji kojima djeca pripadaju utječu i na jezik i na matematičko razumijevanje. Općenito govoreći, istraživanja pokazuju da su interakcije između jezika i koncepta broja dvosmjerne. Dječja sposobnost da izgovoraju nazive brojeva ne podrazumijeva razumijevanje onog što oni predstavljaju. Osim brojki, djeca koriste ikone i sličice, a čak i kulture koje uopće ne koriste numerički pojmovni sustav uspješno koriste brojne račune, pa notacijski sustavi nisu univerzalni i nisu nužni za računanje. U jednom trenu se dovodi u pitanje štetnost uvođenja brojki u predškolskoj dobi. No, male su šanse za štetu, a velike za dobitak, jer takva upotreba povezana je sa shvaćanjem kardinalnosti. Ponovo dolazimo do smjernica, ovdje slijede smjernice za učenje brojanja (Tablica 2).

Godine	Razvojni napredak
1	- nema verbalnog brojanja, eventualni izgovor nekog broja bez nekog slijeda
2	- verbalno brojanje do pet, ali ne nužno točno
3	- verbalno brojanje do deset - koriste jedan naziv za jedan objekt
4	- odgovaraju na pitanje koliko zadnjim izbrojanim brojem - mogu napisati brojke koje predstavljaju brojeve od 1 do 10, a zatim i do 20 - znaju reći koji je broj prije i poslije zadanog broja, ali samo brojanjem do toga i poslije toga broja
5	- broje objekte i daju odgovore za sljedeći i prethodni broj (do 30) - razlikuju jedinice i desetice u nazivu broja - prepoznaju pogreške kod drugih, ali i u vlastitom brojanju
6	- verbalno brojanje i brojanje pomoću objekata počevši od nekog drugog broja, ne jedan, ali ne bilježe koliko je to brojeva - brojanje po deset do sto s razumijevanjem, verbalno brojanje do sto počevši od bilo kojeg broja - daju odgovor za koliko je neki broj veći od drugog pomoću prostornih, ritmičkih ili zvučnih uzoraka, brojanje mentalnih slika skrivenih objekata - verbalno brojanje i brojanje pomoću objekata do 200 i iznad, poznavajući uzorke jedinica, desetica i stotica
7	- razumijevanje brojanja unazad do i iznad 20 - razumiju da u dva niza ima jednak broj objekata i ako su u jednom nizu objekti više razmaknuti

Tablica 2: Smjernice za učenje brojanja

### 2.3 Usporedba, poredak i procjena

U dobi od tri godine djeca mogu identificirati skupove s jednakim brojem elemenata. S tri i pol godine djeca prepoznaju jednakobrojne skupove s jednakim elementima. Sa četiri i pol godine neverbalno prepoznaju jednakobrojne skupove s različitim elementima. Istraživanje je pokazalo razlike i prosudbe kod djece i odraslih između relativnih veličina dvaju brojeva. Djeca su pokazala veću aktivnost u prednjim područjima mozga koja kontroliraju pažnju, radnu memoriju i izvršne funkcije. Odrasli pokazuju veću aktivnost u stražnjim područjima, što može ukazivati na sve jače preslikavanje brojki u brojčanu vrijednost količine. Predškolska djeca bolje uspoređuju zbirke s jednakim brojem objekata nego s različitim i to vjerojatno jer se skupovi mogu razlikovati na mnogo načina.

Da bi djeca usporedila brojeve u dva skupa, moraju prebrojati svaki skup, pamtiti ta dva broja, a zatim ih usporediti što može premašiti njihove sposobnosti obrade podataka, kao što je radna memorija. Dodatno opterećenje za obradu podataka mogu biti određena ograničenja, ali i nedostatak znanja o važnosti prebrojavanja. U dobi između tri do pet godina dolazi do razvoja iz brojanja samo jedne zbirke do brojanja da bi se usporedili rezultati brojanja dvije zbirke. Poticanje petogodišnjaka na prebrojavanje radi provjere ekvivalentnosti dovodi do spontanog prihvaćanja samog brojanja za kasnije probleme istog tipa. Više faktora utječe na usporedbu pomoću brojanja. Djeca

trebaju razviti dovoljno radne memorije kako bi napravili plan za usporedbu, brojati dva skupa, zapamtiti rezultate, povezati ih i donijeti zaključke o tim skupovima. Dakle, brojanje može biti iskorišteno u kvantitativnoj usporedbi, a da bi to učinili točno djeca moraju naučiti da isti broj podrazumijeva jednaku brojnost, a različiti brojevi različitu brojnost.

U većini istraživanja djeca su morala odlučiti jesu li zbirke ekvivalentne ili ne, ali ne i poredati ih eksplicitno. Djeca u dobi od 14 mjeseci razlikuju manje od većeg. U dobi do tri godine pokazuju znanje o poretku kod uspoređivanja skupova, ali odvojeno od njihove sposobnosti brojanja. Kao i kod kardinalnih brojeva i kod rednih je u pozadini učenje direktnog prebrojavanja, podudaranja i brojanja. Postoji dva principa po kojima djeca mogu poredati brojeve. Prvi je plus minus princip koji se odnosi na susjedne numeričke veličine, npr. skup od četiri je skup od tri plus jedan. Drugi princip je povezana usporedba, koji uključuje razumijevanje slijeda uzastopnih brojeva, npr. ako dva skupa broje devet i sedam, skup s devet ima više jer dolazi poslije sedam u nizu brojanja.

Procjena je proces koji zahtjeva grubo ili preliminarno ocjenjivanje količine. Postoji nekoliko vrsta procjene. Jedna od njih je procjena broja na pravcu. To je sposobnost stavljanja brojeva na brojevni pravac proizvoljne duljine. Ona je vrlo važna za malu djecu pa od nje počinjemo.

Djeca mogu nakon naučenog mentalnog popisa brojeva naučiti linearan prikaz broja. Skloni su preuveličavati udaljenosti na početnom dijelu pravca i podcijeniti udaljenosti brojeva na kraju pravca. Takvi se problemi javljaju kod svih procjena, ne samo na pravcu. Poboľšanje dječje procjene na brojevnom pravcu ima važan učinak na poboljšanje znanja o brojevima. Ova procjena je bila jako zbunjujuća za djecu u vrtiću, ali jako korisna u prvom i drugom razredu.

Rane dječje kompetencije u brojanju sugeriraju da direktno prebrojavanje i sposobnost procjene brojeva u skupu treba biti rano razvijena vještina. No dokazi ukazuju da je procjena velik izazov za djecu. Razvoj vještina procjene brojčane vrijednosti odvija se u dobi od pete do osme godine. Prilikom određivanja obojenih kvadrata unutar kvadratnih rešetaka učenici od drugog do šestog razreda sve manje koriste strategije zbrajanja obojenih kvadrata i povećava se korištenje strategija oduzimanja kod više obojanih kvadrata. Porastom dobi djeca se sve više pouzdaju u točne aritmetičke operacije. Ukratko, strategije koje djeca koriste za procjenu su brojanje, suludo pogađanje i prostorno razlikovanje malih i velikih brojeva.

Računarska procjena je procjena aritmetičkih problema, povezana s drugim vrstama procjena kao što je procjena brojčane vrijednosti i procjena na pravcu, ali također i poznavanjem aritmetičkih kombinacija i postupaka. Malo je istraživanja o ovoj procjeni, a budući da ova procjena uključuje učenike viših razreda, o njoj nećemo detaljnije. Dolazimo do smjernica za učenje usporedbe, poretka i procjene (Tablica 3).

Godine	Razvojni napredak
0 – 1	- podudaranje jedan na jedan
2	- korištenje riječi manje, više i jednako, osjetljivost na 'manje od', 'veće od' za male brojeve - usporedba skupova koji imaju jako veliku razliku u veličini
3	- usporedba malih skupova verbalno i neverbalno
4	- podudaranje malih jednakobrojnih skupova pokazujući da imaju jednak broj - usporedba prebrojavanjem, ali samo za jednake skupove s malim brojem objekata, tj. do 6 - korištenje znanja o brojanju kako bi odredili relativnu veličinu i poziciju broja
5	- usporedba brojanjem i kod većih brojeva
6	- prepoznavanje i korištenje rednih brojeva od prvog do desetog - korištenje znanja o odnosu između brojeva da bi odredili relativnu veličinu i poziciju
7	- usporedba brojeva s razumjevanjem mjesne vrijednosti
8	- usporedba brojeva s razumijevanjem mjesta znamenki do 1000 - korištenje direktnog prebrojavanja za mjerenje podskupa - procjena dodavanjem do određene količine

Tablica 3: Smjernice za učenje usporedbe, poretka i procjene

## 2.4 Pojava aritmetike i strategije brojanja

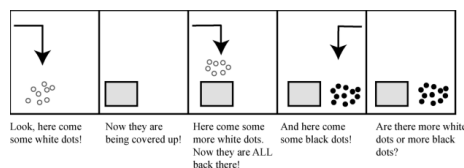
Aritmetika je jedna od glavnih tema u temeljnom matematičkom obrazovanju. Predškolarci imaju znanje o jednostavnijoj aritmetici, a tvrdnja dolazi od dokaza da mala djeca primjećuju učinke smanjenja i povećanja broja elemenata u malim skupovima. Istraživanje pokazuje da su trogodišnjaci, ali ne i dvogodišnjaci, uspješni u neverbalnim zadacima sa zbrajanjem i oduzimanjem malih brojeva. To je u skladu s mišljenjem da mala djeca promatraju male skupove kao pojedinačne objekte, a velike kao skupine, ali ne kao pojedinačne predmete. Ono što možemo reći sa sigurnošću jest da mala djeca reagiraju na situacije koje bi starija djeca i odrasli nazivali aritmetika.

Postavlja se pitanje kada djeca eksplicitno razumiju odnose u aritmetici. U dobi od 14–28 mjeseci djeca su osjetljiva na umetanja i brisanja iz skupova, a na rezultate utječe i odabir skupa. Djeca tada imaju osjećaj da se oduzimanjem smanjuje, a zbrajanjem povećava veličina skupa. Već sa četiri godine djeca će znati da ako se u jedan skup doda još objekata ili se oduzme od drugog skupa, tada će u prvom skupu biti više odnosno u drugom skupu će biti manje objekata. Problem nastaje kada dva skupa u početku nemaju jednak broj objekata. S pet godina djeca razumiju da u obzir moraju uzeti i početno stanje, a ne samo ono što dodaju ili oduzimaju.

Aritmetičke kompetencije nisu urođene, nego se postepeno uče i razvijaju. Zaključujemo da djeca grade eksplicitno znanje s tri godine, no tek sa četiri godine većina može riješiti zadatke i s većim brojevima uz visoku točnost. Većina djece ne rješava problem velikih brojeva uz podršku konkretnih objekata do dobi od pet i pol godina. Potreba za prisustvom konkretnih objekata nije toliko razvojna koliko je iskustvena. Petogodišnjaci mogu mentalno kombinirati dva uzastopno prikazana skupa točkica i usporediti ih s trećim.



**Primjer 3** Na ekranu se prikaže nekoliko padajućih bijelih točkica i onda ih se prekrije, pa zatim doda još bijelih točkica i prekrije. Zatim im se pokažu crne točkice i djeca znaju odgovoriti kojih točkica ima više.



Slika 3: Aproximativno zbrajanje velikih brojeva

Kada djeca pokažu razumijevanje zadataka s oduzimanjem i zbrajanjem pokažu i niz strategija za njihovo rješavanje. One mogu biti vrlo kreativne i raznovrsne. Predškolska djeca i djeca u prvom razredu koriste brojanje na prste i verbalno brojenje, pa sve do iznenađujuće sofisticiranih strategija i to bez davanja uputa. Strategije obično proizlaze iz dječjeg modeliranja problema.

Čak i djeca predškolske dobi pokazuju izvanrednu sposobnost povezivanja brojanja i aritmetike. Većina ih u početku koristi metodu prebrojavanja, a osim prebrojavanja za računanje je važno i poznavanje prethodnika i sljedbenika danih brojeva. U zadacima u kojim je veličina povećanja ili smanjenja nepoznata, djeca koriste prebrojavanje unatrag i prebrojavanje do traženog broja. Međutim, za većinu djece je to težak proces, pogotovo za prebrojavanje unatrag više od tri broja. Zato koriste strategiju brojanja do rezultata da bi riješili zadatak s oduzimanjem. Ova strategija zahtjeva da djeca utvrde obrnuti odnos između oduzimanja i zbrajanja. Već trogodišnjaci i četverogodišnjaci počinju koristiti načelo inverzije. Ovo načelo je dosta intuitivno, a smatra se da bi ga većina djece mogla usvojiti dobrim podučavanjem.

Postoji nekoliko prepreka za kvalitetno iskustvo i podučavanje aritmetike. Veliki je problem izostavljanje zadataka riječima, koji prikazuju raznosvrtnost problema. Često zadaci isključuju direktno prebrojavanje i brojanje, te potiču samo automatizaciju aritmetičkih operacija. Na taj način dolazi do točnosti rješavanja zadataka, ali se gubi stvaranje i upotreba strategija za računanje. Važan je i pristup. Treba naglašavati različite veličine, inverzni odnos između zbrajanja i oduzimanja, prikaz rednih brojeva i kardinalnost, strategije računanja. Treba poticati djecu na izmišljanje vlastitih strategija za računanje. Nakon stvaranja vlastitih strategija i usporedbe s vršnjacima, treba poticati na korištenje sofisticiranih strategija.

Manje je vjerojatno da će djeca koja koriste predmete, prste i brojanje za rješavanje problema koristiti sofisticiranije strategije, jer su sigurni u svoje izvedbe. Kada uspostave uspješne strategije rukovanjem s predmetima djeca mogu riješiti jednostavne zadatke i bez njih. Međutim, ne postoji razlika u otkrivanju aritmetičkih strategija kod djece koja rukuju s predmetima i onima koji ih ne koriste. Postoje i poteškoće izazvane vokabularom, primjerice u sljedećem zadatku djeca lakše odgovaraju na pitanja pod a).

**Primjer 4** U gnijezdu se nalazi pet ptica i tri crva.

- a) Koliko ptica neće dobiti crva?
- b) Koliko više ima ptica nego crvi?

Kao i za prethodna poglavlja i za ovo pogledajmo smjernice za učenje zbrajanja i oduzimanja, gdje se naglašavaju strategije brojanja (Tablica 4).

Godine	Razvojni napredak
1	- ne pokazuju razumijevanje oduzimanja i zbrajanja
2 – 3	- zbrajanje i oduzimanje jako malih skupina objekata
4	- verbalno pronalaženje rezultata brojanjem
4 – 5	- pronalaženje rezultata modeliranjem, odnosno dodavanjem objekata, odvajanjem, pomicanjem objekata iz skupine - dodavanje brojeva bez brojanja od početnog broja
5 – 6	- korištenje strategija brojanja pomoću prsti i prebrojavanja
7	- rješavanje svih tipova zadataka koristeći razne strategije i poznate kombinacije, rješavanje zadataka s dvoznamenkastim brojevima

Tablica 4: Smjernice za učenje zbrajanja i oduzimanja (naglašava se strategija brojanja)

## 2.5 Kompozicija i mjesna vrijednost broja, oduzimanje i zbrajanje višeznamenkastih brojeva

Sastav i rastav broja još je jedan od pristupa zbrajanju i oduzimanju koji se često kombinira s brojanjem. U dobi od četiri-pet godina djeca uče eksplicitno da je cjelina veća od svojih dijelova, ali ponekad ne znaju odrediti točan odnos. U dobi od pet-šest godina ne postoji veza između znanja komutativnosti i asocijativnosti i rješavanja aritmetičkih zadataka. To je povezano i s vrstama strategije koje djeca koriste. Kod preciznijih prebrojavanja i poredak je precizniji, što vodi na komutativnost, dok se još ne pokazuje veza s asocijativnošću. Asocijativnost zahtjeva konceptualno razmišljanje o tome kako se skupine objekata mogu rastaviti i sastaviti. Tijekom godina djeca povećavaju upotrebu prisjećanja. Ako ne uspiju ili rezultat ne prođe razinu kriterija prepoznavanja, koristit će strategiju brojanja. Kako djeca odrastaju, počinju pohranjivati kombinacije i veze u dugoročnu memoriju. Na kraju sve manje ulažu napor i svjesno koriste radnu memoriju, a zatim koriste automatsko prepoznavanje. Istraživanja pokazuju da je za prisjećanje kombinacija važno svladavanje operacija oduzimanja i zbrajanja, te da je pri tome uključeno veliko područje regija u mozgu. Određene regije su uključene samo za oduzimanje, što znači da je dio regija zajednički, a dio poseban za različite aritmetičke operacije.

Strategije za aritmetiku koje djeca same izmisle su razvojno prilagodljive i važan aspekt matematike. Te se strategije kasnije koriste za mentalno računanje s višeznamenkastim brojevima. Nikako nije preporučljivo da odgojitelji forsiraju podučavanje samo jednog postupka prilikom računanja. U konačnici bi djeca trebala moći razumijeti i prilagođavati strategije različitim situacijama i na taj način lako dohvatiti odgovor za svaku aritmetičku kombinaciju.

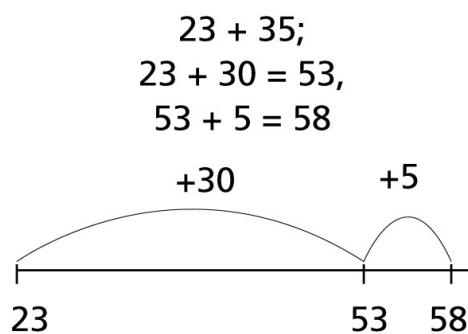
Treba biti vrlo oprezan, ponekad veliki napori mogu biti sasvim pogrešni. Primjer je Kalifornija koja je 2008. godine imala standarde koji su zahtijevali ubrzano pamćenje osnovnih kombinacija oduzimanja i zbrajanja. To je dovelo do toga da su djeca pokušavala zapamtiti rezultate bez razumijevanja i korištenja strategija ili su koristili nefunkcionalne postupke prebrojavanja. Postoji nekoliko smjernica kako pomoći djeci da postignu odlično znanje u aritmetičkim zadacima. Prvo, svaki intenzivan rad treba biti rezerviran za bitne vještine, kao što su zbrajanje i oduzimanje. Drugo, djeca trebaju najprije razvijati koncepte i strategije, dakle, razumijevanje prethodi praksi. Treće, praksa treba slijediti strategije utemeljene na istraživanjima i praksa se ne smije gomilati. Četvrto, strategije utemeljene na istraživanjima trebale bi pratiti sve nastavne materijale. Peto, praksa bi trebala nastaviti razvijati odnose i strateško

mišljenje.

Kompetencije u brojanju nisu povezane sa razumijevanjem grupiranja i mjesne vrijednosti. Za početak definirajmo ta dva pojma. Grupiranje se definira kao proces kombiniranja objekata u skupove koji imaju jednak broj objekata. Mjesna vrijednost na određenom mjestu je deset puta vrijednost mjesta desno od njega. Na razvoj razumijevanja mjesne vrijednosti utječe iskustvo, a ne dob. Zaključeno je da djeca u prvom razredu i mlađa ne mogu razumijeti mjesnu vrijednost. Međutim, postoji i utjecaj jezika na učenje mjesnih vrijednosti. Dosljedna nastava koja naglašava grupiranje i riječima objašnjavanje mjesne vrijednosti pomaže djeci u razumijevanju tih pojmova. Grupiranje predstavlja temelj za razmišljanje o množenju. Djeca u vrtiću mogu izmisliti vlastiti način za rješavanje jednostavnih zadataka množenja pomoću grupiranja, modeliranjem strukture problema. Dakle, djeca mlađa od sedam godina mogu riješiti probleme s množenjem na nekoj osnovnoj razini, ali ne i na višoj razini razmišljanja.

Prvo se smatralo da je učenje mjesne vrijednost preduvjet za aritmetiku, a u novije vrijeme smatra se da je aritmetika dobar kontekst za učenje mjesne vrijednosti. Djeca mogu naučiti mjesnu vrijednost istodobno rješavanjem aritmetičkih problema koji uključuju višeznamenaste brojeve. U nekoliko prvih razreda učenici uče izraziti odnose o fizičkim veličinama kao što je veće od. Uspostavlja se potreba da se identificira jedinica prije nego što se uvede broj i brojanje, jer njegova definicija utječe na oboje. Ideja da broj ovisi o jedinici je osnova za razumijevanje mjesnih vrijednosti.

Djeca od pet godina imaju približan osjećaj za zbrajanje i oduzimanje, s time da je njihova procjena pomoću vizualnih objekata nešto točnija od one zadane riječima. Strategije koje uključuju brojanje desetica i jedinica mogu se mijenjati zajedno sa djetetovim razvojem razumijevanja numeriranja i vrijednosti mjesta, a sve to kako bi se došlo do eksplicitnog znanja zbrajanja i oduzimanja višeznamenastih brojeva. Da bi se takve strategije koristile, djeca trebaju shvatiti brojeve kao cjeline sastavljene od vlastitih jedinica i kao sastav pojedinih jedinica. Ukoliko učitelj forsira neki standardni algoritam bez obzira na napredak učenika, sami učenici smatraju taj algoritam besmislenim pogotovo ako se ne podudara s njihovim strategijama i načinu razmišljanja. Standardni pisani algoritmi namjerno oslobađaju učenike razmišljanja gdje početi, te koje mjesto dodijeliti pojedinoj znamenki. Takav je pristup pogodan za učenike koji već sve to razumiju, ali nije dobro za početnike. Nizozemci koriste prazan brojevni pravac, koji nije model mjerenja, nego samo bilježi poredak brojeva i veličinu skoka (Slika 4).



Slika 4: Brojevni pravac za zbrajanje

Postoje razni argumenti trebaju li se poučavati standardni algoritmi ili ne. Prvo, ne postoje jedinstveni standardni algoritmi. Drugo, ono što se smatra različitim algoritmima za laike i učitelje, za matematičare su samo jednostavnije izmjene. Konceptualni

pristup koristi objekte za grupiranje, prošireni zapis i veze između predstavnika. Mehanički pristup koristi algoritam korak po korak, a uštedeno vrijeme koristi za vježbu. Važno je da odgojitelji unaprjeđuju kreativnost smišljanja strategija u ranoj dobi, jer oni s konceptualnim znanjem su bili spremniji sudjelovati u nastavi matematike.

Za razliku od dosadašnjih smjernica, ovdje je smjernica podjeljena na dva dijela. Prvi dio je sastav broja, a drugi zbrajanje i oduzimanje višeznamenkastih brojeva. To je tako napravljeno da se naglasi da je drugi dio ista smjernica kao u prethodnom poglavlju, koja je samo nadopunjena podacima iz ovog poglavlja (Tablica 5).

Godine	Razvojni napredak
0 – 2	- samo neverbalno prepoznavanje dijelova i cjelina, ne mogu eksplicitno prepoznati da se cjelina sastoji od manjih cjelina
3 – 4	- znaju da je dio manji od cjeline, ali ne znaju točno odrediti količinu
4 – 5	- poznavanje kombinacije brojeva - korištenje strategije duplo do 20, npr. $9 + 9 = 18$
7	- razumijevanje da je dvoznamenkasti broj sastavljen od znamenka desetica i jedinica
6 – 7	- korištenje fleksibilnih strategija i izvedenih kombinacija za rješavanje različitih vrsta zadataka
7	- rješavanje svih vrsta problema uz fleksibilne strategije i poznate kombinacije
7 – 8	- korištenje višekratnika broja 10 i prethodno naučenih strategija, npr. zadatak je izračunati koliko je $28 + 35$ , djeca znaju da je $30 + 35 = 65$ , ali zadano je 28, pa je to dva manje, tj. 63

Tablica 5: Smjernice za učenje kompozicije i mjesne vrijednosti broja, oduzimanja i zbrajanja višeznamenkastih brojeva

## 3 Geometrija i prostorno mišljenje

Oko 300. godine prije Krista Aleksandrijom je vladao kralj po imenu Ptolomej. Aleksandrija je bila središte znanosti, kulture i svih učenja tog vremena. Samouki Ptolomej pitao je oca geometrije, Euklida, da ga poduči. Euklid je započeo s trinaest koraka, ali je Ptolomej postao nestrpljiv i predložio Euklidu neki prečac. Na to mu je Euklid odgovorio da nema kraljevskog puta do geometrije. U ovu tvrdnju ćemo se uvjeriti kada uvidimo da se znanje o geometriji razvija kroz rad, trud i iskustvo. Za rano djetinjstvo područje geometrije je važno kao i znanje o brojevima. Geometrija i prostor nisu važni samo kao zasebna područja nego i podržavaju brojeve, te aritmetičke koncepte i vještine. U ovom dijelu započinjemo s prostorom u kojem dijete živi, zatim kako ga naučiti bolje poznavati, onda prelazimo na identifikaciju i analizu objekata i na kraju sastav i rastav oblika.

### 3.1 Prostorno mišljenje

Postoji dvije vrste prostornih kompetencija, a to su prostorna orijentacija i prostorna vizualizacija. Prostorna orijentacija uključuje razumijevanje i operacije između različitih pozicija u prostoru, prvo iz vlastite pozicije, a kasnije i iz više apstraktne pozicije, što uključuje karte i koordinate u različitim mjerilima. Kao i broj, prostorna kompetencija postulirana je kao osnovna domena koja je prisutna od rođenja. Međutim, važan utjecaj ima međudjelovanje urođenih sposobnosti s iskustvom i sociokulturnim utjecajem. Mala djeca mogu razmišljati o prostornim perspektivama i prostornim udaljenostima, iako se njihove sposobnosti znatnije razvijaju tek nakon polaska u školu. Treba uzeti u obzir da i starija djeca, pa i odrasli, mogu griješiti u prostornom rasuđivanju. Prostornu orijentaciju proučavamo kroz četiri kategorije: prostorna lokacija i intuitivska navigacija, prostorno mišljenje, modeli i mape, koordinate i prostorno strukturiranje.

Premda djeca i odrasli razvijaju razne mentalne mape, to nisu mentalne slike kao mape na papiru. One se sastoje od pojedinačnog znanja i vlastitih posebnosti. Djeca uče o prostoru razvijanjem dvaju sustava koji se temelje na vlastitim osnovama i vanjskim izvorima. Što su djeca mlađa, to su sustavi slabije povezani. Prvo dijete zabilježi lokaciju ili put do lokacije pomoću uzorka pokreta povezanih s clijem. Zatim dolazi do integracijske staze u kojoj su mjesta kodirana na temelju udaljenosti i smjera vlastitog kretanja. Najbolja procjena lokacije se dobiva kombiniranjem dvaju sustava. Djeca u dobi do šesnaest mjeseci integriraju staze koje uključuju kretanje i okretanje. Jasno je da su prostorni prikazi i motorička aktivnost usko povezani. Djeca u dobi od dvije godine razvijaju jaču vanjsku memoriju lokacije i održavaju informacije tijekom duljih razdoblja. Funkcionalna upotreba prostornog znanja za pretraživanje, koja zahtjeva pamćenje prostornih podataka, oblikovanje i korištenje prostornih odnosa, razvija se tijekom predškolske dobi.

Kako djeca u drugoj godini života imaju sposobnost simboličkog mišljenja, tako počinju stjecati i prostorno mišljenje. Spomenimo istraživanja sa slijepom djecom. Slijepa djeca su u ključnom aspektu zadatka, odnosno točnosti na završnoj poziciji, bila manje precizna u odnosu na djecu koja nisu slijepa. Pored toga, slijepa djeca imaju poteškoća s prostornim zadacima pri čemu dolazi do netočnih odgovora kod udaljenosti i povećanja kuta između objekata. Zaključujemo da je neko vizualno iskustvo važno za puni razvoj prostornog znanja, no i slijepa djeca su svjesna prostornih odnosa, jer su oni prostorni, a ne vizualni. Djeca opažaju ravnu liniju već nakon prve godine života,

ali u početku ne mogu samostalno stavljati predmete po tom uzorku. Djeca u dobi od otprilike sedam godina spontano prate ravnu putanju radi stvaranja uzorka ravne linije. Mala djeca prepoznaju da drugi promatrači vide nešto drugačije i time se razvija njihova sposobnost da konstruiraju druga stajališta. Neki od čimbenika koji utječu na pamćenje lokacije su: subjektivni atributi kao što su intelekt i kognitivni stilovi, zadatak odnosno atributi zaslona, dostupnost vanjskih oznaka, iskustvo s različitim stajališta i način odgovora. Navigacija u velikim okruženjima zahtijeva integraciju svih prikaza. Vjeruje se da se ljudi nauče kretati koristeći oznake, zatim rute ili povezane oznake, pa onda mentalne mape koje sadrže kombinacije mnogih lokacija i ruta. Usporedba puteva kako bi se pronašli najkraći put je jako težak zadatak za djecu. Djeca u starosti od jedne, dvije godine mogu izabrati najkraće rute samo u najjednostavnijim situacijama. U dobi od četiri i pol godine koriste kombinacije promatranja i planiranja. Zatim s pet, šest godina razvijaju sposobnost planiranja puta u situacijama u kojima optimalan put uključuje lokacije koje nisu blizu ili čak nisu vidljive. Prostorni odnosi se ne opažaju automatski, oni zahtijevaju pozornost, a prostorni pojmovi se stječu dosljedno čak i na različitim jezicima. Prvi odnosi koji se stječu su: u, na, ispod, uz vertikalne smjernice gore i dolje. Zatim se uče riječi za neposrednu blizinu kao što su pokraj i između. Puno kasnije uče se riječi lijevo i desno i one su izvor zbunjenosti dugi niz godina.

Da bi djeci karte imale smisla, moraju stvarati relacijske i geometrijske odnose između elemenata, jer oni ovise o pogledu i perspektivi. Već s tri godine djeca mogu sagraditi jednostavnije modele od igračaka poput kuće, automobila i stabla, ali ova sposobnost je ograničena do šeste godine. Primjerice, u vrtiću djeca mogu napraviti model svoje učionice, ali ne mogu povezati grupe tih modela. Djeci su pokazani modeli prostorije u kojoj se nalaze, a tamo se nalazi minijaturan pas skriven iza kauča. Traži se od djece da pronađu većeg plišanog psa koji je skriven iza stvarnog kauča. Djeca u dobi od dvije i pol godine ne uspijevaju izvršiti taj zadatak, dok trogodišnjaci uspijevaju. Zanimljivo je da su obje dobne skupine uspjele kada je u pitanju bio crtež ili fotografija sobe. Naime, mlađoj djeci je model zanimljiv objekt, ali nije simbol drugog prostora, što govori da su konkretniji modeli za njih manje korisni. Djeca mogu shvatiti da simboli predstavljaju objekte, ali imaju ograničeno razumijevanje za odnos između karata i stvarnog prostora. Već im sa četiri godine mogu poslužiti kao navigacija, ali samo u jednostavnijim situacijama. Sposobnost korištenja karata je izazovnija sposobnost nego praćenje određenih putova. Ova se sposobnost javlja u petoj godini, ali za jednostavnije prostore koji su obično pravokutnog oblika. Sa šest godina mogu planirati složenije putove s više mogućih izbora koristeći informacije o udaljenosti. Većina poteškoća nije u pamćenju i pokazivanju lokacije, nego u rasponu udaljenosti. Postoje individualne razlike u sposobnostima stvaranja i korištenja karata. Čak i djeca sa sličnim mentalnim prikazima mogu proizvesti sasvim različite karte zbog razlika u crtanju i njihovoj izradi. Zbog različitih rezultata prilikom korištenja karata u različitoj dobi, zaključujemo da iskustvo igra veliku ulogu u razumijevanju prostornih prikaza kao što su karte. Prikazivanjem djeci nekoliko modela i njihovim uspoređivanjem riječima i vizualnim naglašavanjem pomaže se djeci pri uočavanju zajedničkih odnosa na danim zadacima.

Intuicija o prostoru nije neko čitanje ili urođeno shvaćanje pojmova, nego sustav odnosa stvoren u radnjama koje se izvode nad tim objektima. Jako mala djeca mogu usmjeriti vodoravnu ili okomitu liniju u prostoru. Također u dobi od četiri do šest godina djeca mogu produžiti pravce u oba smjera i pronaći gdje se sijeku, pratiti točku do koordinata i koordinate do točke, gdje je rad jednako dobar sa i bez mreže. Prostorno strukturiranje je mentalni rad konstruiranja oblika ili organizacije objekta ili skupa

objekata u prostoru. Strukturiranje uzima prethodne apstraktne stavke kao sadržaj i integrira ih u formiranju novih struktura. Koordinatna mreža može pomoći djeci u oblikovanju prostora, ali ih ona katkad i zbuni. Izvedbe zadataka s koordinatama napreduju od predškolske dobi, pa sve do šestog razreda. U širem smislu vizualizacija je sposobnost, proces i produkt stvaranja, razmišljanje i korištenje slika, dijagrama u našim umovima, na papiru ili nekim drugim alatom s glavnim ciljem prikazivanja i korištenja informacija. Prostorna vizualizacija uključuje razumijevanje i izvedbu zamišljenih transformacija dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata, uključujući podudaranje i kretanje. Djeca mogu stvoriti mentalnu sliku oblika, zadržati sliku, zatim tražiti isti oblik skriven u složenijem liku. Da bi to učinili, možda će morati mentalno rotirati oblike, što je jedna od najvažnijih promjena koju djeca trebaju naučiti. Tek u drugom razredu su djeca sposobna za mentalnu rotaciju slike. Već u prvom razredu, za razliku od djece u vrtiću, djeca zapažaju razliku između zrcalnih slika, primjerice slova b i d.

Istraživanja ukazuju da su iskustva koja naglašavaju tjelesnu i mentalnu aktivnost prikladna, a ponekad i nužna za razvijanje vještina poput prostorne orijentacije. Naglašava se i važnost samoinicijativnog pokreta za uspjeh u prostornim zadacima i predlaže se poticanje i povećanje takvih iskustava. Roditeljske smjernice pomogle su već i trogodišnjoj djeci, a interakcija i povratne informacije koje primaju od drugih su ključne za određeni zadatak vezan uz prostorne komunikacije. Stoga odrasli moraju voditi računa da djeca razvijaju sposobnost gradnje odnosa između objekata u prostoru, proširuju veličinu tog prostora, povezuju primarna i sekundarna značenja, upotrebljavaju prostorne informacije, razvijaju sposobnost mentalne rotacije, upotrebljavaju karte u lokalnim sredinama, te razvijaju razumijevanje matematike u pozadini karata. U predškolskoj dobi i prvom razredu djeca bi trebala naučiti ponešto i o koordinatama na kartama, pri čemu bi trebal naučiti: odrediti što predstavljaju mreže, povezati brojanje linija sa količinom i oznakom, povezati mrežu sa aritmetikom, konstruirati proporcionalne odnose na karti. Treba pripaziti na izražavanje pa tako izrazi gore, dolje i x je donja os se ne mogu generalizirati na koordinatnu mrežu sa četiri kvadranta. Sve u svemu koordinate mogu poslužiti kao korisno sredstvo za razvoj geometrijskih pojmova.

Prostorno i strukturno mišljenje je ključno za geometriju, mjerenje, oblikovanje, prikaz podataka i ostale teme o kojima ćemo govoriti kasnije. Sada pogledajmo odvojene smjernice za učenje prostorne orijentacije i prostorne vizualizacije (Tablica 6).

Godine	Razvojni napredak
0 – 2	- koriste oznake za pronalaženje objekata i lokacija u blizini ako se nisu pomaknuli u odnosu na smjernice - razumiju nazive pojmova vezane za prostorni odnos i lokaciju
2 – 3	- koriste oznake za pronalaženje objekata i lokacija, čak i nakon što se premjeste u odnosu na oznake, ako je cilj naveden na vrijeme - orijentacija pomoću okomitih i paralelnih linija
4	- pronalaze objekte nakon pokreta, čak i ako cilj nije naveden ranije - sveobuhvatno pretraživanje malih prostora, često uz kružno pretraživanje
5	- koriste koordinatne oznake u jednostavnijim situacijama
6	- pronalaze objekte koristeći karte sa slikovnim znakovima
7	- čitaju i iscrtavaju koordinate na kartama
8+	- slijede jednostavne rute na karti uz veliku točnost smjera i udaljenosti, pamte i stvaraju karte i ako su promijenjeni prostorni odnosi
0 – 3	- mogu pomaknuti figure na određenu lokaciju
4	- mentalno okreću objekte u lakšim zadacima, te prepoznaju kako izgleda i prije fizičkog zakretanja objekta
5	- koriste ispravne pokrete, ali ne uvijek u točnom sjeru i iznosu, npr. zna da mora zakrenuti objekt da bi odgovarao drugome, ali ga okreće u pogrešnom smjeru
6	- zakretanja za $45^\circ$ , $90^\circ$ , $180^\circ$
7	- koriste dijagonalne pokrete, odnosno kose crte, zakretanje za $45^\circ$
8+	- predviđaju rezultate pomicanja objekta korištenjem mentalnih slika

Tablica 6: Smjernice za učenje prostorne orijentacije i prostorne vizualizacije

## 3.2 Oblici

Geometrija leži u središtu fizike, kemije, biologije, geografije, umjetnosti i arhitekture, a leži i u srcu matematike. Iako je u prošlosti geometrija bila obavijena apstrakcijom, sada se sve to mijenja, zahvaljujući računalima i računalnoj grafici. Dva najistaknutija fizičara naše bliske prošlosti svoje napredovanje pripisuju geometriji. Einstein je bio fasciniran kompasom, što ga je dovelo do razmišljanja o matematici i geometriji. Izvrsno znanje o geometriji imao je već u dobi od dvanaest godina. Kasnije u životu sam je tvrdio da su njegovi elementi mišljenja u početku uvijek geometrijski i prostorni uključujući više ili manje jasne slike koje se mogu reproducirati i kombinirati. S druge strane Hawking je rekao da su jednadžbe samo dosadan dio matematike i da on pokušava vidjeti stvari u terminima geometrije.

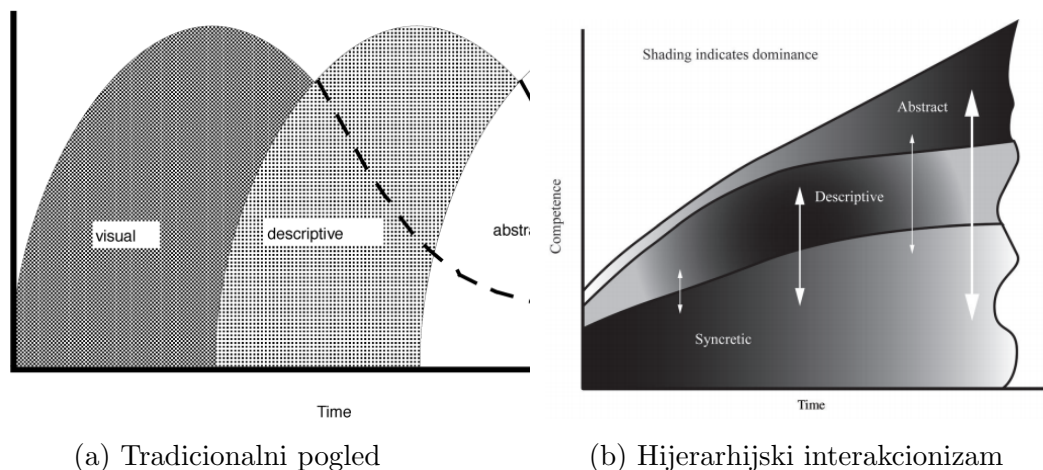
Oblik je temeljna konstrukcija kognitivnog razvoja u geometriji. Međunarodno uspoređivanje rezultata TIMSS-a pokazuju da su učenici u Hrvatskoj u matematici najjači upravo u područjima geometrije i mjerenja. Pokazuje i da je uspjeh u rješavanju zadataka iz geometrije usko povezan s logičkim rasuđivanjem i ostalim važnim matematičkim vještinama. Zajedno s jednostavnim računanjem, geometrijski koncepti su temelj podučavanja matematike. Od brojevnog pravca i nizova do količine, brojeva i aritmetike, sve ideje leže na geometrijskoj pozadini.

Mala djeca opažaju cjeline kao i dijelove geometrijskih uzoraka, a u dobi od tri godine već se bave prostornom analizom i opažanjem u obje konstrukcije, procesu koji



se mijenja razvojem. Primjerice, ukoliko je zadano da se nacrtat znak + mala djeca će sjecište tretirati kao središte četiri dijela i nacrtati ga kao četiri ravne linije, starija djeca će nacrtati jednu dugu okomitu liniju i dvije manje paralelne, dok će odrasli povući jednu dugu okomitu i jednu dugu horizontalnu liniju. Susretanjem s više primjera jednakih oblika djeca počinju formirati klase oblika. Oni posjeduju nekoliko različitih prototipova za figure, bez prihvatanja srednjeg slučaja. Na primjer, uočavaju tupokutni i šiljastokutni trokut, ali ne znaju kojem od ovih skupova pripada pravokutan trokut.

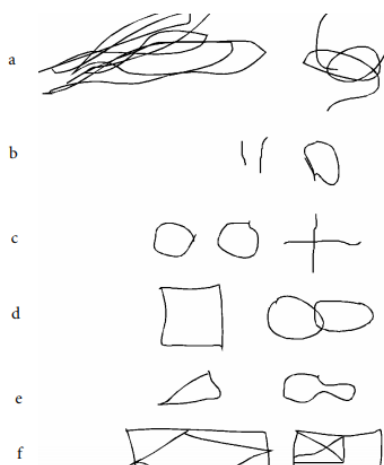
U vrlo ranoj dobi djeca paze na neke attribute u svojim slikovitim shemama, zatim shema postaje sve bolje formulirana i dijete ima sposobnost za povećanjem pažnje na pojedinačne dimenzije pri uspoređivanju objekata. Tada je dijete u stanju prepoznati više atributa kako bi izgradilo vlastitu definiciju objekta. Klase likova koji su simetričniji, primjerice krug i kvadrat, imaju manje mogućih slikovnih prototipova pa se pokazuje poboljšanje u točnosti njihove identifikacije, dok pravokutnici i trokuti imaju više mogućih prototipova. Primjerice, trokut je definiran kao lik sa tri stranice i tri kuta, no potrebna su ograničenja da su stranice ravne, a ne krivudave. Veći broj primjera i jačanje deklarativnog znanja (tri ravne stranice) dovodi do prihvatanja raznolikih geometrijskih likova, dok se oni koji se ne podudaraju odbacuju iz klase. Sljedeće slike nam predstavljaju dva suprotna predočenja geometrijskih razina mišljenja. Prema tradicionalnom pogledu prikazanom na slici (Slika 5a), svaka razina sazrijeva i stvara početak nove razine koja uključuje, ali i podređuje prethodnu razinu i na samome kraju izbljedi. Hijerarhijski interakcionizam (Slika 5b) naglašava da se sva znanja razvijaju istodobno. U ranijim godinama dominira povezivanje dvaju objekata na osnovi individualne slučajnosti. Kod opisnog mišljenja se uzimaju u obzir atributi objekata, a opisno je prisutno i u interakciji sa sinketičkim mišljenjem, ali slabo (kao što pokazuje mala obostrana strelica). Sva tri znanja rastu istodobno kao i njihove veze, a kada apstraktno znanje počne rasti veze se jačaju (deblje strelice).



Slika 5: Različiti prikazi pogleda na geometrijsko mišljenje

Obrazovni materijali vode djecu u ograničenom smjeru, a ograničeni koncepti se izravno odražavaju u ponašanju djeteta. Petogodišnjaci smatraju da zarotirani kvadrati više nemaju isti oblik i veličinu. Sedmogodišnjaci su zadržali sve karakteristike, ali su izgubili kategoriju i ime, više nije kvadrat. Tek sa osam, devet godina dolaze do znanja da je to još uvijek kvadrat. Vjerojatnost da će dijete točno identificirati lik, npr. trokut, je veća kada su njihova opravdanja za odabir zasnovana na atributima koji definiraju oblik. Poteškoće im zadaju trokuti kojima osnovica nije horizontalna ili im točka na vrhu nije na sredini, oni koji su previše mršavi ili nisu dovoljno široki. Djeca

će biti manje sigurna u crtanje likova ukoliko imaju poteškoća s njihovim imenovanjem. Sposobnost djeteta da crta ili kopira čak i jednostavnije oblike proizlazi iz koordinacije vlastitih postupaka, a ne pasivnog opažanja. Razvoj crtanja oblika od prve pa do osme godine prikazano je na slici (Slika 6).



Slika 6: Crtanje geometrijskih oblika

Mala djeca razvijaju ideje, ne samo o oblicima, nego i o kongruenciji, simetriji i transformacijama. Djeca u dobi od četiri do dvanaest mjeseci uočavaju okomitu simetriju, koja je djeci prepoznatljivija nego horizontalna, a još više prepoznatljiva nego dijagonalna. I odrasli brže i preciznije otkrivaju simetrične oblike, a eksplicitni pojmovi simetrije nisu čvrsto utemeljeni prije dvanaeste godine. Prikazane parove likova od kojih su neki kongruentni, ali svi rotirani djeca u vrtiću smatraju različitim i to zbog orijentacije, koja je bitna značajka. Sve do 11. godine djeca imaju poteškoća s rotacijom, tek tada su njihove izvedbe slične odraslima. Djeca u dobi od četiri godine mogu, uz upute i vođenje odraslih, generirati strategije za provjeru kongruencije za neke zadatke. Predškolci određuju kongruenciju pomoću strategije podudaranja rubova, a u prvom razredu uzimaju u obzir više atributa i prostorne odnose. Od djece je zatraženo da nacrtaju stubište određenog oblika, primjerice pravokutnog. Djeca su koristila tri strategije: proizvodnja pogrešnih i nepreciznih oblika, povećanje dimenzija i povećanje samo jedne dimenzije. U dobi od četiri do osam godina djeca napuštaju strategiju crtanja oblika samo da nešto nacrtaju, koja je najčešće vodila do ne baš preciznih oblika. Prebacuju se na jednu od preostalih dviju prethodno spomenutih strategija. Korištenjem strategije povećavanja jedne dimenzije pravokutnika dovodi djecu do razvoja intuicije kako se tako može dobiti i kvadrat.

U skladu s načelom različitih razvojnih smjerova i dokaza djeca posjeduju višestruke vrste geometrijskog znanja, te se znanje djece o geometriji može poboljšati na razne načine. Prvo, njihovi slikoviti prototipovi mogu se značajno razraditi prezentacijom različitih varijanti i atributa, kao što je primjerice računalo. Drugo, prezentiranje određenih zadataka i dijalogom o njima proširuje se i razgrađuje njihovo vizualno znanje. Pretpostavlja se da svaki od ova dva načina unaprijeđuju znanje o geometriji, a mogu se odvijati zajedno ili odvojeno. Istraživanja pokazuju da učenici ograničavaju svoje koncepte na proučene primjere i često ih razmatraju kao uobičajene bitne značajke. Jedan od primjera jest mišljenje da se visina trokuta uvijek nalazi unutar trokuta.

Okrenimo se sada učincima iskustva na određene koncepte oblika. Koncepti vezani uz dvodimenzionalne oblike počinju se javljati u doba i prije polaska u vrtić, a stabiliziraju se oko šeste godine, što znači da su ranija iskustva važna. Djeca u vrtićima imaju

veliko znanje o oblicima i podudaranju oblika i prije podučavanja. Greška koja se često javlja jest da učitelji provjeravaju prethodno znanje, ali ne dodaju novo znanje i nove sadržaje. Takvo zanemarivanje se odražava na učenička postignuća. U ranom djetinjstvu uvode se oblici u četiri osnovne kategorije: krug, kvadrat, trokut i pravokutnik. Do pete godine djeca misle da kvadrat nije pravokutnik. Ako pokušamo naučiti malu djecu da su kvadrati pravokutnici, moguće je da dođe do zbunjenosti, no ako podučavamo o kvadratima i pravokutnicima kao dvjema zasebnim skupinama blokirat ćemo dječji prijelaz na fleksibilnije kategorijsko razmišljanje. Vjerojatno je najbolji pristup predstavljenje brojnih primjera kvadrata i pravokutnika različitih veličina i orijentacija, a odgojitelji ih mogu potaknuti da opišu zašto lik pripada ili ne pripada nekoj kategoriji oblika. Malo je poznato o podučavanju trodimenzionalnih oblika, međutim, ključno je da učitelj potakne promatranje takvih oblika.

Dječje slike i konstrukcije mogu se koristiti kao modeli u uvođenju simetrije, uključujući dvodimenzionalne kreacije bojanja, crtanja i kolaža, te trodimenzionalne kreacije od gline i blokova. Korištenje fizičkih objekata korisnije je od obične apstraktne verbalne prezentacije iz udžbenika. Slike također mogu biti vrlo važne, one mogu djeci dati neposredno, intuitivno shvaćanje određenih geometrijskih ideja. Međutim, slike moraju biti dovoljno raznovrsne da djeci ne stvaraju ograničene ideje.

Pojam kuta se često ne nauči ili ne podučava pravilno. Mnogo male djece, pa i oni stariji, smatraju da kut mora imati jedan horizontalni krak, da je pravi kut onaj koji pokazuje ravno, dva prava kuta koji nemaju jednaku orijentaciju nisu jednaki po veličini. Djeca kut opisuju kao oblik, stranu lika, nagnutu liniju, spoj dviju linija, ne smatraju da su kutovi istaknuta svojstva likova. Za prvi primjer prilikom upoznavanja djece sa kutovima mogu poslužiti čoškovi stola i škare, a zatim savijanje papira i na kraju nešto sa okretanjem, primjerice vrata i kvaka na vratima.

Zaključujemo da postoje četiri puta koja su povezana, a mogu se pomalo i nezavisno razvijati. Prva je usporedba koja uključuje podudaranje po različitim kriterijima u ranim razinama i određivanje kongruencije. Druga je razvrstavanje, uključuje prepoznavanje, identificiranje, analizu i klasifikaciju oblika. Treća uključuje razlikovanje, imenovanje, opisivanje i kvantificiranje komponenti oblika, kao što su stranice i kutovi. Posljednja uključuje izgradnju i crtanje oblika. Pogledajmo sada smjernice za učenje svih tih putova (Tablica 7).

Godine	Razvojni napredak
0 – 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- uspoređuju objekte iz stvarnog života</li> <li>- prepoznaju da su poznati oblici, kao što su krug, kvadrat, trokut jednaki ukoliko imaju likove jednakih veličina</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>- mogu prepoznati i imenovati uobičajene krugove, kvadrate i nešto slabije trokute</li> <li>- mogu fizički rotirati oblik u uobičajen oblik kakav im je mentalni prototip</li> <li>- neka djeca točno imenuju pravkutnik, za neke drugačije oblike koji imaju više sličnosti nego razlika tvrde da su isti i ako nisu</li> </ul>
3 – 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prepoznaju jednake oblike jednakih veličina i orijentacija, zatim i različitih veličina i orijentacija</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prepoznaju manje uobičajene trokute i kvadrate, pravokutnike, ali ne rombove, tvrde da su dva oblika jednaka usporedbom samo jednog para stranica</li> <li>- stvaraju oblike pomoću fizičkih predmeta koji predstavljaju dio lika, ali ne uspijevaju u potpunosti, traže razlike u svojstvima oblika, ali ispituju samo neka svojstva</li> </ul>
4 – 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prepoznaju pravokutnike različitih veličina i orijentacija</li> <li>- traže razlike u svojstvima, ali je moguće zanemarivanje prostornih odnosa, prepoznaju kutove kao posebne geometrijske objekte, bar u nekom ograničenom kontekstu kao što je davanje odgovora pokazujući da trokut ima tri kuta</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prepoznaju najpoznatije oblike i likove kao što su šesterokut, romb i trapez</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prepoznaju pravi kut i razlikuju paralelogram bez pravog kuta od pravokutnika</li> </ul>
7	<ul style="list-style-type: none"> <li>- identificiraju likove po njihovim komponentama, primjerice za tupokutan trokut znaju da je trokut jer ima tri kuta i tri stranice, iako izgleda mršavo</li> <li>- određuju jednakosti usporedbom svih svojstava i prostornih odnosa, zatim i premještanjem jednog lika na drugi da se potvrdi jednakost</li> <li>- uspješno sastavljaju likove od danih materijala</li> </ul>
8+	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prikazuju kutove kao dvije linije uključujući referentnu liniju i barem implicitnu veličinu kuta kao rotaciju između tih linija</li> <li>- razvrstavaju oblike u klase po svojstvima</li> <li>- mogu vidjeti promjene stanja ili oblika, zadržavajući svojstva lika, klasifikacija na temelju veličine kutova i kombinacija različitih veličina kutova</li> </ul>

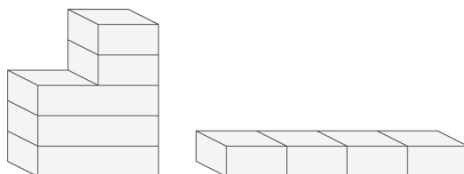
Tablica 7: Smjernice za učenje o oblicima

### 3.3 Sastav i rastav oblika

Sposobnost opisivanja, upotrebe i vizualizacije rezultata sastavljanja i rastavljanja geometrijskih objekata je značajna, jer su koncepti i radnje u kontekstu stvaranja uzoraka, mjerenja i računanja utvrđene osnove za matematičko razumijevanje i analizu. Ovakvo stvaranje se podudara i podržava sposobnost djece da spajaju i rastavljaju brojeve. U

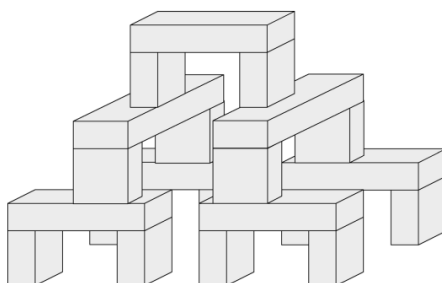
nastavku ćemo razmatrati tri povezane teme. Prvo ćemo raspravljati o sastavljanju trodimenzionalnih oblika u ograničenoj gradnji pomoću blokova. Zatim o sastavljanju i rastavljanju dvodimenzionalnih likova i na kraju ćemo nešto reći o figurama koje se nalaze unutar drugih figura, odnosno o složenijim strukturama.

Izgradnja pomoću blokova pruža pogled na početne sposobnosti za slaganje trodimenzionalnih oblika. U početku djeca grade konstrukcije od jednostavnih komponenti, a zatim prelaze na složenije konstrukcije. Prve konstrukcije su jednostavne kombinacije parova. Zatim s godinu i pol stvaraju strukture kao što je cesta, odnosno vlak. S dvije godine postavljaju blokove na ili uz prethodno postavljani blok (Slika 7). Tada počinju



Slika 7: Slaganje blokova sa dvije godine

shvaćati da se blokovi neće srušiti ukoliko se postavljaju horizontalno jedan uz drugi i u tome trenutku počinju razmišljati i predviđati izgradnju. Sa četiri godine mogu koristiti višestruke prostorne odnose koji se protežu u više smjerova i s više točaka dodira među komponentama. Djeca u dobi od četiri, pet godina mogu upotrijebiti složenije strategije oko glavnih građevinskih komponenti, a već sa šest godina djeca se u ovakvim zadacima ne razlikuju od odraslih. Samo djeca starija od pet godina mogu stvoriti složeniju hijerarhijsku strukturu poput one prikazane na slici (Slika 8).



Slika 8: Luk na lukovima

Izgradnja prikazane figure (Slika 8) sastoji se od izgradnje jedne, te zatim organiziranja kopija jedinica identičnih polaznoj. Za razvoj je ključno da djeca razumiju i povezuju dijelove i cjelinu, analiziraju dijelove i organiziranjem rekonstruiraju cjelinu.

Izgradnja pomoću blokova povezana je i s prostornim vještinama. Društvo može dati pozitivan utjecaj na sposobnost izgradnje blokova kod male djece. To potkrepljuje istraživanje u kojemu su trogodišnjaci koji su bili u sobama sa četverogodišnjacima postigli brži napredak od onih koji su u sobama bili sami. Djevojčice i dječaci se razlikuju po načinu izgradnje blokove, a i više dječaka se igra blokovima i pristupaju tome kao inženjerskom zadatku. Dječaci izazivaju sami sebe na stvaranje složenijih struktura. Ove su razlike vidljive od ranog djetinstva, pa sve do adolescencije. Spolne razlike se očituju u potpunoj izgradnji pomoću blokova, ali u točno specifikanim zadacima, poput kopiranja blokova, su male ili nikakve. Dakle, djevojčice također mogu razviti dobre prostorne sposobnosti ako su im učitelji spremni pružiti priliku i ohrabriti ih za igru s blokovima. Pogledajmo razvojni napredak i mentalne akcije za izgradnju pomoću

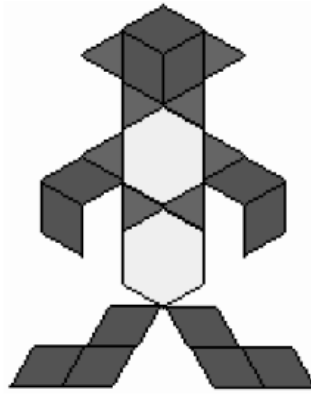
blokova (Tablica 8), a rad s drugim složenijim trodimenzionalnim oblicima odvijat će se u starijoj dobi uz više ovisnosti o iskustvu.

Godine	Razvojni napredak
0 – 1	- rade s pojedinačnim objektima, ne kombiniraju ih za stvaranje većeg objekta
1	- koriste prostorne odnose prilikom korištenja blokova, ali odabir blokova nije baš dobar
1.5	- koriste prostorni odnos 'biti pored' za stvaranje linije blokova
2	- koriste odnose sličnih oblika kako bi gradili horizontalne i vertikalne komponente unutar objekta izgradnje
3 – 4	- koriste višestruke odnose i dodirne točke među komponentama, fleksibilnost integriranja dijelova strukture - koriste kutove, križanja i ograde, iako često dosta nesustavno
4 – 5	- predviđaju sastavljanje oblika, razumiju što nastaje sastavom dva ili više trodimenzionalna oblika - sustavno koriste lukove, kutove, ograde, grade lukove u visinu
5 – 6	- zamjenjuju kompoziciju odgovarajućom cjelinom, grade složene mostove s rampama i stepenicama
6 – 8+	- stvaraju složene kule i druge strukture

Tablica 8: Smjernice za učenje izgradnje pomoću blokova

Zbog nedostatka kompetencija u sastavljanju geometrijskih oblika, djeca koriste sposobnost kombiniranja oblika. U početku to rade metodom pokušaja i pogrešaka, zatim postupno po svojstvima i na kraju sintetiziraju kombinacije oblika u nove oblike. Pretpostavljene su sljedeće razine razmišljanja:

1. Predstavljanje - djeca rukuju pojedinačnim likovima, ali ih ne mogu kombinirati da bi oblikovali veći lik. Ne mogu točno provjeriti jesu li likovi isti, čak i ako su jednostavnijeg oblika.
2. Sastavljanje dijelova - u zadacima stvaranja slike svaki upotrebljeni oblik predstavlja jedinstvenu ulogu ili funkciju. Djeca imaju ograničenu sposobnost korištenja okreta, odnosno ne mogu koristiti predloške da vide oblike iz različitih perspektiva. Dakle, na prve dvije razine gledaju na oblike kao cjeline i vide nekoliko geometrijskih odnosa između oblika ili između dijelova oblika.
3. Stvaranje slike - djeca mogu povezati oblike u novi oblik, pri čemu nekoliko oblika čini cjelinu, kao što je prikazano na slici (Slika 9). Djeca pokušavaju odrediti podudaranost kutove, ali samo usporedbom. Koriste se okretanjem i rotiranjem, te metodom pokušaja i pogrešaka.
4. Slaganje oblika - djeca kombiniraju oblike kako bi stvorili nove oblike. Oblik se odabire pomoću kutova i duljina stranica. Slikovni prikazi i sustavnost se razvijaju u ovoj i na sljedećim razinama.
5. Zamjensko stvaranje - djeca namjerno formiraju oblike pomoću manjih cjelina, prepoznaju i koriste zamjenske odnose između tih oblika.
6. Iteracije kompozicije oblika - djeca namjerno konstruiraju i djeluju na sastavne dijelove.



Slika 9: Stvaranje likova pomoću raznih oblika

7. Sastavljanje oblika pomoću određenih dijelova - djeca grade i primjenjuju, odnosno ponavljaju i na drugi način upravljaju s dijelovima dijelova cjeline.

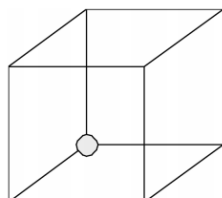
Djeca u početku prostorno izoliraju dijelove, zatim ih spajaju i na kraju kombiniraju i integriraju, te stvaraju složenije jedinice unutar različitih struktura. Budući da su razvojni redovi za sastavljanje i rastavljanje dvodimenzionalnih geometrijskih oblika usko povezani, prikazujemo ih zajedno (Tablica 9).

Godine	Razvojni napredak
0 – 3	- rukuju s pojedinačnim oblicima, ali nisu u stanju kombinirati ih za izgradnju većeg oblika - rastav samo metodom pokušaja i pogrešaka
4	- izrađuju slike u kojima svaki oblik ima jedinstvenu ulogu
5	- postavljaju nekoliko oblika zajedno kako bi napravili dio slike, biraju likove koristeći opće oblike ili dužine stranice lika - rastavljaju u manje i jednostavnije oblike, sastavljanje oblika s naslućivanjem gdje što treba postaviti - koriste kutove kao i dužine strana pri odabiru, namjerno rotiranje i okretanje za odabir i zamjenu mjesta oblika
6	- sastavljaju nove likove iz manjih i koriste metodu pokušaja i pogrešaka za zamjenu skupine likova drugim likovima kako bi stvorili nove oblike na različite načine - rastavljaju oblike pomoću slika koje predloži zadatak i okruženje
7	- namjerno konstruiraju i dupliciraju oblike sagrađene od manjih oblika, razumiju da je svaki od njih mali oblik i jedan veliki - fleksibilno rastavljaju oblike pomoću samostalno generiranih slika
8	- izrađuju i primjenjuju oblike sagrađene od manjih oblika - fleksibilno rastavljaju oblike pomoću planiranih rastava oblika koji su i sami rastavi drugih oblika

Tablica 9: Smjernice za učenje sastavljanja i rastavljanja oblika

Tijekom godina djeca uče kako odvojiti strukture unutar figura. Između šeste i osme godine djeca razvijaju sposobnost razdvajanja linija figure i sastavljanje u nove oblike, povezivanje izoliranih perceptivnih jedinica pomoću imaginarnih linija za prepoznavanje složenijih struktura nepotpunih likova. Primjer prelaženja s jedne strukture na drugu je Neckerova kocka.

**Primjer 5** *Iluzije dvosmislenosti su slike koje se mogu interpretirati na dva ili više načina i to tako da je u jednom trenutku moguća samo jedna interpretacija. Jedan od najpoznatijih primjera dvosmislene interpretacije dvodimenzionalne slike geometrijskog tijela je Neckerova kocka. Švicarski grafičar Louis Albert Necker (1786.–1861.) objavio je 1832. godine crtež prozirne kocke, što znači da su paralelni bridovi kocke nacrtani kao paralelne linije na slici. Tamo gdje se sijeku slike bridova, nije jasno koji je brid ispred, a koji iza i upravo to sliku čini dvosmislenom. Interpretacija ovisi o tome koju plohu kocke fokusiramo i stavljamo u prednji plan.*



Slika 10: Neckerova kocka

Rješenje za ugrađene figure zahtjeva prelazak iz primarnih u sekundarne strukture koji uključuju segmente posuđene od jedne ili više primarnih struktura. Djeca predškolske dobi na taj način mogu pronaći lik identičan danoj primarnoj strukturi, a u drugom slučaju će pogrešno označiti primarnu strukturu kao rješenje. U pronalaženju sekundarne strukture djeca mlađa od šest godina identificiraju primarnu. Djeca rastu uz fleksibilnosti perceptivnih organizacija koje mogu stvoriti. One na kraju integriraju dijelove i koriste zamišljene očekivane komponente. Za određene razine složenosti, niti odrasli ljudi ne mogu prepoznati sekundarne strukture na složenijoj razini, već ih moraju složiti dio po dio.

Za uspješno rješavanje geometrijskih problema nužna je sposobnost i predispozicija za prepoznavanje ugrađenih figura na različite načine i da bi se konstruirali fizički i mentalni nastavci i dopune geometrijskih oblika. Primarni zadaci koriste izravnu primjenu vještine pronalaženja likova u složenijim strukturama. Pedagoški, bilo bi mudro podučiti djecu da ugrađuju likove jedan u drugi, prije nego što se od njih traži da uoče ugrađene likove. Ograničen je broj istraživanja vezanih za ovu temu, no svejedno pogledajmo kratke smjernice za učenje o ugrađenim figurama (Tablica 10).

Godine	Razvojni napredak
3	- mogu zapamtiti i prikazati jednu ili manju skupinu nepreklopljenih, izoliranih oblika
4	- pronalaze neke oblike u razmještajima u kojima se slike preklapaju, ali ne i one u kojima su oblici ugrađeni unutar drugih
5 – 6	- prepoznaju oblike ugrađene u druge oblike, kao primjerice koncentrične krugove ili krug u kvadratu - prepoznaje primarne strukture u složenim likovima
7	- prepoznaju ugrađene likove čak i kada se ne podudaraju s primarnim strukturama složenih likova
8	- uspješno prepoznaju sve vrste složenih struktura

Tablica 10: Smjernice za učenje o ugrađenim figurama



## 4 Geometrijsko mjerenje

Riječ geometrija dolazi od grčke riječi, gdje geo znači Zemlja, a metria mjerenje. Geometrijsko mjerenje je važan dio ljudskog života, što samo opravdava naglasak na ovu temu. Također, geometrijsko mjerenje može poslužiti kao poveznica između područja geometrije i broja, pri čemu svako od tih područja pruža konceptualnu podršku jedno drugom.

Dječje razumijevanje mjerenja ima svoje korijene u ranom djetinjstvu i predškolskim godinama, a raste tijekom godina. Djeca mlađa od četiri godine mogu razlikovati duljine štapića, ali samo ako im je istaknuto mjerilo. Sa četiri godine razlikuju duljine neovisno jesu li mjerila istaknuta ili ne. Djeca predškolske dobi znaju da postoje veličine kao što su masa, duljina i težina, iako im ne mogu precizno odrediti količinu niti ih mjeriti. U dobi od dvije do četiri godine djeca koriste tri vrste standarda pri ocjenjivanju je li nešto veliko ili malo. Perceptivno je kada se objekt uspoređuje s drugim fizički prisutnim objektom. Normativno je kada se objekt uspoređuje s mjerilom koje dijete ima pohranjeno u radnoj memoriji. Posljednji standard ocjenjivanja je funkcionalni, a jedan od primjera ovog ocjenjivanja je odgovara li neki šešir danoj lutki. S tri godine djeca znaju da ako se igraju glinom i dobiju još gline da tada imaju više gline, ali ni tada, kao ni u kasnijim godinama do prije polaska u školu, još uvijek ne mogu pouzdano reći gdje ima više gline ako se ona nalazi na dva mjesta. U toj dobi još uvijek nisu integrirali brojanje s mjerenjem. Primjer utjecaja jezika je da bi četverogodišnjaci i petogodišnjaci bolje shvatili pitanje u kojoj čaši ima više pijeska, nego gdje ima više pijeska. Kada bi pijesak bio rasut u kutiju, djeca ne bi znala odgovor, a ne bi ni koristili procjenu koliko je dugo trajalo isipanje pijeska. Do četvrte ili pete godine većina djece nauči prevladati osjetilne znakove i napreduje u razmišljanju i mjerenju količine.

### 4.1 Duljina

Duljina je karakteristika objekta dobivena određivanjem koliki je razmak između krajnjih točaka objekta. Često se koristi i pojam udaljenost i to za određivanje koliko je daleko jedna od druge točke u prostoru. Mjerenje duljine ili udaljenosti sastoji se od dva aspekta, identifikacije mjerne jedinice i podjele objekta tom jedinicom stavljajući tu jedinicu iterativno duž cijelog objekta. Podjela i iteracija jedinica složene su mentalne radnje koje su prečesto zanemarene. Često se odmah prelazi na sam fizički čin mjerenja kako bi se istražilo dječje razumijevanje mjerenja kao pokrivanje prostora. U nastavku ćemo govoriti o nekoliko ključnih pojmova koji su temelj mjerenja, a zatim o ranom razvoju tih pojmova. Postoji najmanje osam pojmova vezanih za dječje razumijevanje mjerenja duljine.

1. Razumijevanje svojstava - razumijevanje da duljina obuhvaća fiksnu udaljenost.
2. Očuvanje - uključuje razumijevanje da ako se objekt premješta, njegova duljina se ne mijenja. Kada su dva štapa jedan pored drugog, djeca se slažu da su iste duljine. Ako se štapovi pomaknu, djeca u dobi od četiri godine tvrde da oni nisu iste duljine, s pet godina već oklijevaju, a zatim ispravno odgovaraju. Očuvanje duljine se razvija prilikom učenja kako mjeriti.
3. Tranzitivnost - razumijevanje da ako je duljina objekta A jednaka (veća/ manja) od duljine objekta B, a objekt B je jednak (veći /manji) objektu C, tada je objekt A jednake duljine (veći/manji) kao objekt C.

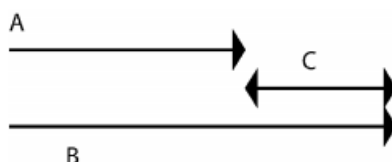
4. Jednaka podjela - mentalna radnja presijecanja predmeta na jednake dijelove. Kada djeca shvate da se jedinice također mogu podijeliti, približavaju se ideji da je duljina fiksna.
5. Jedinica i iteracija jedinica - zahtijeva se sposobnost poimanja duljine manje jedinice kao dio duljine objekta koji se mjeri. Zatim ponovo postavljanje manjih jedinica duž duljine cijelog objekta, oblaganje bez praznina i preklapanja, te računanje tih iteracija.
6. Stvaranje udaljenosti i aditivnost - shvaćanje potrebe za postavljanjem jedinica uzduž duljine objekta, a broj koji se dobije brojanjem iteracija označava prostor prekriven jedinicama do krajnje točke. Aditivnost je pojam koji označava da se duljina može rastaviti i sastaviti na takav način da je ukupna udaljenost između dvije točke ekvivalentna zbroju udaljenosti bilo kojih skupova segmenata na koji je podijeljena duljina.
7. Ishodište - pojam koji govori da se bilo koja točka omjera može koristiti kao početna.
8. Odnos između brojeva i mjerenja - treba razumijeti odnos između jedinica i broja jedinica da bi se razumio postupak mjerenje. Drugi odnos koji djeca moraju naučiti je proporcionalnost mjerenja, uključujući inverzni odnos između veličina jedinice i broja jedinice u danom mjerenju.

Predškolci dobro procjenjuju udaljenosti u jednostavnijim zadacima, a takve kompetencije se pojavljuju već s 12–16 mjeseci. Djeca u dobi od tri do pet godina razumiju načelo jedan plus, koje zapravo govori da ako su dva puta jednaka do određene točke, a samo jedan se nastavlja, onaj koji se nastavlja je duži. Razumiju i da duljine obuhvaćaju fiksne udaljenosti. Djeca prvo razvijaju pojam očuvanja, a zatim tranzitivnost. Dvije ideje mjerenja ovise o očuvanju i tranzitivnosti, a to su inverzni odnosi između veličina jedinica i broja tih jedinica, te potreba za korištenjem jednakih duljina jedinica za mjerenje. Djeca u dobi od dvije do tri godine koriste tranzitivnost u jednostavnijim zadacima. Primjerice, koriste posredno sredstvo pri uspoređivanju dviju duljina, bez da se od njih izričito traži korištenje tranzitivnosti. Značajan napredak odvija se kada djeca krenu u vrtić i nastavlja se sve do drugog razreda. Većina sedmogodišnjaka koristi pojam jedinica kako bi donosili zaključak o relativnoj veličini predmeta. Odnosno, znaju da ako je broj jedinica jednak, a jedinice različite, ukupna duljina je drugačija. Greška koja se često događa jest da djeca prilikom mjerenja, kada je recimo stopalo jedinica, kreću brojati pomicanjem stopala, te im je drugi otisak stopala označen brojem jedan. To se događa zato što ne razmišljaju o mjerenju kao pokrivanju prostora, nego za početnu vrijednost uzimaju prvi obavljeni pokret, a ne količinu prostora koji je već pokriven. Drugi problem je što djeca mlađa od sedam godina ne razumiju da jedinice moraju biti jednake veličine.

Mjerenje duljine u svakodnevnom životu često uključuje procjenu. Nije puno istraživanja provedeno s malom djecom na ovu temu, većina je provedena sa starijom djecom i odraslima. Pretpostavlja se da ljudi određuju verbalni ili pisani brojčani prikaz veličina na tri načina. Na izravan verbalni način, gdje se mentalno podijeli razmatrana veličina i verbalno računaju intervali. Drugi, neizravan način uključuje podjelu veličine, neverbalno brojanje intervala da se dobije mentalna veličina koja predstavlja brojnost, a zatim se pristupa verbalnom prikazu odgovarajuće brojnosti. Treći, također neizravan način, upotrebljava se kada veličina, npr. duljina, generira neverbalnu veličinu, tj.

percipiranu za koju je već naučeno mjerenje, npr. tepih je dužine osam dužina stopala. Ovaj treći način je dostupan samo onima koji imaju iskustva s ponovljenim procjenama s prva dva načina. Postavlja se pitanje kako poticati razvijanje sposobnosti procjene. Jedan od poznatih pristupa je pogađanje i provjera, što je zapravo praksa s povratnim informacijama. Drugi, više obećavajući, je vježba strategija koje potiču učenike da uče standardne jedinice, kao što je centimetar, te mentalne brojevne pravce.

Mala djeca se svakodnevno susreću i raspravljaju o količini kroz igri. Prvo direktno uspoređuju dva predmeta i određuju jednakost ili različitost, primjerice duljinu dvaju predmeta, zatim uče mjeriti, te povezuju broj i duljinu. Djecu treba usmjeravati na mentalnu aktivnost tranzitivnog razmišljanja. Jedan takav primjer je pitanje jesu li vrata dovoljno široka da stol prođe kroz njih. Ruska istraživanja naglašavaju pojavu ranog apstraktnog i algebarskog mišljenja. Učenici prvih razreda mogu rještiti zadatak u kojemu moraju fizički usporediti dužine, te prikazati kako ih izjednačiti. Prikaz gdje djeca stvaraju i objašnjavaju kako se C može dodati u A ili oduzeti od B vidimo na slici (Slika 11).



Slika 11: Ilustracija odnosa dužina

Za kraj pogledajmo smjernice za učenje mjerenja duljine (Tablica 11).

Godine	Razvojni napredak
2	- ne prepoznaju duljinu kao svojstvo, primjerice misle da je ono što je ravno dugo, a ono što nije ravno ne može biti dugo
3	- prepoznaju duljinu kao opisno svojstvo (npr. svi odrasli su visoki), ali ne i kao usporedno svojstvo (npr. neki ljudi su viši od drugih)
4	- fizički poravnavaju dva objekta kako bi usporedili koji je duži ili jesu li jednako dugi - uspoređuju duljine dva objekta korištenjem trećeg - mjere pomoću ravnala, ali bez razumijevanja, primjerice zanemaruju početnu točku
5 – 6	- pravilno koriste jedinice, postavljaju ih jednu do druge, ali ne razumiju potrebu za jednakim jedinicama
7	- mjere ponavljanjem jedinica, iako ispočetka možda ne baš precizno - prepoznaju da će različite jedinice rezultirati različitim mjerenjem - eksplicitno povezuju veličinu i broj jedinica, te koriste dvije jedinice da dobiju cjelinu, a zatim i više jedinica
8	- shvaćaju da je duljina objekta zbroj njegovih dijelova, potrebu za jednakim jedinicama, početne točke - mentalno se kreću uz objekt dijeleći ga i brojeći dijelove - točnost procjene

Tablica 11: Smjernice za učenje mjerenja duljine

## 4.2 Površina, volumen i kutovi

Kao i kod duljine, površina, volumen i kut su povezani s drugim područjima matematike i s dječjim iskustvom povezanim sa stvarnim svijetom. Prvo ćemo spomenuti površinu. Mjerenje površine pretpostavlja nekoliko tvrdnji. Za jednicu se odabire dvodimenzionalno područje, a jednaka područja imaju jednake površine. Područja se ne preklapaju, a površina dvaju spojenih područja jednaka je zbroju površine svakog pojedinog područja. Kao i za broj, osjetljivost na površine prisutna je već u prvoj godini života, međutim aproksimacija broja može biti točnija od odgovarajućeg osjeta za površinu. Kako smo ranije spomenuli pojmove važne za razumijevanje mjerenja duljine, tako ćemo spomenuti i za površinu.

1. Razumijevanje svojstava površine - uključuje davanje kvantitativnog značenja količini, koje je ograničeno na dvodimenzionalne površine. U početku djeca koriste jednu dimenziju za usporedbu površina dvaju područja. Primjerice, petogodišnjaci uspoređuju jednu stranu područja prilikom pokušaja usporedbe njihovih površina. Viša razina razmišljanja o području može imati korijene u postupcima kao što su postavljanje figure jedne na drugu ili rad u tehnici origamija, gdje se ponavlja postupak preklapanja listova na dvije polovice.
2. Jednaka podijela - izgradnja dvodimenzionalnih područja od linearnih jedinica nije trivijalna. Mala djeca koriste brojanje kao osnovu za uspoređivanje, ali ne dijele dvodimenzionalna područja na jednake jedinice.
3. Jedinice i iteracija jedinica - djeca ne mogu precizno dijeliti područja s određenim jedinicama, odabiru jedinice koje izledaju slično danom području, a zbrajaju oblike i ako su oblici različitih površina.
4. Aditivnost - djeca predstavljaju površinu područja kao spoj dvaju područja kako bi odredili površine, što sugerira da se aditivnost razvija s obzirom na odgovarajuća iskustva.
5. Strukturiranje prostora - mentalna operacija konstruiranja organizacije ili oblika za objekt ili skup objekata u prostoru, oblik apstrakcije, proces odabira, usklađivanja i spajanja skupa mentalnih objekata i radnji. Djeca prolaze kroz nekoliko razina prilikom razvoja kompetencija razumijevanja i prostornog oblikovanja kvadrata. One uključuju:
  - neprepoznavanje područja - djeca nisu razvila sposobnost strukturiranja dvodimenzionalnog prostora, primjerice ne znaju popločiti pravokutnik s kvadratima i onda kada imaju kvadrate u rukama.
  - nepotpuno pokrivanje - djeca shvaćaju da je cilj prekriti prostor, no imaju malu ili nikakvu sposobnost organiziranja, koordiniranja ili strukturiranja prostora. Mogu prekriti pravokutnik kvadratima, ali ne mogu to nacrtati. Kod prekrivanja ima preklapanja i praznina, što znači da ne razumiju potrebu za jednakim jedinicama.
  - primitivno prekrivanje – prekrivanje područja crtanjem, bez preklapanja i praznina. To prekrivanje je dosta intuitivno pa retci i stupci nisu uvijek dobro poravnati. Iz tog razloga djeca ne mogu odrediti broj likova kojima je objekt prekriven.

- primitivno prekrivanje i brojanje – preciznije prekrivanje nego na prethodnoj razini, ali i dalje bez strukturiranja redaka i stupaca.
  - djelomična struktura redaka – kod gradnje pravokutnika djeca oblikuju pravokutnik kao skup redaka, razumiju kolinearnost i razumiju da svaki red mora imati jednak broj jedinica.
  - izgradnja redaka i stupaca – djeca koriste mentalnu konstrukciju retka, koja se sastoji od usklađenih sukladnih kvadrata. Primjenjuju koncept kolinearnosti oba retka i stupca, te naglašavaju distribuiranje retka preko elemenata stupca. Djeca koordiniraju iteracije retka sa svakim elementom okomitog stupca. Dakle, djeca primjenjuju koncept da duljina linije određuje broj duljina jedinica koje će stati na tu liniju, ali ipak stvaraju perceptivno polje koje podupire njihovo razmišljanje.
  - poredak izgradnje – na ovoj razini djeca za dimenzije pravokutnika uzimaju broj kvadrata u redovima i stupcima i zato mogu izračunati površine tih dimenzija bez osjetilnih podražaja. Mentalno mogu rastavljati retke, stupce ili pojedinačne kvadrate zadržavajuću strukturu figure. Djeca moraju naučiti kako podijeliti područja. Tada mogu iskoristiti mjerenja poznatih površina kako bi odredili površine područja koja nisu pravokutnog oblika.
6. Očuvanje - djeca imaju poteškoća u shvaćanju da se prilikom dijeljenja određenog područja i premještanja dijelova, kako bi oblikovali drugi oblik, površina ne mijenja. Djeci je dan kvadrat koji se sastoji od dva sukladna pravokutna trokuta, no samo je 43 % djece u prvom razredu zaključilo da su oni sukladni. Tek u 3. razredu postepeno razvijaju sposobnost očuvanja površine.

Slijede smjernice za učenje mjerenja površine (Tablica 12).

Godine	Razvojni napredak
0 – 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>- imaju malo ideja za mjerenje površine</li> <li>- upotrebljavaju strategiju usporedbe stranica prilikom usporedbe površina</li> <li>- prilikom prekrivanja pravokutnika crtaju oblike nalik na krug, ali uz preklapanja i praznine</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- procjenjuju površinu na temelju zbroja duljine i širine (ne kao umnožak)</li> <li>- uspoređuju površine samo ako ih se to traži, pokrivaju pravokutna područja fizičkim objektima, ali ih ne mogu organizirati, koordinirati i strukturirati bez osjetilne podrške</li> <li>- kod crtanja i popunjavanja pravokutnika, crtaju oblike približno pravokutnog oblika, gdje im ostaju praznine i ne bude dobro poravnato</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>- crtanjem potpuno prekrivaju oblik, ali uz prelaženje ruba</li> <li>- pokušavaju brojati dijelove područja uz česte pogreške, računajući dva puta istu jedinicu ili preskačući jedinice</li> <li>- točno broje jednu po jednu jednicu i to u svakom retku, prateći retke prstima</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>- broje retke kao retke, ne kao jedinice unutar strukture, naprave nekoliko redaka, a zatim se vrata na izradu pojedinačnih kvadrata koje poravnavaju u stupce</li> </ul>
7	<ul style="list-style-type: none"> <li>- crtaju retke paralelnim crtama, ne moraju dovršiti crtež da bi odredili površinu brojanjem ili računanjem</li> <li>- prepoznaju da područja koja ne izgledaju jednako mogu imati jednake površine</li> </ul>
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>- crteži im više nisu potrebni, a u više konteksta mogu izračunati površinu koristeći duljinu i širinu, te mogu objasniti kako množenje stvara površinu područja</li> </ul>

Tablica 12: Smjernice za učenje mjerenja površine

Volumen uvodi treću dimenziju i tako predstavlja značajan izazov u prostornoj izgradnji za malu djecu, ali i komplicira prirodu mjerenja materijala. Za djecu mjerenje znači odgovor na pitanje kako se krute tvari upakiraju i kako tekućine ispune prostor. Za djecu od prvog do četvrtog razreda su kompetencije o mjerenju volumenu tekućina bile ekvivalentne kompetencijama razvijenim u zadacima s mjerenjem duljine. Razlog tome je što su djeca tretirale visinu materijala u posudi kao duljinu jedinice iteracije. Međutim, pakiranje u smislu volumena je puno teže od mjerenja površine i duljine. Većina učenika u takvim zadacima ne zna kako procijeniti ili mjeriti volumen. Postoji sugestija da je razumijevanje površine preduvjet za računanje volumena krutih tijela. Od djece se zahtjeva da grade još jedan sloj razine na svojim sposobnostima u prostornoj izgradnji, jer jedinice moraju biti definirane, usklađene i integrirane u tri dimenzije. Djeca razumiju da veličina objekta utječe na volumen tog objekta. Razumiju i da će u manju posudu stati manje objekata nego u veću. Razvija se zamisao da se volumen računa kao produkt površine baze i visine. Primjerice, jedan učenik trećeg razreda koristio je papir kvadratnog oblika sa mrežom kako bi procjenio površinu baze valjka. Zatim je pronašao volumen množenjem ove procjene visinom valjka, kako bi provukao bazu duž cijele visine. Jako je malo istraživanja koja uključuju malu djecu po ovom

pitanju, svejedno pogledajmo kratke smjernice za učenje mjerenja volumena (Tablica 13).

Godine	Razvojni napredak
0 – 3	- prepoznaju kapacitet volumena kao svojstvo, primjerice ova kutija sadrži mnogo kockica
4	- mogu usporediti dva spremnika (presipati sadržaj iz jednog spremnika u drugi da vide koji sadrži više)
5	- uspoređuju dva spremnika koristeći treći, odnosno koristeći tranzitivnost
6	- djelomično razumiju volumen kocke popunjavanjem prostora, primjerice pakiranje kockica u kutiju
7	- koriste jednostavnije jedinice za punjenje spremnika uz točno brojanje - promatraju kocke kao ispunjen prostor, uz strategije prebrojavanja
8	- znaju izračunati koliko je kocaka u jednom redu (pomnože redak puta stupac) i zatim pomnože taj broj s brojem svih slojeva kako bi dobili ukupan broj
9	- konstrukcije im nisu potrebne, znaju izračunati volumen kvadra uz objašnjenje kako se množenjem širine, visine i duljine dobije volumen

Tablica 13: Smjernice za učenje mjerenja volumena

Kao što je i spomenuto ranije mjerenje duljine, površine i volumena ima mnogo zajedničkih kognitivnih značajki. Jedna od njih su opća načela mjerenja, odnosno jedinica iteracije. Zajedničke su i početne pogreške kao što su iteracija jedinica, preklapanje, ostavljanje praznina, preskakanje jedinica i dvostruko brojanje iste jedinice. Mjerenje površine i volumena dovodi do multiplikativnih odnosa koji uključuju duljine stranica. Nastavni planovi i programi pretpostavljaju da djeca moraju prvo naučiti duljinu, zatim površinu i onda volumen. Međutim, istraživanja ne upućuju na postojanje stroge preduvjetne veze. Ipak, mjerenje duljine je zaista dobar temelj za razumijevanje površine, a površina za volumen. Osim za razvoj prostorne izgradnje u jednoj, pa dvije i zatim tri dimenzije, nema razloga za strogi razvojni slijed. U prilog prethodnoj tvrdnji ide korištenje jedinice za mjerenje volumena tekućine, koje se može razviti paralelno i samostalno kada i mjerenje duljine.

Za kraj ćemo ukratko ponoviti i opisati smjernice za učenje o kutovima, iako smo već i ranije spomenuli kutove. Mala djeca smatraju kut zasebnim oblikom, a ne svojstvom nekog lika. U prvim razredima osnovne škole djeca smatraju da pojam ravno označava liniju bez zakreta, primjerice dužina zakrenuta  $50^\circ$  od okomice nije ravna. Duljina polupravaca utječe na dječje razmatranje o kutovima, zato što oni vjeruju da kut može mjeriti udaljenost između krajnjih točaka. Tijekom prvog i drugog razreda djeca razlikuju kutove po veličini, ali postoji podjela samo na velike i male kutove. Kut i zakretanja su složeni pojmovi koji nisu nužni za učenje male djece. Svejedno pogledajmo smjernice za učenje o kutovima (Tablica 14).

Godine	Razvojni napredak
2 – 3	- intuitivno koriste kutove u svakodnevnim igrama, primjerice kod gradnje blokovima, postavljanje blokova paralelno jedno do drugo i pod pravim kutom
4 – 5	- implicitno koriste okomitost i paralelnost u fizičkim poravnavanjima i izgradnji - utvrđuju jednakost kutova sukladnih trokuta fizičkim modelima
6	- prepoznaju paralelnost - podjela kutova na male i velike, iako ponekad dolazi do pogrešaka zbog duljine polupravaca koji zatvaraju kut
7	- prepoznaju prave kutove i jednakost kutova iste veličine, a različite orijentacije
8+	- razumiju kut i veličinu kuta (dva polupravca, zajednički vrh, rotacija jednog polupravca na drugi oko zajedničke točke)

Tablica 14: Smjernice za učenje o zakretanju i kutovima



## 5 Ostale domene i procesi

O nekim područjima smo već ranije raspravljali, ali ona su veoma važna i zato ćemo u posljednjem dijelu još malo govoriti o njima. Prvo ćemo opisati obrasce, uključujući ponavljajuće obrasce, strukture oblika, algebarsko mišljenje, te analizu podataka. U prethodnim poglavljima spomenuti su različiti obrasci: od numeričkih, koji povezuju brojanje s aritmetikom, sve do prostornih, koji uključuju površinu i volumen.

Stvaranje obrazaca je domena učenja, proces i navika uma. Mala djeca se često bave aktivnostima povezanim s obrascima i prepoznaju obrasce u svakodnevnom okruženju. Apstraktno razumijevanje obrazaca se postupno razvija tijekom godina. Prepoznavanje i analiza obrazaca smatra se važnom sastavnicom intelektualnog razvoja malog djeteta, jer pruža temelj za razvoj algebarskog mišljenja, gdje je algebarski uvid svjesno shvaćanje da jedna stvar može predstavljati drugu. Ovu ideju djeca razvijaju sa četiri godine, primjer su karte koje im mogu predstavljati novi prostor. Ideja se razvija kroz raznolike situacije preko karata i prostornih obrazaca, sve do numeričkih obrazaca. Put do algebre polazi od uočavanja obrazaca. Već u predškolskoj dobi djeca počinju analizirati numeričke obrasce. Primjerice, mogu generalizirati da oduzimanjem broja s nulom dobivaju isti taj broj ili da se oduzimanjem broja od sebe samog dobiva nula. U prvom razredu djeca uče pronalaziti i proširivati numeričke obrasce i time proširuju svoje znanje o obrascima za razvoj algebarskog mišljenja u aritmetici.

Bez učitelja, koji razumiju razvoj algebarskog mišljenja kod male djece, djeca ne razvijaju algebarske navike mišljenja, te nažalost razvijaju ograničene i pogrešne ideje. Primjerice, djeca vjeruju da znak jednakosti predstavlja jednosmjernu operaciju, čiji rezultat se nalazi s desne strane, pa npr. odbacuju izraz  $4 = 9 - 5$ . Naglašavanjem jedinstvenog numeričkog napretka, djeci će biti teže učiti o matematičkoj ideji zavisnosti dviju varijabli. Primjerice, zatraženo je da djeca u dobi od tri do pet godina zamisle da se nalaze u skloništu za pse i da za određeni broj pasa odrede koliko bi očiju vidjeli. Kada učiteljica napiše tablicu kao na slici (Slika 12), djeca koriste konkretan prikaz kako bi brojali, ali nema naznaka da traže obrazac u odnosu tih dviju količina.

<i>Dogs</i>	<i>Eyes</i>
1	2
2	4
3	6
4	8
...	

Slika 12: Prikaz broja pasa i broja očiju

U prvom razredu djeca broje po dva objekta i koriste preskakanja u brojanju kako bi došli do odgovora, za primjerice sedam pasa. No, često ne uočavaju uzorak, jer promatraju samo jedan stupac, a to se događa zato što se uzima previše uzoraka za samo jednu količinu. U drugom razredu djeca koriste multiplikativne odnose, govoreći da treba udvostručiti broj pasa da se dobije broj očiju. U trećem razredu mogu i sami napraviti tablicu kao na slici (Slika 12). Cilj nije da se algebra uči što ranije, već da se razvija algebarsko mišljenje, sposobnost učinkovitog korištenja simbola na smislen način. Algebarsko mišljenje je poseban oblik matematičkog stvaranja koje je povezano sa simbolima. Predškolci mogu prepoznati rečenice s brojevima, prikazane pomoću

simbola, ali im je gotovo nemoguće složiti ih. U prvom razredu uspijevali su i jedno i drugo, ali im je bilo lakše prepoznati, nego proizvesti takve rečenice.

Nije sasvim sigurno je li dječja svijest i upotreba obrazaca uzrokovala učenje matematičkih vještina, ali uzrokuje strukturiranije i organiziranije prikaze, kojima se stječu matematičke kompetencije. Generalizacije temeljnih svojstava brojeva i aritmetike može nastati spontano rješavanjem problema. To se ne događa često u prvom i drugom razredu, pa se zato koriste pomoćne aktivnosti, kao primjerice korištenje točno-netočno rečenica. Učenici zatim uče da znak jednakosti ne znači samo da poslije njega dolazi rezultat, te da može biti više brojeva nakon znaka jednakosti. Potiče se relacijsko razmišljanje koje uključuje proučavanje izraza i jednadžbi u cjelini, a ne kao proces korak po korak. Primjer,  $65 - 42 + 5 + 42$ , se rješava relacijski tako da se uoči da je  $42 - 42 = 0$ , pa je  $65 + 5 = 70$ , a ne rješavanjem standardno s lijeva na desno. Time se potiče razumijevanje asocijativnosti. Iako uvođenje algebre u školu snažno utječe na prikaz koji djeca koriste za rješavanje algebarskih zadataka, neki učenici znaju i sami izumiti vlastitu shemu za prikaz. Kod djece su uočena dva problema vezana uz algebarske zadatke. Prvo je neprecizno obilježavanje nepoznate veličine, a drugo je nedostatak iskustva s problemima s nepoznatim količinama. Uz podučavanje dolazi do velikog napretka. Vezano za prvu poteškoću, važno je naglasiti da djeca razumiju da postoji određena nepoznata veličina, ali ne i da se ona mijenja.

Temelj analize podataka nalazi se u drugim matematičkim područjima, kao što su brojanje i klasifikacija. Da bi djeca razumijela analizu podataka moraju naučiti koncepte očekivanja (prosjeke i očekivanje) i varijaciju (standardna odstupanja). Analiza podataka je zapravo očekivanje unutar varijacija. Djeca tek u kasnim razredima osnovne škole i na početku srednje škole nauče pregledavati raspone u podacima i načine rada. Također, ne postoji ni cjelovito istraživanje o učenju male djece o konceptima vjerojatnosti, te koristi od podučavanja male djece takvim sposobnostima. Postoji nekoliko izvještaja učitelja o klasifikaciji događaja u tri kategorije: mora se dogoditi, može se dogoditi i neće se dogoditi. No, zaista je malo podataka u obrazovanju da bi se o tome raspravljalo. Ključno je pitanje kolika bi zastupljenost podataka u ranom djetinjstvu trebala biti u oblicima kao što su grafikoni. Većina podataka o ovoj temi dolazi od pojedinih slučajeva, koji su obećavajući, ali ograničeni.

Dječje rasuđivanje je složeni kognitivni proces koji ovisi o lokalnom i globalnom znanju i postupcima. Vrlo mala djeca mogu rasuđivati i rješavati probleme ako imaju dovoljno znanja, te ukoliko je zadatak razumljiv i motivirajući, a kontekst poznat. Rasuđivanje razlikuje situacije u kojima su dokazi dovoljni za donošenje zaključaka. Djeca u dobi od četiri, pet godina su iznenađujuće dobra u ovoj izvedbi.

Primjer pogrešnog rasuđivanja je sljedeći. Postoje tri zatvorene kutije i u svakoj se nalaze kuglice jednakih boja. Treba odrediti kutije s crvenim kuglicama. Kada se otvori kutija s plavim kuglicama, djeca znaju da još uvijek ne mogu odrediti u kojoj od preostale dvije kutije su crvene kuglice. Ukoliko otvore još jednu kutiju i tamo se nalaze crvene kuglice, oni tvrde da znaju u kojoj su crvene kuglice, premda ne razumiju da i u posljednjoj kutiji mogu biti crvene kuglice. Ponavljanje zadataka ovog tipa uz povratne informacije pomoglo je petogodišnjacima, u manjoj mjeri i četverogodišnjacima, da uspješno riješe zadatak.

Djeca koja ne stječu kompetencije kod razvrstavanja i stvaranja nizova u vrtiću, ne izvode ih dobro ni u kasnijem školovanju. Djeca svih uzrasta neformalno razvrstavaju objekte sve dok na neki način intuitivno prepoznaju slične objekte ili situacije, a na kraju označavaju ono što odrasli nazivaju klase. Često su funkcionalni odnosi, npr. tanjurić ide uz šalicu, osnove za razvrstavanje. S dvanaest mjeseci djeca stavljaju

zajedno slične predmete. Nakon treće godine djeca mogu pratiti verbalna pravila za razvrstavanje. Djeca koja krenu u školu mogu istovremeno naučiti razvrstavati i brojati, npr. brojeći broj boja u skupini objekata. Shvaćaju da je ukupan broj objekata u podskupinama jednak broju objekata u uniji. Uče svjesno razdvajati koristeći nekoliko svojstava, imenovati i povezati svojstva, shvaćajući da objekt može pripadati u više skupina. To im omogućuje dvodimenzionalno razvrstavanje i formiranje podskupina unutar skupina. U ranom djetinjstvu djeca mogu naučiti i kreirati nizove. S osamnaest mjeseci mogu odgovarati i upotrebljavati pojmove poput veliko i malo, što pokazuje da uzimaju u obzir količinske razlike. S tri godine djeca mogu uspoređivati parove, a sa četiri napraviti manje nizove. S pet godina mogu umetati elemente u nizove. Djeca pokazuju poznavanje nekoliko strategija za kreiranje nizova. Neki odabiru najmanji (najveći) objekt i postavljaju ga na prvo mjesto zatim uzimaju sljedeći koji je najmanji (najveći). Drugi slučajno odabiru prvi objekt, pa ga uspoređuju s ostalima, te ukoliko nisu slični preskaču ih. Djeca se često oslanjaju na perceptivne usporedbe. Dakle, kao i kod brojanja i uspoređivanja brojeva, vidimo napredak u kojem rano oslanjanje na fizičku sličnost olakšava poznavanje dane domene i jezika.

Razvijanje sposobnosti rasuđivanja i rješavanje problema središte je svakog pokušaja matematičkog razvoja kod male djece. Razvoj jezika pokreće rast sposobnosti rasuđivanja. Pomažući predškolcima da nauče svojstva i odnose u matematičkom okruženju, omogućuje im se da rješavaju analogije različitih tipova, a rani analogni procesi mogu pridonijeti ranom matematičkom rasuđivanju i učenju. Objašnjavanjem i opravdavanjem vlastitog rješenja matematičkog problema, djeca na učinkovit način razvijaju matematičko mišljenje. Rješavanje problema može se olakšati poticanjem različitih strategija, rasprava, opravdavanja, te davanjem savjeta. Djeca imaju koristi od modeliranja za širok raspon situacija i problema s konkretnim predmetima, kao i od crtanja, kako bi pokazali svoja razmišljanja i povezivali prikaze. Tako izravno modeliranje, uz razmišljanje i raspravu, izaziva i razvija sheme za operacije oduzimanja, zbrajanja, množenja i dijeljenja, kao i razvoj pozitivnih stavova za rješavanje svih matematičkih problema. Kao što smo i u prethodnim poglavljima spomenuli, petogodišnjaci bi mogli naučiti uspješno rješavati aritmetičke zadatke kada bi im se dozvolilo korištenje vlastitih izmišljenih strategija. Osim strukture problema, na težinu zadatka može utjecati i prikaz kojim je dan problem. Problemi prikazani tekstom, dekorativnim slikama i brojevnim pravcem bili su jednake težine. Djeca su ignorirala slikovni prikaz, čime zaključujemo da dekorativne slike ne olakšavaju rješavanje zadataka. Ne pomaže ni brojevni pravac, jer ih zbunjuje dvostruko mjerilo da je broj i točka i udaljenost. Najbolji prikaz je tekstualan i verbalni bez nepotrebnih dodataka, osim ukoliko je cilj zadatka korištenje brojevnog pravca ili rješavanje zadatka pomoću slika. Konkretni objekti daju važan doprinos za rješavanje zadataka, ali nije zajamčeno da će pomoći.

Podučavanje jednostavnih strategija razvrstavanja i kreiranja nizova mogu biti vrlo značajne, pogotovo za djecu s posebnim potrebama. Djeca nemaju poteškoća s praćenjem pravila, nego s njegovim navođenjem. Davanje naznaka djeci u pogledu rasprave o pravilu, omogućuje djeci da predstave i prate pravilo. Za podučavanje razvrstavanja koriste se mnogi obrazovni pristupi kao što su verbalna poduka, davanje povratnih informacija i modeliranje. Sve metode su bile učinkovite, bar u nekim situacijama. Modeliranje i verbalne upute su korisne za djecu do pet godina, ali za one starije učinkovitije su neke dosljedne strategije. Sugerira se da treba početi s doslovnim prikazima, poput podudaranja, razvrstavanja i stvaranja nizova u jednoj dimenziji. Na taj način pomaže se u izgradnji kompetencija prije prelaženja u dvije dimenzije. Uočeno je da djeca koja su podučavana razvrstavanju i kreiranju nizova kasnije po-

kazuju bolje rezultate u zadacima s mjerenjem, ostalim matematičkim vještinama i konceptima, u odnosu na djecu koja nisu stvorila kompetencije razvrstavanja. Klase, nizovi i brojevi su međusobno zavisni pojmovi. U zadacima s brojevima djeca dobivaju implicitno znanje o razvrstavanju i kreiranju nizova. Istraživanja sugeriraju da niti jedna matematička domena ne bi trebala biti izolirana, pogotovo kod podučavanja male djece.

## Literatura

- [1] D. H. CLEMENTS, J. SARAMA *Early Childhood Mathematics Education Research - Learning Trajectories for Young Children*, Routledge, New York, 2009.
- [2] *TIMSS*  
URL: <https://www.ncvvo.hr/medunarodna-istrazivanja/timss/>

## Sažetak

Djeca jako rano stječu neformalno znanje matematike, koje je iznenađujuće široko, složeno i raznoliko. Djecu zanimaju razmišljanja u različitim kontekstima, pa tako i matematičko mišljenje, posebno ako imaju dovoljno znanja o materijalima koje koriste, zadatak im je zanimljiv, motivira ih za daljnji rad, te im je kontekst zadatka poznat. Istraživanja pokazuju da svako dijete kreće u školu s određenim predznanjem. Također, podupiru načela hijerarhijskog interakcionizma gdje se specifične domene, kao što su brojanje, uspoređivanje i aritmetika, grade na početnim urođenim kompetencijama. Mala djeca posjeduju i određene urođene prostorne kompetencije, ali one ne određuju razvoj, on se razvija interakcijom društvenog iskustva i sazrijevanjem. Važno je naglasiti da vizualno mišljenje nije isto što i prostorno. Prostorno se odnosi na sve sposobnosti koje koristimo u stvaranju puta u prostoru i na matematičke kompetencije, dok je vizualno mišljenje ograničeno na površinske ideje. Povezivanjem dva najvažnija područja matematike, brojeva i geometrije, dolazimo do geometrijskog mjerenja. Mjerenje je jedna od glavnih primjena matematike u svakodnevnom životu. Djeca uče o veličinama različitih svojstava, a samo s vremenom oni čine skup srodnih pojmova. Zaključujemo da se velik broj matematičkih pojmova i vještina nauči u predškolskim godinama, a odgojiteljima i učiteljima uvelike pomažu smjernice za učenje određenih domena, kako bi razumijeli na koji način djeca razmišljaju i koje su njihove okvirne mogućnosti.

**Ključne riječi:** hijerarhijski interakcionizam, broj, direktno prebrojavanje, uspoređivanje, aritmetika, geometrija, oblici, geometrijsko mjerenje, površina, duljina, volumen, algebarsko mišljenje

## Title and summary

### Mathematics in early childhood

Children get early informal knowledge of mathematics, which is surprisingly broad, complex and varied. Children are interested on thinking in different contexts, including mathematical thinking, especially if they have enough knowledge of the materials they use, the task is interesting to them, motivates them for further work and their context is well-known. Research suggests that every child goes to school with some prior knowledge. They also support the principles of hierarchical interactionism where specific domains, such as counting, comparing and arithmetic, are built on initial inherent competences. Young children also possess certain innate skills, but they do not determine the development, it develops through the interaction of social experience and maturity. It is important to emphasize that visual thinking is not the same as spatial thinking. Spatially refers to all abilities we use to create space-time and refers to mathematical competences, while visual thinking is limited to hometown ideas. Connecting two most important domain, mathematics numerical and geometric knowledge, we come to geometric measurements. Measurement is one of the main applications of mathematics in the everyday life. Children learn about sizes of different qualities, and only over time they make a set of related terms. We conclude that a large number of mathematical concepts and skills are taught in preschool years, and educators and teachers largely help learning trajectories of specific domains to understand how children think about their framework options.

**Key words:** hierarchic interactionism, number, subitizing, comparison, arithmetic, shapes, geometric measurement, area, length, volume, algebraic thinking

## Životopis

Rođena sam 16.12.1993. u Osijeku. Od 2000. do 2004. pohađala sam Osnovnu školu Matija Gubec u Marijancima, zatim od 2004. do 2008. u Magadenovcu, te nakon toga upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi Donji Miholjac. Gimnaziju sam završila položenom Državnom maturom školske godine 2011./2012. te iste godine upisala Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku.