Matematičke igre u nastavi matematike

Rastija, Mirela

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Mirela Rastija

Matematičke igre u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Mirela Rastija

Matematičke igre u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Uobičajeno je mišljenje kako je matematika težak nastavni predmet te da neki učenici "nisu za matematiku". Za usvajanje matematičkih sadržaja propisanih nastavnim programom svi učenici imaju zadovoljavajuće sposobnosti, no razlog zašto učenici pokazuju odbojnost prema matematici je rezultat slabijeg razumijevanja pojmova i loših rezultata na ispitima te maturi. Kako bi se poboljšali rezultati i mišljenja učenika, učenicima treba od početka školovanja predstaviti drugačiji pristup matematici.

> "Budući da doživljaj uspjeha snažno utječe na razvoj ličnosti, sve se češće naglašava princip uspjeha za sve što znači da škola svoj djeci mora omogućiti uspjeh. To znači da ne postoje "dobra" i "loša" djeca nego postoje adekvatni i neadekvatni odgojni postupci, uspješni i neuspješni obrazovni postupci." [1]

Kako bi matematika postala "lakša" uvode se zabavniji, učenicima zanimljiviji sadržaji kao što su kvizovi, zabavni matematički zadaci, matematičke igre, križaljke kojima učitelji mogu ublažiti težinu programa. Kod odabira zadatka učitelj treba pripaziti da težina zadatka bude prilagođena dobi učenika. Cilj zabavnih zadataka i matematičkih igara nisu mukotrpna izračunavanja već suradnja među učenicima, razvijanje vlastitog mišljenja i ideja kako riješiti dani problem.

Problemi s kojima se susreću učenici u nastavi matematike su nerazumijevanje matematičkih pojmova, brzo zaboravljanje naučenog sadržaja, nesposobnost primjene naučenog na situacije iz svakodnevnog života, nepovezanost sadržaja i sl. S druge strane, učitelji imaju problem zbog loše opremljenosti učionica, nedostatka financijskih sredstava u svakodnevnom radu, odabira metoda poučavanja, nemotiviranosti te manjka kreativnosti.

Za razliku od tradicionalne nastave u kojoj je učitelj bio izvor znanja, danas je nastava usmjerena na učenike. Važnu ulogu u nastavi ima i uporaba suvremenih medija koji omogućuju aktivno učenje u školi i kod kuće. Učenici međusobno razmjenjuju informacije, razvijaju kritičko mišljenje, sami rješavaju dane probleme i zaključuju na temelju istraživanja, a učitelj bi trebao biti osposobljen za korištenje novih metoda u nastavi, biti izvor motivacije i organizator, pokazivati svoju kreativnost i razvijati osobnu profesionalnost.

U radu se govori o važnosti matematičkih igara; kako ih provoditi u nastavi te o pojmu matematičke zrelosti.

1 Igra

> "Igra je osnovna i najvažnija aktivnost predškolskog i školskog djeteta. Igra je slobodna, spontana aktivnost koja proizlazi iz unutarnje potrebe djeteta. Značaj igre je u tome što usklađuje i potiče fizički, spoznajni i socijalno-emocionalni razvoj, oslobađa od napetosti, rješava konflikt." [3]

Kroz igru dijete razvija motoriku, emocionalne i kognitivne vještine, razvija socijalne odnose, uči surađivati, razvija govorne vještine i jača samopouzdanje. Igra je važna u odrastanju djeteta jer se ono susreće s novim situacijama i problemima te samo donosi odluke kako ih riješiti.

Duran (1995.) navodi da postoje tri kategorije igre: funkcionalna igra, simbolička igra, igre s pravilima. Funkcionalne igre su vezane za motoričke vještine koje se javljaju od samog početka djetinjstva; dijete otkriva svijet oko sebe, uči hodati, penjati se, bacati loptu, slagati kockice, dok se simboličke igre javljaju kasnije. U početku je značajna igra mašte u kojoj dijete prikazuje određene radnje i predmete na način kako ih ono vidi te igra uloga u kojoj dijete oponaša postupke odraslih. U igrama s pravilima, osim što se uče određena pravila, razvija se i socijalna vještina, dijete izgrađuje odnose s drugima, pokazuje osjećaje, uči pobjeđivati i gubiti.

> "Igre s pravilima dijele se na strateške igre (igre analogne mlinu, šahu) i igre na sreću (analogne igri čovječe ne ljuti se, kartama). Strateške igre se igraju prema odluci sudionika u igri, a igre na sreću prema bacanju kocke, okretanju vrtuljka, izvlačenju kartica i sl. Ima igara u kojima su spojena oba tipa igara s pravilima. Igre s pravilima mogu pripadati i strategiji poučavanja ako se svode na stjecanje nekih elementarnih znanja (npr. iz matematike, kartografske pismenosti, sistematiziranja osnovnih kemijskih pojmova i sl.)." [1]

U igrama s pravilima važnu ulogu ima i socijalna interakcija među igračima koja nije propisana, ali se javlja tijekom igre, igrači pokazuju svoje osjećaje te ponašanje prema drugima. Često u igrama izbije sukob zbog nepoštivanja pravila, varanja, odustajanja usred igre te igra izgubi smisao. U slučaju da dođe do sukoba ili igra krene u pogrešnom smjeru učitelj treba na vrijeme reagirati i uvesti novo pravilo ili u najgorem slučaju prekinuti igru kako bi se nastala šteta svela na minimum te se ostvario konačan cilj.

Nazivi nekih starih igara koje se prenose iz generacije u generaciju su: Graničar, Ćika Mika, Ćorava baba, Krokodile, krokodile smijemo li prijeći rijeku?, Magarac, Pantlike, Cvijeće, Bako, bako koliko je sati?, Zaleđeni kipovi i mnoge druge.

1.1 Igra u nastavi matematike

U nastavi, igra se koristi za pobuđivanje interesa za matematiku, razvijanje logičkog mišljenja i vlastitih ideja. Kroz igru učitelj nastoji pokazati vedriju stranu matematike. Jensen navodi:

> "Kad su uključene emocije, bolje razumijemo učenje, vjerujemo u naučeno i zapamtimo ga. (...) Korištenje igranja uloga i drugih igara za učenje stvara "tjelesno pamćenje" koje nam dopušta da učimo i mišićima i mozgom."

Kada se igra koristi u svrhu učenja atmosfera je opuštenija pa učenici lakše pamte. Igra se koristi kao motivacija za postizanje nekog cilja, usvajaju se nova znanja i vještine u kraćem vremenu te se sadržaj naučen kroz igru ne zaboravlja lako kao kod tradicionalne nastave. Da bi igra bila što uspješnija, učitelj kao organizator mora paziti da odabir igre bude prikladan dobi i zainteresiranosti učenika, da potiče kreativnost, da učenici uče otkrivanjem te dobro isplanirati i moderirati sat kako bi se igrom uspješno postigao cilj. U igri učenicima treba dati mogućnost da sami osmisle novu igru i izraze svoju kreativnost.

Igra se može koristiti kao uvodni motivirajući primjer ili kroz igru učenici mogu sami istražiti novi sadržaj i donositi zaključke. Isto tako, igra se može koristiti za ponavljanje sadržaja ili kao završni dio sata.

Matematičke igre koje se često koriste u nastavi su: bingo, matematički lanaci, puzzle, tangrami, integrami i sl. Prve tri navedene igre mogu se koristiti za uvježbavanje osnovnih računskih operacija u obliku jednostavnih matematičkih zadatka, zadataka s više računskih radnji uključujući i zagrade ili zadataka riječima. Isto tako, zadatak može biti postavljen i za računanje opsega i površine te učenici mogu zaključiti da npr. dva pravokutnika koja imaju jednaku površinu mogu imati različite opsege. Za rješavanje integrama se koriste tablice u kojima se zadani objekti povezuju metodom eliminacije.

Kriteriji i principi koje učitelj treba slijediti pri izboru igara u obrazovne svrhe su:

- odabrati igru prema potrebama učenika,
- odabrati pravo vrijeme za igru,
- organizirati igru na način da svi učenici mogu sudjelovati,
- pažljivo isplanirati aktivnost kako neformalnost i uzbuđenje ne bi poništili svrhu igre,
- pripremiti materijale i dati jasne upute,
- izbjeći situacije gdje učenici sami biraju "suigrače" kako se učenici koji su slabiji u određenim aktivnostima ne bi osjećali izostavljeno ili posramljeno,
- vrednovati igru prema naučenim znanjima, vještinama te vrijednostima usvojenim tijekom aktivnosti.

1.2 Računalne igre u nastavi matematike

U današnje vrijeme većina učenika svakodnevno koristi računala te imaju dostupan internet koji im omogućuje najnovije informacije. Na internetu se svakim danom pojavljuju nove edukativne igre koje su njima zabavne, ali i poučne. Igra ne mora uvijek biti edukativna, ali kroz svaku igru se stječu nova znanja i vještine. Dobre računalne igre potiču učenike na učenje novih sadržaja te stjecanje novih iskustava jer jedino na taj način mogu preći na višu razinu igre. Igrajući računalne igre učenici postaju maštovitiji i kreativniji te mogu brže donositi odluke i u svakodnevnom životu. Učenici razvijaju sposobnost logičkog promišljanja i odlučivanja o tome koja će akcija rezultirati najbolji ishod. Kod računalnih igara prednost je što je povratna informacija odmah dostupna te ih učenici mogu igrati samostalno. Kao i sve igre tako i računalne igre imaju svoje nedostatke; između ostaloga, igre privlače pozornost učenika koji mogu izgubiti pojam o vremenu pa je stoga potrebno igre vremenski ograničiti.

2 Matematička zrelost

> ”Igra predstavlja zonu idućeg razvoja djeteta. U igri je dijete uvijek više od svoje prosječne dobi, za glavu više od samog sebe. Igra u kondenziranom vidu sadrži u sebi kao u fokusu povećala sve tendencije razvoja.” Vigotski [2]

Matematičku zrelost treba razvijati od najranije dobi kao neformalno obrazovanje. Matematički odgoj može povećati znanja i vještine u životu djeteta od neformalnog pa do formalnog obrazovanja.

2.1 Neformalno obrazovanje

Razvoj matematičkih pojmova kod djeteta neformalnim obrazovanjem opisan je pomoću sljedećeg primjera.

Primjer 2.1. *Neformalno obrazovanje kod predškolske djece.*
Dijete se igra s autićima različitih boja od kojih su neki iste boje. Pitanja koja se mogu upitati dijete:

1. *Koliko ima autića?*
2. *Koliko ima autića plave boje, a koliko crvene boje? Kojih je više?*

Prvo će pitanje dijete u dobi od četiri godine odgovoriti ispravno jer počinje razumijevati kardinalnost, iako ne zna što taj pojam znači. Dvogodišnje dijete zna brojati, ali brojevima ne pridružuje značenje, tj. u slučaju da ima 4 autića, dijete će brojati do 4, ali na postavljeno pitanje neće znati odgovor. Drugo pitanje je složenijeg tipa, dijete mora znati odvojiti plave i crvene autiće te ih prebrojati. Dijete u dobi od nekoliko mjeseci ima mogućnost razlikovanja najviše četiri predmeta. Naprimjer, ako mu se pokaže slika od 4 crvena autića, a nakon toga slika od 2 crvena i 2 plava, dijete će duže promatrati drugu sliku jer mu je ona nepoznata. Dijete tek u dobi od četiri godini može shvatiti da je zadnji izgovoreni broj u nizu veći od onog prethodnog te će moći odgovoriti na pitanje kojih autića ima više. Točnije i brže će odgovoriti ako je raspon između dva broja veći.

Do početka školovanja većina djece zna dosta matematičkih pojmova i osnovne matematičke radnje; zbrajanje i oduzimanje brojeva do 10, naučene neformalnim obrazovanjem koje tada treba nadograditi kroz formalno obrazovanje.

2.2 Formalno obrazovanje

Matematički zrele osobe imaju matematička znanja, vještine te iskustvo u rješavanju različitih problema i zadataka iz svakodnevnog života. Te osobe znaju kada i kako potražiti pomoć od drugih ljudi, knjiga ili alata kao što su kalkulatori i računala. Osim što matematika ima važnu ulogu u znanosti, tehnologiji, inženjerstvu, ona je vrlo značajna i u neznanstvenim disciplinama. Matematički zrele osobe pronalaze više načina za rješavanje problema te razmišljaju o novim idejama koje bi mogli istražiti što dovodi do povećanja razine matematičke zrelosti.

Kod rješavanja matematičkih zadataka bitno je da učitelj procijeni jesu li učenici razumjeli bit zadatka te imaju li sposobnost opravdati svoje zaključke koji ih dovode do rješenja. Ako učenik na jednostavnijem zadatku može objasniti kako je došao do rješenja, veća je vjerojatnost za uspjeh u složenijim, manje poznatim zadacima. Matematičko razumijevanje i vještina su jednako važni, a učenik do njih dolazi rješavanjem različitih tipova zadataka.

Jednostavna pitanja koja se mogu postaviti u vezi igraće kocke su:

- Koliko ima točkica na suprotnoj strani igraće kocke?,
- Kolika je vjerojatnost da će se okrenuti strana igraće kocke s dvije točkice?.

Ako se izreže 6 komada papira i na njih se napišu brojevi od 1 do 6, zatim se ti papiri stave u kutiju i izmiješaju te se slučajno izabere jedan komad papira, može se postaviti sljedeće pitanje: "Je li vjerojatnost slučajnog odabira jednog komada papira i bacanja igraće kocke jednaka?". Ovo pitanje pokazuje sposobnost da učenik uvidi sličnost između različitih objekata što dovodi do povećanja matematičke zrelosti. Također, znak povećanja matematičke zrelosti je i postavljanje pitanja poput:

- Zašto je zbroj brojeva na dvije suprotne strane igraće kocke 7?,
- Ako na jednoj strani ima više točkica, je li vjerojatnije da će se ta strana okrenuti?.

Zadaci s riječima i matematičke igre vezane za svakodnevne probleme mogu pomoći u stvaranju vještina u razvoju i korištenju različitih strategija što je važan aspekt povećanja matematičke zrelosti.

3 Primjeri igara

Primjeri igara koje su navedene u ovom poglavlju preuzete su iz knjige Using Math Games and Word Problems to Increase the Math Maturity of K–8 Students autora Moursund i Albrecht. Pridružene tablice uz navedene igre su također preuzete iz knjige uz manje izmjene. Igre se mogu primijeniti na različita područja matematike te su korisne za razvoj logičkog mišljenja, a pristupačna pomagala koja se koriste u igrama kao što su igraće kocke i domine dostupna su i kod kuće.

3.1 Igre dodjeljivanja vrijednosti

U igri dodjeljivanja vrijednosti jednoznamenkasti broj zauzima mjesto jedinica, dvoznamenkasti mjesta desetica i jedinica, troznamenkasti mjesta stotica, desetica i jedinica.

Pravila ove igre su da igrači bacaju igraće kocke i strateški dodjele odgovarajuća mjesta dobivenom broju. Igra se može igrati s dvije, tri ili više znamenki, kao i različitim igraćim kockama. Za uvođenje pravila igre najbolje je početi s dvoznamenkastim brojem koristeći igraću kocku. Igraća kocka se baca dva puta, a igrač odlučuje nakon prvog bacanja hoće li dobivenom broju dodijeliti vrijednost jedinica ili desetica, te nakon drugog bacanja dodjeljuje dobivenu vrijednost preostalom mjestu. Moguće igre su "Tko će dobiti veći broj?" ili "Tko će dobiti manji broj?". Na igračima je da procijene trebaju li prvi dobiveni broj staviti na mjesto jedinica ili desetica kako bi pobijedili.

Prva varijanta "Tko će dobiti veći broj?" je bacanje igraće kocke za pokušaj dobivanja što većeg dvoznamenkastog broja nakon dva bacanja. Ako se igra s igraćom kockom, najveća moguća vrijednost je 66, a najmanja 11. Igrači bacaju kocke naizmjenično.

Primjer 3.1. *Tko će dobiti veći broj?*

Igrač 1	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 5.	5	
Drugo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 3.	5	3

Igrač 2	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 4.		4
Drugo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 2.	2	4

Igrač 1 prvi baca igraću kocku i dodjeljuje mjesto dobivenom broju, dok drugi igrač ima potencijalnu prednost jer na temelju bacanja i odabira prvog igrača može odlučiti o mjestu svog prvog bacanja. Igrač 2 je dobiveni broj 4 u prvom bacanju stavio na mjestu jedinica jer je Igrač 1 dobio broj 5 i stavio ga na mjesto desetica čime je visoko postavio ljestvicu, što bi značilo da Igrač 2 mora na mjestu desetica imati minimalno broj 5 kako bi pobijedio. Drugo bacanje je odlučujuće, Igrač 1 je pobijedio.

Druga varijanta igre je "Tko će dobiti manji broj?", princip je isti, a cilj je dobiti što manji dvoznamenkasti broj na kraju bacanja.

Primjer 3.2. *Tko će dobiti manji broj?*

Igrač 1	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 5.		5
Drugo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 3.	3	5

Igrač 2	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 4.		4
Drugo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 2.	2	4

Koristeći iste okrenute brojeve kao u igri "Tko će dobiti veći broj?", u igri "Tko će dobiti manji broj?" Igrač 2 je pobijedio.

Igra se može otežati dodavanjem jednog mjesta više, tj. dobivanjem najvećeg odnosno najmanjeg troznamenkastog broja koristeći igraću kocku. Najveća moguća dobivena vrijednost je 666, a najmanja 111. Igrači igraju igru "Tko će dobiti veći broj?".

Primjer 3.3. *Tko će dobiti veći troznamenkasti broj?*

Igrač 1	**stotice**	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 5.	5		
Drugo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 2.	5		2
Treće bacanje; Igrač 1 je dobio broj 6.	5	6	2

Igrač 2	**stotice**	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 4.			4
Drugo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 3.		3	4
Treće bacanje; Igrač 2 je dobio broj 2.	2	3	4

Igrač 1 je u prvom bacanju dobio broj 5 te ga stavio na mjesto stotica, a Igrač 2 je u prvom bacanju dobio broj 4 te ga stavio na mjesto jedinica jer da je stavio na mjesto stotica, igra bi bila završena i Igrač 1 bi odmah pobijedio. U drugom bacanju Igrač 1 je okrenuo broj 2 i dodijelio mu mjesto jedinica, a Igrač 2 je broju 3 dodijelio mjesto desetica. Treće bacanje je bilo odlučujuće i Igrač 1 je pobijedio.
Da bi Igrač 2 u ovoj igri sigurno pobijedio u trećem bacanju je trebao okrenuti broj 6 jer Igrač 1 na mjestu stotica ima manji broj. Isto tako, Igrač 2 je mogao okrenuti i broj 5, ali tada bi Igrač 1 trebao okrenuti brojeve 1, 2 ili 3 kako bi drugi igrač pobijedio.

Nakon što je Igrač 1 pobijedio u dobivanju najvećeg dvoznamenkastog i najvećeg troznamenkastog broja, postavlja se pitanje: "Pobjeđuje li uvijek igrač koji igra prvi iako drugi igrač ima prednost te može odlučiti na koje mjesto će postaviti okrenuti broj na temelju odluke prvog igrača?". Igrači su se zamjenili te je drugu igru Igrač 2 igrao prvi.

Primjer 3.4. *Tko će dobiti veći troznamenkasti broj?*

Igrač 2	**stotice**	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 4.			4
Drugo bacanje; Igrač 2 je dobio broj 3.		3	4
Treće bacanje; Igrač 2 je dobio broj 6.	6	3	4

Igrač 1	**stotice**	**desetice**	**jedinice**
Prvo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 4.	4		
Drugo bacanje; Igrač 1 je dobio broj 3.	4		3
Treće bacanje; Igrač 1 je dobio broj 6.	4	6	3

U trećem bacanju da bi Igrač 2 sigurno pobijedio trebao je okrenuti broj 5 ili 6. Kolika je vjerojatnost da će okrenuti jedan od ta dva broja? Ukoliko okrene broj 4 da bi pobijedio, Igrač 1 bi trebao okrenuti 1, 2 ili 3 jer na mjestu jedinica Igrač 2 ima veći broj. Vjerojatnost da se okrene svaki od brojeva je $\frac{1}{6}$. Mjesta jedinica su popunjena kod oba igrača, Igrač 2 na mjestu jedinica ima veći broj, pa da se izračuna vjerojatnost pobjede Igrača 2 potrebno je ispisati sve povoljne ishode koji bi mu omogućili pobjedu. Broj povoljnih ishoda je 15, a broj svih mogućih ishoda je 36. Vjerojatnost pobjede Igrača 2 je $\frac{15}{36} = 0.42$. Iako je vjerojatnost pobjede Igrača 2 manja nego vjerojatnost pobjede Igrača 1, Igrač 2 je pobijedio.

3.1.1 Primjeri igre u nastavi

1. Učenici su podijeljeni u skupine po 2 ili 3 igrača i svaka skupina može vidjeti samo svoju ili i protivničku tablicu s brojevima. Učitelj ili jedan od učenika baca igraću kocku. Nakon prvog bacanja, učenici dodjeljuju dobiveni broj mjestu desetica ili jedinica, a nakon drugog bacanja zapisuju broj na preostalo mjesto.
   Igra se može igrati s ciljem dobivanja što većeg, odnosno što manjeg broja, što znači više mogućih varijacija ove jednostavne igre. Naprimjer, nakon prvog bacanja, svaki tim igrača može odlučiti igra li igru najviše ili najniže vrijednosti čime bi na kraju igre bilo i više pobjednika.

2. Učenici su podijeljeni u skupine po 3 ili više igrača, u svakoj skupini je jedan učenik zadužen za bacanje igraće kocke. Prije početka igre, učenik koji baca odlučuje je li cilj igre dobiti što veću ili što manju vrijednost ili oni mogu sami odlučiti nakon prvog bacanja. Svaki igrač može vidjeti samo svoju tablicu, a igrači unutar grupe igraju jedan protiv drugog.

3. Učenici igraju u paru i mogu vidjeti protivničku tablicu, bacaju igraće kocke naizmjenično u naprimjer 10 igara. U igri ”Tko će dobiti veći broj?”, pobjednik je igrač s najvećom sumom u svih 10 igara, ili najmanjom ako se igra za manju vrijednost. Svaki igrač mora imati na umu krajnj cilj igre i razviti strategiju u skladu s ciljem.

3.1.2 Razvoj strategije i donošenje odluka

Svakodnevni život zahtijeva donošenje odluka i djelovanje na temelju istih. Donosimo odluke za koje vjerujemo da će imati pozitivan ishod. Rješavanje matematičkog problema podrazumijeva vođenje evidencije i analizu rezultata što je važno u poslovanju i znanosti. Istraživanje ovih jednostavnih primjera igara može dovesti do zahtjevnih matematičkih problema pa je stoga na svakom koraku potrebno donijeti razumnu odluku o idućem potezu. Igre pružaju okruženje u kojem učenici mogu kreirati i iskušati strategije te učiti strategije od drugih. Učitelj treba donositi odluke o tome kako pomoći učenicima u razvijanju najbolje strategije temeljeno na njihovim individualnim potrebama i talentima, i još važnije, naučiti ih strateški razmišljati što dovodi do povećane razine matematičke zrelosti.

Strategija koju koristi Igrač 1 u dobivanju najvećeg dvoznamenkastog broja je ako se u prvom bacanju okrene broj 4, 5 ili 6 dodijelit će mu mjesto desetica, a brojevima 1, 2 ili 3 mjesto jedinica, broj koji se okrene u drugom bacanju će dodijeliti na preostalo mjesto. Koristeći ovu strategiju odigrano je 10 igara za najveći dvoznamenkasti broj. Dobiveni su sljedeći brojevi: 43, 31, 44, 32, 62, 52, 61, 51, 41 i 52. Njihov zbroj iznosi 469, a prosjek po igri $\frac{469}{10} = 46.9$. Igrajući ovu igru 100 puta, zbroj dobivenih brojeva je 4513, a prosjek po igri 45.13.

Strategija koju koristi Igrač 2 sastoji se u tome da ako se u prvom bacanju okrene broj 5 ili 6 dodijelit će mu mjesto desetica, a ako se okrene broj 1, 2, 3 ili 4 dodijelit će mu mjesto jedinica, dok će broj koji se okrene u drugom bacanju ići na preostalo mjesto. Igrajući ovu igru 10 puta dobiveni su brojevi: 13, 66, 62, 51, 42, 34, 63, 33, 14 i 54 čiji je zbroj 432, a prosjek po igri je $\frac{432}{10} = 43.2$. U 100 igri ovom strategijom je dobiven prosjek po igri 44.01. Strategija Igrača 1 se pokazala boljom.

Ima li sreća važnu ulogu u ovoj igri? Bacanje novčića i odluka pismo ili glava daje pola–pola šanse za željeni ishod, dok neke društvene igre osim oslanjanja na sreću podrazumijevaju i strateško planiranje. Pitanja koja se mogu postaviti učenicima za razmišljanje su:

- Razmisli o situacijama gdje je puka sreća doprinijela ishodu neke situacije.
- Razmisli o situacijama gdje je tvoja priprema dominantan faktor u ishodu.
- Razmisli o situacijama gdje je kombinacija sreće i pripreme dovela do ishoda.

3.2 Domino zadaci riječima

Set domino pločica može se koristiti za klasičnu igru domino, ali i za zadavanje problemskih zadataka riječima. Set može sadržavati 28 domino pločica od kojih svaka ima dvije brojevne vrijednosti označene točkicama, jedna od njih može biti i nula, tj. prazna strana pločice.

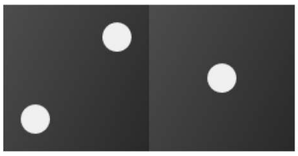
U pravilu, točkice na domino pločicama su posložene na isti način kao na igraćoj kocki. Ako se zanemare prazna polja na pločicama, ostaje 21 domino na kojem se nalazi svaki par brojeva koji se mogu dobiti istovremeno bacanjem dvije igraće kocke.

Primjer 3.5. *Zadaci s domino pločicama za predškolsku djecu.*

- Pronađi domino s duplom trojkom, koliko točkica ima ukupno?
- Pronađi domino koji ima ukupno 5 točkica?
- Pronađi domino koji ima ukupno 13 točkica?
  Maksimalan broj točkica na jednoj domino pločici je 12.

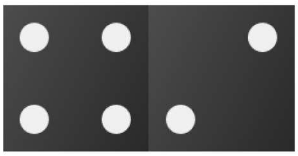
Primjer 3.6. *Domino jednostavni zadaci riječima.*

1. Suma dva broja je 3, a razlika 1. Nađi takav domino.



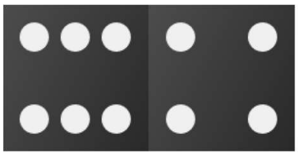
Slika 1: Domino 2/1

2. Suma brojeva je 6, a razlika 2. Nađi takav domino.



Slika 2: Domino 4/2

3. Suma brojeva je 10, a razlika 2. Nađi takav domino.



Slika 3: Domino 6/4

4. Suma brojeva je 8, a razlika 3. Nađi takav domino.
   Rješenje zadanog problema ne postoji na domino pločicama.

Problemi zadani u prethodnom primjeru mogu se izraziti kao sustavi linearnih jednadžbi pomoću kojih učenici koji su se susreli s jednadžbama mogu riješiti problem.

U prva tri zadana problema sustavi linearnih jednadžbi imaju rješenja koja se nalaze na domino pločicama. Sustav prvog problema

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

ima rješenje $x = 2$, $y = 1$, a odgovarajuća domino pločica je 2/1.

Rješenje četvrtog problema je rješenje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

čija su rješenja $x = 5.5$ i $y = 2.5$, no domino pločice sadrže samo cijele brojeve. U problemima s domino pločicama, učenici traže rješenje unutar *zatvorenog prostora rješenja* koji se sastoji od cijelih brojeva, dok rješenja nekih zadataka sadrže i decimalne vrijednosti.

Učenici koji se nisu susreli s jednadžbama prva tri zadana problema mogu riješiti metodom pokušaja i pogrešaka ili metodom uzastopnog približavanja koja se koristi kod većih brojeva. U prvom problemu postoje dva uvjeta koja moraju zadovoljiti traženi brojevi. Učenici će metodom pokušaja i pogrešaka brzo doći do rješenja jer nema puno mogućnosti da dva broja u zbroju daju 3. Problem koji se može pojaviti je da učenici zbroje $1 + 2 = 3$, kada brojeve 1 i 2 uvrste u drugi uvjet, on neće biti zadovoljen te će učenici pokušati naći nove brojeve koji će zadovoljiti drugi uvjet. Četvrti problem učenici mogu riješiti kombinacijom grafičke metode i metode pokušaja i pogrešaka. U ovom problemu, naprimjer nacrtaju 8 krugova te svaki prepolove. Tih 8 krugova dijele u 2 skupa da rješenje zadovolji prvi uvjet koristeći metodu pokušaja i pogrešaka. Nakon što su ispravno podijelili krugove i polukrugove u skupove, u drugom uvjetu trebaju uočiti i prekrižiti zajedničke elemente oba skupa, tj. oduzeti ih. U prvom skupu će ostati 3 kruga, a drugi skup će ostati prazan. U petom razredu, učenici uče decimalne brojeve te će metodom pokušaja i pogrešaka moći riješiti četvrti zadani problem.

U prethodno postavljenim problemima, učenici traže rješenje u prostoru zadanom brojem točkica na domino pločicama, tzv. prostorom rješenja koji se sastoji od 28 domino pločica ili 21 domino pločice, ako izostavimo pločice s praznim poljima. Pažljivo postavljen zadatak jasno implicira prostor rješenja, naprimjer zadatak je naći koliko godina ima dvoje djece, gdje "znamo" da su brojevi veći od nule. Ako pak tražimo da dijete podijeli sedam igračaka na dva jednaka dijela, više ne govorimo o cijelim brojevima.

Osim zbroja i razlike s domino pločicama se mogu zadati i kompleksniji zadaci koji mogu sadržavati i umnožak; ako je zbroj dva broja na domino pločici 9, a umnožak 20, pronađi domino pločicu koja sadrži ta dva broja. Koristeći algebarski pristup, dobivamo jednadžbe $x + y = 9$ i $xy = 20$, no problem je moguće riješiti i promišljanjem o brojevima čiji je umnožak 20. Moguća su tri para brojeva: (10,2), (20,1) i (4,5), što daje jedino moguće domino rješenje 4 i 5, čiji je zbroj traženi broj 9.

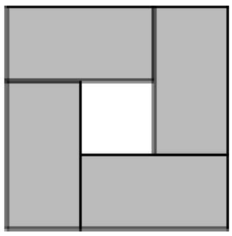
Primjer 3.7. *Pronađi domino čiji je rezultat prost broj kada se podijeli veće i manje polje.*

Učenik koji je upoznat s algebarskim metodama postavlja zbunjujuću jednadžbu: $x/y = prosti\ broj$, dok drugi učenik ima metodu: 2, 3, 5, 7 su prosti brojevi, potrebno je naći domino čiji je količnik jedan od tih prostih brojeva. Očigledno 7 i veći brojevi nisu odgovor jer je najveća vrijednost jednog domino polja 6, no kako dijeljenje može dovesti do rezultata 2, 3 ili 5? Izračun pokazuje: $2/1 = 2$, $4/2 = 2$, $6/3 = 2$, što daje već tri moguća rješenja. Učenik dalje traži rješenje čiji je količnik 3 i/ili 5.

Primjer 3.8. *Pronađi dvije domino pločice čiji je ukupni umnožak* 18*?*

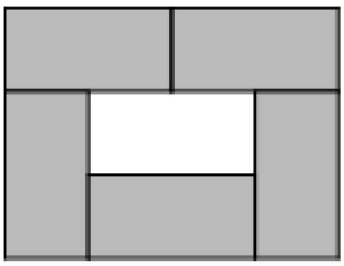
Učenik s razumijevanjem algebarskog oblika zapisa može postaviti jednadžbu $(a+b)(x+y) = 18$, gdje postoje 4 nepoznanice. Drugi učenik upotrebljava pristup koji nije algebarski; učenik postupno dolazi do rješenja $2 \cdot 9 = 18$, gdje je jedna pločica $(1, 1)$, a druga $(6, 3)$. Jedno od rješenja glasi: $(1 + 1)(6 + 3) = 18$. Postoji li još koje rješenje bazirano na $2 \cdot 9 = 18$ ili $3 \cdot 6 = 18$?
Postoji još jedno rješenje bazirano na $2 \cdot 9 = 18$, a to su pločice 1/1 i 4/5. U slučaju da se ne radi samo o prirodnim brojevima možemo uključiti i pločice koje su prazne, tj. pločice koje ne sadrže točkice. Dodatna dva rješenja su pločice 0/2 i 6/3 te 0/2 i 4/5. Ukupno postoji 7 rješenja koja su bazirana na $3 \cdot 6 = 18$, a to su pločice: 0/3 i 0/6, 0/3 i 1/5, 0/3 i 2/4, 0/3 i 3/3, 1/2 i 1/5, 1/2 i 2/4 te 1/2 i 3/3.

Domino pločice se mogu koristiti i za ograđivanje prostora. Duljina duže stranice domino pločice je dvostruko veća od duljine kraće stranice. Koliko domino pločica je potrebno da bi se ogradio prostor veličine pola domino pločice?



Slika 4: Ograđivanje pola domino pločice.

Za ograđivanje prostora veličine pola domino pločice potrebne su 4 domino pločice. Koliko je domino pločica potrebno da bi se ogradila cijela domino pločica?



Slika 5: Ograđivanje jedne domino pločice.

Za ograđivanje prostora veličine jedne domino pločice potrebno je 5 domino pločica.

Domino pločice se mogu ograditi različitim oblicima, ali i s pravokutnom i kvadratnom ogradom, što ovisi o tome kako su domino pločice poredane. Pretpostavimo da je duljina duže stranice domino pločice 2 cm, a duljina kraće dvostruko manja, tj. 1 cm.

- Ograda domino pločica je pravokutnog oblika.

  1. Domino pločice se slažu jedna uz drugu po duljini kraće stranice.

Broj domino pločica koje treba ograditi	**Broj domino pločica potreban za ograđivanje**
1	5
$1\frac{1}{2}$	6
2	7
$2\frac{1}{2}$	8
$\vdots$	$\vdots$

  Ograda za pola domino pločice je kvadratnog oblika. Kada se ograđuju cijele domino pločice, broj domino pločica potreban za ograđivanje je neparan. Za svake pola domino pločice broj potrebnih domino pločica se uveća za 1. Broj domino pločica potreban za ograđivanje n domino pločica je $2(n+1)+1$. Pomoću ove formule može se izračunati i koliko pločica se može ograditi s naprimjer 15 domino pločica. Iz $2(n+1)+1=15$ slijedi $n=6$.

  2. Domino pločice se slažu jedna uz drugu po duljini duže stranice.

Broj domino pločica koje treba ograditi	**Broj domino pločica potreban za ograđivanje**
1	5
3	7
4	8
5	9
$\vdots$	$\vdots$

  Kako je duljina duže stranice dvostruko veća od duljine kraće stranice domino pločice, ovdje nije moguće promatrati pola domino pločice jer se ne bi dobio pravokutan oblik ograde. Ako se dvije domino pločice slažu jedna uz drugu po duljini duže stranice, ograda je kvadratnog oblika. Broj domino pločica potreban za ograđivanje n domino pločica je $n+4$. Također, ako je zadan broj domino pločica potreban za ograđivanje, može se izračunati broj onih koje treba ograditi.

- Ograda domino pločica je kvadratnog oblika.

  1. Kada se može dobiti ograda kvadratnog oblika slaganjem domino pločica po duljini duže i kraće stranice?
  2. Koliko je potrebno domino pločica da se one mogu složiti u kvadrat?

Primjer 3.9. *Koji je najveći kvadratni prostor koji se može ograditi kada se iskoriste sve domino pločice?*

Broj domino pločica koje treba ograditi	**Duljina stranice kvadrata koji se ograđuje**	**Broj domino pločica za ograđivanje**
$\frac{1}{2}$	$1\ cm$	4
2	$2\ cm$	6
$4\frac{1}{2}$	$3\ cm$	8
8	$4\ cm$	10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$84\frac{1}{2}$	$13\ cm$	28

Ograda kvadratnog oblika se može dobiti samo ako su domino pločice složene u kvadrat. Bilo koji broj domino pločica ne čini kvadrat, samo onaj broj koji pomnožen s 2 daje kvadrat nekog broja. U ovom primjeru $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $4\frac{1}{2} \cdot 2 = 9$, $\ldots$, $84\frac{1}{2} \cdot 2 = 169$. Duljina stranice, označena s x, kvadrata koji se ograđuje su prirodni brojevi. Broj domino pločica je 28. Iz $2x + 2 = 28$ slijedi $x = 13$ cm. Najveći kvadratni prostor koji se može ograditi sa svim domino pločicama je kvadrat kojem je duljina stranice 13 cm, a broj domino pločica koje treba ograditi je $n = \frac{x^2}{2} = \frac{13^2}{2} = 84\frac{1}{2}$.

3.2.1 Primjeri igre u nastavi

1. Učenici su podijeljeni u grupe po četvero, svaka grupa ima set domino pločica. Jedan učenik odgovara na zadano pitanje, ostali odlučuju je li odgovor ispravan te se izmjenjuju. U složenijim situacijama, tj. kada postoji više rješenja, učenici mogu raspraviti o zadanom problemu i zašto ima više točnih rješenja.

2. Set pločica podijeljen je paru učenika. Kada je pitanje postavljeno, učenici pokušavaju pronaći rješenje među svojim pločicama; ponekad će samo jedan učenik imati rješenje, a ponekad je moguće više ispravnih rješenja.

3. Zadaci s oduzimanjem; pronaći domino čiji je rezultat pri oduzimanju većeg i manjeg broja točkica 2. Jedno od rješenja je pločica s vrijednostima 5 i 3, zadatak je pronaći još 3 rješenja.

4. Učenici rade u grupama i smišljaju probleme koje ostale grupe učenika trebaju riješiti. U pravilu se odabere domino pločica na temelju koje se zadaje zadatak.

Pitanja za učenike:

- Koliko je potrebno domino pločica za ograđivanje područja veličine $1\frac{1}{2}$ domino pločice?
  Za ograđivanje $1\frac{1}{2}$ domino pločice potrebno ih je 6. Dobiveni oblik je pravokutnik kojem su duljine stranica 5 cm i 3 cm.
- Kako posložiti 7 domino pločica da se ogradi područje veličine dvije domino pločice?
  Dvije domino pločice se mogu ograditi sa njih 7 ukoliko se slože jedna pored druge po kraćoj stranici. Dobiveni oblik je pravokutnik kojem su duljine stranica 6 cm i 3 cm.

- Kako će izgledati ograđeno područje kada se iskoristi svih 28 domino pločica za ogradu?
  Ograđeno područje može biti pravokutnik koji se sastoji od $12\frac{1}{2}$ domino pločica, čija je ograda dimenzije 27×3 ili kvadrat koji se sastoji od $84\frac{1}{2}$ domino pločice, čija je ograda dimenzije 15×15.
- Može li se s 8 domino pločica ograditi različita područja?
  S 8 domino pločica se može ograditi $2\frac{1}{2}$ domino pločice tako da se jedna uz drugu slaže po duljini kraće stranice, 4 domino pločice tako da se jedna uz drugu slaže po duljini duže stranice, $4\frac{1}{2}$ domino pločice koje se slažu po duljini duže i kraće stranice itd.
- Izračunaj površine i opsege ograđenog prostora s 8 domino pločica. Dva pravokutnika koja imaju jednake opsege, imaju li i jednake površine?
  Dva pravokutnika koja imaju jednake opsege mogu imati različite površine.

3.2.2 Razvoj strategija i donošenje odluka

Problemski zadaci s domino pločicama učenicima predstavljaju ideju o prostoru rješenja i tome da neki problemi nemaju rješenje u određenom prostoru. Postoje zadani alati za rješavanje problema, a ono što možemo učiniti s tim alatima stvara prostor rješenja. Postavljanje problema i traženje rješenja je važna sastavnica matematike i matematičke zrelosti. Zadatke s domino pločicama mogu riješiti učenici koji su učili algebarske metode, ali i oni koji nisu, o čemu ovisi kako će postaviti zadatak i tražiti rješenje. Postupak kojim će učenici riješiti zadatak ovisi o njihovoj dobi tj. o matematičkoj zrelosti. Kod postavljanja zadataka čije rješenje mora biti na domino pločici, učenici prije svega moraju razumjeti prostor rješenja. U slučaju kada zadaci imaju više rješenja, učenici trebaju znati objasniti zašto su sva rješenja točna i kako se do njih dolazi.

3.3 Factor Monster

Factor Monster je ime za igru o prirodnim brojevima, djeliteljima brojeva, prostim i složenim brojevima. Za ovu igru se koristi lista prirodnih brojeva od 1 do n, što je broj n manji, igra je lakša.

Pravila igre su objašnjena na sljedećem primjeru kada lista prirodnih brojeva ide od 1 do 6.

Primjer 3.10. *Lista brojeva od* 1 *do* n, $n = 6$.

Broj	**Djelitelji**	**Pravi djelitelji**	**Komentar**
1	1	nijedan	1 nije ni prost ni složen broj
2	1,2	1	2 je prost broj
3	1,3	1	3 je prost broj
4	1,2,4	1,2	4 je složen broj
5	1,5	1	5 je prost broj
6	1,2,3,6	1,2,3	6 je složen broj

Potrebno je odabrati broj koji još nije iskorišten i ima jedan ili više pravih djelitelja na listi. U prvom potezu se ne može odabrati broj 1 jer nema pravih djelitelja, pa je u prvom potezu moguće odabrati 2, 3, 4, 5 ili 6. Kada je broj odabran, Factor Monster uzima sve prave djelitelje tog broja; ako je odabran broj 2 Factor Monster uzima broj 1, jedini pravi djelitelj broja 2. Odabrani broj i svi djelitelji koje je Factor Monster pojeo uklanjaju se s liste. U idućem potezu moguće je odabrati broj jedino ako u novoj listi taj broj ima prave djelitelje. Ako na listi nisu ostali brojevi s pravim djeliteljima, Factor Monster uzima i te brojeve i igra je gotova. Factor Monster i igrač zbrajaju brojeve koje su sakupili i pobjednik je onaj koji ima veći rezultat.

Primjer 3.11. *Factor Monster i Igrač igraju s listom prirodnih brojeva od* 1 *do* 6*.*

	Lista brojeva	**Igrač**	**Factor Monster**
Početna lista brojeva.	1, 2, 3, 4, 5, 6		
Igrač uzima broj 6 i uklanja s liste.	1, 2, 3, 4, 5	6	
Factor Monster uzima prave djelitelje od 6.	4, 5		1, 2, 3
U listi nema pravih djelitelja od 4 i 5.			4, 5
Igrač i Factor Monster zbrajaju brojeve.		6	15

Factor Monster u ovom primjeru pobjeđuje Igrača. Igračeva strategija se pokazala lošom jer nije unaprijed mislio o posljedicama. Igrač je shvatio da broj 6 nije bio dobar izbor za početak igre te mora razviti bolju strategiju.

	Lista brojeva	**Igrač**	**Factor Monster**
Početna lista brojeva.	1, 2, 3, 4, 5, 6		
Igrač uzima broj 4 i uklanja s liste.	1, 2, 3, 5, 6	4	
Factor Monster uzima prave djelitelje od 4.	3, 5, 6		1, 2
Igrač uzima broj 6.	3, 5	6	
Factor Monster uzima pravi djelitelj od 6.	5		3
Nema pravih djelitelja od 5.			5
Igrač i Factor Monster zbrajaju brojeve.		10	11

Igrač je izgubio i u igri gdje je za početak igre uzeo broj 4, ali je rezultat bolji nego u prvoj igri.

Može li Factor Monster izgubiti? Izgubi li uvijek onaj koji je prvi na potezu? U sljedećoj tablici je prikazano da Igrač može pobijediti.

	Lista brojeva	**Igrač**	**Factor Monster**
Početna lista brojeva.	1, 2, 3, 4, 5, 6		
Igrač uzima broj 5 i uklanja s liste.	1, 2, 3, 4, 6	5	
Factor Monster uzima pravi djelitelj od 5.	2, 3, 4, 6		1
Igrač uzima broj 6.	2, 3, 4	6	
Factor Monster uzima prave djelitelje od 6.	4		2, 3
Nema pravih djelitelja od 4.			4
Igrač i Factor Monster zbrajaju brojeve.		11	10

Kako bi Igrač sakupio što više bodova, u prvom potezu treba odabrati najveći prosti broj, tada Factor Monster osvaja broj 1. U drugom potezu Igrač je uzeo broj 6, a Factor Monster prave djelitelje od 6 i preostali broj iz liste. Igrač je u drugom potezu mogao uzeti i najmanji složeni broj koji ima prave djelitelje u listi, broj 4, a nakon toga broj 6 i time bi ostvario najbolji mogući rezultat, 15 : 6.

Darivatelj poklona je varijacija igre u kojoj je cilj minimalizirati ili maksimizirati rezultat Primatelja poklona. Pravila su ista kao i u Factor Monster. Igra je opisana za $n = 4$ i potrebno je postići maksimalan rezultat Primatelja poklona.

Primjer 3.12. *Lista brojeva od* 1 *do* 4.

	Lista brojeva	**Igrač**	**Primatelj poklona**
Lista brojeva od 1 do 4.	1, 2, 3, 4		
Igrač uzima broj 2.	1, 3, 4	2	
Primatelj poklona uzima jedini pravi djelitelj od 2.	3, 4		1
Nema pravih djelitelja od 3 i 4. Primatelj poklona dobiva 3 i 4.			3, 4
Igrač i Primatelj poklona zbrajaju brojeve.		2	8

U ovoj igri Primatelj poklona je ostvario najveći mogući rezultat, a Igrač najmanji u listi brojeva od 1 do 4 te je pobijedio.

Sljedeća tablica pokazuje minimalni rezultat Darivatelja i maksimalni rezultat Primatelja poklona za danu listu prirodnih brojeva.

Lista prirodnih brojeva	**Minimalan rezultat Darivatelja poklona**	**Maksimalan rezultat Primatelja poklona**	**Zbroj rezultata**
1, 2, 3	2	4	6
1, 2, 3, 4	2	8	10
1, 2, 3, 4, 5	2	13	15
1, 2, 3, 4, 5, 6	6	15	21
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	6	22	28
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	7	29	36
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

U sljedećoj varijaciji igre cilj je pokušati postići neriješen rezultat ili mu biti što bliže. Lista prirodnih brojeva ide od 1 do n. Zbroj svih prirodnih brojeva u listi računa se po formuli $\frac{n(n+1)}{2}$, što je i ukupan broj bodova koji igrači mogu osvojiti u danoj igri. Broj bodova svakog igrača iznosi $\frac{\text{ukupan broj bodova}}{2}$. U slučaju da je broj bodova neparan broj, igrači sigurno neće moći postići jednake rezultate, ali mogu biti blizu neriješenom rezultatu. Igre u kojima je cilj postići neriješen rezultat, Igrač može igrati s Factor Monster-om ili Primateljem poklona.

Primjer 3.13. *Pokušaj postizanja neriješenog rezultata Igrača i Factor Monster za* $n = 6$.

	Lista brojeva	**Igrač**	**Factor Monster**
Lista brojeva od 1 do 6.	1, 2, 3, 4, 5, 6		
Igrač uzima broj 5.	1, 2, 3, 4, 6	5	
Factor Monster uzima jedini pravi djelitelj od 5.	2, 3, 4, 6		1
Igrač mora uzeti broj 6. Jedino 6 ima prave djelitelje.	2, 3, 4	6	
Factor Monster dobiva 2 i 3.	4		2, 3
U listi nema pravih djelitelja od 4. Factor Monster dobiva 4.			4
Igrač i Factor Monster zbrajaju bodove.		11	10

Igrač je uspješno pobijedio s rezultatom 11 naprama 10.

Primjer 3.14. *Pokušaj postizanja neriješenog rezultata Igrača i Primatelja poklona za* $n = 6$.

	Lista brojeva	**Igrač**	**Primatelj poklona**
Lista brojeva od 1 do 6.	1, 2, 3, 4, 5, 6		
Igrač uzima broj 4.	1, 2, 3, 5, 6	4	
Primatelj poklona uzima prave djelitelje od 4.	3, 5, 6		1, 2
Igrač uzima broj 6. Jedino 6 ima pravih djelitelja.	3, 5	6	
Primatelj poklona dobiva broj 3.	5		3
U listi nema pravih djelitelja od 5. Primatelj poklona dobiva 5.			5
Igrač i Primatelj poklona zbrajaju brojeve.		10	11

Igrač je pobijedio s rezultatom 10 naprama 11.

3.3.1 Primjeri igre u nastavi

Učenici ovu igru mogu igrati u paru, jedan od učenika je Factor Monster. Igra je korisna za učenje prostih i složenih brojeva te ravijanja logičkog mišljenja koji broj prvi izabrati kako bi pobjedili. Učenik brojeve koje izabere zaokruži u tablici, a Factor Monster ih prekriži kako se brojevi pri daljnjem odabiru ne bi ponavljali.

Pitanja za učenike:

- Tko će pobijediti u igri kada je $n = 1$?
  Za $n = 1$ Factor Monster će pobijediti jer 1 nema pravih djelitelja pa igrač ne može uzeti ni jedan broj.

- Za koji n se može postići neriješen rezultat?
  Neriješen rezultat se može postići za $n = 3, 12, 15$ itd.

- Koliko igrač može imati maksimalno bodova kada je $n = 6$?
  Kada je $n = 6$ igrač može postići maksimalno 15 bodova.

- U igri "Darivatelj poklona" može li Igrač imati manje od 8 bodova i Primatelj poklona više od 13 za $n = 6$?
  Za $n = 6$ u igri Darivatelj poklona, Igrač može imati minimalno 6 bodova, a Primatelj poklona maksimalno 15 bodova.

- Pronađite najbolju igru za pokušaj postizanja neriješenog rezultata za $n = 8$.
  Zbroj svih brojeva od 1 do 8 je 36 pa za pokušaj postizanja neriješenog rezultata svaki igrač mora imati približno 18 bodova.

	Lista brojeva	**Igrač**	**Factor Monster**
Lista brojeva od 1 do 8.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8		
Igrač uzima broj 5.	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8	5	
Factor Monster uzima jedini pravi djelitelj od 5.	2, 3, 4, 6, 7, 8		1
Igrač uzima broj 8.	2, 3, 4, 6, 7	8	
Factor Monster dobiva 2 i 4.	3, 6, 7		2, 4
Igrač uzima broj 6	3, 7	6	
Factor Monster uzima jedini pravi djelitelj od 6.	7		3
U listi nema pravih djelitelja od 7. Factor Monster dobiva 7.			7
Igrač i Factor Monster zbrajaju bodove.		19	17

3.3.2 Razvoj strategije i donošenje odluka

Factor Monster je igra koja nudi niz različitih problema, ovisno koji prirodni broj n se uzme te koji će broj igrač odabrati u prvom potezu; najmanji ili najveći mogući, složen ili prost broj. Ova igra, osim naučiti njena pravila, ima više ciljeva. Igrač početnik će igrati igru više puta, kroz proučavanje igre možda će se uzorak početi ponavljati te će na osnovu toga moći razviti bolju strategiju. Uzorak koji igrač dobije u nekoj od igri ne mora vrijediti za svaki mogući n. Igrajući igru brojnim pokušajima dolazi se do uzorka te se mora razviti matematički argument koji objašnjava zašto je baš taj uzorak ispravan.

Neriješen rezultat igrača se može postići za listu brojeva kada je n: 3, 12, 15, 16, 24, 28, 36, 48 itd. Uzorak se ponavlja za listu brojeva za $n = 12$ i $n = 24$.
Za listu brojeva do 12, središnji brojevi liste su 6 i 7. Kako je ukupan zbroj brojeva u listi 78, za neriješen rezultat oba igrača moraju imati po 39 bodova. U listi ima 6 pravih djelitelja, a to su ujedno i prvih 6 brojeva u listi. Drugi igrač uzima samo prave djelitelje pa prvi igrač mora izabrati brojeve koji se nalaze desno od središnjih brojeva u listi. Zbroj prvih 6 brojeva koji će pripasti drugom igraču je 21, a zbroj brojeva koji se nalazi desno od središnjih brojeva liste je 50. Kako prvi igrač odabire samo brojeve koji su desno od središnjih brojeva, broj 7 će pripasti drugom igraču. Veći broj ima i više pravih djelitelja pa da bi prvi igrač sakupio što više bodova mora krenuti redom od broja 8 da igrač 2 pokupi što manje pravih djelitelja. Prvi igrač bira brojeve: 8, 9, 10 i 12 čiji je zbroj 39, a drugom igraču pripada broj 11 te i njegov ukupan zbroj bodova iznosi 39. Redoslijed odabira prvog igrača je: 8, 9, 10 i 12. Isti uzorak je i za broj 24.

Lista brojeva do 36 i 48 ima sličan uzorak kao i lista brojeva do 12 i 24. Za listu brojeva do 36, središnji brojevi su 18 i 19, a ukupan broj pravih djelitelja u listi je 18. Kako prvi igrač odabire brojeve koji se nalaze desno od središnjih brojeva, drugom igraču pripada prvih 19 brojeva liste čiji je ukupan zbroj 190. Na desnoj strani liste su prosti brojevi: 23, 29 i 31 koji također pripadaju drugom igraču, a njihov zbroj je 83. Za neriješen rezultat svaki igrač treba imati 333 boda, drugi igrač već sigurno ima 273 boda, a nedostaje mu još 60 bodova. Na desnoj strani liste se traži kombinacija brojeva čiji je zbroj 60, a to su brojevi 27 i 33, što znači da prvi igrač ne može uzeti brojeve 27 i 33 s desne strane liste kako bi se mogao postići neriješen rezultat. Zbroj svih brojeva koji su ostali na desnoj strani iznosi 333. Prvi igrač kod odabira brojeva mora paziti koliko i kojih pravih djelitelja ima neki broj, stoga bi prvo trebao uzeti neparne brojeve i pri tome paziti na redoslijed odabira, a nakon toga odabrati sve parne brojeve. Redoslijed odabira prvog igrača je: 25, 35, 21, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34 i 36. Isti uzorak je i za broj 48.

3.4 Igra svinje

Igra svinje je jednostavna igra s igraćom kockom, a u najjednostavnijoj varijanti igrač baca igraću kocku dok ne dobije broj 1 (čime ostvaruje 0 bodova) ili stane s bacanjem i pribroji zbroj okrenutih brojeva svom ukupnom rezultatu. Igra može završiti na razne načine:

- Igra završava kada igrač dostigne ili premaši unaprijed dogovorenu brojku, naprimjer 50 ili 100. Ako igraju dva ili više igrača, moraju imati jednak broj bacanja; ako prvi igrač dostigne ili premaši dogovorenu ciljnu brojku, drugi igrač može pokušati postići neriješen rezultat ili prijeći rezultat prvog igrača.

- Igra završava kada igrači bace igraću kocku unaprijed dogovoreni broj puta, naprimjer 5 ili 10. Igrač s većim rezultatom na kraju svih bacanja pobjeđuje.

Igru može igrati jedan ili više igrača, za jednostavnu varijantu igre potrebna je jedna igraća kocka i tablica za praćenje rezultata igre. Igrači počinju od nule, svatko uzastopce baca igraću kocku dogovoreni broj puta te zapisuje zbroj nakon svakog bacanja. Ako igrač okrene broj 1, sav zbroj dotadašnjeg bacanja u igri se poništava. No, igrač ne mora nužno baciti igraću kocku 5 puta kada je na njemu red, već može nakon naprimjer 3 bacanja prepustiti bacanje drugom igraču i zbrojiti svoj rezultat.

Primjer 3.15. *Dva igrača igraju igru s 5 slijedova bacanja, rezultat zapisuju u tablicu. Prije početka igre, igrači bacaju igraću kocku kako bi odlučili tko igra prvi, igrač koji dobije manji broj započinje igru. Igrač u prvom slijedu može završiti s bacanjem igraće kocke kada postigne željeni rezultat ili kada okrene broj 1, čime se dotadašnji rezultat poništava i on tada osvaja 0 bodova.*

Igrač 1	**Igrač 1 piše**	**Lista bacanja**	**Rezultat bacanja**	**Ukupan rezultat**
				0
5	5	5	5	
2	+2	$5+2$	7	
3	+3	$5+2+3$	10	
3	+3	$5+2+3+3$	13	
4	+4	$5+2+3+3+4$	17	
	17	$5+2+3+3+4$	17	17

Igrač 1 je u svom prvom slijedu bacanja stao na rezultatu 17, nakon toga je prepustio igru Igraču 2 koji će pokušati premašiti rezultat Igrača 1 ili barem postići neriješen rezultat.

Igrač 2	**Igrač 2 piše**	**Lista bacanja**	**Rezultat bacanja**	**Ukupan rezultat**
				0
3	3	3	3	
6	+6	$3+6$	9	
3	+3	$3+6+3$	12	
4	+4	$3+6+3+4$	16	
1	$1 \to 0$	$3+6+3+4 \quad 1 \to 0$	0	0

Nakon četvrtog bacanja Igrač 2 ima 16 bodova te mora baciti igraću kocku još jednom kako bi pobijedio. Okrenuo se broj 1 u petom bacanju, Igrač 2 bilježi 0 kao rezultat ovog slijeda i prosljeđuje igraću kocku Igraču 1. Igrači bacaju još 4 slijeda, na kraju četvrtog slijeda Igrač 1 vodi 51 naprama 39. U zadnjem slijedu igrači moraju razviti strategiju temeljenu na dotadašnjem rezultatu; igrač koji vodi samo pokušava dodati minimalni pozitivni broj rezultatu. Igrač koji igra zadnji je u prednosti jer zna točno koji broj mora dobiti da bi postigao neriješen rezultat ili pobijedio.

Sljedeća tablica prikazuje krajnji rezultat ova dva igrača.

Broj slijeda	**Lista bacanja po slijedu**	**Zbroj Igrača 1**	**Zbroj Igrača 2**
1. slijed; Igrač 1	$5+2+3+3+4$	17	
1. slijed; Igrač 2	$3+6+3+4 \quad 1 \to 0$		0
2. slijed; Igrač 1	$4+5+5 \quad 1 \to 0$	17	
2. slijed; Igrač 2	$5+6+2+2+4$		19
3. slijed; Igrač 1	$4+3+6+5$	35	
3. slijed; Igrač 2	$6+6+5+3$		39
4. slijed; Igrač 1	$3+6+5+2$	51	
4. slijed; Igrač 2	$5+6+4+2+5 \quad 1 \to 0$		39
5. slijed; Igrač 1	$6+3+5$	65	
5. slijed; Igrač 2	$4+6+3+5+3+2+3$		65
	Konačan rezultat igrača	65	65

U igrama koje uključuju slučajnost, analiza matematičke vjerojatnosti igra bitnu ulogu u razvoju strategija.

- Oba igrača iz prethodnog primjera trebaju strateški odlučiti kada prestati s bacanjem prije nego okrenu 1. Oba igrača znaju broj zadanih bacanja po setu ili ciljni rezultat. Isto tako, zapisuju podatke o bacanjima, što znači da drugi igrač ima uvid u ishod bacanja prvog igrača.

- Kako igra napreduje, svaki igrač prati svoje rezultate i planira kada stati s bacanjem kako bi ostao u prednosti. U prethodnom primjeru, Igrač 2 je implementirao strategiju "pobijedi ili pokušaj postići neriješen rezultat"; u svom zadnjem slijedu je trebao postići rezultat 26 ili više, za što je bilo potrebno sedam bacanja igraće kocke. Vjerojatnost da Igrač 2 baci igraću kocku 7 puta bez da okrene 1 je $\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.2791$. Igrač 2 je imao "sreće" što u tih sedam bacanja nije dobio 1. Ako igrač okrene igraću kocku manji broj puta, manja je i vjerojatnost da će okrenuti 1.

3.4.1 Primjeri igre u nastavi

1. Izračunati kolika je vjerojatnost da igrač baci igraću kocku 5 puta pod uvjetom da ne dobije 1.

2. U određenom broju slijedova, učenik treba razviti strategiju kada stati s bacanjem u slijedu kako bi ostvario što veći broj bodova.

3. Učenici igraju igru u paru, određen je broj slijedova te moraju razviti strategiju kada se zaustaviti s bacanjem u pojedinom slijedu kako bi pobijedili suigrača ili bar postigli neriješen rezultat.

4. Koristeći strategiju niskog rizika, zaustavljanje nakon drugog bacanja u slijedu, izračunati prosjek bodova koji su se okrenuli u pojedinom slijedu. Broj slijedova je unaprijed određen. Odgovara li približno taj eksperimentalni prosjek optimalnom prosjeku ove strategije?

3.4.2 Strategije i donošenje odluke

Rješavanje problema zahtijeva donošenje odluka tijekom procesa napretka iz početne situacije prema cilju. U Igri svinje postavlja se pitanje kako pobijediti, sreća je bitan faktor pa i najbolji igrači mogu s vremena na vrijeme izgubiti unatoč strategiji. Igrači trebaju stremiti što boljem omjeru pobjeda, neriješenih rezultata i gubitaka.

Problemska pitanja koja igrač može uzeti u obzir pri planiranju najboljeg ishoda, a koja ukazuju na poteškoće pri donošenju optimalnih odluka u igri:

1. Pretpostavimo da sam bacio igraču kocku n puta i još uvijek nisam dobio 1, trebam li nastaviti bacati i dalje ili prepustiti igru suigraču?

2. Pretpostavimo da sam ostvario t bodova u trenutnom slijedu, trebam li bacati opet ili prepustiti igru drugom igraču?

3. Kada i/ili kako uzeti u obzir trenutne rezultate suigrača?
4. Kako mogu ostvariti prednost nad suigračima na temelju prepoznavanja njihove strategije i uklapanja iste u svoj način igre?

Igrači ovu igru mogu igrati na sreću ili koristiti neku od strategija, naprimjer stajem s igrom nakon 4 bacanja u slijedu i prepuštam igru suigraču ili bacam igraću kocku dok ne dobijem određeni rezultat ili više, naprimjer 16. U oba slučaja, igrač može biti prisiljen završiti igru prije ako okrene broj 1 te mu se dotadašnji rezultat poništi.

U igri igrači mogu koristiti strategiju zaustavljanja nakon fiksnog broja bacanja igraće kocke. Igrači završavaju prije s igrom ukoliko okrenu broj 1 u jednom od bacanja, osvajaju 0 bodova u tom slijedu te igraću kocku prepuštaju drugom igraču.

Igrači mogu koristiti strategiju u kojoj se zaustavljaju s bacanjem nakon prvog okreta u svakom slijedu. Ova strategija je niskog rizika, ali ukupan rezultat je također nizak. Vjerojatnost da igrač neće okrenuti 1 je 0.8333. Očekivana vrijednost u svakom slijedu će biti blizu 4, što je i srednja vrijednost mogućih brojeva: 2, 3, 4, 5 i 6. U slučaju igranja više slijedova, vjerojatnost da se okrene broj 1 je $\frac{1}{6}$ kao i za svaki drugi broj te je ukupna očekivana vrijednost manja od 4 jer uključuje i slijedove u kojima će se okrenuti broj 1. Prosjek bodova koji se mogu osvojiti koristeći ovu strategiju je $\frac{20}{6} = 3.333$.

Strategija u kojoj se igrači zaustavljaju nakon drugog bacanja u slijedu je također strategija niskog rizika, ali je vjerojatnost da će se okrenuti broj 1 veća nego kada se koristi strategija zaustavljanja nakon prvog bacanja. Očekivana vrijednost bodova u slijedu je između $2 + 2 = 4$ i $6 + 6 = 12$, tj. $(4 + 12)/2 = 8$ u slučaju da se ne okrene 1. Drugi način promatranja ove strategije je da ukupno ima 25 mogućih ishoda ako isključimo 1, a ukupan broj bodova je 200. Ako uključimo 1 ukupan broj ishoda je $6 \cdot 6 = 36$, a ukupan broj bodova je nepromijenjen. Prosjek bodova koristeći strategiju zaustavljanja nakon dva bacanja je $\frac{200}{36} = 5.556$.

Strategija zaustavljanja nakon trećeg bacanja predstavlja veći rizik od prethodne dvije. Vjerojatnost da se neće okrenuti broj 1 iznosi 0.5787, dok vjerojatnost da će se okrenuti je 0.4213. Očekivana vrijednost u slijedu je između $2+2+2 = 6$ i $6+6+6 = 18$, tj. $(6 + 18)/2 = 12$. Ukupan broj ishoda uključujući 1 je $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, a ukupan broj bodova koji se mogu osvojiti je 1500, stoga je prosjek bodova $\frac{1500}{216} = 6.944$. U ovoj strategiji broj ishoda u kojima se može okrenuti broj 1 iznosi 91.

Sljedeće strategije zaustavljanja nakon 4, 5, 6 i 7 bacanja su prikazane u tablici. Eksperimentalni podaci u tablici preuzeti su iz knjige Using Math Games and Word Problems to Increase the Math Maturity of K-8 Students.

	Nakon 4 bacanja	**Nakon 5 bacanja**	**Nakon 6 bacanja**	**Nakon 7 bacanja**
Broj slijedova	200	200	200	200
Broj bodova	1517	1600	1643	1580
Prosjek bodova po slijedu	7.585	8.000	8.215	7.900
Broj slijedova u kojima se nije okrenuo 1	95	81	69	57
Prosjek bodova u slijedu kada se nije okrenuo 1	15.96	19.75	23.81	27.72
Broj slijedova u kojima se okrenuo 1	105	119	131	143

Očekivana vrijednost bodova u slijedu, ako isključimo 1 kao mogući okrenuti broj, u svakoj strategiji je $4 \cdot n$, gdje je n broj bacanja. Broj slijedova u kojima se nije okrenuo broj 1 se smanjuje kada se koriste strategije zaustavljanja nakon većeg broja bacanja igraće kocke, a prosjek bodova u slijedu kada se nije okrenuo 1 se povećava i blizu je očekivanoj vrijednosti bodova.

Igre poput ove je zabavno igrati jer se na neki način radi o kockanju. Iako izgleda kao bezazlena igra na "sreću", ona igračima omogućuje analizu rezultata i razvijanje strategije te povećava vještine strateškog razmišljanja i donošenja odluka što dovodi do povećanja matematičke zrelosti. Za razvoj strategije u ovoj igri mogu se koristi eksperimenti uzastopnim bacanjem igraće kocke. Mnogi problemi u kojima je potrebno donositi odluke koje su temeljene na eksperimentalnim podacima pojavljuju se u medicini, naprimjer reakcije ljudi na određeni lijek.

3.5 Slova i brojevi

Ova igra koja je osmišljena kako bi pomogla djeci unaprijediti znanje o jeziku i matematici. Igra ima puno varijacija što ju čini korisnom za učenike različitih uzrasta i sposobnosti.

Slovima su dodijeljene brojevne vrijednosti prikazane u sljedećoj tablici, a Riječalica plus (WWP) je zbroj vrijednosti slova u riječi.

$a = 1$	$b = 2$	$c = 3$	$d = 4$	$e = 5$	$f = 6$	$g = 7$	$h = 8$	$i = 9$
$j = 10$	$k = 11$	$l = 12$	$m = 13$	$n = 14$	$o = 15$	$p = 16$	$q = 17$	$r = 18$
$s = 19$	$t = 20$	$u = 21$	$v = 22$	$w = 23$	$x = 24$	$y = 25$	$z = 26$	

Tablica 1.

Zbrojevi vrijednosti slova u riječima su prirodni brojevi 1, 2, 3, ..., i naravno njihove podvrste; parni, neparni, prosti, složeni, djeljivi s n, potpuni kvadrati, Fibbonacijevi, palindromski itd.

Primjer 3.16. *Zbroj vrijednosti slova u riječi (WWP).*

$$WWP(\text{broj}) = 2 + 18 + 15 + 10 = 45$$

Kada svakom slovu riječi "broj" pridružimo vrijednost, zbroj vrijednosti slova iznosi 45, a 45 je neparan broj i djeljiv s 3.

Primjer 3.17. *Pronađi riječ čiji je zbroj vrijednosti slova potpuni kvadrat nekog broja.*

$$WWP(\text{niz}) = 14 + 9 + 26 = 49$$
$$WWP(\text{prostor}) = 16 + 18 + 15 + 19 + 20 + 15 + 18 = 121$$

Primjer 3.18. *Pronađi riječ čiji je zbroj vrijednosti slova palindromski broj.*

$$WWP(\text{brid}) = 2 + 18 + 9 + 4 = 33$$
$$WWP(\text{kvadrat}) = 11 + 22 + 1 + 4 + 18 + 1 + 20 = 77$$

Vrijednosti koje pridružujemo slovima ne moraju biti samo pozitivni brojevi, možemo uključiti i negativne brojeve te na taj način igru proširujemo iz skupa prirodnih na skup cijelih brojeva. Pozitivne i negativne brojeve naizmjenično pridružujemo slovima abecede.

$a = 1$	$b = -2$	$c = 3$	$d = -4$	$e = 5$	$f = -6$	$g = 7$	$h = -8$
$i = 9$	$j = -10$	$k = 11$	$l = -12$	$m = 13$	$n = -14$	$o = 15$	$p = -16$
$q = 17$	$r = -18$	$s = 19$	$t = -20$	$u = 21$	$v = -22$	$w = 23$	$x = -24$
$y = 25$	$z = -26$						

Tablica 2.

Primjer 3.19. *Zbroj vrijednosti slova u riječi jednak je nula.*

$$WWP(\text{sat}) = 19 + 1 - 20 = 0$$

Iako ova igra djeluje lagana, osim sreće igrač mora uspostaviti vezu između slova kojima su pridruženi negativni brojevi i slova kojima su pridruženi pozitivni brojevi te od njih pronaći riječ tako da je konačna vrijednost jednaka 0.

Primjer 3.20. *Pronađi riječ čiji je zbroj vrijednosti slova paran broj.*

$$WWP(\text{formula}) = -6 + 15 - 18 + 13 + 21 - 12 + 1 = 14$$

Primjer 3.21. *Pronađi riječ čiji je zbroj vrijednosti slova Fibbonacijev broj.*

$$WWP(\text{krug}) = 11 - 18 + 21 + 7 = 21$$

Igra se može igrati na različite načine; cilj može biti naći što više riječi s vrijednošću 0 u zadanom vremenu, naći što više riječi s vrijednošću blizu 0, naći određen broj riječi čiji ukupan zbroj daje vrijednost 0, naći dvije riječi čije su vrijednosti suprotni brojevi i sl.

Primjer 3.22. *Riječi čije su vrijednosti suprotni brojevi.*

$$WWP(\text{kocka}) = 11 + 15 + 3 + 11 + 1 = 41$$
$$WWP(\text{zbroj}) = -26 - 2 - 18 + 15 - 10 = -41$$

Osim zbroja i razlike u ovoj igri se može tražiti i umnožak. Cilj igre može biti pronaći riječi od tri slova čije su konačne vrijednosti parni ili neparni, pozitivni ili negativni, prosti ili složeni brojevi.

3.5.1 Primjeri igre u nastavi

Slova i brojevi je igra koja se zbog svoje raznolikosti može prilagoditi različitoj dobi učenika. Učenici je mogu igrati individualno, u paru ili u grupi.

1. Učenicima nižih razreda se mogu zadati slova abecede s pridruženim brojevnim vrijednostima te određena riječ, zadatak učenika je da zbroje ili pomnože vrijednosti slova. Također, učenici sami mogu slovima pridružiti vrijednost i tražiti riječi čija je vrijednost zbroja slova unaprijed određena.

2. Zadatak može biti pronaći anagrame neke riječi te izračunati zbroj vrijednosti slova dobivenih riječi uz unaprijed zadane vrijednosti slova. Premetanjem slova, zbroj ostaje isti.

3. Učenicima viših razreda može biti zadana tablica slova s pripadnim vrijednostima; zadatak je u zadanom vremenu pronaći što više riječi čija je konačna vrijednost iz unaprijed zadanog intervala.

4. Zadatak može biti da učenici koristeći sve matematičke operacije koje znaju, pronađu riječ čija je konačna vrijednost slova jednaka određenom broju.

3.5.2 Strategije i donošenje odluka

Slova i brojevi je zabavna igra koja obuhvaća širok dio matematike. Kroz igru učenici razvijaju logičko mišljenje. U igri se pojavljuju različiti matematički pojmovi i skupovi brojeva koje učenici susreću tijekom obrazovanja.

U zadacima s unaprijed zadanim slovima i njihovim pripadajućim vrijednostima u kojima se traži da je konačna vrijednost zbroja paran ili neparan broj, neki učenici će grupirati parne odnosno neparne vrijednosti te od njima pridruženih slova sastaviti riječ, dok će drugi učenici koristi i parne i neparne vrijednosti slova, pri tome moraju paziti na broj slova s parnom, odnosno neparnom vrijednošću. Kada se u zadatku traži da je zbroj vrijednosti slova u riječi jednak određenom broju, neki učenici će pokušati pronaći traženu riječ na sreću, no taj način je mukotrpan i može dugo trajati. U slučaju da su sve vrijednosti prirodni brojevi, najlakši način za pronalaženje riječi je da se pronađu slova čiji ukupan zbroj vrijednosti odgovara traženom broju te da se od tih slova sastavi riječ. Isti postupak se može koristiti i u skupu cijelih brojeva.

Zadaci u kojima učenici na zadanu riječ moraju sami slovima pridružiti vrijednosti da bi dobili najmanji mogući zbroj u skupu prirodnih brojeva čine se dosta jednostavni. No, što ako se u riječi neka slova pojavljuju dva ili više puta?

Primjer 3.23. *Najmanji mogući zbroj vrijednosti slova u skupu prirodnih brojeva riječi "matematika".*

	m	a	t	e	m	a	t	i	k	a
Pridružene vrijednosti	1	2	3	4	1	2	3	5	6	2

Zbroj vrijednosti slova jednak je 29. Je li ovaj zbroj najmanji?
U ovom slučaju najmanji zbroj će se dobiti tako da se prvo prebroji koliko puta se koje slovo pojavljuje te se slovu koje se najviše puta pojavljuje pridruži najmanja vrijednost.

	m	a	t	e	i	k
Broj pojavljivanja	2	3	2	1	1	1
Pridružene vrijednosti	2	1	3	1	1	1

Traženi zbroj vrijednosti slova u skupu prirodnih brojeva jednak je 16.

3.6 Tvornica brojeva

Tvornica brojeva je naziv igre u kojoj se koristi skup brojeva i matematičke operacije kako bi se dobili određeni brojevi. Upotrebljavaju se "sirovi materijali" kako bi se dobili matematički izrazi koji imaju vrijednost jednaku zadanim brojevima; materijali su:

- skup brojeva koji se mogu dobiti bacanjem nekoliko igraćih kockica,
- operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje,
- zagrade: ().

U ovoj igri igrači koriste razne metode kako bi dobili nekoliko brojeva, npr., ako koriste 5 igraćih kockica, mogu dobiti brojeve 1, 2, 3, 3 i 6. Cilj može biti iskombinirati tih 5 brojeva koristeći gore navedene matematičke operacije i zagrade kako bi dobili što više pozitivnih cijelih brojeva.

Zadatak. *Koristeći osnovne matematičke operacije, kombinacijom brojeva* 1, 2, 3, 3 *i* 6*, nađi što više pozitivnih brojeva.*

$$\begin{aligned}(3+1-2)\cdot 6/3 &= 4\\ ((1+2)\cdot 3+3)/6 &= 2\\ 6\cdot 3/3+2-1 &= 7\\ (3-3)\cdot 6+2/1 &= 2\\ (6-2\cdot 3)/3+1 &= 1\end{aligned}$$

Igra se može igrati s velikim brojem igraćih kockica, ako ima više igraćih kockica, igra je kompleksnija. Igrači mogu igrati sami ili se natjecati u grupama; svaka grupa dobije isti skup brojeva koji može koristiti. Moguće varijacije ove igre je mogu olakšati tako da se izbaci pravilo da svi brojevi ili sve matematičke operacije moraju biti iskorištene u dobivanju cijelih brojeva. Isto tako, igra se može otežati tako da se promijeni cilj tj. da igrači moraju napisati aritmetičke izraze koji imaju vrijednost u određenom intervalu brojeva, a može se i povećati broj operacija koje igrači mogu koristiti, npr. potenciranje.

3.6.1 Primjeri igre u nastavi

Ovi tipovi zadataka se mogu koristiti i u nižim razredima osnovnih škola kada se nauče osnovne matematičke operacije. Učenici ih mogu rješavati samostalno, u paru ili u grupi. Zadaci se koriste za uvježbavanje matematičkih operacija. Što je zadano više brojeva i matematičkih operacija zadaci su kompleksniji.

- Za zadane brojeve, koristeći matematičke operacije, pronađi što više negativnih brojeva.
- Za zadane brojeve, koristeći matematičke operacije, pronađi što više cijelih brojeva.
- Za zadane brojeve, koristeći matematičke operacije, napiši aritmetički izraz koji poprima vrijednost u intervalu $[-10, 10]$.
- Maja je slavila rođendan te je htjela svojim prijateljima podijeliti bombone. Kupila je 3 vrećice, a u svakoj je bilo po 20 bombona. Ona je pojela 5 bombona te joj je mama dala onoliko bombona koliko je Maja pojela. Maja ima 12 prijatelja. Koliko bombona Maja ima? Može li Maja podijeliti bombone svojim prijateljima tako da svaki od njih dobije jednako? Koliko je bombona dobio svaki prijatelj? Napiši aritmetički izraz.
- Za dani aritmetički izraz, napiši zadatak riječima.

3.6.2 Strategije i donošenje odluka

Za rješavanje ovih zadataka prije svega potrebno je poznavanje matematičkih operacija te njihovo točno izvođenje. Osim toga, bitno je znati redoslijed njihovog izvođenja, ali i redoslijed kada se u zadacima pojave zagrade. Rješavanjem ovih zadataka učenici stječu brzinu i točnost. Zadaci u kojima moraju za zadane brojeve pronaći što više aritmetičkih izraza, koristeći matematičke operacije, mogu biti i natjecateljskog tipa te učenici mogu pokazati svoje matematičke sposobnosti. Učenici moraju znati koju matematičku operaciju odabrati da bi postigli zadani cilj. Poseban problem kod ovih zadataka predstavljaju zadaci s riječima koji su im nerazumljivi. Učenici svladaju tehniku računanja matematičkih operacija, ali je neki učenici nauče napamet i ne razumiju što ona u stvarnosti predstavlja. Naprimjer, neki učenici nakon što nauče tablicu množenja i znaju da je $3 \cdot 4 = 12$, oni ne znaju da je to isto kao i $4 + 4 + 4 = 12$, tj. da se broj 4 u tom izrazu pojavljuje 3 puta. Kada je zadan aritmetički izraz iz kojeg učenici trebaju osmisliti zadatak, oni izražavaju svoju maštu i kreativnost.

Literatura

[1] L. Bognar, M. Matijević, *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[2] M. Duran, *Dijete i igra*, Naknada Slap, Jastrebarsko, 1995.

[3] V. Grgec Petroci, M. Vranko, J. Rebac, *Igra i dijete, dijete i igra*, Obiteljski centar grada Zagreba, Zagreb, 2009.

[4] E. Jensen, *Super–nastava: nastavne strategije za kvalitetnu školu i uspješno učenje*, Educa, Zagreb, 2003.

[5] D. Moursund, R. Albrecht, *Using Math Games and Word Problems to Increase the Math Maturity of K–8 Students*, Information Age Education, Oregon, 2011.

[6] V. Vlahović–Štetić, *Matematika za život*, Dijete, škola, obitelj: časopis za odgoj i obrazovanje djece rane školske dobi namijenjen stručnjacima i roditeljima, vol. 24, 2009., 2-5

Sažetak

U današnje vrijeme nastava je usmjerena na učenike što znači da oni sami rješavaju zadane probleme, donose zaključke na temelju istraživanja te razvijaju logičko mišljenje. Učitelj više nije jedini izvor znanja u učionici, njegov zadatak je organizirati nastavni sat i motivirati učenike. Kako bi se postigla veća zainteresiranost učenika za nastavne sadržaje, uvodi se igra koja omogućuje lakše pamćenje i razumijevanje danih problema u vidu odmaka od klasičnog rješavanja zadanih problemskih zadataka. U igrama navedenim u ovom radu koriste se pristupačna pomagala koja su većinom dostupna i kod kuće, a svaka od igara ima više varijacija tako da ih je moguće lako prilagoditi različitim stupnjevima obrazovanja. U igrama učenici mogu samostalno kreirati i istražiti strategije koje dovode do pozitivnih ishoda, ali i učiti od drugih. Zadaća učitelja je donositi odluke o tome kako pomoći učenicima u razvijanju najbolje strategije te ih navesti na strateško razmišljanje o problemskom zadatku s kojim se suočavaju, budući da je postavljanje problema i traženje rješenja važna sastavnica matematike i matematičke zrelosti.

Ključne riječi: igre u nastavi, matematička zrelost, vjerojatnost, djeljivost brojeva, prosti i složeni brojevi, razvijanje strategija, logičko razmišljanje

Title and summary

Mathematical games in teaching math

Nowadays, learning has become student-centered, which means that students are the ones solving problems, reaching conclusions based on research as well as developing logical thinking. Teachers are no longer the only source of knowledge in the classroom, their task is to organize the lesson and motivate their students. In order to achieve greater interest of students for the teaching materials, games are introduced in the classroom, which enables easier learning and understanding of the problems at hand by stepping away from traditional solving of problem tasks. Easily available and affordable tools are used in the games presented in this paper and each game has multiple variations and can be adjusted to different levels of education. While playing games, students can independently create and explore strategies which will lead them to positive outcomes and they can also learn from their classmates. Teachers' task is to make decisions on how to teach their students to develop the best possible strategy and guide them to strategical thinking about the problem task which they are dealing with, since setting up problem tasks and finding their solutions is an important component of mathematics and mathematical maturity.

Key words: classroom games, mathematical maturity, probability, divisibility, prime and composite numbers, developing strategies, logical thinking

Životopis

Rođena sam 8. 2. 1992. u Osijeku. Od 1998. do 2006. pohađala sam Osnovnu školu Davorin Trstenjak u Čađavici te nakon toga upisala Opću gimnaziju Marka Marulića u Slatini. Gimnaziju sam završila položenom Državnom maturom školske godine 2009./2010. te 2010. upisala Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.