Dualni prostori

Aleksov, Doris

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Doris Aleksov

Dualni prostori

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Doris Aleksov

Dualni prostori

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Osijek, 2018.

Sažetak

Svaki vektorski prostor V ima odgovarajući dualni prostor koji se sastoji od lineranih funkcionala na V. Za ovako definiran dualni prostor pokazat ćemo kako odrediti njegovu bazu ukoliko poznajemo bazu vektorskog prostora V. Također, uvest ćemo i dual duala te pokazati da je on izomorfan početnom prostoru. Kao posebno zanimljiv potprostor dualnog prostora izdvojit ćemo anihilator te promotriti neka njegova važna svojstva.

Ključne riječi

linearni funkcionali
dualni prostor
dualna baza
dual duala
anihilator

Dual spaces

Summary

Each vector space V has a corresponding dual space consisting of liner functionals at V. For dual space defined in this way we will show how to determine its basis if we know the basis vectors of space V. Also, we will introduce double dual and show that it is isomorphic to the initial space. As an especially interesting subspace of the dual space, we will mention the annihilator and give some of his important properties.

Key words

linear functionals
dual space
dual basis
double dual
annihilator

Sadržaj

Uvod **i**

1 Osnovno o linearnim funkcionalima **1**

2 Dualni prostor i dualna baza **3**

3 Dual duala **6**

4 Anihilator **7**

4.1 Svojstva anihilatora 8

Literatura **9**

Uvod

Neka je K neprazan skup na kojem su zadane dvije binarne operacije $+ : K \times K \to K, (a, b) \mapsto a + b, \forall a, b \in K$, i $\cdot : K \times K \to K, (a, b) \mapsto ab, \forall a, b \in K$. Uređenu trojku $(K, +, \cdot)$ zovemo polje ako vrijedi

- $(K, +)$ je Abelova grupa s neutralnim elementom 0
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa s neutralnim elementom 1
- distributivnost množenja s obzirom na zbrajanje $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in K$

Primjer 1. **a)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *nije polje ($(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ nije grupa)*

b) $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ *su polja uz standardne operacije*

Neka je V neprazan skup i K polje. Neka su zadane operacije $+ : V \times V \to V, (a, b) \mapsto a + b, \forall a, b \in V$, i $\cdot : K \times V \to V, (\lambda, a) \mapsto \lambda a, \forall a \in V, \forall \lambda \in K$. Uređenu trojku $(V, +, \cdot)$ zovemo vektorski prostor nad poljem K ako vrijedi

- $(V, +)$ je Abelova grupa
- distributivnost obzirom na zbrajanje u V: $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V, \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
- distributivnost obzirom na zbrajanje u K: $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V, (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
- kvaziasocijativnost $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V, (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$
- jedinica iz polja K ima svojstvo $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$

Primjer 2. **a)** $\mathbb{R}$ *je vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$*,*

b) $\mathbb{C}$ *je vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$*,*

c) $\mathbb{C}$ *je vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$*, općenito, svako polje je vektorski prostor nad samim sobom i nad svakim svojim potpoljem,*

d) $\mathbb{R}$ *nije vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$*, jer* $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nije dobro definirano (vrijednosti ovakvog množenja biti će u* $\mathbb{C}$*).*

Neka je V vektorski prostor nad K. Baza vektorskog prostora V je podskup B⊆V za koji vrijedi da je B linearno nezavisan skup, te da razapinje V. Kažemo da je V konačnodimenzionalan vektorski prostor ako postoji konačan skup koji je baza za V. Broj elemenata bilo koje baze konačnodimenzionalnog prostora V nad poljem K naziva se dimenzija od V i označava $dimV$ ili $dim_K V$.

Primjer 3. **a)** $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$*, baza vektorskog prostora* $\mathbb{R}$ *nad* $\mathbb{R}$ *je* $\{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$*,*

b) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$*, baza vektorskog prostora* $\mathbb{C}$ *nad* $\mathbb{R}$ *je* $\{1, i\}$*,*

c) *$dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$, baza vektorskog prostora $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ je $\{z\}, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$*

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. Svako preslikavanje $A : V \to W$zove se operator. Operator A je aditivan ako je $A(v + w) = A(v) + A(w), \forall v, w \in V$, homogen ako je $A(\lambda v) = \lambda A(v), \forall v \in V, \forall \lambda \in K$. Za operator koji je aditivan i homogen kažemo da je linearan operator.

1 Osnovno o linearnim funkcionalima

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Linearan funkcional na V je preslikavanje $f : V \to K$ takvo da $\forall u, v \in V, \lambda \in K$ vrijedi $f(u + v) = f(u) + f(v)$ i $f(\lambda a) = \lambda f(a)$. Ekvivalentno tome, linearan funkcional je linearan operator sa V u K, gdje je polje K.

Primjer 4. *Neka je V unitaran vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Za svaki $v \in V$definiramo preslikavanje $f_v : V \to \mathbb{R}$ sljedećom formulom $f_v(w) = \langle v, w\rangle, \forall w \in V$. Pokažimo da je ovako definirano preslikavanje zaista linearan funkcional.*
Aditivnost. Neka su $x, y \in V$. Vrijedi li $f_v(x + y) = f_v(x) + f_v(y)$?

$$f_v(x + y) = \langle v, x + y\rangle = \langle v, x\rangle + \langle v, y\rangle = f_v(x) + f_v(y).$$

Homogenost. Neka su $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Vrijedi li $f_v(\lambda x) = \lambda f_v(x)$?

$$f_v(\lambda x) = \langle v, \lambda x\rangle = \lambda\langle v, x\rangle = \lambda f_v(x).$$

Kako vrijede aditivnost i homogenost operator f_v zaista je linearan funkcional.

Za vektorske prostore V i W nad istim poljem K sa $L(V, W)$ ćemo označavati skup svih linearnih operatora $A : V \to W$. U taj skup uvodimo operaciju zbrajanja: ako su $A, B \in L(V, W)$ sa $A + B$ označavamo operator sa V u W definiran sa

$$(A + B)(V) = A(v) + B(v), v \in V.$$

Nadalje, uvodimo i operaciju množenja elemenata od $L(V, W)$ skalarima iz polja K : ako je $A \in L(V, W)$ i $\lambda \in K$ sa λA označavamo operator sa V u W definiran sa

$$(\lambda A)(v) = \lambda(A(v)), v \in V.$$

Tako definirani operatori $A + B$ i λA su linearni, dakle elementi $L(V, W)$. Također, uz ovako definirane operacije skup $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W postaje vektorski prostor nad poljem K.

Teorem 1. *Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K dimenzija m i n, onda $L(V, W)$ nad poljem K ima dimenziju mn.*

Dokaz: Dokazati ćemo teorem tako što ćemo pokazati da se baza od $L(V, W)$ nad K sastoji od mn elemenata. Neka je $v_1, v_1, ..., v_m$ baza za V nad K i $w_1, w_2, ...w_n$ baza za W nad K.

Ako je $v \in V, v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$ gdje su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ jedinstveno određeni elementi iz K, definiramo $T_{ij} : V \to W$ sa $T_{ij}(v) = \lambda_i w_j$. Očito ukoliko uvrstimo bazu, dobivamo $T_{ij}(v_k) = 0$ za $k \neq i$ i $T_{ij}(v_i) = w_j$. Lako se pokaže da je T_{ij} element $L(V, W)$. Kako i može biti bilo koji od brojeva $1, 2, ...m$, te j bilo koji od brojeva $1, 2, ..., n$, ima mn operatora T_{ij}. Tvrdimo da mn elemenata tvori bazu za $L(V, W)$ nad K. Neka je sada $S \in L(V, W)$. Kako je $S(v_1) \in W$ i kako je bilo koji element iz W linearna kombinacija vektora $w_1, w_2, ..., w_n$ slijedi

$$S(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + ... + \alpha_{1n} w_n$$

za neke $\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n} \in K$. Štoviše

$$S(v_i) = \alpha_{i1} w_1 + \alpha_{i2} w_2 + ... + \alpha_{in} w_n$$

za $i = 1, 2, ..., m$. Neka je

$$S_0 = \alpha_{11} T_{11} + \alpha_{12} T_{12} + ... + \alpha_{1n} T_{1n} + \alpha_{21} T_{21} + \alpha_{22} T_{22} + ... + \alpha_{2n} T_{2n} + ... + \alpha_{i1} T_{i1} +$$

$$\alpha_{i2} T_{i2} + ... + \alpha_{in} T_{in} + ... \alpha_{m1} T_{m1} + \alpha_{m2} T_{m2} + ... + \alpha_{mn} T_{mn}.$$

Odredimo $S_0(v_k)$

$$S_0(v_k) = (\alpha_{11} T_{11} + ... + \alpha_{m1} T_{m1} + ... + \alpha_{nm} T_{nm})(v_k) =$$

$$\alpha_{11}(T_{11}(v_k)) + \alpha_{12}(T_{12}(v_k)) + ... + \alpha_{m1}(T_{m1}(v_k)) + ... + \alpha_{mn}(T_{mn}(v_k)).$$

Kako $T_{ij}(v_k) = 0$ za $i \neq k$ i $T_{kj}(v_k) = w_j$ gornja suma se reducira na

$$S_0(v_k) = \alpha_{k1} w_1 + ... + \alpha_{kn} w_n$$

što je jednako $S(v_k)$. Kako linearni operatori S_0 i S poprimaju iste vrijednosti na svim vektorima baze u V, $S = S_0$, pa se S može prikazati kao linearna kombinacija funkcionala T_{ij}. Ukratko, pokazali smo da mn elemenata $T_{11}, T_{12}, ...T_{1m}, ...T_{m1}, ..., T_{mn}$ razapinju $L(V, W)$. Kako bismo pokazali da oni čine bazu za $L(V, W)$ preostalo je pokazati da su linearno nezavisni. Pretpostavimo

$$\beta_{11} T_{11} + \beta_{12} T_{12} + ... + \beta_{1n} T_{1n} + ... + \beta_{i1} T_{i1} + ... + \beta_{in} T_{in} + ... + \beta_{m1} T_{m1} + ... + \beta_{mn} T_{mn} = 0$$

pri čemu su $\beta_{ij} \in K$. Djelujemo li s tako definiranim operatorom na v_k dobivamo

$$0 = (\beta_{11} T_{11} + ... + \beta_{ij} T_{ij} + ... + \beta_{mn} T_{mn})(v_k) = \beta_{k1} w_1 + \beta_{k2} w_2 + ... + \beta_{kn} w_n.$$

Međutim, $w_1, ..., w_n$ su linearno nezavisni, te je zato $\beta_{kj} = 0, \forall k, \forall j$. Zbog toga je skup $\{T_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ linearno nezavisan i zaista čini bazu za $L(V, W)$. $\square$

Direktna posljedica prethodnog teorema je ako je V različit od 0 i W različit od 0 konačnodimenzionalni vektorski prostori, onda se $L(V, W)$ nikada ne sastoji od niti jednog elementa, što proizlazi iz dimenzije $mn \geq 1$. Također, druga direktna posljedica je ako je $dim_K V = m$ onda je $dim_K L(V, K) = m$. Jasno nam je da kako je K vektorski prostor sam nad sobom njegova dimenzija jednaka je 1, te primjenom gornjeg teorema proizlazi navedena činjenica.

2 Dualni prostor i dualna baza

Dualni prostor V^* vektorskog prostora V je skup linearnih funkcionala na V. Zbrajanje i množenje skalarom definirano je standardno na sljedeći način:
Neka su $f, g \in V^*$ i $\lambda \in K$,
$f + g$ je linearan funkcional dan sa

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \forall v \in V$$

λf je linearan funkcional dan sa

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v), \forall v \in V.$$

Važno je napomenuti da je $0 \in V^*$ linearan funkcional definiran $0(v) = 0, \forall v \in V$, te smo samim time pokazali da je V^* vektorski prostor nad K.

Primjer 5. *Neka je $K = \mathbb{K}^n$ prostor svih vektora oblika $n \times 1$. Dualni prostor V^* prirodno je vektorski prostor vektora oblika $1 \times n$. Vektore ovih oblika možemo pomnožiti matrično i dobiti vektore dimenzije 1×1 koji su elementi prostora $\mathbb{K}$. Ovo nam pokazuje da je svaki vektor oblika $1 \times n$ linearan funkcional sa V na $\mathbb{K}$. Da bismo pokazali da je to zaista tako konstruirati ćemo izgled baze. Pretpostavimo radi jednostavnosti da je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, sa pripadnom bazom $\{e_1, ..., e_n\}$. Sada za svaki $1 \leq i \leq n$, definiramo $f_i : V \to \mathbb{K}$ sa*

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & za\ i = j \\ 0 & u\ suprotnom \end{cases}.$$

Ovo znači da za $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ dobivamo $f_i(v) = \alpha_i$, što je linearan funkcional na V.

Dualni prostor V^* linearnih funkcionala možemo promatarati kao vektorski prostor linearnih operatora iz $Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$. Za proizvoljne vektorske prostore V i W, dimenzija m, n, lako se pokaže da je $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ izmorfan prostoru $M(n \times m, \mathbb{K})$ matrica dimenzije $n \times m$, koji je očito dimenzije mn. U posebnom slučaju kada je $W = \mathbb{K}$ imamo $dim(V^*) = m = dim(V)$.

Prirodan način da konstruiramo bazu $e^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ u V^* je koristeći bazu $e = \{e_1, ...e_n\}$ od V. Funkcional e_1^* predstavlja koeficijent u jedinstvenom razvoju $v = \sum_i^n e_i e_i$ vektora $v \in V$ tako da

$$\langle e_i^*, \sum_{k=1}^{n} e_k e_k \rangle = e_i$$

za $1 \leq i \leq n$.
Kao direktna posljedica, linearan funkcional $e_i^* : V \to \mathbb{K}$ u potpunosti je određen sa

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

što slijedi jer je $e_j = 0 \cdot e_1 + ... + 1 \cdot e_j + ... + 0 \cdot e_n$. Sada je jasno da je

$$\langle e_i^*, \sum_{k=1}^{n} e_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} e_k \langle e_i^*, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} e_k \delta_{ik} = e_i$$

kao što je i bilo očekivano.

Ovime smo pokazali da vektori $e_1^*, ..., e_n^*$ zaista čine bazu za V^* , koja je dualna baza baze e u V, što pokazuje da je $dim(V^*) = dim(V) = n$. Treba primjetiti da kako bismo definirali dualne vektore e_i^* moramo krenuti od baze za V, tj. ako imamo samo jedan $v \in V$ ne postoji način da odredimo $v^* \in V^*$.

Teorem 2. *Ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i e baza za V, vektori* $e^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ *su baza za* V^*.

Dokaz: Nezavisnost.
Ako je $l = \sum_{j=1}^n e_j e_j^*$ nulvektor u V^* onda $\langle \sum_{j=1}^n e_j e_j^*, v\rangle = 0, \forall v \in V$, te posebno za $v = e_i$ imamo

$$0 = \langle l, e_i\rangle = \sum_{j=1}^n e_j \langle e_j^*, e_i\rangle = \sum_{j=1}^n e_j \delta_{ij} = e_i$$

za $1 \leq i \leq n$, čime smo pokazali nezavisnost vektora e_i^*.
Razapinjanje.
Ako je $l \in V^*$ i $e_i = \langle l, e_i\rangle$ tvrdimo da je l jednak $l' = \sum_{j=1}^n \langle l, e_j\rangle \cdot e_j^*$. Dovoljno je pokazati da l i l' imaju jednake koeficijente kada ih zapišemo u bazi e_i od V, što je očito zbog

$$\langle l', e_i\rangle = \langle \sum_j \langle l, e_j\rangle e_j^*, e_i\rangle = \sum_j \langle l, e_j\rangle \cdot \langle e_j^*, e_i\rangle = \sum_j \langle l, e_j\rangle \cdot \delta_{ij} = \langle l, e_i\rangle$$

za $1 \leq i \leq n$. □

Korolar 1. *Ako je V konačnodimenzionalan* $e = e_i$ *baza za V i* $e^* = e_i^*$ *dualna baza za* V^* *, onda se bilo koji* $l \in V^*$ *može zapisati kao*

$$l = \sum_{n=1}^n \langle l, e_j\rangle \cdot e_i^*$$

u bazi e^*.

Primjer 6. *Ako je V konačnodimenzionalan, te* $f_v(w) = \langle v, w\rangle, \forall w \in V$ *dani linearan funkcional, onda su V i* V^* *izomorfni, te bilo koju bazu od V preslikamo direktno u bazu za* V^*. *Međutim, to ne znači da će danu bazu od V preslikati u dualnu bazu od* V^* *općenito. Štoviše, to se događa samo onda kada je baza za V ortonormirana. Na primjer, neka je* $V = \mathbb{R}_2[x]$ *vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2. Definiramo*

$$\langle p_1, p_2\rangle = \int_0^1 p_1(l)p_2(l)dl.$$

Standardna baza $\{1, x, x^2\}$ *nije ortonormirana, ima dualnu bazu* $\{q_0, q_1, q_2\}$ *takvu da* $q_i(x^j) = \delta_{ij}$ *za* $i, j = 0, 1, 2$. *Stoga, ako je* $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in V$ *onda je*

$$q_0(p) = \alpha_0 q_1(p) = \alpha_1 q_2(p) = \alpha_3$$

Pogledajmo sada što gore opisan kanonski izmorfizam djeluje na vektore $1, x, x^2$ *iz* V. *Kao prvo, za svaki* $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in V$

$$\langle 1, p\rangle = \int_0^1 p(t)dt = \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2.$$

Ukoliko usporedimo ovo sa prethodnom formulom, možemo zaključiti da je 1 pridružen vektoru $\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \neq q_0$. *Slično se događa kada gledamo ostale bazne vektore. Ovaj primjer nam pokazuje da dualni prostor* V^* *može biti "veći" od* V *ako* V *nije konačnodimenzionalan vektorski prostor. Neka je* $V = \mathbb{C}[0,1]$ *sa uobičajenim skalarnim produktom* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. *Sada imamo injektivan linearan operator* $V \to V^*$, *pa možemo* V *smatrati podprostorom od* V^*. *Međutim, pogledajmo linearan funkcional* $\emptyset_0$ *u* V, $\emptyset_0(f) = f(0)$ *za svaki* $f \in \mathbb{C}[0,1]$. *Tada je* $\emptyset_0 \in V^*$, *ali nije u slici od* V. *Da bismo to vidjeli, pretpostavimo suprotno, pretpostavimo da postoji funkcional* $f_0 \in V$ *koji se preslika u* $\emptyset_0$. *Tada moramo imati* $\int_0^1 f_0(t)f(t)dt = f(0), \forall f \in \mathbb{C}[0,1]$. *Sada za svaki pozitivan broj n, neka je*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & za\ 0 \leq c \leq \frac{1}{n} \\ 0 & za\ \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Sada $f_n \in \mathbb{C}[0,1]$*za svaki* n, $f_n(0) = 1$ *i* $0 \leq f_n(x) \leq 1$ *za svaki* $x \in [0,1]$. *Stoga za svaki* n *sada imamo*

$$1 = |\int_0^1 f_0(t)f_n(t)dt| \leq \int_0^1 |f_0(t)(1-nt)dt| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |f_0(t)|dt.$$

Zadnji integral može biti veoma malen jednostavno puštajući n *da beskonačno naraste, što nema smisla, pa stoga ne postoji niti jedan takav* f_0.

Teorem 3. *Pretpostavimo da je* V n*-dimenzionalan vektorski prostor nad* K.

1. V^* *je također* n*-dimenzionalan, te su* V *i* V^* *izmorfni, tj.* $V \simeq V^*$.

2. *Za* $v \in V, f(v) = 0, \forall f \in V^*$ *ako i samo ako* $v = 0$.

Dokaz: 1. Proizlazi iz konstrukcije baze dualnog prostora i klasifikacije konačnodimenzionalnih vektorskih prostora.

2. Lako se vidi da $f(0) = 0, \forall f \in V^*, (f(0) = f(0v) = 0f(v) = 0)$. Pretpostavimo suprotno, pretpostavimo $v \neq 0 \in V$. Sada možemo konstruirati bazu $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ za V sa $e_1 = v$, te pripadnu dualnu bazu $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ za V^* . Sada za element $f_1 \in V^*$ mora biti $f_1(v) = 1 \neq 0$. Dakle, ako je $f(v) = 0, \forall f \in V^*$ onda je $v = 0$.

□

Napomena 1. *Zaključak da su* V *i* V^* *izomorfni vektorski prostori generalno govoreći nije točan ako* V *nije konačnodimenzionalan vektorski prostor.*

3 Dual duala

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Znamo da je konačno dimenzionalan vektorski prostor V izmorfan dualnom prostoru V^*. Taj izmorfizam nije "veoma dobar" jer ovisi o izboru baze. Međutim, postoji primjer prirodnog izomorfizma između ta dva vektorska prostora, to je izomorfizam između konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V i dualnog vektorskog prostora V^{**} dualnog prostora V^*. Prostor V^{**} zovemo dual duala V. Elementi koji se nalaze u V^{**} su linearni funkcionali linearnih funkcionala.
Neka je v_0 vektor u V. Za svaki $f \in V^*$ pišemo

$$v_0^*(f) = f(v_0).$$

U ovoj formuli v_0 je fiksan a f varira u V^*, pa je ova formula definirana na V^*. Pokažimo sada da je ovako definiran v_0^* linearan funkcional na V^*. Ako su $f, g \in V^*$ i $\alpha \in \mathbb{K}$ imamo

$$v_0^*(f+g) = (f+g)(v_0) = f(v_0) + g(v_0) = v_0^*(f) + v_0^*(g)$$

i

$$v_0^*(\alpha f) = \alpha f(v_0) = \alpha v_0^*(f)$$

iz čega jasno vidimo da je to zaista linearan funkcional na V^* te je samim time element V^{**}.

Teorem 4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Za svaki $v \in V$, element v^* od V^* definiran je sa*

$$v^*(f) = f(v).$$

Tada je preslikavanje $\phi : v \mapsto v^*$ injektivan linearan operator sa V u V^*. Ako je V konačnodimenzionalan onda je preslikavanje izomorfizam.

Dokaz: Neka su $v, w \in V$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Tada za svaki $f \in V^*$,

$$\phi(v+w)(f) = (v+w)^*(f) = f(v+w) = f(v) + f(w) = v^*(f) + w^*(f) = \phi(v)(f) + \phi(w)(f)$$

Slično,

$$\phi(\alpha v)(f) = (\alpha v)^*(f) = f(\alpha v) = \alpha(v^*(f)) = \alpha\phi(v)(f)$$

te je time preslikavanje ϕ linearno. Kako bismo pokazali da je preslikavanje injekcija pronađimo $Ker\phi$. Pretpostavimo $\phi(v) = 0$ za neki $v \in V$. Tada je $v^*(f) = f(v) = 0$ za svaki $f \in V^*$ što implicira da je $v = 0$ odnosno $Ker\phi = 0$. Zbog toga je očito da je jezgra trivijalna i da je preslikavanje injekcija. Konačno, ako je V konačnodimenzionalan, onda je V^{**} jednake dimenzije kao i V (jer je $dimV = dimV^*$ i $dimV^* = dimV^{**}$), te imamo injektivno linearno preslikavanje između ta dva prostora jednake dimenzije što mora biti izmorfizam kao što smo i zahtjevali. $\square$

Napomena 2. *Prethodno definirano preslikavanje ϕ zovemo prirodno pridruživanje sa V u V^{**}. Ako je prirodno preslikavanje izomorfizam onda je vektorski prostor V refleksivan, pa nam prethodni teorem govori da je svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor refleksivan.*

4 Anihilator

U ovom poglavlju prirodno nam se nameće dodatna struktura da bismo mogli pričati o dužinama i ortogonalnosti vektora, ili ortogonalnom komplementu $W^{\perp}$ nekih potprostora. Kada je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ najčešće to postižemo skalarnim produktom $B : V \times V \to \mathbb{K}$ na V. Međutim, u nedostatku takve strukture svejedno postoji prirodan način određivanja komplementarnog potprostora za bilo koji potprostor $W \subseteq V$, ali komplement

$$W^{\circ} = \{l \in W^{*} : \langle l, w \rangle, \forall w \in W\}(anihilator)$$

je podskup od V^{*} a ne od V. Jasno je vidljivo da je W° vektorski potprostor od V^{*}. Očito je $(0)^{\circ} = V^{*}$ i $V^{\circ} = (0)$, a ako je W pravi podskup od V onda je anihilator W° pravi podskup od V^{*}, pri čemu vrijedi $(0) \subsetneq W^{\circ} \subsetneq V^{*}$.

Teorem 5. *Ako je W potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V, onda je*

$$dim(W) + dim(W^{\circ}) = dim(V)$$

Dokaz: Neka je $W \leqslant V$. Odaberimo bazu $\{e_1, ...e_k\}$ od W i nadopunimo ju do baze za V, $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$. Neka je $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ dualna baza za V^*. Tada funkcionali $e_{k+1}^*, ..., e_n^*$ poništavaju vektore $e_1, ..., e_k$ tj.:

$$e_{k+1}^*, ..., e_n^* \in \{e_1, ..., e_k\}^{\circ} = [\{e_1, ..., e_k\}]^{\circ} = W^{\circ}.$$

Neka je $f \in W^{\circ}$, tada je $f(e_1) = ... = f(e_k) = 0$ iz čega slijedi

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)e_j^* = \sum_{j=k+1}^{n} f(e_j)e_j^*.$$

Ovo nam pokazuje da funkcionali $e_{k+1}^*, ..., e_n^*$ razapinju potprostor W° dualnog prostora V^*, dakle $\{e_{k+1}^*, ..., e_n^*\}$ je baza za W°. Odavde slijedi

$$dim(W^{\circ}) = n - k = dim(V) - dim(W).$$

$\square$

4.1 Svojstva anihilatora

U ovom poglavlju dokazati ćemo neka važna svojstva anihilatora.

Propozicija 1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka su S podskup od V^* i W potprostor od V^*. Tada vrijedi*

1. $S^\circ = [S]^\circ$
2. $[S] = S^{\circ\circ}, W^{\circ\circ} = W$

Dokaz:

1. Neka je S podskup od V. Iz $S \subseteq [S]$ slijedi obrnuta inkluzija za anihilatore tj.$[S]^\circ \subseteq S^\circ$. Neka je $f \in S^\circ$ i $x \in S^\circ$. Sada x možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora iz S, pa zbog linearnosti funkcionala f imamo da je $f(x) = 0$. Dakle, $f \in [S]^\circ$ iz čega slijedi i obratna inkluzija $[S]^\circ \supseteq S^\circ$.

2. Za potprostor W od V očito vrijedi $W \subseteq W^{\circ\circ}$. Sada znamo

$$dimW^{\circ\circ} = dimV^* - dimW^\circ = dimV - (dimV - dimW) = dimW$$

odakle je jasno da je $W = W^{\circ\circ}$. Sada znamo da također vrijedi $[S] = [S]^{\circ\circ}$ (jer znamo $S \subseteq V$) pa je

$$[S] = [S]^{\circ\circ} = ([S]^\circ)^\circ = (S^\circ)^\circ = S^{\circ\circ}.$$

□

Propozicija 2. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem i $A \in L(V, W)$.*

1. $Ker(A^*) = Im(A)^\circ, Ker(A) = Im(A^*)^\circ, Im(A^*) = Ker(A)^\circ, Im(A) = Ker(A^*)^\circ$
2. $r(A) = r(A^*)$

Dokaz:

1. Poistovjetimo li V sa V^{**} i W sa W^{**} vidimo da je prva jednakost ekvivalentna s drugom, dok je treća jednakost ekvivalentna sa četvrtom. Međutim, pogledamo li prethodnu propoziciju vidimo da je prva jednakost ekvivalentna sa četvrtom, dok je druga jednakost ekvivalentna sa trećom. Dakle, sve jednakosti su međusobno ekvivalentne, pa je dovoljno dokazati samo jednu od njih. Za $f \in W^*$ imamo

$$f \in Ker(A^*) \Leftrightarrow A^*f = 0 \Leftrightarrow (A^*f)(v) = 0, \forall v \in V \Leftrightarrow$$

$$f(Av) = 0, \forall v \in V \Leftrightarrow f(w) = 0, \forall w \in Im(A) \Leftrightarrow f \in Im(A)^\circ$$

Dakle, $Ker(A^*) = Im(A)^\circ$.

2. $r(A) = dim(Im(A)) = dim(Ker(A)^*)^\circ = dim(W^*) - dim(Ker(A^*)) = dim(W^*) - d(A^*) = r(A^*)$.

□

Literatura

[1] U.H. Gerlach, *The Concrete to the abstract to the concrete: The dual of a vector space*, The Ohio State University, 2016.

[2] R. van Hassel, *Dual spaces*, Technische Universiteit Eindhoven, Nizozemska, 2006.

[3] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2008.

[4] S. Kurepa, *Konačnodimenzionalni vektorski prostori*, Liber, Zagreb, 1992.

[5] G. Muić, M. Primc, *Predavanja iz vektorskih prostora*, skripta, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/vp.pdf`.

[6] P.A.S. Naiduo, B.G. Mapari, P. Jha, *Topolofies on dual spaces and spaces of linear mappings*, International Journal od Mathematics Research, 2016, 25–28.