Stirlingovi polinomi

Majić, Monika

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Monika Majić

Stirlingovi polinomi

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Monika Majić

Stirlingovi polinomi

Diplomski rad

Voditelj: doc.dr.sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod

Jedna od grana matematike je kombinatorna matematika čiji je jedan od glavnih ciljeva proučavanje specijalnih brojeva kao što su primjerice Fibonaccijevi brojevi, Mersenneovi brojevi, Catalanovi brojevi, Bernoullijevi brojevi i slično. Svi ovi brojevi su detaljno izučavani i postoje brojni radovi koji se bave njihovim značenjem, svojstvima i problematikom. Kroz ovaj rad ćemo ukratko analizirati neke vrste specijalnih brojeva a poseban naglasak staviti ćemo na proučavanje familije Stirlingovih polinoma.
Navesti ćemo tri varijante Stirlingovih polinoma. Prvi su konvolucijski polinomi koje je proučavao Knuth a koji se definiraju kroz Stirlingove polinome prve vrste. Drugi su Stirlingovi polinomi prve i druge vrste koje je uveo Stanley. Na kraju definiramo Stirlingove polinome pomoću Shefferovog niza.
Predmet ovog diplomskog rada će se zasnivati na kombinatornoj interpretaciji nekih specijalnih brojeva. Poseban značaj ovog rada biti će na opisivanju svih komponenti Stirlingovih brojeva prve i druge vrste kao i njihovih relacija s drugim specijalnim brojevima.
Rad je koncipiran u nekoliko odjeljaka. U prvom odjeljku se upoznajemo sa binomnim koeficijentima, njihovom interpretacijom, svojstvima i definiranjem Pascalovog trokuta. Također se dotičemo Fibonaccijevih brojeva i njihove veze s Pascalovim trokutom. U drugom odjeljku određujemo funkcije izvodnice i konvolucije. Naglasak u trećem odjeljku je stavljen na osnovne pojmove i identitete nekih specijalnih brojeva, kao i njihovu međusobnu relaciju. Zadnji odjeljak ovoga rada se bavi ujedno i glavnom temom a to je definiranje Stirlingovih polinoma i njihovim svojstvima.

2 Binomni koeficijenti

2.1 Binomni koeficijenti i Pascalova rekurzija

Binomni koeficijent označavamo s $\binom{n}{k}$. Interpetiramo ga kao broj načina na koji možemo odabrati k-člani podskup od n-članog skupa.
n zovemo gornji indeks, a k donji indeks. Iz kombinatorne interpretacije slijedi da su $n, k \in \mathbb{N}_0$. Međutim, binomni koeficijenti imaju veliku uporabu pa zbog toga dozvoljavamo da je $n \in \mathbb{C}$, a $k \in \mathbb{Z}$. $\binom{n}{k}$ čitamo "n povrh k".

Primjer 2.1. *Neka je dan skup* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Zapišimo sve* 2*-člane podskupove. To su:*

$$\begin{array}{ccc} \{1,2\}, & \{2,3\}, & \{3,4\}, \\ \{1,3\}, & \{2,4\}, & \{3,5\} i \\ \{1,4\}, & \{2,5\}, & \{4,5\}. \\ \{1,5\}, & & \end{array}$$

Ovih podskupova ima 10*, što odgovara broju načina na koji možemo izabrati* 2 *elementa iz* 5*-članog skupa. Dakle,* $\binom{5}{2} = 10$ *.*

Da bismo izrekli formalnu definiciju, prvo uvedimo pojam padajućih faktorijela.

Definicija 2.1. Padajući faktorijeli u oznaci $(x)_n$ ili $x^{\underline{n}}$ definiraju se kao

$$(x)_n = x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-(n-1)),\ x^{\underline{0}} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Primjerice $(20)_5 = 20^{\underline{5}} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$.

Definicija 2.2. Binomni koeficijent definiramo kao

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}, & k \in \mathbb{Z}_0^+, \\ 0, \quad k \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

Primjer 2.2. $\binom{-1}{4}$ *nema kombinatornu interpretaciju ali svejedno ga možemo izračunati.*

$$\binom{-1}{4} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1.$$

Prvih nekoliko vrijednosti možemo promotriti u sljedećoj tablici, odnosno Pascalovom trokutu nazvanom po francuskom matematičaru Blaisu Pascalu.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Tablica 1: Pascalov trokut.

Pascalov trokut je niz brojeva zapisanih u oblik trokuta. Prazne ćelije su nule prema definiciji.

Primjerice $\binom{1}{3} = \frac{1 \cdot 0 \cdot (-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 0.$

Iz trokuta uočavamo da vrijedi:

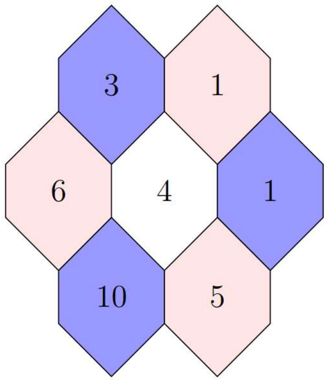
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$ što znači da je prvi i zadnji broj u svakom retku uvijek 1.

$\binom{n}{1} = n,$ odnosno drugi broj u svakom retku je broj retka.

$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$ odnosno suma svakog retka iznosi $2^n, \ \forall n \in \mathbb{R}.$

Suma elemenata svakog retka jednaka je dvostrukoj sumi prethodnog.

Postoje brojne veze među brojevima u Pascalovom trokutu. Naprimjer, navedimo heksagonalno svojstvo. Promotrimo sljedeću ilustraciju:



Slika 1: Heksagonalno svojstvo u Pascalovom trokutu.

Brojevi $3, 1, 1, 15, 10, 6,$ i 3 čine heksagon. Ovo svojstvo kaže da ako pomnožimo svaki drugi broj iz heksagona, dobit ćemo isti rezultat. To bi na našem primjeru izgledalo:
$3 \cdot 1 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6$. Svojstvo vrijedi i za svaki drugi formiran heksagon iz Pascalovog trokuta.

2.2 Osnovni identiteti

Navedimo osnovna svojstva binomnih koeficijenata.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0^+, \quad n \geq k \geq 0.$

Dokaz. Množenjem brojnika i nazivnika iz Definicije 2.2. s $(n-k)!$ dolazimo do ovog rezultata. $\square$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0^+, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \geq k \geq 0.$$

Ovo svojstvo zovemo *simetrija*. Uočavamo je u Pascalovom trokutu tj, redoslijed brojeva u retku je isti slijeva nadesno i zdesna nalijevo.
Simetrija kaže ako odaberemo k elemenata od ukupno n, znači da preostaje $n-k$ koje nismo odabrali.

Dokaz.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

$\square$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Ovo svojstvo zovemo *apsorpcija*.

Dokaz.

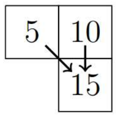
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &\overset{(Def2.2.)}{=} \frac{n^{\underline{k}}}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)^{\underline{k-1}}}{k(k-1)!}\\ &= \frac{n}{k}\frac{(n-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!}\\ &= \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Ovo vrijedi za $k > 0$, a za $k < 0$ obje strane jednadžbe su 0. $\square$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \quad n \geq k.$$

Ovaj rezultat zovemo *adicijska formula*.
Ova formula kaže da je svaki broj u Pascalovom trokutu zbroj brojeva u prethodnom retku,

jednog iznad i jednog iznad i lijevo. Adicijska formula predstavlja rekurziju brojeva u Pascalovom trokutu.



Slika 2: Adicijska formula u Pascalovom trokutu.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)^{\underline{k-1}} \cdot k}{k!} \\
&= \frac{(n-1)^{\underline{k-1}} \cdot n}{k!} \\
&= \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

□

Promotrimo uzastopnu primjenu adicijske formule na primjeru.

Primjer 2.3.

$$
\begin{aligned}
\binom{6}{4} &= \binom{5}{4} + \binom{5}{3} \\
&= \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \\
&= \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1} \\
&= \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0} \\
&= \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0} + \binom{1}{-1}.
\end{aligned}
$$

Budući da je $\binom{1}{-1} = 0$ *možemo stati.*

Ovo nas vodi do opće formule:

$$
\sum_{k \le n} \binom{r+k}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}.
$$

Ova formula izražava binomni koeficijent kao sumu ostalih čiji donji i gornji indeksi ostaju jednako udaljeni. Ovo smo postigli proširivanjem binomnog koeficijenta s najmanjim donjim indeksom.

Promotrimo primjer u kojem ćemo ponavljati proširivanje binomnog koeficijenta s najvećim donjim indeksom.

Primjer 2.4.

$$\begin{aligned}
\binom{6}{3} &= \binom{5}{3} + \binom{5}{2} \\
&= \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \\
&= \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \\
&= \binom{2}{3} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \\
&= \binom{1}{3} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \\
&= \binom{0}{3} + \binom{0}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}.
\end{aligned}$$

Zanemarimo član $\binom{0}{3}$ *jer iznosi 0.*

Općenito vrijedi:

$$\sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Ovo svojstvo zovemo *sumiranje gornjeg indeksa.* Identitet kaže da binomni koeficijent možemo prikazati kao sumu ostalih pri čemu su njihovi donji indeksi jednaki.

Primjer 2.5. *Za slučaj* $m = 1$ *dobivamo formulu za sumu prvih* n *brojeva:*

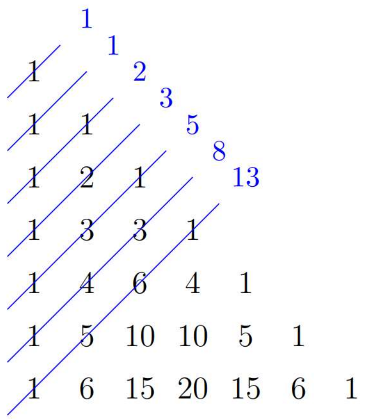
$$\binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = 0 + 1 + \cdots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.3 Fibonaccijevi brojevi

Leonardo od Pise, poznat kao Fibonacci u svojoj knjizi Liber Abaci je 1202. predstavio problem zečeva. Zanima nas koliko će ukupno biti parova zec-zečica nakon određenog razdoblja, odnosno n mjeseci. Dane su pretpostavke da zečevi ne umiru i da svaki par zec-zečica stari barem dva mjeseca dobiju svakog sljedećeg mlade: zeca i zečicu.
Označimo broj parova zec-zečica na početku n-tog mjeseca s F_n i stavimo da je $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Slijedi da je $F_2 = 1$. $F_3 = 2$ jer na početku trećeg dobivamo i jedan novi par.
Dolazimo do rekurzije $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, budući da na početku $(n+2)$.-og mjeseca imamo F_{n+1} starih parova i F_n novih.
n-ti Fibonaccijev broj označavamo s F_n, a niz brojeva koji zadovoljava rekurziju zove se Fibonaccijev niz. Nekoliko prvih vrijednosti možemo promotriti u idućoj tablici:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tablica 2: Fibonaccijevi brojevi.



Slika 3: Fibonaccijevi brojevi u Pascalovom trokutu.

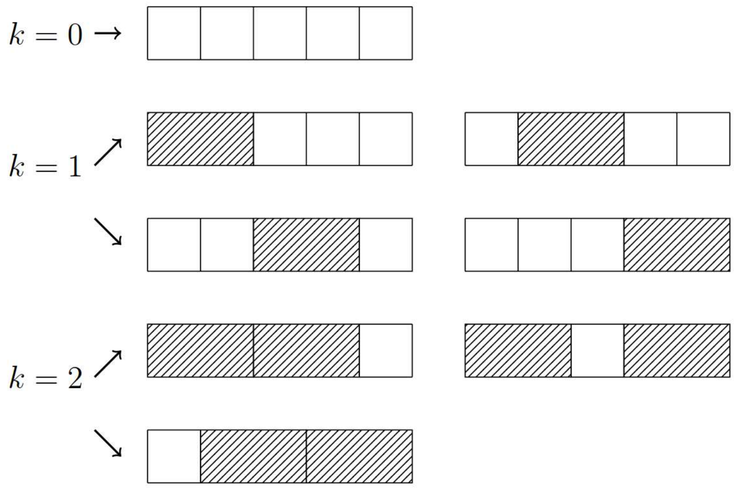
Iz slike uočavamo da su sume dijagonala zapravo Fibonaccijevi brojevi. Ovo možemo zapisati kao:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}, \quad \text{uz početne uvjete } F(0) = F(1) = 1.$$

F_{n+1} je broj načina na koje pločicu dimenzije $1 \times n$ možemo pokriti pločicama dimenzije 1×2 i pločicama dimenzije 1×1.

Dokaz. Ako u pokrivanju koristimo k pločica dimenzije 1×2, onda nam preostaje $n - 2k$ pločica dimenzije 1×1. Ukupno smo upotrijebili $n - k$ pločica i to je $\binom{n-k}{k}$ načina na koje možemo pokriti pločice. Sumiranjem po svim mogućim k dobivamo identitet. □

Primjer 2.6. *Neka je dana pločica dimenzije* 1×5. *Odredimo broj načina na koje ju možemo pokriti s pločicama dimenzije* 1×2 *i* 1×1.



Slika 4: Načini popunjavanja pločice dimenzije 1×5.

Ukupno imamo 8 *načina za pokrivanje, što odgovara* F_6.

3 Funkcije izvodnice i konvolucije

Definicija 3.1. Neka je $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ zadani niz brojeva. Funkcija izvodnica je red potencija

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{k \geq 0} a_k z^k.$$

Kažemo da je a_k k-ti koeficijent uz z^k u $A(z)$ i pišemo

$$a_k = [z^k]A(z).$$

Neka je $A(z)$ funkcija izvodnica za $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ i $B(z)$ funkcija izvodnica za $(b_0, b_1, b_2, \dots)$. Tada je umnožak $A(z)B(z)$ red potencija
$(a_0+a_1z+a_2z^2+\dots)(b_0+b_1z+b_2z^2+\dots) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots$.
Koeficijent uz z^n u ovom umnošku je $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Ako želimo izračunati sumu oblika $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ i ako znamo funkcije izvodnice $A(z)$ i $B(z)$, onda je $c_n = [z^n]A(z)B(z)$. Ovako definiran niz (c_n) zove se *konvolucija* nizova (a_n) i (b_n).
Uočavamo da konvolucija nizova odgovara koeficijentu u umnošku njihovih funkcija izvodnica.

Primjer 3.1. *Odredimo funkciju izvodnicu za niz Fibonaccijevih brojeva (F_n).*

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} F_n z^n.$$

Množenjem ovog reda potencija s z i z^2 dobivamo:

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + F_4 z^4 + F_5 z^5 + \cdots \tag{1}$$
$$zF(z) = F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + F_3 z^4 + F_4 z^5 + \cdots \tag{2}$$
$$z^2F(z) = F_0 z^2 + F_1 z^3 + F_2 z^4 + F_3 z^5 + \cdots \tag{3}$$

Ako od jednadžbe (1) oduzmemo (2) i (3) dobivamo:

$F(z) - zF(z) - z^2F(z) = z$. Dakle, $F(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2}$.

Došli smo do rješenja ali zapravo želimo da funkcija izvodnica ima oblik

$$\frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z} = A \sum_{n \geq 0} (\alpha z)^n + B \sum_{n \geq 0} (\beta z)^n = \sum_{n \geq 0} (A\alpha^n + B\beta^n) z^n. \tag{4}$$

Trebamo naći konstante A, B, α i β takve da je

$$\frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z} = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Slijedi:

$$(1 - \alpha z)(1 - \beta z) = 1 - z - z^2$$
$$A(1 - \beta z) + B(1 - \alpha z) = z.$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} := \phi, \qquad A = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} := \hat{\phi}, \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Stoga je

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right).$$

Dodatno, iz (4) možemo dobiti formulu za koeficijente uz z^n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n). \tag{5}$$

3.1 Konvolucija za binomne koeficijente

Generalni konvolucijski identiteti, za $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r} = \binom{tn+r+s}{n}.$$

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r}\cdot\frac{s}{tn-tk+s} = \binom{tn+r+s}{n}\frac{r+s}{tn+r+s}.$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(tk+r)^k\cdot(tn-tk+s)^{n-k}\cdot\frac{r}{tk+r} = (tn+r+s)^n.$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(tk+r)^k(tn-tk+s)^{n-k}\cdot\frac{r}{tk+r}\cdot\frac{s}{tn-tk+s} = (tn+r+s)^n\cdot\frac{r+s}{tn+r+s}.$$

3.2 Fibonaccijeve konvolucije

Izračunajmo $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k}$ što je zapravo konvolucija niza (F_n) sa samim sobom. Prema prethodnom znamo da suma mora biti jednaka koeficijentu uz z^n u $F(z)^2$ pri čemu je $F(z)$ funkcija izvodnica za (F_n).
Trebat će nam sljedeća rekurzija:

$$2F_{n+1} - F_n = \phi^n + \hat{\phi}^n. \tag{6}$$

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz (5). □

Iz Primjera 3.1. slijedi:

$$
\begin{aligned}
F(z)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\phi z)^2} - \frac{2}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi} z)} + \frac{1}{(1-\hat{\phi} z)^2}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(n+1)\phi^n z^n - \frac{2}{5}\sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n + \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(n+1)\hat{\phi}^n z^n \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(n+1)(\phi^n + \hat{\phi}^n) z^n - \frac{2}{5}\sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n \\
&\overset{(6)}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5} z^n.
\end{aligned}
$$

Stoga,

$$
\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}.
$$

4 Specijalni brojevi

4.1 Stirlingovi brojevi druge vrste

4.1.1 Osnovni pojmovi i identiteti

Da bismo razumjeli ove brojeve podsjetimo se prvo pojma particije skupa.

Definicija 4.1. Particija n-članog skupa je familija nepraznih disjunktnih podskupova čija je unija taj skup. K-particija n-članog skupa je particija n-članog skupa pri čemu je k broj nepraznih disjunktnih podskupova.

Primjer 4.1. *Neka je dan skup* $\{1,2,3,4\}$*. Tada je jedna njegova* 3*-particija* $\{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

Definicija 4.2. Za $n, k \in \mathbb{N}_0$ s $\left\{ n \atop k \right\}$ označimo broj k-particija n-članog skupa. $\left\{ n \atop k \right\}$ zovemo Stirlingov broj druge vrste i čitamo "n podskup k".

Primjer 4.2. *Odredimo* $\left\{ 4 \atop 3 \right\}$.
Prema definiciji to je broj tročlanih particija skupa $\{1,2,3,4\}$*. Ispišimo ih.*

$$\begin{aligned} &\{1\} \cup \{2\} \cup \{3,4\}, \qquad && \{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\}, \\ &\{1\} \cup \{2,4\} \cup \{3\}, && \{1,4\} \cup \{2\} \cup \{3\} i \\ &\{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4\}, && \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{4\}. \end{aligned}$$

Dakle, $\left\{ 4 \atop 3 \right\} = 6$.

Vrijedi:

- $\left\{ n \atop n \right\} = 1$ i to je particija $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\}$.
- $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ prema dogovoru. Inače, $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$.
- $\left\{ n \atop k \right\} = 0$ za $0 \leq n < k$.
- $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$ za $n \geq 1$ i to je particija $\{1, \ldots, n\}$.
- $\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$.

  Primjer 4.3. *Neka je dan skup* $\{a,b,c\}$*. Znamo da je broj svih podskupova jednak* 2^n*. Prebrojavanjem svih mogućih podskupova imali bismo i prazan skup, taj skup i podskupove* $\{a\}, \{b,c\}, \ldots$ *Komplement skupa* $\{a\}$ *na* $\{a,b,c\}$ *je* $\{b,c\}$ *i obratno. Možemo zaključiti da bi se tad radilo o istoj* 2*-particiji. Tako bismo dobili za svaki podskup. Stoga dijelimo sve s* 2*. Dakle,*
  $$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{2^n - 2}{2}.$$

- $\left\{ n \atop n-1 \right\} = \binom{n}{2}$. Rastavljanje n elemenata u $n-1$ podskupova nužno znači da ćemo imati jedan skup kardinalnosti 2 i $n-2$ skupova kardinalnosti 1. Stoga biramo samo 2 elementa iz n-članog skupa.

Prvih nekoliko vrijednosti možemo promotriti u sljedećoj tablici.

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$	$\left\{ {n \atop 6} \right\}$	$\left\{ {n \atop 7} \right\}$	$\left\{ {n \atop 8} \right\}$	$\left\{ {n \atop 9} \right\}$	$\left\{ {n \atop 10} \right\}$
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Tablica 3: Stirlingovi brojevi druge vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

U praznim ćelijama se nalaze nule prema gore navedenim svojstvima.
Veće vrijednosti možemo računati pomoću sljedeće rekurzije.

Identitet 4.1. Za $1 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Dokaz. Promatramo gdje se nalazi element n.

- Ako je n jedini u svom podskupu odnosno skupu onda preostalih $n-1$ elemenata možemo razmjestiti u $k-1$ podskupova. Broj takvih particija je $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$.
- Ako n nije jedini onda prvo razmjestimo elemente $1, \ldots, n-1$ u k podskupova. Takvih particija je $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$, a zatim element n možemo staviti u proizvoljan podskup. Dakle, postoji $k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ particija.

Ukupno imamo $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ k-članih particija. □

Primjer 4.4. *Odredimo* $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$ *prethodnom rekurzijom.*
Ako je 5 *jedini element u podskupu onda elemente* 1, 2, 3 *i* 4 *razmještamo u* 2 *preostala podskupa. Ukupan broj particija je* $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. *To su:*

$$\begin{array}{ll}
\{1\} \cup \{2,3,4\} \cup \{5\}, & \{1,3,4\} \cup \{2\} \cup \{5\}, \\
\{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5\}, & \{1,2,4\} \cup \{3\} \cup \{5\} \ i \\
\{1,3\} \cup \{2,4\} \cup \{5\}, & \{1,2,3\} \cup \{4\} \cup \{5\}. \\
\{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{5\}, &
\end{array}$$

Ako 5 *nije jedini onda prvo razmjestimo elemente* 1, 2, 3 *i* 4 *u* 3 *podskupa. Broj particija je* $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6$ *prema Primjeru 4.2.*
Primjerice 5 *možemo smjestiti u podskup* $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3,4\}$ *kao*

$\{1,5\} \cup \{2\} \cup \{3,4\}$ ili
$\{1\} \cup \{2,5\} \cup \{3,4\}$ ili
$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3,4,5\}$

i tih particija je $3 \cdot \left\{ {4 \atop 3} \right\} = 18$.
Dakle, $7 + 18 = 25 = \left\{ {5 \atop 3} \right\}$.

Ove brojeve možemo računati i pomoću binomnih koeficijenata jer vrijedi:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

Identitet 4.2. Za $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.
1^0 Provjerimo istinitost tvrdnje za $n = 0$ i $n = 1$.

- za $n = 0$ dobivamo $x^0 = \left\{ {0 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}}$.
- za $n = 1$ dobivamo $x^1 = \left\{ {1 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} + \left\{ {1 \atop 1} \right\} x^{\underline{1}}$.

2^0 Pretpostavimo da tvrdnja Identiteta 4.2 vrijedi za prirodan broj $n-1$, tj.

$$x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.$$

3^0 Dokažimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n.
Iz $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$ slijedi da je

$$x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}. \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
x^n &= x \cdot x^{n-1} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&\overset{(7)}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} - \left\{ {n-1 \atop n} \right\} nx^{\underline{n}} + \left\{ {n-1 \atop 0} \right\} \cdot 0 \cdot x^{\underline{0}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}\right) x^{\underline{k}} \\
&\overset{(Ident.4.1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

□

Identitet 4.3. Za sve x dovoljno male vrijedi

$$\sum_{n \geq 0}\left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}.$$

Znamo da izraz $\frac{1}{1-jx}$ odgovara sumi geometrijskog reda $1 + jx + j^2x^2 + j^3x^3 + \cdots$ za sve x dovoljno male. Dakle, identitet kaže da je $\left\{ {n \atop k} \right\}$ koeficijent uz x^{n-k} u umnošku

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots)\cdots(1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \cdots).$$

Primjer 4.5. *Za $n = 9$ i $k = 3$, $\left\{ {9 \atop 3} \right\}$ je koeficijent uz x^6 u umnošku*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots)(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots).$$

$\left\{ {9 \atop 3} \right\}$ je suma koeficijenata uz umnoške poput $(1^4 \cdot x^4)(2^1 \cdot x^1)(3^1 \cdot x^1)$. Zanima nas što je proizvoljan umnožak koeficijenata naprimjer $1^4 \cdot 2^1 \cdot 3^1$.
Znamo da je $\left\{ {9 \atop 3} \right\}$ broj 3-članih particija skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Particije zapišimo kao $\{a_1, a_2, \ldots, \} \cup \{b_1, b_2, \ldots, \} \cup \{c_1, c_2, \ldots, \}$ gdje su u svakom skupu elementi raspoređeni od najmanjeg prema najvećem, $1 = a_1 < b_1 < c_1, b_1 = 2+4 = 6$ i $c_1 = 3+4+1 = 8$.
Dakle, uz ove uvjete, broj particija je $1^4 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = 6$. Elementi $2, 3, 4$ i 5 moraju biti u prvom podskupu, 7 može biti ili u prvom ili u drugom podskupu, a 9 može biti ili u prvom ili u drugom ili u trećem podskupu. Zapišimo particije.
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cup \{6\} \cup \{8\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 9\} \cup \{6, 7\} \cup \{8\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cup \{6, 9\} \cup \{8\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7, 9\} \cup \{8\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cup \{6\} \cup \{8, 9\}$ *i*
$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7\} \cup \{8, 9\}$.

Općenito, koeficijent uz x^{n-k} je suma koeficijenata uz umnoške poput $1^{e_1} 2^{e_2} \cdots k^{e_k}$ koji predstavljaju broj k-članih particija tako da je $e_1 + e_2 + \cdots + e_k = n - k$, minimalni elementi podskupova su $a_1 = 1, b_1 = 2 + e_1, c_1 = 3 + e_1 + e_2, d_1 = 4 + e_1 + e_2 + e_3$ do k-tog skupa čiji je minimalni element $k + e_1 + e_2 + \cdots + e_{k-1} = n - e_k$.
Nakon što su minimalni elementi određeni, brojevi od 1 do $b_1 - 1$ moraju ići u prvi podskup, brojevi od b_1 do $c_1 - 1$ mogu ići u prvi ili drugi podskup, brojevi od c_1 do $d_1 - 1$ mogu ići ili u prvi ili u drugi ili u treći podskup, ... i analogno.

4.1.2 Kombinatorna interpretacija

Stirlingov broj druge vrste možemo opisati kao broj načina da se n studenata rasporedi u k jednakih učionica, pri čemu niti jedna učionica ne smije ostati prazna.

Primjer 4.6. *Odredimo na koliko načina možemo 5 studenata rasporediti u 2 jednake učionice.*
Dakle, dan je skup od 5 elemenata koje trebamo rasporediti u 2 jednaka dijela, tako da nijedan ne smije ostati prazan. Zapravo određujemo broj 2-članih particija skupa od 5 elemenata. Rješenje je Stirlingov broj druge vrste $\left\{ {5 \atop 2} \right\}$.

Dokaz. (Identiteta 4.2) Zanima nas na koliko načina n studenata možemo rasporediti u x različitih učionica, gdje neke učionice mogu ostati prazne.
Za $0 \leq k \leq n$ postoji $\left\{ {n \atop k} \right\}$ načina za raspoređivanje studenata u k nepraznih podskupova i $(x)_k$ načina da se svaki takav podskup pridruži učionici. $\square$

4.2 Stirlingovi brojevi prve vrste

4.2.1 Osnovni pojmovi i identiteti

Prvo se podsjetimo pojma permutacije i ciklusa.
Neka je dan skup S. Permutaciju skupa S definiramo kao bijekciju sa S na samog sebe odnosno funkciju α za koju se svaki element pojavljuje točno jednom kao element slike. Radi se o razmještanju elemenata skupa S u određeni poredak, pri čemu je svaki element $s \in S$ zamijenjen s odgovarajućim $\alpha(s)$.

Primjer 4.7. *Dan je skup S=$\{a, b, c\}$. Ispišimo sve njegove permutacije.*

$$(a, b, c), \quad (b, a, c), \quad (c, a, b) \text{ i}$$
$$(a, c, b), \quad (b, c, a), \quad (c, b, a).$$

Naprimjer permutaciju (c, a, b) možemo opisati odgovarajućom funkcijom α definiranom kao: $\alpha(a) = c, \alpha(b) = a$ i $\alpha(c) = b$.

Permutaciju možemo zapisati i u obliku ciklusa. Ovime opisujemo da neprekidno primjenjujemo permutaciju na elemente ciklusa. Bitan je poredak elemenata odnosno nije bitno koji je element prvi, koji drugi i tako dalje.

Primjer 4.8. *Neka je dan skup $\{1, 2, 3\}$. Zapišimo sve njegove permutacije i razmjestimo ih u ovisnosti o broju ciklusa.*
Dakle, postoji jedna permutacija s tri ciklusa a to je $(1, 2, 3)$ čija je ciklička notacija $[1][2][3]$.
Postoje tri permutacije s dva ciklusa a to su:

$(1, 3, 2) = [1][2, 3]$,
$(2, 1, 3) = [1, 2][3]$ i
$(3, 2, 1) = [1, 3][2]$,

te postoje dvije permutacije s jednim ciklusom a to su:

$(3, 1, 2) = [1, 3, 2]$ i
$(2, 3, 1) = [1, 2, 3]$.

Definicija 4.3. Stirlingov broj prve vrste je broj permutacija n-članog skupa koji sadrži k ciklusa. Označavamo ga s $\left[{n \atop k}\right]$, pri čemu su $n, k \in \mathbb{N}_0$ i čitamo "n ciklus k".

Primjer 4.9. *Neka je dan skup $\{1, 2, 3, 4\}$. Ispišimo sve permutacije koje sadrže 2-cikluse.*

$$[1][2, 3, 4], \quad [1][2, 4, 3], \quad [1, 2][3, 4],$$
$$[2][1, 3, 4], \quad [2][1, 4, 3], \quad [1, 3][2, 4] \text{ i}$$
$$[3][1, 2, 4], \quad [3][1, 4, 2], \quad [1, 4][2, 3].$$
$$[4][1, 2, 3], \quad [4][1, 3, 2],$$

Prema definiciji to je Stirlingov broj prve vrste $\left[{4 \atop 2}\right]$ koji iznosi 11.

Vrijedi:

- $\left[{n \atop n}\right] = 1$ i to je permutacija $[1][2][3] \ldots [n]$.

- $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1$, prema dogovoru. Inače $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = 0$.
- $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = 0$, za $0 \le n < k$.
- $\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} = \binom{n}{2}$ budući da je permutacija s $n-1$ ciklusa određena s točno 2 elementa koja se pojavljuju u istom ciklusu.
- $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = (n-1)!$, za $n \ge 1$ budući da permutacija n-članog skupa koji ima 1-ciklus mora biti oblika $[1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ gdje su $a_2, a_3, \dots, a_n$ elementi od 2 do n i postoji $(n-1)!$ načina za njihov poredak.

Prvih nekoliko vrijednosti možemo promotriti iz sljedeće tablice.

n	$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\9\end{bmatrix}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Tablica 4: Stirlingovi brojevi prve vrste $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$.

U praznim ćelijama se nalaze nule prema gore navedenim svojstvima.
Iz tablice uočavamo da je zbroj elemenata u svakom retku jednak $n!$ jer je to broj svih načina na koje možemo rastaviti n-člani skup na cikluse. Ovo možemo zapisati kao:

Identitet 4.4. Za $n \ge 1$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = n!.$$

Veće vrijednosti možemo računati pomoću sljedeće rekurzije.

Identitet 4.5. Za $1 \le k \le n$ vrijedi

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}.$$

Dokaz. Promatramo gdje se nalazi element n.

- Ako je n jedini u svom ciklusu tada se preostalih $n-1$ elemenata može smjestiti u $k-1$ ciklusa i tih permutacija je $\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$.
- Ako n nije jedini tada prvo rasporedimo elemente $1, \dots, n-1$ u k ciklusa i takvih permutacija je $\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$. Zatim element n smjestimo zdesna proizvoljnom elementu. Dobivamo $(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$ permutacija.

Ukupno imamo $\left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$ permutacija s k ciklusa. $\square$

Primjer 4.10. *Odredimo* $\left[{5 \atop 2}\right]$ *pomoću Identiteta 4.5*

- *Pretpostavimo da je* 5 *jedini u svom ciklusu. Tada imamo* $\left[{4 \atop 1}\right]$ *permutacija. To su:*

$$[1,2,3,4][5], \qquad [1,3,4,2][5],$$
$$[1,2,4,3][5], \qquad [1,4,2,3][5]i$$
$$[1,3,2,4][5], \qquad [1,4,3,2][5].$$

- *Pretpostavimo da* 5 *nije jedini u ciklusu. Tada prvo odredimo sve permutacije bez tog elementa. Njih je* $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$ *prema Primjeru 4.9.*
  U svaku permutaciju 5 *možemo smjestiti na* 4 *načina. Naprimjer,* 5 *možemo ubaciti u permutaciju* $[1][2,3,4]$ *kao*

  $[1,5][2,3,4]$ ili
  $[1][2,5,3,4]$ ili
  $[1][2,3,5,4]$ ili
  $[1][2,3,4,5]$.

Ukupno imamo $6 + 11 \cdot 4 = 50$ *permutacija, što odgovara* $\left[{5 \atop 2}\right]$.

Identitet 4.6. Za $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^k = 0.$$

Dokaz. Skup permutacija n-članog skupa ćemo razdvojiti na dva skupa. Prvi je skup permutacija n-članog skupa koji ima paran broj ciklusa i zapišimo ga kao $\sum_{\text{parni k}} \left[{n \atop k}\right]$. Drugi je skup permutacija n-članog skupa koji ima neparan broj ciklusa i zapišimo ga kao $\sum_{\text{ neparni k}} \left[{n \atop k}\right]$.
Za proizvoljnu permutaciju s barem dva elementa, element 2 se mora pojaviti u prvom ciklusu ili kao prvi element drugog ciklusa. U prvom slučaju, permutacija započinje $[1, a_1, a_2, \ldots, a_j, 2, b_1, b_2, \ldots, b_k][c_1, c_2, \ldots] \ldots$, pri čemu su j i k nenegativni. Promjenom te permutacije u $[1, a_1, a_2, \ldots, a_j][2, b_1, b_2, \ldots, b_k][c_1, c_2, \ldots] \ldots$, dobivamo permutaciju gdje su 1 i 2 u različitim ciklusima, i time jedan ciklus više nego u prethodnoj permutaciji.
Analogno, ako su 1 i 2 u različitim ciklusima spajanjem prva dva ciklusa sada su oni u istom, te imamo jedan ciklus manje. Prema tome, svaka permutacija s parnim brojem ciklusa odgovara jedinstvenoj permutaciji suprotne parnosti te se one međusobno poništavaju. $\square$

Definicija 4.4. Rastući faktorijeli u oznaci $(x)^n$ ili $x^{\overline{n}}$ definiraju se kao

$$(x)^n = x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+(n-1)), \qquad x^{\overline{0}} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Primjerice $(21)^4 = 21^{\overline{4}} = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$.

Stirlingovi brojevi prve vrste se često definiraju kao koeficijenti u rastućim faktorijelima.

Identitet 4.7. Vrijedi

$$x^{\overline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.
1^0 Provjerimo istinitost tvrdnje za $n = 0$ i $n = 1$.

- za $n = 0$ dobivamo $x^{\overline{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^0$.
- za $n = 1$ dobivamo $x^{\overline{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x^0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x^1$.

2^0 Pretpostavimo da tvrdnja Identiteta 4.7 vrijedi za prirodan broj $n-1$, tj.

$$x^{\overline{n-1}} = \sum_{m=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} x^m.$$

3^0 Dokažimo da tvrdnja Identiteta 4.7 vrijedi za prirodan broj n.
Iz Definicije 4.4. slijedi da je

$$x^{\overline{m}} = x^{\overline{m-1}}(x + m - 1). \tag{8}$$

Iz Identiteta 4.5 dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m &= \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} \right) x^m \\
&= x \cdot \sum_{m=1}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} x^{m-1} + (n-1) \sum_{m=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} x^m \\
&= x \cdot x^{\overline{n-1}} + (n-1) \cdot x^{\overline{n-1}} = x^{\overline{n-1}}(x + n - 1) \\
&\overset{(8)}{=} x^{\overline{n}}.
\end{aligned}$$

□

Vrijedi:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

Sljedeća dva identiteta povezuju Stirlingove brojeve prve i druge vrste.

Identitet 4.8. Vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n},$$

gdje je $\delta_{m,n}$ oznaka za Kronecker delta funkciju koju definiramo kao

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } m = n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Identitet 4.9. Vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}.$$

Stirlingove brojeve prve i druge vrste možemo proširiti na skup $\mathbb{Z}$ uz dodatne pretpostavke:

$$\begin{aligned} \left[{0 \atop k} \right] &= 0,\ \forall k \neq 0; & \left\{ {0 \atop k} \right\} &= 0,\ \forall k \neq 0; \\ \left[{n \atop 0} \right] &= 0,\ \forall n \neq 0; & \left\{ {n \atop 0} \right\} &= 0,\ \forall n \neq 0; \\ \left[{n \atop k} \right] &= 0,\ n < k; & \left\{ {n \atop k} \right\} &= 0,\ n < k. \end{aligned}$$

Tada vrijedi i svojstvo recipročnosti:

$$\begin{aligned} \left[{n \atop k} \right] &= \left\{ {-k \atop -n} \right\},\ \ k, n \in \mathbb{Z} \\ \left\{ {n \atop k} \right\} &= \left[{-k \atop -n} \right],\ \ k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ovako prošireni Stirlingovi brojevi mogu se promotriti u idućim tablicama kao i svojstvo recipročnosti.

n	$\left[{n \atop -5} \right]$	$\left[{n \atop -4} \right]$	$\left[{n \atop -3} \right]$	$\left[{n \atop -2} \right]$	$\left[{n \atop -1} \right]$	$\left[{n \atop 0} \right]$	$\left[{n \atop 1} \right]$	$\left[{n \atop 2} \right]$	$\left[{n \atop 3} \right]$	$\left[{n \atop 4} \right]$	$\left[{n \atop 5} \right]$
-5	1										
-4	10	1									
-3	25	6	1								
-2	15	7	3	1							
-1	1	1	1	1	1						
0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	1				
2	0	0	0	0	0	0	1	1			
3	0	0	0	0	0	0	2	3	1		
4	0	0	0	0	0	0	6	11	6	1	
5	0	0	0	0	0	0	24	50	35	10	1

Tablica 5: Stirlingovi brojevi prve vrste $\left[{n \atop k} \right]$, za neke $n, k \in \mathbb{Z}$.

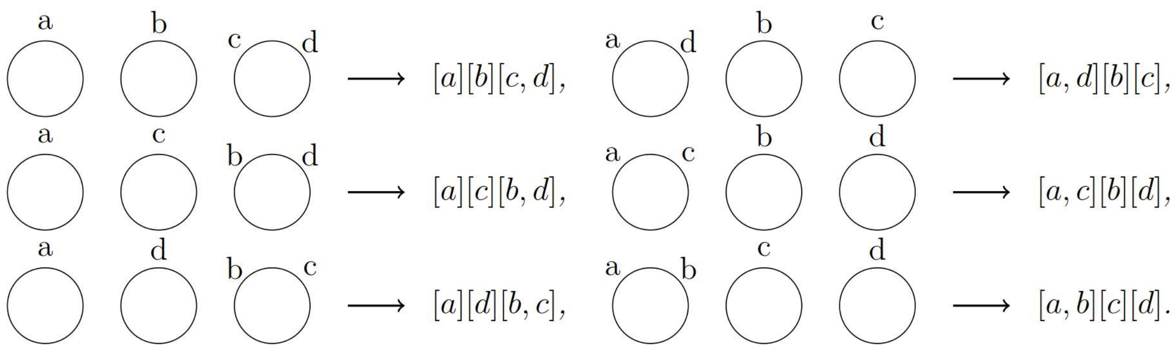
n	${n \brace -5}$	${n \brace -4}$	${n \brace -3}$	${n \brace -2}$	${n \brace -1}$	${n \brace 0}$	${n \brace 1}$	${n \brace 2}$	${n \brace 3}$	${n \brace 4}$	${n \brace 5}$
-5	1										
-4	10	1									
-3	35	6	1								
-2	50	11	3	1							
-1	24	6	2	1	1						
0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	1				
2	0	0	0	0	0	0	1	1			
3	0	0	0	0	0	0	1	3	1		
4	0	0	0	0	0	0	1	7	6	1	
5	0	0	0	0	0	0	1	15	25	10	1

Tablica 6: Stirlingovi brojevi druge vrste ${n \brace k}$, za neke $n, k \in \mathbb{Z}$.

4.2.2 Kombinatorna interpretacija

${n \brack k}$ možemo interpretirati kao broj načina na koji n ljudi može sjesti za k jednakih okruglih stolova pri čemu nijedan stol ne smije ostati prazan.

Primjer 4.11. *Odredimo* ${4 \brack 3}$ *kao broj načina na koji* 4 *osobe mogu sjesti za* 3 *jednaka okrugla stola. Osobe označimo slovima* a, b, c *i* d. *Ilustrirajmo mogućnosti.*

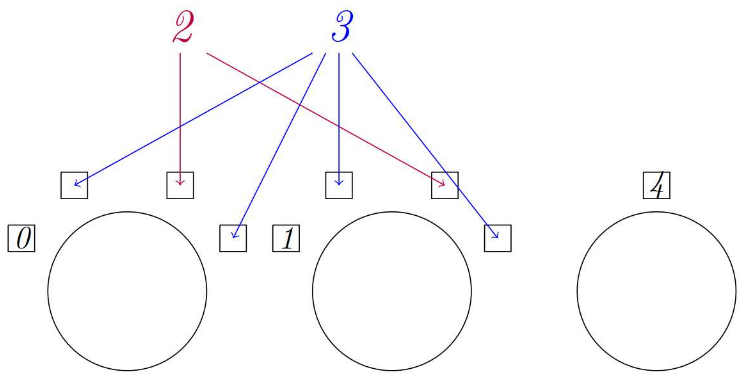


Slika 5: Načini rasporeda sjedenja 4 osobe za 3 jednaka okrugla stola.

Dokaz. (Identiteta 4.4.) Ovaj identitet možemo interpretirati kao broj načina na koji n ljudi može sjesti za n jednakih okruglih stolova.
Neka osoba 1 sjedne za prvi stol jer smo pretpostavili da su stolovi jednaki. Osoba 2 može sjesti pored osobe 1 ili za novi stol. Dakle, ona ima 2 mogućnosti. Neovisno o odluci osobe 2, osoba 3 može sjesti ili pored osobe 1 ili pored osobe 2 ili za novi stol. Dakle, ona ima 3 mogućnosti. Općenito, za $1 \leq k \leq n$, osoba k će imati k mogućnosti: može sjesti ili pored osobe 1 ili 2 ili $\cdots$ ili $(k-1)$ ili sjesti za novi stol. Ukupno imamo $n!$ mogućnosti. □

Primjer 4.12 (Identitet 4.7). *Prema algebarskoj definiciji Stirlingov broj* ${5 \brack 3}$ *je koeficijent uz* x^3 *u umnošku* $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. *Prema kombinatornoj definiciji* ${5 \brack 3}$ *je broj načina na koje elemente* $0, 1, 2, 3$ *i* 4 *možemo rasporediti oko* 3 *jednaka okrugla stola. Ove definicije su jednake.*
U umnošku $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, *koeficijent uz* x^3 *je suma umnožaka svaka dva broja između* 1 *i* 4. *Primjerice,* $2 \cdot 3$ *možemo interpretirati kao broj načina na koje elementi* $0, 1, 2, 3$ *i* 4 *mogu sjesti za* 3 *jednaka okrugla stola ali uz sljedeće uvjete. Neka se brojevi* $0, 1$

i 4 već nalaze za različitim stolovima. Ostale brojeve možemo rasporediti za stolove ali samo s manjim brojevima.
Dakle, broj 2 može sjesti ili pored 0 ili pored 1 te ima 2 mogućnosti. Broj 3 može sjesti ili desno od 0 ili desno od 1 ili desno od 2 te ima 3 mogućnosti. Ukupno imamo 6 načina za sjedenje što odgovara $2 \cdot 3$.



Slika 6: Načini rasporeda sjedenja 5 osoba za 3 jednaka okrugla stola uz određene uvjete.

4.3 Eulerovski brojevi

Eulerovski broj u oznaci $\left\langle {n \atop m} \right\rangle$ je broj permutacija skupa $\{1, \cdots, n\}$ u kojoj je točno m elemenata većih od prethodnog. Za takvu permutaciju kažemo da ima m sljedbenika.

Primjer 4.13. *Neka je dan skup $\{1, 2, 3, 4\}$. Zapišimo sve permutacije u kojima je točno jedan element veći od prethodnog. To su:*

$$\begin{array}{lll} (1,4,3,2), & (3,1,4,2), & (4,1,3,2), \\ (2,1,4,3), & (3,2,1,4), & (4,2,1,3), \\ (2,4,3,1), & (3,2,4,1), & (4,2,3,1) i \\ & (3,4,2,1), & (4,3,1,2). \end{array}$$

Ima ih ukupno 11. Dakle, $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle = 11$.

Za dani $n > 0$, m može primiti vrijednosti od 0 do $n - 1$. Za fiksni n postoji jedinstvena permutacija s 0 sljedbenika a to je $(n, n-1, n-2, \dots, 1)$. Također postoji jedinstvena permutacija s $n-1$ sljedbenika a to je $(1, 2, 3, \dots, n)$. Stoga, $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle$ i $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle$ iznose 1 za sve $n > 0$.
Nekoliko prvih vrijednosti možemo promotriti iz tablice koju zovemo Eulerovski trokut.

n	$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 5} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 6} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 7} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 8} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 9} \right\rangle$
0	1									
1	1	0								
2	1	1	0							
3	1	4	1	0						
4	1	11	11	1	0					
5	1	26	66	26	1	0				
6	1	57	302	302	57	1	0			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

Tablica 7: Eulerovski trokut.

Uočavamo da se na dijagonali trokuta nalaze nule, budući da je moguće najviše $n-1$ sljedbenika u permutaciji. Dakle, $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0$, za $n > 0$. Vrijedi i da je suma Eulerovskih brojeva za fiksnu vrijednost n jednaka ukupnom broju permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$, odnosno suma n-tog retka je $n!$. Ovo još možemo zapisati kao

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left\langle {n \atop m} \right\rangle = n!, \text{ za } n \geq 1.$$

Veće vrijednosti možemo računati pomoću rekurzije:

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ako je } m \geq n \text{ ili } n = 0, \\ 1, & \text{ako je } m = 0, \\ (n-m)\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle + (m+1)\left\langle {n-1 \atop m} \right\rangle, & \text{inače.} \end{cases}$$

Osim Eulerovskih brojeva postoje i Eulerovski brojevi drugog reda. Za početak podsjetimo se pojma multiskupa.

Definicija 4.5. Konačni multiskup A' na skupu S je uređen par $A' = (S, n)$, gdje je $n : S \to \mathbb{N}_0$ funkcija za koju je $\sum_{x \in S} n(x)$ konačan broj. $n(x)$ zovemo kratnost od x.

Primjerice $S = \{a, a, b, b, b, c\}$ je jedan multiskup. Kratnosti njegovih elemenata su: $m(a) = 2$, $m(b) = 3$ i $m(c) = 1$.

Eulerovski broj drugog reda u oznaci $\left\langle\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\right\rangle$ je broj permutacija multiskupa $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ s m sljedbenika koje imaju svojstvo da svi brojevi između dva pojavljivanja k budu veća od k, za $1 \leq k \leq n$.

Primjer 4.14. *Neka je $n = 3$ i dan je multiskup $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$. Zapišimo sve permutacije s 2 sljedbenika i koje zadovoljavaju gornje svojstvo iz definicije. To su:*

$$\begin{aligned} &(1, 1, 2, 2, 3, 3), && (1, 2, 3, 3, 2, 1), \\ &(1, 1, 2, 3, 3, 2), && (1, 3, 3, 1, 2, 2) i \\ &(1, 2, 2, 1, 3, 3), && (1, 2, 2, 3, 3, 1). \end{aligned}$$

Ima ih ukupno 6. Dakle, $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle = 6$.

Nekoliko prvih vrijednosti možemo promotriti iz sljedeće tablice.

n	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 1} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 3} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 4} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 5} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 6} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 7} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 8} \right\rangle\!\right\rangle$
0	1								
1	1	0							
2	1	2	0						
3	1	8	6	0					
4	1	22	58	24	0				
5	1	52	328	444	120	0			
6	1	114	1452	4400	3708	720	0		
7	1	240	5610	32120	58140	33984	5040	0	
8	1	494	19950	195800	644020	785304	341136	40320	0
9	1	1004	67260	1062500	5765500	12440064	11026296	3733920	362880

Tablica 8: Eulerovski trokut drugog reda.

Veće vrijednosti možemo računati pomoću rekurzije:

$$\left\langle\!\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\!\right\rangle = \begin{cases} (2n-m-1)\left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle\!\!\right\rangle + (m+1)\left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop m} \right\rangle\!\!\right\rangle, \\ 0, \text{ ako je } n = 0. \end{cases}$$

Veze između Stirlingovih i Eulerovskih brojeva prikazane su sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} m! \left\{ {n \atop m} \right\} &= \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m} \\ \left\langle {n \atop m} \right\rangle &= \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k! \end{aligned}$$

$$\left\{ {x \atop x-n} \right\} = \sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n}, n \in \mathbb{N}_0 \tag{9}$$

$$\left[{x \atop x-n} \right] = \sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+k}{2n}, n \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Primjer 4.15.

$$\left\{ {x \atop x-1} \right\} = \binom{x}{2}, \qquad \left[{x \atop x-1} \right] = \binom{x}{2},$$

$$\left\{ {x \atop x-2} \right\} = \binom{x+1}{4} + 2\binom{x}{4}, \qquad \left[{x \atop x-2} \right] = \binom{x}{4} + 2\binom{x+1}{4}.$$

Stirlingove brojeve smo prvo definirali na skupu $\mathbb{N}_0$. Zatim, uz dodatne pretpostavke definirali smo ih i na skupu $\mathbb{Z}$. Jednadžbe (9) i (10) omogućuju da Stirlingove brojeve $\left\{ {x \atop x-n} \right\}$ i $\left[{x \atop x-n} \right]$ definiramo i za proizvoljan $x \in \mathbb{C}$ jer su desne strane tih jednakosti polinomi u x.

4.4 Bernoullijevi brojevi

Sljedeći važan niz brojeva dobio je ime po Jacobu Bernoulliju. Dok je proučavao sumu m-te potencije

$$\begin{aligned} S_m(n) &= 0^m + 1^m + \cdots + (n-1)^m \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k^m \end{aligned}$$

i sume za pojedine m-ove

$$
\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

uočio je sljedeće: koeficijent uz n^{m+1} u $S_m(n)$ je uvijek $\frac{1}{m+1}$, koeficijent uz n^m je uvijek $-\frac{1}{2}$, koeficijent uz n^{m-1} je $\frac{m}{12}$, koeficijent uz n^{m-2} je uvijek nula, koeficijent uz n^{m-4} je uvijek nula. Slutimo da će se uzorak ponavljati, s time da je koeficijent uz n^{m-k} uvijek umnožak konstante i $m^{\underline{k}}$. Ovo je Bernoullijevo empirijsko otkriće.

U današnjoj notaciji Bernoullijevi brojevi B_k vezani su za sumu:

$$
\begin{aligned}
S_m(n) &= \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + \binom{m+1}{1}B_1 n^m + \cdots + \binom{m+1}{m}B_m n\right) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}.
\end{aligned}
$$

Možemo ih računati pomoću rekurzije:

$$
B_n = \begin{cases} 1, \text{ kad je } n = 0, \\ \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}B_{n-k}, \text{ kad je } n \in \mathbb{N}. \end{cases}
$$

Prvih nekoliko vrijednosti možemo vidjeti u tablici.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Tablica 9: Bernoullijevi brojevi.

Također vrijedi

$$
\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}B_j = 0, \ \forall m \geq 0.
$$

Bernoullijevi brojevi su koeficijenti uz potencije u razvoju funkcije

$$\begin{aligned}\frac{z}{e^z-1} &= \sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}.\\ &= 1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}\cdot\frac{z^2}{2!}-\frac{1}{30}\cdot\frac{z^4}{4!}+\frac{1}{42}\cdot\frac{z^6}{6!}-\cdots\end{aligned}$$

coth predstavlja kotangens hiperbolni koji se inače definira kao $\frac{\cosh z}{\sinh z}$. Može se pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned}z\coth z &= \sum_{n\geq 0} B_{2n}\frac{\left(2z\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}\\ &= \sum_{n\geq 0} 4^n B_{2n}\frac{z^{2n}}{\left(2n\right)!}.\end{aligned}$$

Možemo izraziti trigonometrijske funkcije pomoću hiperbolnih jer vrijedi

$$\begin{aligned}\sin z &= -i\sinh iz,\\ \cos z &= \cosh iz.\end{aligned}$$

Odgovarajući razvoji funkcija u redove potencija u okolini točke 0 su:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{z^1}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots, & \sinh z &= \frac{z^1}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\\ \cos z &= \frac{z^0}{0!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots, & \cosh z &= \frac{z^0}{0!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots.\end{aligned}$$

Iz

$$\begin{aligned}\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}\\ &= \frac{\cosh iz}{-i\sinh iz}\\ &= i\frac{\cosh iz}{\sinh iz}\\ &= i\coth iz\end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned}z\cot z &= \sum_{n\geq 0} B_{2n}\frac{(2iz)^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n\geq 0}(-4)^n B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Relacija koja povezuje Stirlingove i Bernoullijeve brojeve glasi

$$\sum_{j\geq 0}\left\{{m \atop j}\right\}\left[{j+1 \atop k}\right]\frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k}B_{m+1-k}. \tag{11}$$

Dokaz.

- Ako je $k = m + 1$, iz (11) slijedi:

$$\left\{ {m \atop m} \right\} \left[{m+1 \atop m+1} \right] \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{m+1} B_0.$$

- Ako je $k = m$, iz (11) slijedi:

$$\left\{ {m \atop m-1} \right\} \left[{m \atop m} \right] \frac{1}{m} - \left\{ {m \atop m} \right\} \left[{m+1 \atop m} \right] \frac{1}{m+1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{m} B_1.$$

- Ako je $k < m$, zamijenimo $\left\{ {m \atop j} \right\}$ s $\left\{ {m+1 \atop j+1} \right\} - (j+1)\left\{ {m \atop j+1} \right\}$.
  Izraz s lijeve strane u (11) postaje:

$$\begin{aligned} &\sum_{j \geq 0} \left\{ {m+1 \atop j+1} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} - \sum_{j \geq 0} (j+1) \left\{ {m \atop j+1} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left\{ {m+1 \atop j+1} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} - \underbrace{\sum_{j \geq 0} \left\{ {m \atop j+1} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] (-1)^{j+1-k}}_{=0}. \end{aligned} \tag{12}$$

Promijenimo imena varijablama. Neka je indeks sumiranja k, $m + 1$ zamijenimo s n, k zamijenimo s m. Iz (11) i (12) dobivamo sljedeću jednakost:

$$\sum_{k \geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] \frac{(-1)^{k-m}}{k} = \frac{1}{n} \binom{n}{m} B_{n-m}. \tag{13}$$

Ovime smo pojednostavili jednadžbu (11) za $k < m$.

□

5 Familije Stirlingovih polinoma

Polinom jedne varijable je funkcija realnog ili kompleksnog argumenta x koju možemo zapisati u obliku

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0,\ a_n \neq 0$ ako je $n \geq 1$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ zovemo koeficijenti polinoma P, broj a_0 slobodni član, a a_n vodeći član. Broj n zovemo stupanj polinoma.
Polinomski niz je niz polinoma $p_i(x)$, za $i = 0, 1, 2, \ldots$ gdje je $p_i(x)$ polinom stupnja $i,\ \forall i$.

5.1 Fibonaccijevi polinomi

Jedno poopćenje Fibonaccijevih brojeva su Fibonaccijevi polinomi. Definiraju se rekurzijom

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } n = 0, \\ x, \text{ ako je } n = 1, \\ x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x), \text{ ako je } n \geq 2. \end{cases}$$

Primjer 5.1.

$f_2(x) = x^2 + 1$
$f_3(x) = x^3 + 2x$
$f_4(x) = x^4 + 3x^2 + 1$
$f_5(x) = x^5 + 4x^3 + 3x.$

Uočimo: vrijednosti polinoma u $x = 1$ *su*

$f_2(1) = 2,$
$f_3(1) = 3,$
$f_4(1) = 5,$
$f_5(1) = 8,$

što zajedno s početnim uvjetima daje niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ *koji upravo predstavlja niz Fibonaccijevih brojeva.*

$f_n(x)$ je polinom n-tog stupnja za kojeg vrijedi:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(n,k) x^k,$$

pri čemu je $f(n,k)$ broj načina na koje pločicu dimenzije $1 \times n$ možemo pokriti s pločicama dimenzije 1×1 i 1×2 tako da je upotrijebljeno točno k pločica dimenzije 1×1.

5.2 Stirlingovi konvolucijski polinomi

Podsjetimo se relacija koje povezuju Stirlingove brojeve i Eulerovske brojeve drugog reda.

$$\left\{ {x \atop x-n} \right\} = \sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n}, n \in \mathbb{N}_0$$
$$\left[{x \atop x-n} \right] = \sum_k \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+k}{2n}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Već smo imali slučaj $n = 1$.
Ako je $n > 0$, polinomi $\left\{ {x \atop x-n} \right\}$ i $\left[{x \atop x-n} \right]$ iznose nula za $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ i stoga su djeljivi s $(x-0)(x-1)\cdots(x-n)$. Stirlingove konvolucijske polinome definiramo pravilom

$$\sigma_n(x) = \frac{\left[{x \atop x-n} \right]}{x(x-1)\cdots(x-n)}.$$

Primjer 5.2.

$$\sigma_1(x) = \frac{\left[{x \atop x-1} \right]}{x(x-1)} = \frac{\binom{x}{2}}{x(x-1)} = \frac{1}{2};$$
$$\sigma_2(x) = \frac{\left[{x \atop x-2} \right]}{x(x-1)(x-2)} \overset{(Pr4.15)}{=} \frac{\binom{x}{4} + 2\binom{x+1}{4}}{x(x-1)(x-2)} = \frac{3x-1}{24};$$
$$\sigma_3(x) = \frac{\left[{x \atop x-3} \right]}{x(x-1)(x-2)(x-3)} \overset{(11)}{=} \frac{x(x-1)}{48};$$
$$\sigma_4(x) = \frac{15x^3 - 30x^2 + 5x + 2}{5760}.$$

Vrijedi sljedeća rekurzija:

$$(x+1)\sigma_n(x+1) = (x-n)\sigma_n(x) + x\sigma_{n-1}(x).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
(x+1)\sigma_n(x+1) &= (x+1)\frac{\left[{x+1 \atop x+1-n} \right]}{(x+1)x(x-1)\cdots(x+1-n)} \\
&= \frac{\left[{x+1 \atop x+1-n} \right]}{x(x-1)\cdots(x+1-n)} \\
&\overset{(Id.4.5.)}{=} \frac{\left[{x \atop x-n} \right]}{x(x-1)\cdots(x+1-n)} + \frac{x\left[{x \atop x+1-n} \right]}{x(x-1)\cdots(x+1-n)} \\
&= \frac{x-n}{x-n} \cdot \frac{\left[{x \atop x-n} \right]}{x(x-1)\cdots(x+1-n)} + x \cdot \frac{\left[{x \atop x-n+1} \right]}{x(x-1)\cdots(x-n+1)} \\
&= (x-n) \cdot \underbrace{\frac{\left[{x \atop x-n} \right]}{x(x-1)\cdots(x-n)}}_{\sigma_n(x)} + x \cdot \underbrace{\frac{\left[{x \atop x-n+1} \right]}{x(x-1)\cdots(x-n+1)}}_{\sigma_{n-1}(x)} \\
&= (x-n)\sigma_n(x) + x\sigma_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Od posebnog su interesa Stirlingove konvolucijske formule.

$$rs\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(r+tk)\sigma_{n-k}(s+t(n-k)) = (r+s)\sigma_n(r+s+tn) \tag{14}$$
$$s\sum_{k=0}^{n}k\sigma_k(r+tk)\sigma_{n-k}(s+t(n-k)) = n\sigma_n(r+s+tn)$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = (-1)^{n-m+1}\frac{n!}{(m-1)!}\sigma_{n-m}(-m) \tag{15}$$

$$\left[{n \atop m} \right] = \frac{n!}{(m-1)!}\sigma_{n-m}(n) \tag{16}$$

Ovi polinomi također zadovoljavaju sljedeće identitete:

$$\left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n(x)z^n$$
$$\left(\frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}\right)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n(x+n)z^n.$$

Ako je $S_t(z)$ red potencija za koji vrijedi

$\ln(1-zS_t(z)^{t-1}) = -zS_t(z)^t$

onda je

$S_t(z)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n(x+tn)z^n.$

Iz konvolucijskih formula dobivamo i sljedeće identitete:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\left\{ {x+k \atop x} \right\}\left[{x \atop x-n+k} \right](-1)^k}{\binom{x+k}{n+1}} = 0,\ n\in\mathbb{N} \tag{17}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[{x+k \atop x} \right]\left\{ {x \atop x-n+k} \right\}(-1)^k}{\binom{x+k}{n+1}} = 0,\ n\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

Dokaz.
(17)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\left\{ {x+k \atop x} \right\}\left[{x \atop x-n+k} \right](-1)^k}{\binom{x+k}{n+1}} \overset{(15.i16.)}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k+1}\cdot x\cdot(n+1)!\cdot\sigma_k(-x)\cdot\sigma_{n-k}(x)$$
$$= \frac{(n+1)!x}{(x+k)(x+k-n)}\cdot(-1)(x+k)(x+k-n)\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(-x)\sigma_{n-k}(x)$$

Primjenom (14) na
$(-1)(x+k)(x+k-n)\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(-x)\sigma_{n-k}(x)$ tako da je
$k=k, n=n, t=1, r=-x-k, s=-(r+n)=x+k-n$ slijedi:

$$\frac{(n+1)!x}{(x+k)(x+k-n)} \cdot (-n)\sigma_n(0) = 0.$$

(18)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\left[{x+k \atop x}\right]\left\{{x \atop x-n+k}\right\}(-1)^k}{\binom{x+k}{n+1}} \overset{(15.i16.)}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1} \cdot x \cdot (n+1)! \cdot \sigma_k(x+k)\sigma_{n-k}(n-x-k)$$
$$= \frac{(-1)^n(n+1)!}{x} \cdot (-x^2)\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(x+k)\sigma_{n-k}(n-k-x)$$

Primjenom (14) na
$(-x^2)\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(x+k)\sigma_{n-k}(n-k-x)$ tako da je
$k=k, n=n, t=1, r=x=-s$ slijedi:

$$\frac{(-1)^n(n+1)!}{x} \cdot (-x+x)\sigma_n(n) = 0.$$

□

Da bismo povezali Stirlingove konvolucijske polinome i Bernoullijeve brojeve iskoristit ćemo vezu Stirlingovih i Bernoulljevih brojeva i konvolucijske formule. Lijeva strana jednadžbe (13) za $k < m$ postaje:

$$\sum_{k\geq 0}\left\{{n \atop k}\right\}\left[{k \atop m}\right]\frac{(-1)^{k-m}}{k} \overset{(15.i16.)}{=} (-1)^{n+1-m}\frac{n!}{(m-1)!}\sum_{k\geq 0}\sigma_{n-k}(-k)\sigma_{k-m}(k)$$
$$\overset{(14)}{=} (-1)^{n+1-m}\frac{n!}{(m-1)!} \cdot \frac{m-n}{(-n)\cdot m}\sigma_{n-m}(0)$$

Nakon izjednačavanja s desnom stranom jednadžbe (13) i zamjenom $n-m$ s x dobivamo:

$$\frac{B_x}{x!} = (-1)^{x+1}x\sigma_x(0).$$

5.3 Stirlingovi polinomi

Ovdje ćemo koristiti oznake $c(n,k)$ i $S(n,k)$ za Stirlingove brojeve prve odnosno druge vrste.

Definicija 5.1. Za $k \in \mathbb{N}_0$ i $n \in \mathbb{N}$ Stirlingove polinome prve vrste definiramo kao

$$g_k(n) = c(n, n-k),$$

a Stirlingove polinome druge vrste kao

$$f_k(n) = S(n+k, n).$$

Promotrimo nekoliko prvih vrijednosti Stirlingovih polinoma prve i druge vrste u sljedećoj tablici.

k	$g_k(x)$	$f_k(x)$
0	1	1
1	$\frac{1}{2}(x^2 - x)$	$\frac{1}{2}(x^2 + x)$
2	$\frac{1}{24}(3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 2x)$	$\frac{1}{24}(3x^4 + 10x^3 + 9x^2 + 2x)$
3	$\frac{1}{48}(x^6 - 7x^5 + 17x^4 - 17x^3 + 6x^2)$	$\frac{1}{144}(3x^6 + 13x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 58x^2 + 48x)$

Tablica 10: Stirlingovi polinomi prve i druge vrste.

Propozicija 5.1. *Za fiksan* $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$, $f_k(n)$ *i* $g_k(n)$ *su polinomi stupnja* $2k$ *s vodećim koeficijentom* $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(2k)!}$.

Dokaz. Dokaz za $f_k(n)$ provodimo matematičkom indukcijom po k.
1^0 Provjerimo istinitost tvrdnje za $k = 0$.
$f_0(n) = 1$. Dakle, $f_0(n)$ je polinom stupnja 0 s vodećim koeficijentom 1.
2^0 Pretpostavimo da tvrdnja Propozicije 5.1. vrijedi za prirodan broj k, tj. da je $f_k(n)$ polinom stupnja $2k$ s vodećim koeficijentom $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(2k)!}$.
3^0 Dokažimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $k + 1$.
Iskoristit ćemo operator diferencije koji se definira kao
$\Delta h(n) = h(n + 1) - h(n)$.
Iz Identiteta 4.1. slijedi da je $\Delta f_k(n) = (n+1)f_{k-1}(n)$. Analogno vrijedi i da je $\Delta f_{k+1}(n) = (n+1)f_k(n+1)$. Sada slijedi da je $\Delta f_{k+1}(n)$ polinom stupnja $2k+1$ s vodećim koeficijentom $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(2k)!}$.

Propozicija 5.2. *Funkcija* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *je polinom stupnja* d *s vodećim koeficijentom* α *ako i samo ako je* $\Delta h(n)$ *polinom stupnja* $d - 1$ *s vodećim koeficijentom* αd.

Iz prethodne propozicije slijedi da je $f_{k+1}(n)$ polinom stupnja $2k + 2$ s vodećim koeficijentom $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}{(2k+2)!}$.
Dokaz za $g_k(n)$ provodimo analogno matematičkom indukcijom po k.
1^0 Provjerimo istinitost tvrdnje za $k = 0$.
$g_0(n) = 1$. Dakle, $g_0(n)$ je polinom stupnja 0 s vodećim koeficijentom 1.
2^0 Pretpostavimo da tvrdnja Propozicije 5.1. vrijedi za prirodan broj k, tj. da je $g_k(n)$ polinom stupnja $2k$ s vodećim koeficijentom $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(2k)!}$.
3^0 Dokažimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $k + 1$.
Iz Identiteta 4.5. slijedi da je $\Delta g_k(n) = ng_{k-1}(n)$. Analogno vrijedi da je $\Delta g_{k+1}(n) = ng_k(n)$. Stoga je $\Delta g_{k+1}(n)$ polinom stupnja $2k + 1$ s vodećim koeficijentom $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(2k)!}$.
Iz Propozicije 5.2. slijedi da je $g_{k+1}(n)$ polinom stupnja $2k + 2$ s vodećim koeficijentom $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}{(2k+2)!}$. □

Propozicija 5.3. *Za sve* $k \in \mathbb{N}$ *i* $n \in \mathbb{Z}$ *vrijedi*

$$f_k(0) = f_k(-1) = \cdots = f_k(-k) = 0$$

i

$$f_k(-n) = g_k(n).$$

Dokaz ove propozicije se može pronaći u [3]. Posljedice se mogu vidjeti u tablicama 5 i 6.

Postoji još jedan način definiranja Stirlingovih polinoma a to je pomoću Shefferovog niza. Shefferov niz je niz polinoma $\{s_n(x) : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ gdje je indeks pojedinog polinoma jednak njegovom stupnju.
Najpoznatiji primjeri Shefferovih nizova uključuju Bernoullijeve polinome, Booleove polinome, Laguerreove polinome kao i Stirlingove polinome.

Stirlingovi polinomi su zapravo specijalan slučaj Bernoullijevih brojeva višeg reda a povezuje ih relacija

$$S_k(x) = {B_k}^{x+1}(x+1).$$

Prvih nekoliko Stirlingovih polinoma dobivenih prethodnom jednadžbom navedeni su u sljedećoj tablici.

k	$S_k(x)$
0	1
1	$\frac{1}{2}(x+1)$
2	$\frac{1}{12}(3x^2+5x+2)$
3	$\frac{1}{8}(x^3+2x^2+x)$
4	$\frac{1}{240}(15x^4+30x^3+5x^2-18x-8)$
5	$\frac{1}{96}(3x^5+5x^4-5x^3-13x^2-6x)$

Tablica 11: Stirlingovi polinomi.

Literatura

[1] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, Proofs that Really Count, Mathematical Association of America, Washington, 2003.

[2] Boris Dokić, Stirlingovi brojevi, Osječki matematički list, Osijek, 2013.

[3] I. Gessel, R. P. Stanley, Stirling polynomials, Journal of combinatorial theory, Series A 24, 24-33, Academic Press, Inc., Cambridge, Massachusetts, 1978.

[4] I. P. Goulden, D. M. Jackson, Combinatorial Enumeration, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2004.

[5] Zdenko Hegeduš, Specijalni brojevi, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2011.

[6] George E. Martin, Counting: The Art of Enumerative Combinatorics, Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[7] Steven Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, Inc., Orlando Florida, 1984.

[8] Darko Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001.

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_polynomials (28.05.2019.)

6 Sažetak

U ovom radu obrađujemo Stirlingove polinome kao jednu od familija polinoma koja se pojavljuje u kombinatornoj matematici. Stirlingovi polinomi su usko povezani sa Stirlingovim brojevima. U radu prvo predstavljamo binomni koeficijent i najbitnija svojstva. Nakon toga upoznajemo se s pojmom Fibonaccijevi brojevi i njihovom relacijom s Pascalovim trokutom. Sljedeća bitna stavka koju smo obradili jesu funkcije izvodnice te navodimo primjer funkcije izvodnice za Fibbonaccijev niz brojeva. Kao jednu od glavnih tema uvodimo specijalne brojeve s naglaskom na Stirlingove brojeve prve i druge vrste te njihovom vezom s nekim specijalnim brojevima. Poseban zadatak je bio definiranje Stirlingovih polinoma, prvo konvolucijskih, zatim Stirlingovih polinoma koje je definirao R. P. Stanley i na kraju Stirlingovih polinoma koji su Shefferov niz te predstavljaju specijalan slučaj generaliziranih Bernoullijevih polinoma.

7 Title and summary

In this paper we analyze Stirling polynomials as one of the polynomial families that appears in combinatorial mathematics. Stirling polynomials are closely related to Stirling numbers. In the paper we first present the binomial coefficient and its most important properties. After that, we get to know the term Fibonacci numbers and their relation to Pascal triangle. The next important theme we learn about are the generating functions, and we give an example of the generating function for the Fibbonacci series of numbers. One of the main themes is introducing special numbers with an emphasis on Stirling numbers of the first and second kind and their connection with some special numbers. A special task was to define Stirling polynomials, first convolutional, then Stirling polynomials defined by R. P. Stanley and at the end Stirling polynomials which are Sheffer sequence and represent a special case of generalized Bernoulli polynomials.

8 Životopis

Rođena sam u Vukovaru 01.06.1991. Osnovnu školu Dragutin Tadijanović u Vukovaru završila sam 2006. godine te nakon toga upisujem Gimnaziju Vukovar. 2011. godine upisujem Sveučilišni preddiplomski studij matematike a 2015. diplomski studij matematike smjer Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.