Izometrije ravnine - učenje otkrivanjem

Buljan, Iva

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Buljan

Izometrije euklidske ravnine-učenje otkrivanjem

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Buljan

Izometrije euklidske ravnine-učenje otkrivanjem

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

„Otkrivanje je metoda kojom učenici proučavaju stvarnost, a jedan od najboljih darova koji možete ponuditi svojim učenicima je svijest o vezi između učenja u razredu i stvarnog života.“ (Bognar, Matijević, 2005., str. 283) Ovom rečenicom Bognar i Matijević govore kako istražujući nešto o svijetu koji ih okružuje učenici na mnogo samostalniji način stječu znanja kako o onome što istražuju, tako i o načinima na koji do traženih podataka mogu doći. Dakle, cilj nastave ne bi trebao biti samo suhoparno usvajanje činjenica, podataka i definicija nego osposobljavanje učenika za cjeloživotno učenje. Ta činjenica postavlja veliki izazov za današnje nastavnike. Kako bi motivirali učenike za nastavni sadržaj i predmet, oni bi se u svom svakodnevnom radu trebali služiti raznim motivacijskim tehnikama, aktivnim nastavnim oblicima i metodama rada.
Osim toga, motivacija učenika ovisi i o nastavnom sadržaju koji učenicima ponekad i nije lako razumljiv. Kao primjer možemo navesti izometrije ravnine pod kojima podrazumijevamo osnu simetriju, centralnu simetriju, kliznu simetriju, translaciju, rotaciju i identitetu. Učenici si navedena preslikavanja ravnine teško predočavaju, gube interes i odustaju. Jedno od rješenja ovog problema je primjena učenja otkrivanjem u nastavi matematike.
U ovom diplomskom radu ukazat ćemo na korisnost primjene nastavne tehnike učenja otkrivanjem u poučavanju geometrije.
Na samom početku rada ukazat ćemo na povezanost sukladnosti i izometrije. Naime, dvije figure su sukladne ukoliko postoji izometrija ravnine koja preslikava jednu figuru na drugu. Osna simetrija, centralna simetrija, rotacija, translacija, klizna simetrija i identiteta su izometrije euklidske ravnine koje ćemo obraditi, navesti njihova svojstva i međusobnu povezanost.
U drugom poglavlju upoznat ćemo se s obilježjima nastavne tehnike učenje otkrivanjem, koje su njezine prednosti i nedostaci te kako ona utječe na motivaciju učenika.
U trećem poglavlju navest ćemo istraživačke aktivnosti vezane za preslikavanja euklidske ravnine koje su primjenjive u nastavi matematike.

1 Izometrije euklidske ravnine

Pomicanjem svih točaka izvornog geometrijskog lika može se stvoriti njegova slika. Taj proces se naziva transformacija ili preslikavanje ravnine. Ukoliko je slika izvornog geometrijskog lika sukladna izvornom liku, tada to preslikavanje nazivamo izometrijom ravnine.

Prisjetimo se što znači kada kažemo da su dva lika sukladna?
To znači da ih možemo dovesti u položaj u kojem se oni potpuno podudaraju. Odnosno, jednog od njih treba pomaknuti u ravnini dok se ne poklopi s drugim. Pri pomicanju u ravnini, geometrijski likovi moraju zadržati svoj oblik i veličinu, tj. udaljenosti među točkama lika kojeg pomičemo ne smiju se mijenjati pri pomicanju. Dakle, možemo reći da su izometrije ravnine preslikavanja koja čuvaju udaljenosti.

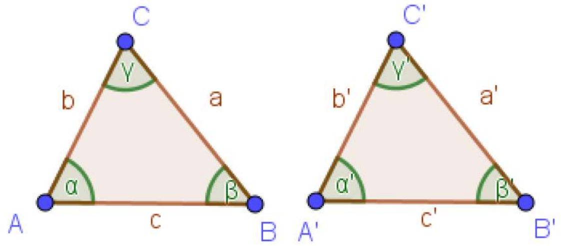
Geometrijski lik je dvodimenzionalni podskup ravnine omeđen s konačno mnogo dužina (*mnogokuta*) ili zakrivljenih crta. Ako se ograničimo na dio ravnine omeđen trima dužinama, promatrani lik je trokut, što nam govori i sljedeća definicija.

Definicija 1. *Geometrijski lik u ravnini koji se sastoji od tri nekolinearne točke A, B, C i tri spojne dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ tih točaka zove se trokut. Točke A, B, C su vrhovi trokuta, a spojne dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ stranice trokuta.*

Promatramo li sukladnost dvaju trokuta, prema [1] slijedi:

Definicija 2. *Za dva se trokuta, ABC i $A'B'C'$ kaže da su sukladni (kongruentni) ako im se vrhovi A, B, C i A', B', C' mogu tako označiti da vrijedi:*

$$|AB| = |A'B'| \;,\; |AC| = |A'C'| \;,\; |BC| = |B'C'|$$
$$\angle ABC = \angle A'B'C' \;,\; \angle BCA = \angle B'C'A' \;,\; \angle CAB = \angle C'A'B'.$$



Slika 1.

Pišemo: $\triangle ABC \approxeq \triangle A'B'C'$

Drugim riječima, dva su trokuta sukladna ako su im parovi odgovarajućih kutova jednake veličine i parovi odgovarajućih stranica jednake duljine. Parovi stranica jednakih duljina i kutova jednakih veličina u sukladnim trokutima nazivaju se *homologne stranice*, odnosno *homologni kutovi*. Da bismo odredili jesu li trokuti sukladni ili nisu, nije potrebno provjeravati svih šest parova odgovarajućih elemenata. Dovoljno je promotriti samo tri para prikladno odabranih elemenata koji formiraju četiri poznata poučka o sukladnosti trokuta. Prije nego što ih navedemo, pogledajmo poučak koji govori o činjenicama vezanim za kutove i stranice trokuta.

Poučak 1. ***Poučak o odnosu stranica i kutova u trokutu***
Za stranice i kutove trokuta vrijedi:

1. *Nasuprot sukladnim stranicama leže sukladni kutovi.* $a = b \Rightarrow \alpha = \beta$
2. *Nasuprot sukladnim kutovima leže sukladne stranice.* $\alpha = \beta \Rightarrow a = b$
3. *Nasuprot većoj stranici leži veći kut.* $a > b \Rightarrow \alpha > \beta$
4. *Nasuprot većem kutu leži veća stranica.* $\alpha > \beta \Rightarrow a > b$

Označimo stranice trokuta ABC s: $|AB| = c$, $|AC| = b$ te $|BC| = a$,
a kutove s $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ i $\angle BCA = \gamma$.
Prema [1] slijedi :

Teorem 1. ***Teorem o sukladnosti trokuta***

1. ***S-S-S poučak***
   Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice, tj.

$$|AB| = |A'B'|$$
$$|AC| = |A'C'|$$
$$|BC| = |B'C'|$$

Dokaz :
Neka su zadani trokuti ABC i $A'B'C'$ tako da vrijedi: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Treba pokazati da su im i pripadni kutovi jednaki, tj. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Iz definicije sukladnosti lako se vidi kako je uvijek moguće trokut ABC položiti na trokut $A'B'C'$ tako da vrh A' padne u A, vrh B' padne u B, a vrh C' padne u C. Na taj način očito se kut α preslikava na α', β na β' i γ na γ'. $\triangle ABC \approxeq \triangle A'B'C'$.

$\square$

2. ***S-K-S poučak***
   Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između te dvije stranice, tj.

$$
\begin{aligned}
|AB| &= |A'B'| \\
|AC| &= |A'C'| \\
\angle CAB &= \angle C'A'B'
\end{aligned}
$$

Dokaz :
Pretpostavimo li da za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi:

$$b = b',\ c = c' \text{ i } \alpha = \alpha'$$

tvrdi se da je tada i $a = a'$ te $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, tj. $\triangle ABC \approxeq \triangle A'B'C'$. Položi li se trokut $A'B'C'$ na trokut ABC tako da vrh A' padne u A, a B' padne u B, onda stranica $|A'C'| = b'$ zbog jednakosti kutova α i α' padne na stranicu $|AC| = b$. Kako je $|A'C'| = |AC|$, tada vrh C' padne u C. Budući se dva homologna vrha trokuta $A'B'C'$ i ABC pokrivaju, tada se pokrivaju i dvije homologne stranice. Dakle, trokuti su sukladni.

$\square$

3. ***K-S-K poučak***
   Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu, tj.

$$
\begin{aligned}
|AB| &= |A'B'| \\
\angle CAB &= \angle C'A'B' \\
\angle ABC &= \angle A'B'C'
\end{aligned}
$$

Dokaz :
Pretpostavimo li da za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi:

$$c = c',\ \alpha = \alpha' \text{ i } \beta = \beta'$$

tvrdi se da je tada i $\gamma = \gamma'$ te $a = a'$ i $b = b'$, tj. $\triangle ABC \approxeq \triangle A'B'C'$. Položi li se trokut $A'B'C'$ na trokut ABC tako da vrh A' padne u A, a B' padne u B, budući je $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$ onda stranic $|A'C'| = b'$ i $|B'C'| = a'$ moraju pasti na stranice $|AC| = b$, tj. $|BC| = a$. Pravci na kojima leže stranice $|A'C'|$ i $|B'C'|$ mogu se sječi samo u jednoj točki, odnosno vrhu C'. Taj uvjet zahtijeva da vrh C' padne u vrh C. Trokut $A'B'C'$ potpuno je prekrio trokut ABC što pokazuje da su trokuti sukladni i da je gornja tvrdnja opravdana.

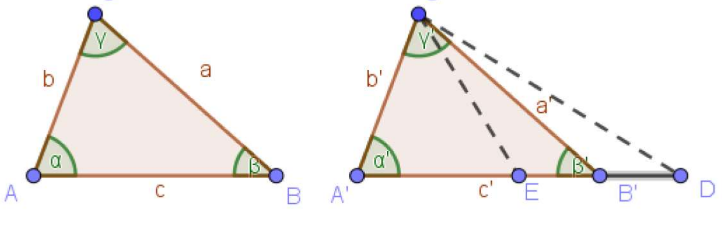
□

4. ***S-S-K poučak***
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici, tj.

$$|BC| = |B'C'|$$
$$|AC| = |A'C'|$$
$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$

uz uvjet $|BC| > |AC|$.

Dokaz :



Slika 2.

Neka je $a = a'$, $b = b'$, $a > b$, $\alpha = \alpha'$. Ukoliko trokut $A'B'C'$ položimo na trokut ABC, tako da se prekrije manji par stranica koje su jednake zadanoj duljini b, tj. vrh A' padne u A, a vrh C' padne u C, tada krak $A'B'$ kuta α ($\alpha = \alpha'$) padne u smjer kuta α.
Prema tome vrh B' mora pasti u vrh B. Pretpostavimo da B' ne padne u točku B, već neku točku koja se nalazi između točaka A i B, (npr. točku E) ili u produženju dužine $\overline{AB}$, (npr. točku D).
Kada bi vrijedio prvi slučaj, vrijedilo bi sljedeće: $|CE| = a'$, $(a' = a)$, tada bi trokut CEB bio jednakokračan, a $\angle CEB$ je šiljast (dakle, njegovo suplement je tupi kut).
Slično se pokaže da B' ne može pasti u točku D. Time je pokazano da B' mora pasti u B i vrijedi sukladnost trokuta.

$\square$

U slučaju mnogokuta, sukladnost se obično definira zornije:

Definicija 3. *Dva su mnogokuta sukladna ako su im odgovarajući kutovi i odgovarajuće stranice sukladne.*

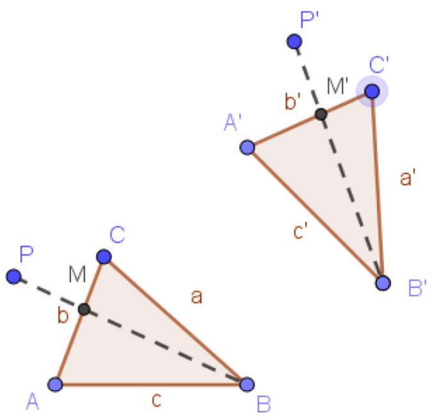
Označimo s M skup svih točaka ravnine. Prema [1] slijedi definicija:

Definicija 4. *Kažemo da je preslikavanje $f\colon M \to M$ izometrija ravnine M ako za sve točke A i B ravnine M vrijedi $|A'B'| = |AB|$, gdje je $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.*

Primjedba 1. *Izometrije preslikavaju trokute na trokute. Općenitije, izometrije preslikavaju likove na sukladne likove.*

Teorem 2. *Postoji jedinstvena izometrija f koja dani trokut ABC preslikava na njemu sukladni trokut $A'B'C'$. Na taj način, s dva sukladna trokuta izometrija f je potpuno određena.*

Dokaz :



Slika 3.

Pretpostavi se da vrijedi: $\triangle ABC \approxeq \triangle A'B'C'$.
Za danu točku P jednoznačno se može konstruirati lik $A'B'C'P'$ sukladan liku $ABCP$. Tako konstruirano preslikavanje $f\colon P \to P'$ je upravo izometrija f koja preslikava trokut ABC na trokut $A'B'C'$.

□

S obzirom na orijentaciju, izometrije dijelimo na istosmjerne i protusmjerne. Prema [2] slijede definicije:

Definicija 5. *Izometrije koje preslikavaju neke trokute na istosmjerno sukladne trokute nazivaju se istosmjerne izometrije.*

Definicija 6. *Izometrije koje preslikavaju neke trokute na protusmjerno sukladne trokute nazivaju se protusmjerne izometrije.*

1.1 Osnovna svojstva izometrija euklidske ravnine

Propozicija 1. *Neka je $f\colon M \to M$ izometrija. Tada vrijedi:*

(1) Slika dužine $\overline{AB}$ je dužina $\overline{f(A)f(B)}$.

(2) Slika polupravca s početkom u točki O je polupravac s početkom u točki $f(O)$.

(3) Slika poluravnine određene pravcem p je poluravnina određena pravcem $f(p)$.

Teorem 3. *Skup svih izometrija euklidske ravnine tvori grupu s obzirom na kompoziciju (tzv. Grupa izometrije euklidske ravnine).*

Definicija 7. *Točku A zovemo fiksnom točkom izometrije f ako*

$$f(A) = A.$$

Definicija 8. *Pravac p zovemo fiksni pravac izometrije f ako*

$$f(p) = p.$$

Definicija 9. *Kažemo da je izometrija f involutorno preslikavanje ako*

$$f \circ f = id,\ f \neq i_d.$$

Teorem 4. *Neka je f izometrija.*

(a) Sjecište dvaju fiksnih pravaca od f je fiksna točka od f.

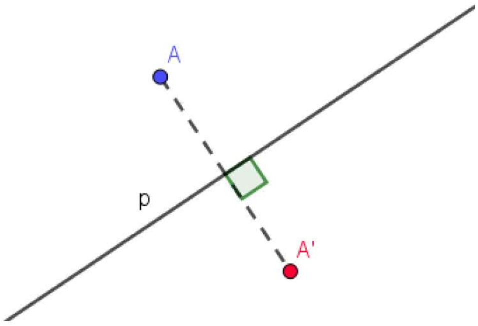
(b) Spojnica dviju fiksnih točaka od f je fiksni pravac od f.

(c) Ako je f involutorna izometrija, tada točkom koja nije fiksna za f prolazi jedan i samo jedan pravac fiksan za f.

1.2 Osna simetrija

Postoji nekoliko definicija osne simetrije, mi ćemo izdvojiti dvije. Prema [1] i [2] slijedi:

Definicija 10. *Osna simetrija ravnine M s obzirom na pravac p je preslikavanje koje svakoj točki A ravnine M pridružuje točku A' tako da je pravac p simetrala dužine $\overline{AA'}$. Točku A' nazivamo osnosimetričnom slikom točke A, a pravac p os simetrije.*



Slika 4.

Očito vrijedi da je točka A' osnosimetrična slika točke A, tj.

$$s_p \colon A \to A',$$

ali je i točka A osnosimetrična slika točke A', tj.

$$s_p \colon A' \to A,$$

slijedi

$$s_p = s_p^{-1}.$$

Prema definiciji 8. to znači da je osna simatrija involutorna izometrija. Odnosno, ako se osna simetrija provede dva puta za redom dobije se identiteta, tj.

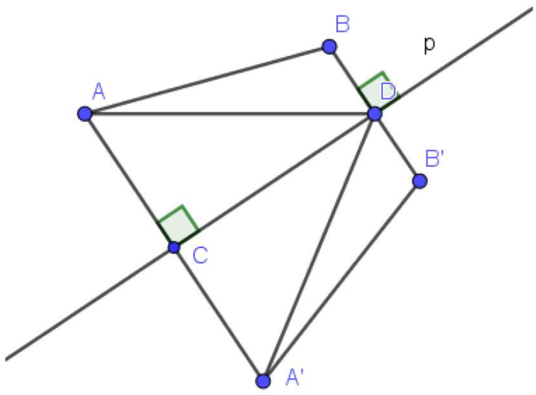
$$s_p \circ s_p = i_d$$

Pogledajmo drugu definiciju osne simetrije:

Definicija 11. *Involutornu izometriju kod koje su sve točke pravca p fiksne zovemo osna simetrija s obzirom na pravac p i označavamo sa s_p.*

Teorem 5. *Osna simetrija $s_p \colon M \to M$ je izometrija.*

Dokaz :
Neka su A i B točke u ravnini M. Točka A' neka je osnosimetrična slika točke A, tj. $A' = s_p(A)$, a točka B' osnosimetrična slika točke B, tj. $B' = s_p(B)$.
Polovište dužine $\overline{AA'}$ označimo točkom C, a polovište dužine $\overline{BB'}$ točkom D.



Slika 5.

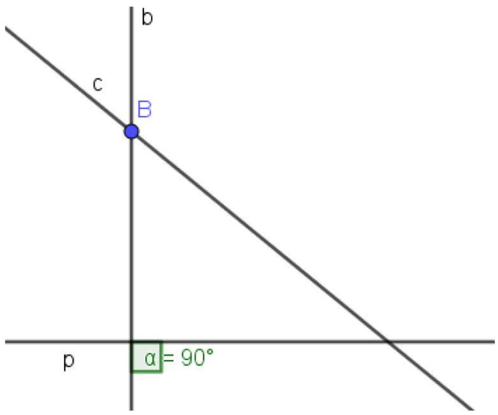
Prema S-K-S poučku su trokuti ACD i $A'CD$ sukladni.
Naime, $\overline{CD}$ im je zajednička stranica, duljina $|AC| = |A'C|$, te je $\angle ACD = \angle DCA'$.
Iz ove sukladnosti slijedi $|AD| = |A'D|$ i $\angle CDA = \angle A'DC$. Stoga je

$$\angle ADB = \angle CDB - \angle CDA = 90° - \angle CDA = 90° - \angle A'DC = \angle B'DC - \angle A'DC = \angle B'DA'$$

□

Teorem 6. *Jedini fiksni elementi osne simetrije s_p su pravac p, sve točke pravca p i svi pravci okomiti na pravac p.*

Dokaz :
Očito je da su navedeni elementi fiksni za s_p. Treba dokazati da nema drugih fiksnih elemenata za s_p.
Nijedna točka izvan pravca p nije fiksna za s_p jer s_p "mijenja strane" pravca, tj. preslikava jednu poluravninu s rubom a u drugu.
Neka je c bilo koji pravac takav da je $c \neq p$ i pretpostavimo da je $s_p(c) = c$.
Neka je b bilo koja okomica na pravac p koja siječe pravac c u točki B izvan pravca p.



Slika 6.

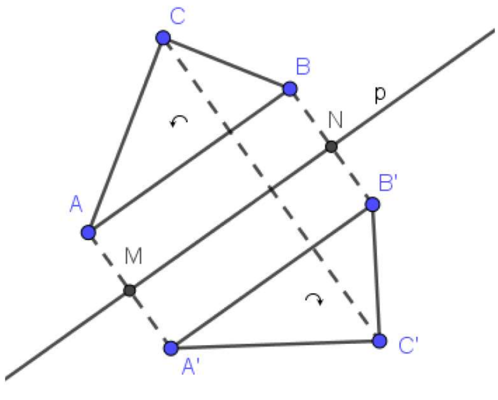
Tada je $s_p(b) = b$ i $s_p(c) = c$.
Prema teoremu 2.(a) slijedi

$$s_p(B) = B$$

što je nemoguće jer nema fiksnih točaka izvan pravca p.

$\square$

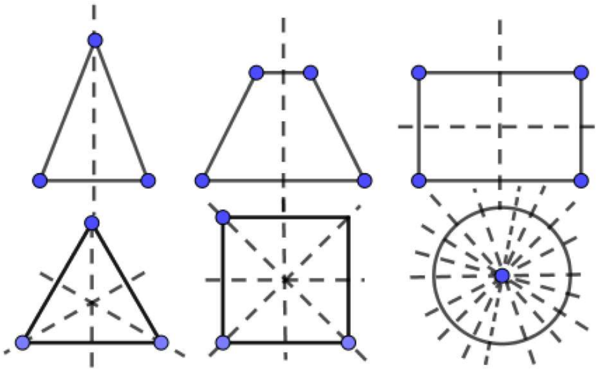
Primjedba 2. *Osna simetrija s_p je protusmjerna izometrija.*



Slika 7.

Uočavamo kako se trokut ABC preslikao u sukladan trokut $A'B'C'$ koji je suprotno orijentiran u odnosu na njega samog.

Definicija 12. *Za neki skup točaka ravnine kažemo da je osnosimetričan ako postoji osna simetrija pri kojoj se taj skup točaka preslikava na sebe sama.*



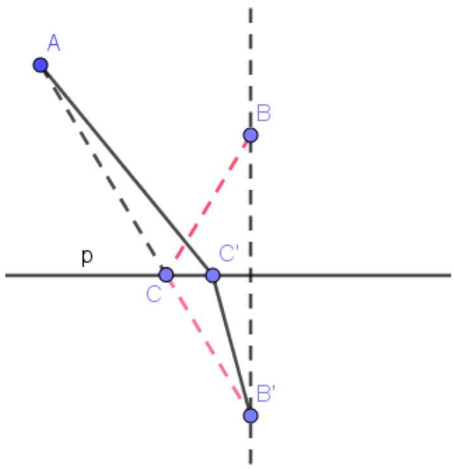
Slika 8.

Promatrajući sliku zaključujemo kako pravilni n-terokuti s n stranica imaju n osi simetrije, dok je kod kruga svaki pravac koji prolazi njegovim središtem os simetrije. Drugim riječima, krug ima beskonačno mnogo osi simetrije.

Navedimo primjer u kojem ćemo primjenom osne simetrije pronaći minimalan put, tj. minimalnu udaljenost između dviju točaka koje se nalaze s iste strane pravca.

Primjer 1. *S iste strane pravca p dane su točke A i B. Odredite na pravcu p točku C tako da zbroj udaljenosti $|AC| + |CB|$ bude najmanji.*

Analiza:



Slika 9.

Dokaz :
Točka B' je osnosimetrična slika točke B

$$B' = s_p(B)$$

Točka C je sjecište pravca p i dužine $\overline{AB'}$

$$\overline{AB'} \cap p = \{C\}$$

Pokažimo da je zbroj udaljenosti $|AC| + |CB|$ minimalan.
Neka je $C' \in p$, $C' \neq C$

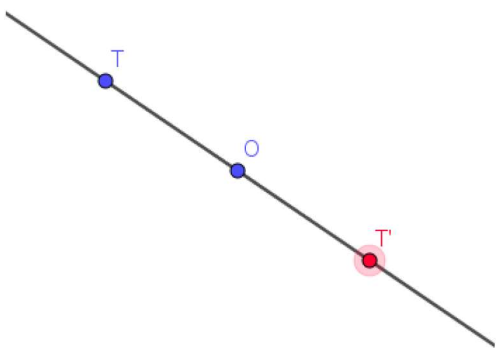
$$|AC| + |CB| = |AC| + |CB'| < |AC'| + |C'B'| = |AC'| + |C'B|$$

Raspava:
Rješenje ovog zadatka je jedinstveno.
Ako točke A i B leže na pravcu q okomitom na pravac p, onda je rješenje presjek pravaca p i q.

1.3 Centralna simetrija

Prema [1] i [2] navodimo sljedeće dvije definicije centralne simetrije.

Definicija 13. *Neka je O čvrsta točka ravnine M. Centralna simetrija ravnine M obzirom na točku O je preslikavanje $s_O \colon M \to M$ definirano na sljedeći način: Najprije je $s_O(O) = O$. Ako je T točka različita od O, neka je T' točka na pravcu TO različita od T takva da je $|TO| = |OT'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se s $s_O(T) = T'$.*



Slika 10.

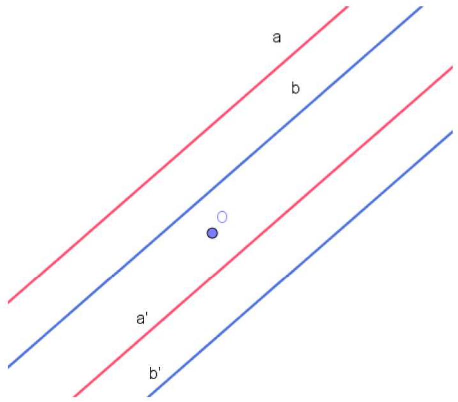
Neka je T' centralnosimetrična slika točke T

$$T' = s_O(T)$$

Tada je točka O polovište dužine $\overline{TT'}$, odnosno

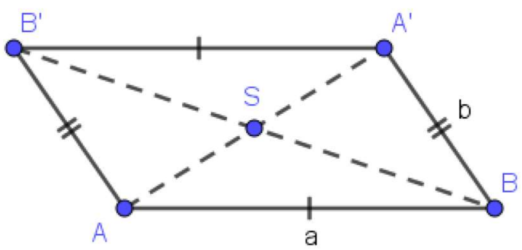
$$|OT| = |OT'|$$

Osim toga, važno je napomenuti kako centralna simetrija s obzirom na točku O preslikava svaki pravac koji ne prolazi točkom O u njemu paralelan pravac.



Slika 11.

Ta činjenica je vrlo važna pri dokazivanju sljedećeg:
Ukoliko definiramo paralelogram kao četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju, tada su parovi njegovih nasuprotnih stranica paralelni.



Slika 12.

Primjedba 3. *Centralna simetrija je involutorna izometrija, tj.*

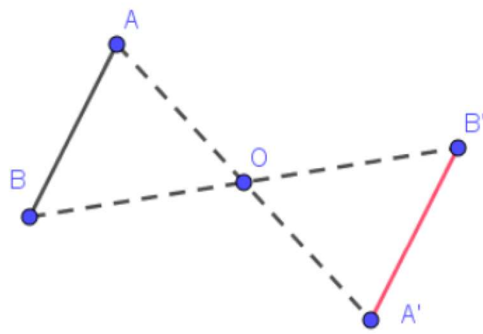
$$s_O \circ s_O = i_d$$

Pogledajmo sada drugu definiciju:

Definicija 14. *Involutornu izometriju kod koje su svi pravci kroz točku O fiksni zovemo centralna simetrija s centrom u O ili simetrija s obzirom na točku O i označavamo sa s_O.*

Teorem 7. *Centralna simetrija $s_O \colon M \to M$ je izometrija ravnine M.*

Dokaz :



Slika 13.

Neka su A i B točke ravnine M. Točka A' neka je centralnosimetrična slika točke A, a točka B' centralnosimetrična slika točke B.
Kako je $\angle BOA = \angle B'OA'$, $|AO| = |A'O|$ i $|BO| = |B'O|$, trokuti AOB i $A'OB'$ su sukladni prema S-K-S poučku. Slijedi $|AB| = |A'B'|$.

□

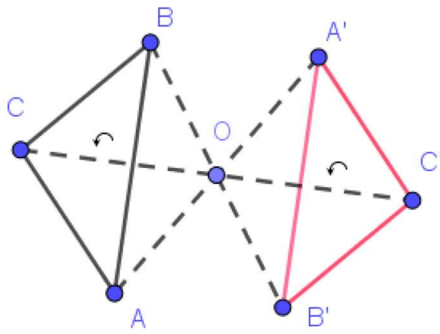
Teorem 8. *Jedini fiksni elementi centralne simetrije s_O su točka O i svi pravci koji prolaze kroz točku O.*

Dokaz :
Očito je da su navedeni elementi fiksni za s_O. Treba dokazati da nema drugih fiksnih elemenata za s_O.
Kada bi za neku točku B različitu od O bilo $s_O(B) = B$, tada bi sve točke pravca $c = OB$ bile fiksne za s_O jer s_O čuva udaljenost.
Kako je $s_O \neq i_d$, to bi po definiciji od s_O bila simetrija s obzirom na pravac c, tj. $s_O = s_c$. No, tada bi svi pravci kroz O bili fiksni za s_c (jer su fiksni za s_O) što je u kontradikciji s teoremom 6. koji kaže da su jedini fiksni elementi osne simetrije s_c

pravac c i svi pravci okomiti na c. Dakle, O je jedina fiksna točka za s_O.
Kada bi za neki pravac b bilo $s_O(b) = b$. Tada bi prema teoremu 4.(a) (sjecište dvaju fiksnih pravaca od f je fiksna točka od f) svaka točka C pravca b bila fiksna za s_O što je nemoguće. Dakle, jedino pravci koji prolaze točkom O su fiksni pravci za s_O.

$\square$

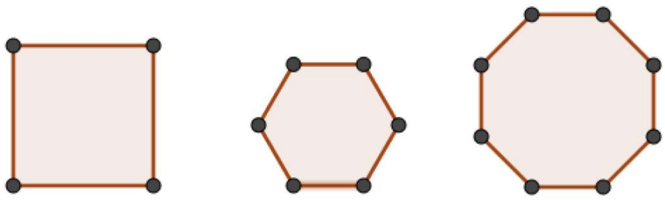
Primjedba 4. *Centralna simetrija s_O je istosmjerna izometrija.*



Slika 14.

Za razliku od osne simetrije, centralna simetrija preslikava trokut ABC u trokut $A'B'C'$ koji mu je sukladan i jednako orijentiran.

Definicija 15. *Za neki skup točaka ravnine kažemo da je centralnosimetričan ako postoji centralna simetrija pri kojoj se taj skup točaka preslikava na sebe sama.*

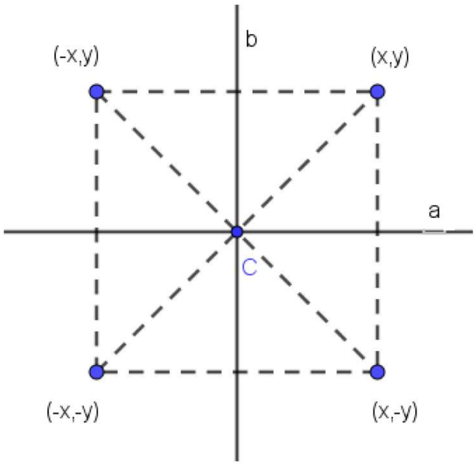


Slika 15.

Promatrajući sliku možemo zaključiti kako su pravilni mnogokuti s parnim brojem stranica centralnosimetrični.

Teorem 9. *Ako su a i b okomiti pravci sa sjecištem u C, tada je* $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a = s_C$

Dokaz :
Uzmimo pravce a i b za koordinatne osi. Tada je C ishodište.
Neka je (x, y) bilo koja točka.



Slika 16.

$$(s_a \circ s_b)(x, y) = s_a(s_b(x, y)) = s_a(-x, y) = (-x, -y)$$

$$(s_b \circ s_a)(x, y) = s_b(s_a(x, y)) = s_b(x, -y) = (-x, -y)$$

$$s_C(x, y) = (-x, -y)$$

$$(s_a \circ s_b)(x, y) = (s_b \circ s_a)(x, y) = s_C(x, y)$$

Kako to vrijedi za svaku točku (x, y) ravnine, nužno je

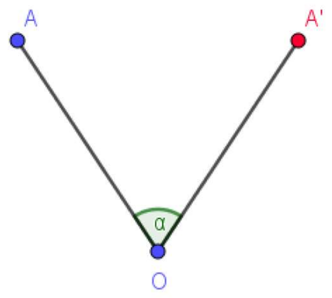
$$s_a \circ s_b = s_b \circ s_a = s_C.$$

□

1.4 Rotacija

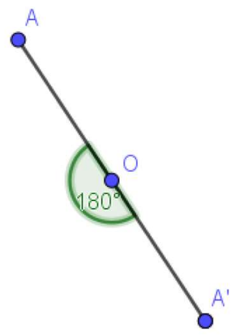
Prema [1] i [2] navodimo definiciju:

Definicija 16. *Neka je dana čvrsta točka O i orijentirani kut α. Nekoj točki A ravnine M pridružuje se točka A' tako da vrijedi: $|OA| = |OA'|$ i kut $\angle AOA' = \alpha$. Tako definirana bijektivna transformacija ravnine naziva se rotacija $r(O, \alpha)$ ravnine oko točke O za kut α. Točku O nazivamo centar rotacije, a α kut rotacije.*



Slika 17.

Što će se dogoditi ukoliko definiramo kut rotacije $\alpha = 180°$?
Rotiramo li točku A iz definicije 15. za $180°$ oko točke O dobit ćemo sljedeće:

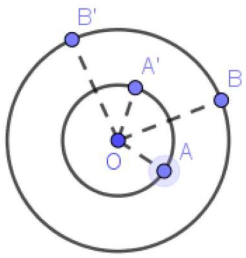


Slika 18.

Dakle, centralna simetrija je poseban slučaj rotacije.

Teorem 10. *Rotacija $r\colon M \to M$ je izometrija ravnine M.*

Dokaz :
Neka je O središte, a α kut rotacije. Neka su A i B točke u ravnini M te neka je $A' = r(A)$, $B' = r(B)$. Razlikujemo dva slučaja, kada točka B leži unutar kuta $\angle AOA'$ te kada je ona izvan tog kuta. U prvom slučaju, kada točka B leži unutar kuta $\angle AOA'$ imamo:

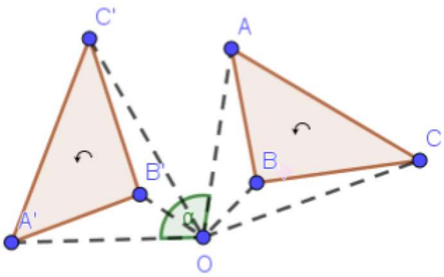


Slika 19.

$$\angle AOB = \angle AOA' - \angle BOA' = \alpha - \angle BOA' = \angle BOB' - \angle BOA' = \angle A'OB'$$

Uz to je i $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$. Stoga su prema S-K-S poučku trokuti OAB i $OA'B'$ sukladni. Slijedi $|AB| = |A'B'|$.
Slična se tvrdnja pokaže i u drugom slučaju. □

Primjedba 5. *Rotacija r je istosmjerna izometrija.*



Slika 20.

Prethodnim teoremom smo pokazali kako rotacija preslikava trokut u sebi sukladan trokut. Rotiramo li trokut ABC oko točke O za kut α dobit ćemo trokut $A'B'C'$ koji je sukladan i jednako orijentiran kao trokut ABC.

Teorem 11. *Spojnica dviju različitih fiksnih točaka izometrije f je fiksni pravac po točkama izometrije f.*

Teorem 12. *Izometrija s tri nekolinearne fiksne točke je identiteta.*

Teorem 13. *Dvije izometrije koje se podudaraju u tri nekolinearne točke su jednake.*

1.4.1 Rotacija kao kompozicija dvije simetrije

Teorem 14. *Neka su dani pravci a i b. Neka je* $O = a \cap b$ *i* $\alpha = \angle(a, b)$. *Tada vrijedi* $s_b \circ s_a = r_O^{2\alpha}$.

Dokaz:

Ako je $a = b$ tada je $\alpha = 0°$ i $s_b \circ s_a = i_d = r_O^{2\alpha}$.

Ako je $a \neq b$

$(s_b \circ s_a)(O) = s_b(s_a(O)) = s_b(O) = O$ (1)

Neka je $A \in a$, $A \neq O$.

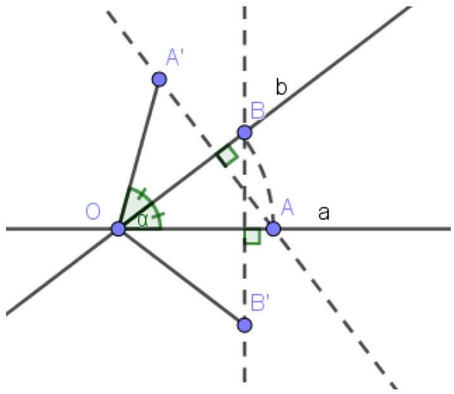
Neka je $B = b \cap k(O, |OA|)$, $\angle BOA = \alpha$, $A' = s_b(A)$. Tada je b simetrala dužine $\overline{AA'}$.

$(s_b \circ s_a)(A) = s_b(s_a(A)) = s_b(A) = A' = r_O^{2\alpha}(A)$ (2)

Neka je $B' = s_a(B)$, tada je a simetrala dužine $\overline{BB'}$.

$|OB| = |OB'|$, $\angle B'OB = 2\alpha$, tj. $B = r_O^{2\alpha}(B')$

$(s_b \circ s_a)(B') = s_b(s_a(B')) = s_b(B) = B = r_O^{2\alpha}(B')$ (3)



Slika 21.

(1), (2), (3) povlači da se $s_b \circ s_a$ i $r_O^{2\alpha}$ podudaraju u tri nekolinearne točke pa prema teoremu 13. imamo $s_b \circ s_a = r_O^{2\alpha}$

□

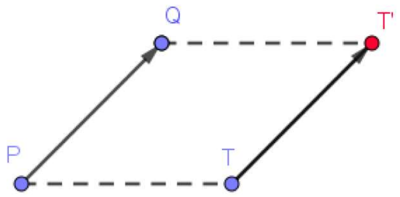
Teorem 15. *Izometrija je rotacija ako i samo ako je kompozicija dvije simetrije s obzirom na pravce koji se podudaraju ili se sijeku.*

Dokaz:
$\Leftarrow$ Dokaz ovog smjera je teorem 14.
$\Rightarrow$ Promotrimo rotaciju $r_O^{2\alpha}$ i neka je $\alpha' \in \langle -180°, 180°]$ tako da je $\alpha' \equiv \alpha (\mod 360°)$
Ako je $\alpha' = 0°$ ili $\alpha' = 180°$, neka je a bilo koji pravac i uzmimo $b = a$.
Tada je $r_O^{2\alpha} = i_d = s_b \circ s_a$.
Ako je $\alpha' \neq 0°$ i $\alpha' \neq 180°$, neka je a pravac kroz O i b jedinstven pravac takav da je $\angle(a, b) = \alpha'$. Tada je $r_O^{2\alpha} = r_O^{2\alpha'} = s_b \circ s_a$.

□

1.5 Translacija

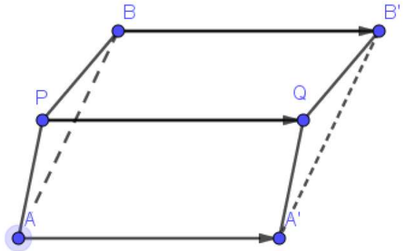
Definicija 17. *Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ neki čvrsti vektor u ravnini M. Preslikavanje $t_{\vec{a}}\colon M \to M$ koje točki T ravnine M pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T)$ iz M tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ naziva se translacija ravnine M za vektor $\vec{a}$.*



Slika 22.

Teorem 16. *Translacija $t_{\vec{a}}\colon M \to M$ je izometrija.*

Dokaz :



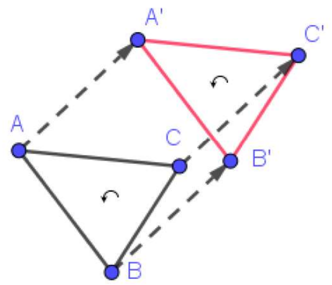
Slika 23.

Neka su A i B dvije točke ravnine M. Točke A' i B' neka su njihove slike pri translaciji $t_{\vec{a}}$. Tada su $AA'QP$ i $BPQB'$ paralelogrami, pa je $|AA'| = |PQ|$, $AA'||PQ$ i $|BB'| = |PQ|$, $BB'||PQ$. Stoga je $|AA'| = |BB'|$ i $AA'||BB'$, pa je i četverokut $AA'B'B$ paralelogram, a odatle slijedi $|AB| = |A'B'|$.

□

Primjedba 6. *Translacija t je istosmjerna izometrija.*

Translacija čuva duljinu dužine, tj. translatirana je dužina sukladna početnoj dužini. Također, translacija čuva i veličinu kutova, tj. translatirani kut je sukladan početnom kutu. Iz ove dvije činjenice može se zaključiti da translacija preslikava geometrijski lik u sebi sukladan geometrijski lik. Pogledajmo na primjeru trokuta:

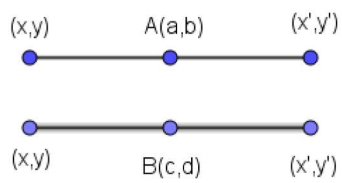


Slika 24.

Translacija preslikava trokut ABC u sukladan i jednako orijentiran trokut $A'B'C'$.

Teorem 17. *Kompozicija dvije centralne simetrije je translacija.*

Dokaz :
Neka su dane točke $A(a, b)$ i $B(c, d)$.
Vrijedi $2\overrightarrow{AB} = (2(c-a), 2(d-b))$



Slika 25.

Tada je

$$
\begin{aligned}
a = \frac{x+x'}{2} &\longrightarrow x' = 2a - x \\
b = \frac{y+y'}{2} &\longrightarrow y' = 2b - y \\
c = \frac{x+x'}{2} &\longrightarrow x' = 2c - x \\
d = \frac{y+y'}{2} &\longrightarrow y' = 2d - y
\end{aligned}
$$

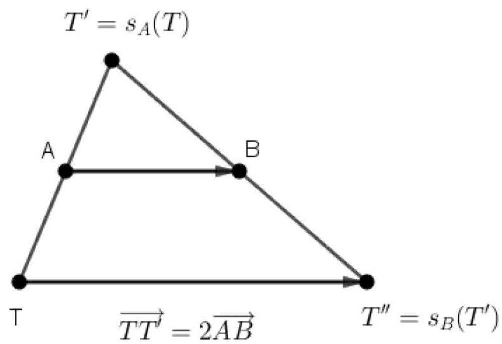
odnosno

$$
\begin{aligned}
s_A \ldots x' = 2a - x, y' = 2b - y \\
s_B \ldots x' = 2c - x, y' = 2d - y
\end{aligned}
$$

slijedi :
$(s_B \circ s_A)(x,y) = s_B(s_A(x,y)) = s_B(2a-x, 2b-y) = (2c-(2a-x), 2d-(2b-y)) =$ $(x+2(c-a), y+2(d-b)) = t_{2\overrightarrow{AB}}(x,y)$

□

Prethodni teorem možemo prikazati i slikovito :



Slika 26.

Teorem 18. *Ako su dani paralelni pravci a i b i vektor $\vec{v}$ okomit na a i b čija je duljina jednaka dvostrukoj udaljenosti pravaca a i b . Tada vrijedi $s_b \circ s_a = t\vec{v}$.*

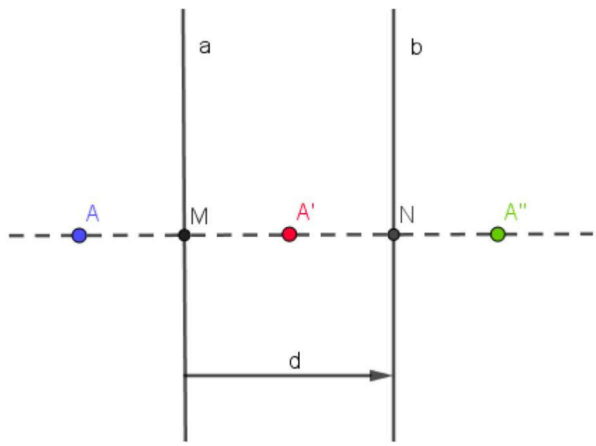
Dokaz :
Ako je $a = b$, tada je $\vec{v} = \vec{0}$ i $s_b \circ s_a = i_d = t_{\vec{v}}$.
Ako je $a \neq b$ i n zajednička okomica, $A = a \cap n$, $B = b \cap n$, tada je $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB}$.

$$s_b \circ s_a = (s_b \circ s_n) \circ (s_n \circ s_a) = s_B \circ s_A$$

Prema teoremu 17. kompozicija dvije centralne simetrije je translacija, tj.
$s_B \circ s_A = t_{2\overrightarrow{AB}} = t_{\vec{v}}$.

□

Prikažimo slikovito prethodni teorem :



Slika 27.

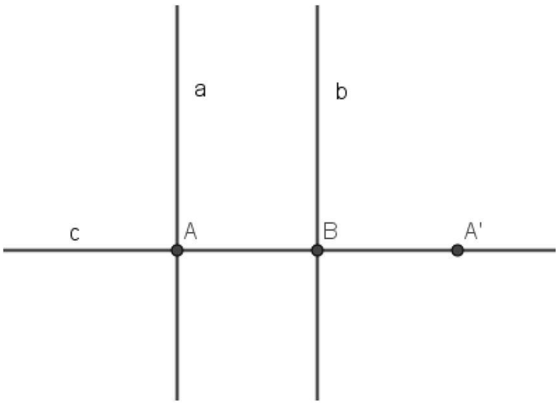
Na temelju slike lako je uočiti da je smjer preslikavanja translacije $t_{\vec{v}}$, kao kompozicija od a i b, okomit na zadane osi. Osim toga, sa slike se vidi sljedeće:

$$|AA''| = |AA'| + |A'A''| = 2|MA'| + 2|A'N| = 2(|MA'| + |A'N|) = 2|MN| = 2d$$

tj. udaljenost neke točke A i njezine slike A'' jednaka je dvostrukoj udaljenosti osi a i b.

Teorem 19. *Izometrija je translacija ako i samo ako je kompozicija dvije simetrije s obzirom na paralelne pravce.*

Dokaz :
$\Leftarrow$ Dokaz ovog smjera je teorem 18.
$\Rightarrow$ Neka je dana translacija t.
Za točku A neka je $A' = t(A)$. Tada je $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ i $t = t_{\vec{v}}$.
Ako je $A = A'$ izaberemo neki pravac a i uzmemo $b = a$. Tada je
$t_{\vec{v}} = i_d = s_b \circ s_a$
Ako je $A \neq A'$, neka je B polovište $\overline{AA'}$, $c = AB$ i neka su a, b pravci okomiti na c u A, odnosno B.



Slika 28.

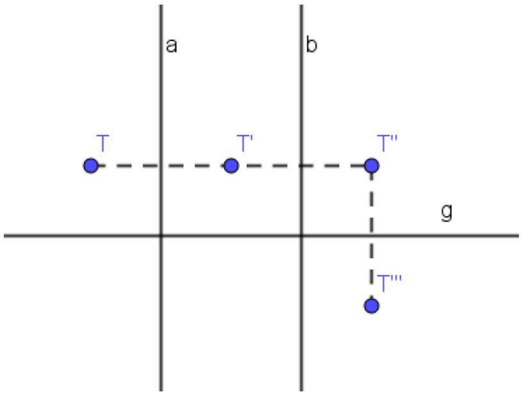
Tada prema teoremu 18. slijedi: $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$ i $t_{\vec{v}} =$s$_b \circ s_a$.

$\square$

1.6 Klizna simetrija

Prema [2] slijedi definicija:

Definicija 18. *Izometriju koju se može predočiti u obliku* $s_g \circ s_b \circ s_a$, *gdje je* $g \perp a, b$ *zovemo kliznom simetrijom s osi* g.



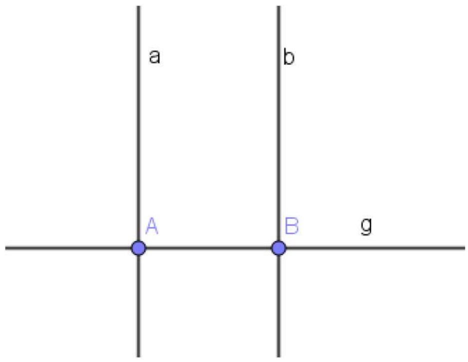
Slika 29.

Kako je $a \parallel b$, $s_b \circ s_a$ je translacija uzduž pravca g. Primijenimo li to na definiciju klizne simetrije slijedi da je klizna simetrija s osi g kompozicija jedne translacije uzduž g i simetrije s obzirom na g.
Ako je $a = b$, tada je $s_g \circ s_b \circ s_a = s_g$, tj. osna simetrija je poseban slučaj klizne simetrije.

Teorem 20. *Klizna simetrija s osi* g *koja nije osna simetrija, nema fiksnih točaka, a jedini fiksni pravac joj je pravac* g.

Teorem 21. *Izometrija je klizna simetrija ako i samo ako se može predočiti kao kompozicija jedne simetrije s obzirom na pravac i jedne simetrije s obzirom na točku ili jedne simetrije s obzirom na točku i jedne simetrije s obzirom na pravac.*

Dokaz :
Neka je $g \perp a, b$ i $s_g \circ s_b \circ s_a$ dana klizna simetrija. Neka je $A = a \cap g$ i $B = b \cap g$.



Slika 30.

Tada prema teoremu 9. slijedi

$$s_g \circ s_a = s_a \circ s_g = s_A,$$

$$s_g \circ s_b = s_b \circ s_g = s_B,$$

pa dobivamo

$$s_g \circ s_b \circ s_a = s_B \circ s_a = s_b \circ s_g \circ s_a = s_b \circ s_A$$

Obratno, neka je dana izometrija $s_B \circ s_a$. Neka je g okomica iz B na a i b. Tada je $a, b \perp g$, a prema teoremu 9. je $s_g \circ s_b = s_B$ pa slijedi $s_B \circ s_a = s_g \circ s_b \circ s_a$, tj. $s_B \circ s_a$ je klizna simetrija s osi g jer je $a, b \perp g$.
Analogno, ako je dana izometrija $s_b \circ s_A$, tada je g okomica iz A na b i a. Imamo $s_g \circ s_a = s_A$, $s_b \circ s_g = s_g \circ s_b$ i zato $s_b \circ s_A = s_b \circ s_g \circ s_a = s_g \circ s_b \circ s_a$.

□

Teorem 22. *Fundamentalni teorem*
Preslikavanje f je izometrija ako i samo ako se može prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije.

Teorem 23. *Svaka kompozicija triju osnih simetrija je klizna simetrija.*

Prema Fundamentalnom teoremu, svaka izometrija može se prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije. Kompozicija dviju osnih simetrija je ili translacija ili rotacija (ili specijalno identiteta). Prema prethodnom teoremu kompozicija triju osnih simetrija je klizna simetrija ili specijalno osna simetrija. Zato imamo:

Teorem 24. *Svaka izometrija je ili translacija ili rotacija ili klizna simetrija. Pritom je jedino identiteta istodobno i translacija i rotacija.*

2 Učenje otkrivanjem

Učenje otkrivanjem je tehnika poučavanja koju je uveo Jerome Bruner, profesor na Sveučilištu Harvard i svjetski priznati psiholog koji se bavio uglavnom istraživanjima i razvojem kognitivne psihologije. Naglašavao je kako je suhoparno pamćenje informacija u obrazovanju djece potrebno zamijeniti otkrivanjem te kako bi učenik trebao aktivno i samostalno sudjelovati u procesu stvaranja znanja, jer je ono proces, a ne produkt.

Za razliku od klasičnih tehnika poučavanja u kojima je učenik uglavnom pasivan i očekuje se da usvaja znanja koja učitelj prezentira, učenje otkrivanjem daje pristup usmjeren na učenika, u kojemu on otkriva nove činjenice putem raznih aktivnosti i konstruira nove koncepte temeljene na postojećem znanju. Osim pristupa usmjerenog na učenika, navest ćemo još neke karakteristike tehnike učenja otkrivanjem koje ju čine različitom od klasične, a to su:

- Učenje je aktivno
- Učenje je usmjereno na proces
- Važan je neuspjeh
- Povratna informacija je neophodna
- Razumijevanje je dublje

Činjenicu da je karakteristika učenja otkrivanjem neuspjeh Bruner smatra važnom sastavnicom učenja do te mjere da učenik koji nije doživio neuspjeh u procesu učenja nije zapravo ništa naučio.

2.1 Oblici učenja otkrivanjem

Kada govorimo o oblicima učenja otkrivanjem, prema [3] ono može biti samostalno otkrivanje, vođeno otkrivanje, rasprava te fill-up-the-tanks i just-in-time pristup.

- **Samostalno otkrivanje** je prisutno ukoliko učenici uče bez nastavničke pomoći. Takvo učenje je motivirajuće za učenike i potiče dubinsko procesiranje informacija, ali ne jamči očekivani ishod. Naime, kada učenici u cijelosti samostalno otkrivaju može se dogoditi da zbog neadekvatne metodologije rada (literature, postupaka, analize) dođu do potpuno pogrešnih zaključaka.

- **Vođeno otkrivanje** je metoda poučavanja u kojoj je bitna uloga nastavnika u različitim fazama procesa. U takvom radu nastavnik usmjerava učenike pa se pokazuje da su konačni rezultati bolji.

- **Rasprava** je metoda poučavanja u kojoj se nastoji potaknuti razmjena mišljenja i ideja o nekom pitanju ili temi.

- Učenje otkrivanjem može biti takvo da je organizirano nakon što su učenici usvojili određena znanja pa se onda traži primjena tih znanja kroz proces otkrivanja, to je tzv. **fill-up-the-tanks pristup**.

- Drugi je pristup da se deklarativno znanje gradi u trenutku potrebe za rješavanjem nekog problema, to je tzv. **just-in-time pristup**.

2.2 Prednosti i nedostaci učenja otkrivanjem

Učenje otkrivanjem omogućuje razvijanje stvaralaštva, sposobnosti grupnog rada, apstraktnog mišljenja, generaliziranja te pojedinih karakteristika osobnosti poput upornosti, sustavnosti, radoznalosti, kritičnosti, suzdržavanja od donošenja zaključaka bez dovoljno argumenata. Samostalnim rješavanjem problemskih zadataka učenik razvija određeni stil rješavanja problema koji kasnije može primijeniti za rješavanje bilo kojeg problema iz svakodnevnog života. Znanje stečeno otkrivanjem je trajnije jer učenik na ovaj način sam slaže nove informacije te ih zbog toga lakše može pronaći kada su mu u određenoj situaciji potrebne.

Osim pozitivnih strana ove tehnike, postoje i neke negativne. Jedan od ključnih nedostataka nastavne tehnike učenja otkrivanjem je vrijeme potrebno za rješavanje zadataka. Ovakav način učenja zahtijeva puno više vremena od tradicionalnog učenja. Također, i sama priprema nastavnika za ovakav oblik poučavanja traži veliku kreativnost, trud i vrijeme za osmišljavanje i pripremu potrebnih materijala. Uz navedene probleme, ova nastavna tehnika je slabo zastupljena u hrvatskim školama. Usprkos tome, zbog izrazito vidljivih pozitivnih strana, ovu tehniku treba što češće primjenjivati.

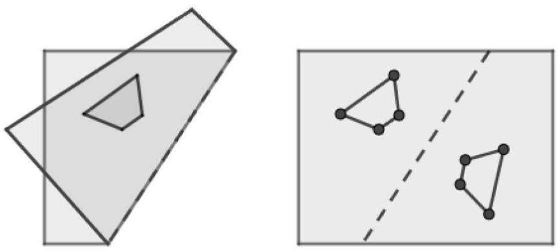
3 Istraživačke aktivnosti

Učenici se sa pojmovima preslikavanja ravnine susreću u osnovnoj školi. To nastavno gradivo mnogima od njih predstavlja problem. Zbog toga je potrebno u njima probuditi želju za stjecanjem znanja.

Opće je poznato da pojedinac lakše usvaja nova znanja ukoliko razumije pojmove i aktivno je uključen u proces učenja. Ta činjenica je temelj učenja otkrivanjem. Učenici uče važne matematičke principe zajedno s drugim učenicima pri čemu najprije vizualno istražuju problem, a nakon toga pokušavaju objasniti koja su moguća rješenja tog problema. Ova metoda poučavanja pozitivno utječe na samopouzdanje i vjerovanje u vlastiti uspjeh u matematici. Umjesto pamćenja teorema i formula učenici uče kako dobiti ono što trebaju uz pomoć onoga što već znaju. Postavljaju hipoteze, prikupljaju podatke, postavljaju modele, analiziraju i zaključuju. Vrlo brzo shvaćaju kako je geometriju lako učiti otkrivanjem na što utječu zanimljive fotografije i ilustracije koje povezuju geometriju s umjetnošću, arhitekturom, znanošću, poviješću, kulturom...
Pogledajmo sljedeće aktivnosti putem kojih učenici mogu tehnikom otkrivanja usvojiti nova znanja vezana za preslikavanja ravnine.

3.1 Aktivnost 1.

Osna simetrija je preslikavanje koje se može modelirati preklapanjem prozirnog papira duž pravca koji predstavlja os simetrije. Precrtavanjem izvornog lika nastaje njegova osnosimetrična slika.

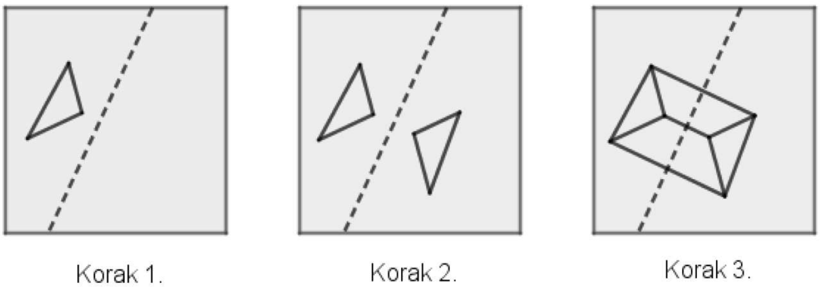


Slika 31.

Opis aktivnosti:

U ovoj aktivnosti učenici će raspoređeni u grupe modelirati osnu simetriju prozirnim papirom i otkriti kako os simetrije raspolavlja svaku dužinu koja spaja vrh izvornog lika s odgovarajućim vrhom njegove slike.

- *Korak 1.*: Na komadu prozirnog papira nacrtajte mnogokut i pravac (os simetrije) koji ga ne siječe.
- *Korak 2.*: Preklopite prozirni papir duž osi simetrije i precrtajte svoj mnogokut.
- *Korak 3.*: Nacrtajte dužine koje spajaju svaki vrh originalnog mnogokuta s odgovarajućim vrhom njegove osnosimetrične slike.



Slika 32.

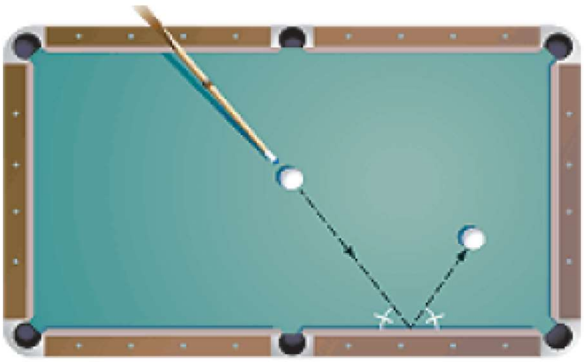
- *Korak 4.*: Što zaključujete? Usporedite svoje rezultate sa rezultatima drugih članova grupe i nadopunite rečenicu.

Os simetrije je _______ svake dužine koja spaja vrh izvornog lika s odgovarajućim vrhom njegove slike.

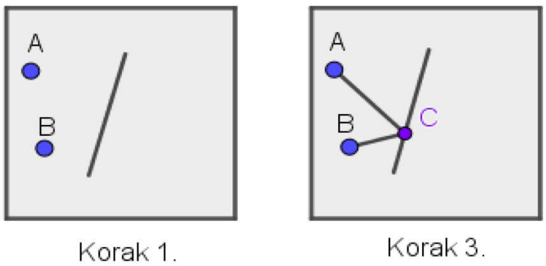
3.2 Aktivnost 2.

Pogledajmo na koji će način učenici otkriti kako pomoću osne simetrije odrediti najmanju udaljenost između dviju točaka koje se nalaze s iste strane pravca.

Opis aktivnosti:
Ovu aktivnost najbolje je započeti kroz dijalog s učenicima postavljajući im pitanja kao što su: "Jeste li ikada igrali biljar? Kako se igra biljar? Koji je cilj te igre?" Nakon toga slijedi rješavanje zadatka.



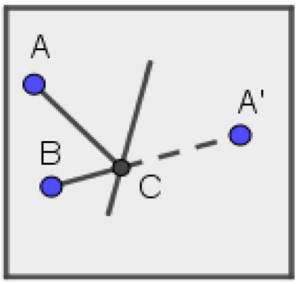
- *Korak 1.*: Nacrtajte pravac na sredini prozirnog papira koji predstavlja rub biljarskog stola te istaknite dvije točke A i B s iste strane tog pravca.
- *Korak 2.*: Zamislite da želite udariti lopticu u točki A tako da se odbije od rub stola i udari drugu lopticu u točki B. Koristeći kutomjer pokušajte na pravcu pronaći točku C za koju je udaljenost između točaka A i B najmanja.
- *Korak 3.*: Nacrtajte dužine $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ koje predstavljaju putanju loptice.



Slika 33.

- *Korak 4.*: Preklopite prozirni papir kako biste nacrtali osnosimetričnu sliku točke A obzirom na pravac. Označite sliku točke A s A'.

- *Korak 5.*: Otklopite prozirni papir i nacrtajte dužinu koja spaja točke B i A'. Što zaključujete? Kako se putanja od B do A' može usporediti s putanjom od B do C te od C do A?



Korak 5.

Slika 34.

- *Korak 6.*: Možete li nacrtati neki drugi put $B - C' - A$, pri čemi C' leži na pravcu, koji je kraći od $B - C - A$? Nadopunite rečenicu:

Ako točke A i B leže s iste strane pravca p, tada se najkraći put od A do pravca p pa do B pronalazi pomoću ______________ jedne od točaka.

3.3 Aktivnost 3.

Prije nego što učenici počnu samostalno otkrivati, moraju naučiti razliku između osne i rotacijske simetrije.

Definicija 19. *Geometrijski lik u ravnini je osnosimetričan ako u ravnini postoji pravac (os simetrije) s obzirom na kojeg se taj lik preslikava na samog sebe.*

S druge strane, definicija rotacijske simetrije glasi:

Definicija 20. *Geometrijski lik u ravnini je rotacijski simetričan ako u ravnini postoji rotacija lika oko neke točke (centra rotacije) kojom se taj lik preslikava na samog sebe.*

Opis aktivnosti:
U ovoj aktivnosti učenici će otkriti kako pravilni mnogokuti s n stranica imaju n osnih simetrija i n rotacijskih simetrija.

- *Korak 1.*: Dopunite prazna mjesta u tablici. (*Uputa*: ukoliko je potrebno, koristite ogledalo kako biste odredili osi simetrije. Za određivanje broja rotacijskih simetrija precrtajte mnogokut na prozirni papir i rotirajte ga.)

Broj stranica pravilnog mnogokuta	3	4	5	6	7	...	n
Broj osnih simetrija pravilnog mnogokuta	3	4				...	
Broj rotacijskih simetrija pravilnog mnogokuta	3	4				...	

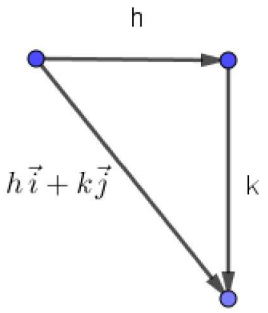
- *Korak 2.*: Usporedite svoje odgovore s drugim članovima grupe i nadopunite rečenicu.

Pravilni mnogokut s n stranica ima _______ osnih simetrija i_______ rotacijskih simetrija.

3.4 Aktivnost 4.

Da bi učenici uspješno izvršili ovu aktivnost moraju znati sljedeće: Pri transformaciji mnogokuta u koordinatnoj ravnini koristimo pravila uređenih parova koja premještaju njegove vrhove.

Za bilo koju točku, pravilo uređenog para $(x, y) \Rightarrow (x + h, y + k)$ rezultira horizontalnim pomakom za h jedinica i vertikalnim pomakom za k jedinica, pri čemu su h i k cijeli brojevi. Drugim riječima, ako je (x, y) točka izvornog mnogokuta, onda je $(x + h, y + k)$ odgovarajuća točka njegove slike.
Uređeni par može biti zapisan i u obliku vektora.



Slika 35.

Transformiramo li mnogokut koristeći pravilo $(x, y) \Rightarrow (x + 2, y - 3)$, svaka njegova točka pomaknut će se 2 koraka u desno i tri koraka dolje. To je translacija za vektor $h\vec{i} + k\vec{j}$. Dakle, pravilo uređenog para $(x, y) \Rightarrow (x + h, y + k)$ rezultira translacijom za vektor $h\vec{i} + k\vec{j}$, gdje je h horizontalna komponenta, a k vertikalna komponenta vektora.
Također, učenike trebamo upoznati sa kompozicijom izometrija. Naime, kada primijenimo jednu izometriju na dani lik, a zatim drugu izometriju na njegovu sliku, rezultirajuća izometrija naziva se kompozicija izometrija.

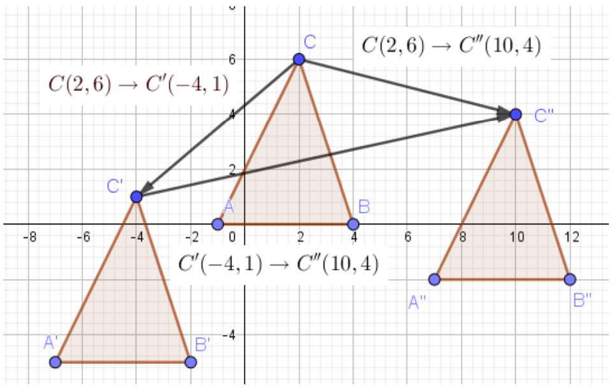
Opis aktivnosti:
Translatiranjem trokuta dva puta za redom, učenici će otkriti da je kompozicija dviju translacija ponovno translacija.

- *Korak 1.*: U koordinatnom sustavu nacrtajte trokut ABC s koordinatama $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 6)$.

- *Korak 2.*: Translatirajte trokut ABC pravilom $(x, y) \to (x-6, y-5)$ u trokut $A'B'C'$.
- *Korak 3.*: Translatirajte trokut $A'B'C'$ pravilom $(x, y) \to (x+14, y+3)$ u trokut $A''B''C''$.
- *Korak 4.*: Odgovorite na sljedeća pitanja:
  a) Koje preslikavanje je ekvivalentno kompoziciji dviju translacija?
  b) Koje preslikavanje prevodi drugu sliku, trokut $A''B''C''$, nazad na poziciju zadanog trokuta ABC?

Rješenje:

a)



Slika 36.

Svaku točku trokuta pomaknuli smo najprije 6 jediničnih duljina u lijevo, a zatim 14 jediničnih duljina u desno i 5 jediničnih duljina dolje, a zatim 3 jedinične duljine gore.

$$(x, y) \to (x-6+14, y-5+3)$$
$$(x, y) \to (x+8, y-2)$$

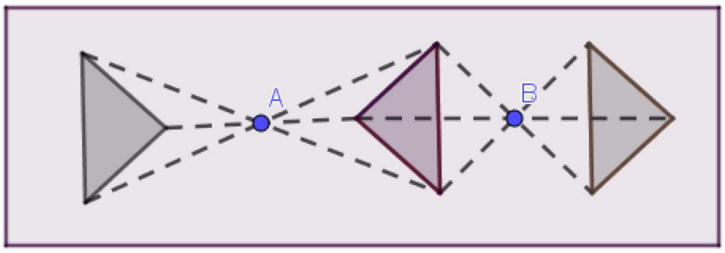
To možemo definirati i kao translaciju za vektor $8\vec{i} - 2\vec{j}$

b) Translacija za vektor $-8\vec{i} + 2\vec{j}$ vratit će drugu sliku, trokut $A''B''C''$, u zadani trokut ABC.

3.5 Aktivnost 5.

Opis aktivnosti:
U ovoj aktivnosti učenici će otkriti kako je kompozicija dviju centralnih simetrija translacija. Nadalje, mjerenjem udaljenosti će zaključiti kako je udaljenost točke izvornog lika i odgovarajuće točke njegove druge slike jednaka dvostrukoj udaljenosti centara simetrija.

- *Korak 1.*: Nacrtajte mnogokut i dvije točke A i B koje ne pripadaju tom mnogokutu.
- *Korak 2.*: Konstruirajte centralnosimetričnu sliku s obzirom na točku A.
- *Korak 3.*: Konstruirajte centralnosimetričnu sliku slike mnogokuta dobivenog u 2. koraku s obzirom na točku B.



Slika 37.

- *Korak 4.*: Koja izometrija preslikava izvornu sliku mnogokuta u drugu sliku mnogokuta?
- *Korak 5.*: Izmjerite udaljenost između točke izvornog mnogokuta i odgovarajuće točke njegove druge slike. Usporedite tu udaljenost s udaljenošću točaka A i B.
- *Korak 6.*: Usporedite svoja rješenja s drugim članovima grupe i nadopunite rečenicu.

Kompozicija dviju centralnih simetrija je ____________ . Osim toga, udaljenost bilo koje točke izvornog lika i odgovarajuće točke njegove druge slike jednaka je __________ udaljenosti centara simetrija.

3.6 Aktivnost 6.

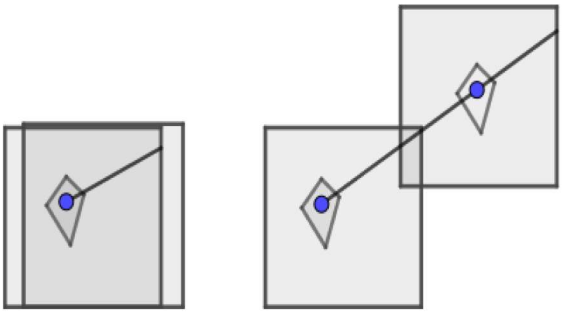
Opis aktivnosti:
U ovoj aktivnosti učenici će otkriti kako četiri pravila uređenog para transformiraju mnogokut. Svaki član grupe može izabrati različit mnogokut.

- *Korak 1.*: Nacrtajte četiri koordinatna sustava.
- *Korak 2.*: Nacrtajte isti mnogokut na istoj poziciji u svakom od četiri koordinatna sustava.
- *Korak 3.*: Pokraj svakog koordinatnog sustava napišite po jedno od sljedećih pravila uređenih parova.
  a) $(x, y) \Rightarrow (-x, y)$
  b) $(x, y) \Rightarrow (x, -y)$
  c) $(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$
  d) $(x, y) \Rightarrow (y, x)$
- *Korak 4.*: Koristite pravilo koje ste zapisali pokraj svakog koordinatnog sustava za premještanje vrhova vašeg mnogokuta kako biste dobili njegovu sliku.
- *Korak 5.*: Koristite prozirni papir kako biste zaključili je li vaša transformacija rotacija, translacija ili simetrija.
- *Korak 6.*: Usporedite svoja rješenja s drugim članovima grupe i nadopunite rečenicu.

Pravilo uređenog para $(x, y) \Rightarrow (-x, y)$ je ______
Pravilo uređenog para $(x, y) \Rightarrow (x, -y)$ je ______
Pravilo uređenog para $(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$ je ______
Pravilo uređenog para $(x, y) \Rightarrow (y, x)$ je ______

3.7 Aktivnost 7.

Osim poznavanja kompozicije izometrija, za rješavanje ove aktivnosti učenicima je potrebno objasniti kako se translacija može modelirati precrtavanjem lika na prozirni papir i povlačenjem duž ravne linije bez zaokretanja. Povlačenjem lika sve se točke pomiču za jednaku udaljenost duž paralelnih pravaca i tvore sliku tog lika.

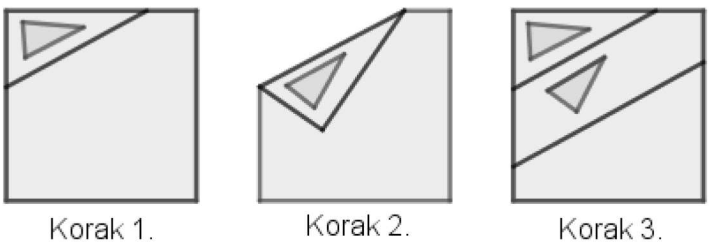


Slika 38.

Opis aktivnosti:

U ovoj aktivnosti učenici će otkriti kako je kompozicija dviju osnih simetrija s obzirom na dva paralelna pravca translacija. Također, mjerenjem udaljenosti između točke izvornog lika i odgovarajuće točke njegove druge slike, zaključit će da je ta udaljenost jednaka dvostrukoj udaljenosti paralelnih pravaca.

- *Korak 1.*: Na prozirni papir nacrtajte mnogokut i pravac koji ga ne siječe.
- *Korak 2.*: Preklopite prozirni papir duž pravca i precrtajte mnogokut. Dobiveni mnogokut je slika izvornog mnogokuta.
- *Korak 3.*: Nacrtajte drugi pravac paralelan s prvim pravcem, tako da slika mnogokuta leži između ta dva pravca.



Slika 39.

- *Korak 4.*: Preklopite prozirni papir duž drugog pravca i precrtajte sliku mnogokuta.


Korak 4.

Slika 40.

- *Korak 5.*: U kakvom je položaju druga slika mnogokuta s obzirom na izvorni mnogokut? Imenujte izometriju koja preslikava izvorni mnogokut u drugu sliku mnogokuta.

- *Korak 6.*: Izmjerite udaljenost između točke izvornog mnogokuta i odgovarajuće točke na drugoj slici mnogokuta. Usporedite tu udaljenost s udaljenošću paralelnih pravaca (osi simetrije).

- *Korak 7.*: Usporedite svoje zaključke s drugim članovima grupe i nadopunite rečenicu.

Kompozicija dviju osnih simetrija s obzirom na dva paralelna pravca je _______________ . Osim toga, udaljenost bilo koje točke izvornog lika i odgovarajuće točke njegove druge slike jednaka je _______________ udaljenosti paralelnih pravaca.

3.8 Aktivnost 8.

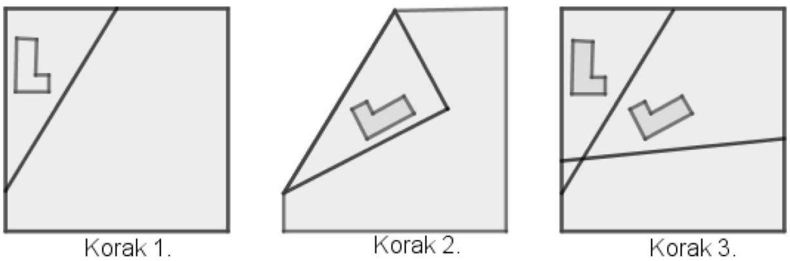
Za uspješno rješavanje ove aktivnosti učenici moraju savladati postupak rotacije. Pri rotaciji sve se točke izvornog lika okreću za jednak broj stupnjeva oko čvrste točke. Ona je određena centrom rotacije, kutom rotacije i smjerom rotacije. Možemo ju modelirati tako da prislonimo vrh olovke u jednu točku papira i rotiramo papir oko te točke.

Opis aktivnosti:
U ovoj aktivnosti učenici će zaključiti kako je kompozicija dviju simetrija s obzirom na pravce koji se sijeku rotacija. Nadalje, mjerenjem kutova, uočit će kako je kut rotacije dvostruko veći od kuta kojeg zatvaraju osi simetrije.

- *Korak 1.*: Na komadu prozirnog papira nacrtajte mnogokut i os simetrije koja ga ne siječe.

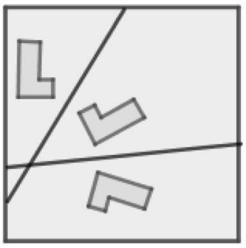
- *Korak 2.*: Preklopite papir duž osi i precrtajte mnogokut.

- *Korak 3.*: Nacrtajte drugu os simetrije koja siječe prvu os tako da se slika izvornog mnogokuta nalazi unutar kuta kojeg zatvaraju te dvije osi.



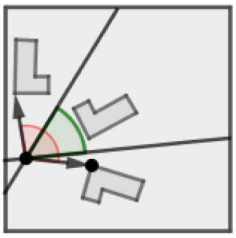
Slika 41.

- *Korak 4.*: Preklopite papir duž druge osi simetrije i precrtajte sliku izvornog mnogokuta.



Slika 42.

- *Korak 5.*: Nacrtajte dvije zrake koje počinju u sjecištu osi tako da jedna prolazi kroz točku izvornog mnogokuta, a druga kroz odgovarajuću sliku te točke.
- *Korak 6.*: Kojom se izometrijom može opisati preslikavanje izvornog mnogokuta u drugu sliku mnogokuta?
- *Korak 7.*: Izmjerite kutomjerom kut kojeg zatvaraju osi i kut kojeg zatvaraju zrake iz 5. koraka. U kakvom su odnosu te dvije veličine?



Slika 43.

- *Korak 8.*: Usporedite svoje zaključke s drugim članovima grupe i dopunite rečenicu:

Kompozicija dviju osnih simetrija s obzirom na dva pravca koji se sijeku je ____________ . Kut rotacije je ____________ veći od šiljastog kuta kojeg zatvaraju osi simetrije.

Zaključak

Jedan od osnovnih zadataka nastave je osposobiti učenike za samostalno učenje i primjenu stečenih znanja u svakodnevnom životu. Kako bi u tome uspjeli, potrebno ih je motivirati za samostalno istraživanje i učenje. Pogledamo li pozitivne i negativne strane nastavne tehnike učenje otkrivanjem u nastavi matematike možemo reći kako je ona izvrstan način na koji učenici mogu usvojiti nova znanja. Također, cilj svakog nastavnika bi trebao biti što veća primjena ove tehnike koja bi obogatila i učinila zanimljivijim cjelokupan nastavni proces.

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[3] V. Vlahović-Štetić, Ž. Kamenov, *Kako ostvariti željene ishode u studijskim programima?*, FF press, Zagreb, 2016.

[4] I. Podrug, *Utjecaj nastavne strategije učenje otkrivanjem na motivaciju učenika u nastavi biologije*, Educatio biologiae: Časopis edukacije biologije, 3(2017), 143-157

[5] L. Bognar, M. Matijević, *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[6] M. Serra, *Discovering Geometry, An Investigative Approach*, Steven Rasmussen, United States of America, 2008.

[7] T. Milanović, *Preslikavanja ravnine i prostora i primjene*, Diplomski rad, Osijek, 2010.

Sažetak

Za razliku od klasičnih metoda poučavanja u kojima je učenik pasivan , učenje otkrivanjem nudi pristup usmjeren na učenika, u kojem on otkriva novo znanje putem aktivnih, osobnih iskustava i konstruira nove koncepte temeljene na postojećem znanju. Izometrije ravnine su preslikavanja ravnine čija osnovna svojstva, definicije i međusobnu povezanost učenici na ovaj način mogu samostalno otkriti. Samostalno rješavanje problema pozitivno utječe na njihovo samopouzdanje i odgovornost. Nastavnik ima ulogu koordinatora koji ima zadatak probuditi njihovu zainteresiranost, entuzijazam i znatiželju. Na kraju možemo reći kako je iskustvo čovječanstva pokazalo da su znanja stečena osobnim otkrićima najtrajnija i najviše utječu na razvoj osobnosti pojedinca.

Ključne riječi: Izometrije ravnine, sličnost, sukladnost, učenje otkrivanjem

Summary

Unlike classical teaching methods through which student is passive, learning by discovery offers a student-centered approach, where he discovers knowledge through active, personal experiences and constructs new concepts based on existing knowledge. Plane isometries are mappings whose basic properties, definitions, and interdependence students can discover by themselves. Solving the problem positively affects their self-confidence and responsibility. Teacher has the role of a coordinator who has the task of awakening their interest, enthusiasm and curiosity. At last, experience of mankind has shown that knowledge gained through personal discoveries is the most enduring and has the most affect on development of an individual's personality.

Keywords: Plane isometry, similarity, congruence, guided discovery learning

Životopis

Rođena sam 31. listopada 1994. godine u Slavonskom Brodu u Hrvatskoj. U razdoblju od 2001. do 2009. sam pohađala osnovnu školu „Ivan Goran Kovačić”. „Gimnaziju Matija Mesić” u Slavonskom Brodu upisujem 2009. godine, smjer matematička gimnazija. Nakon završene srednje škole i položene državne mature 2013. upisujem nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku.