Ključne ideje u podučavanju matematike

Šutalo, Željka

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:860387

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Željka Šutalo

Ključne ideje u podučavanju matematike

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Željka Šutalo

Ključne ideje u podučavanju matematike

Diplomski rad

Mentor:
doc.dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

Uvod

U prvom poglavlju su objašnjeni razlozi zašto je važna matematika u svakodnevnom životu, iako pomisao na matematiku mnogim ljudima izaziva strah. Provedeno je istraživanje u kojem se razmatra kako djeca uče matematiku i kako se to znanje o učenju može primijeniti u praksi. Prikazane su poteškoće s kojima se učenici susreću te su istaknuti problemi nastavnika u podučavanju matematike. Na kraju poglavlja su prikazani raznovrsni pristupi podučavanja koje nastavnici mogu koristiti za lakše svladavanje gradiva predviđeno kurikulumom.

U drugom poglavlju se razmatra koje su uobičajne pogreške koje učenici čine pri susretu s algebrom. Objašnjeno je kako dolazi do njih te što nastavnici mogu učiniti kako bi ispravili te pogreške. Prikazani su raznovrsni pristupi u učenju i podučavanju koji utječu na kvalitetu podučavanja algebre. Ne postoji najbolji način za podučavanje algebre, potrebno je prilagoditi pristupe podučavanja ciljevima kurikuluma te potrebama samih učenika.

U posljednjem poglavlju je prikazano zašto je važna geometrija u kurikulumu školske matematike. Dva blisko povezana stajališta geometrije u dvodimenzionalnoj i trodimenzionalnoj geometriji su prostorno gledište i razumijevanje geometrijske teorije. Njegovanje vizualizacije i prostornog rasuđivanja pri početnim susretima s geometrijom olakšava učenicima razvijanje deduktivnog rasuđivanja. Prostorno i deduktivno rasuđivanje su isprepletena gledišta geometrije u kurikulumu i u podučavanju, stoga trebaju biti povezani kao neodvojivi dijelovi zajedničke cjeline.

1 Poteškoće u podučavanju matematike

Sposobnost brojanja i računanja, rješavanje problema, primjena matematičkih ideja i vještina uvelike utječe na svakodnevni život. Potreba za matematikom posebno se ističe u tehnologiji gdje razumijevanje brojeva i njihovih odnosa te vještine za rješavanje problema povećavaju njezinu važnost što zahtjeva naprednija razinu spretnosti. Matematika je često veliki izazov za učenike različitih sposobnosti u savladavanju materije predmeta. Predviđeni program kurikuluma matematike usmjeren je na nastavu koja je podjednaka za sve učenike. Poteškoće u učenju matematike mogu se pojaviti u jednom ili više područja te mogu biti privremeni ili trajni problemi koji se pojavljuju u različitim razdobljima učenikova učenja. Potrebni su raznoliki pristupi u nastavi jer se poteškoće mogu pojaviti kod učenika različite dobi i u različitim matematičkim područjima.

U želji za što boljim svladavanjem programa provode se istraživanja kako djeca uče te kako im pomoći u svladavanju materije. Britanska je organizacija Nuffield[1] predložila i financirala istraživanje na temu kako djeca uče matematiku u dobi od 5 do 16 godina. Za učenike viših razreda osnovnih škola susret s novim pojmovima u formalnom matematičkom obrazovanju mogu se činiti kao nabacane ideje. Novi načini rada, potencijalno zbunjujući prikazi te nove formalne ideje koje nije lako odmah primijeniti u svakodnevnom životu učenicima uvelike otežavaju razumijevanje matematike. Postoje značajni novi koncepti u primjerice vjerojatnosti, trigonometriji i funkcijama koji povećavaju rast matematičkog razumijevanja kod učenika. Stoga stručnjaci nastoje obuhvatiti eksperimentalno podučavanje kako bi potakli nastavnike da u podučavanju primjene neke drugačije pristupe.

Pristupi u podučavanju učenika viših razreda osnovne škole su usmjereni prema posebnim ciljevima učenja koji su često u jednakoj mjeri društveni, motivirajući i intelektualni. Međutim, postoje posebni načini učenja i podučavanja pojedinih tema koje se uče instrumentalno ili proceduralno, kao što su rješavanje jednadžbi ili dokazivanje teorema. Dodatni problem nastavnika viših razreda je što nemaju uvid u sistematsko znanje koje učenici stječu u nižim razredima. To su veoma važna

[1]Dobrotvorna organizacija koja se bavi financiranjem istraživanja i inovacije u obrazovanju i društvenim područjima, te u znanosti i društvenim znanostima.

pitanje za daljni rad s djecom jer se matematičko znanje nadograđuje. Nastavnici nisu uvijek svjesni moraju li ponoviti neke osnovne pojmove s učenicima. Stoga su potrebna istraživanja kako učenici uče u nižim razredima kako bi rad s učenicima bio što kvalitetniji.

Istraživanje se oslanja na:

- teoretsko objašnjenje kako djeca uče matematiku
- učenje matematike u višim razredima osnovne škole
- učeničke pogreške, te ogledna predavanja koja ukazuju na načine uspješnog učenja
- prednosti i nedostatke pojedinih pristupa podučavanja

Ciljevi matematičkog obrazovanja te što bi učenici trebali razumijeti i primijeniti u određenim godinama se razlikuju među zemljama, metodama ocjenjivanja, pa čak i među nastavnicima. Problem koji se neprestano javlja stručnjacima koji izrađuju kurikulume je prepoznavanje ključnih ideja u učenju matematike. Stručnjaci stoga donose različite odluke za različite svrhe. Izvješće Europskog odbora je okarakteriziralo "velike ideje" u matematici kao:

- veliki potencijal za razvijanje konceptualnog znanja
- značajni razvoj znanja matematike kao znanstvenog predmeta
- poticaj na razgovor i raspravu o matematici
- ohrabrujuće povratne informacije o načinu podučavanja koje dobije nastavnik

Iako je istraživanje usmjereno na učenike viših razreda osnovne škole, neizbježno je spuštanje na razinu učenika nižih razreda. Razlog tomu leži u važnosti nadograđivanja znanja na već postojeće. Pojedina područja matematike predstavljaju različite načine razumijevanja i aktivnosti u matematici. Neke od ideja su ključne za većinu različitih grana matematike. Snažne implicitne ideje su protkane u kurikulum matematike na način koji karakterizira što čini matematiku matematikom. Neke od najsnažnijih ideja su sveprisutne, kao što su: varijable, proporcionalnost, sličnost, simetričnost, linearnost, mjerenje, predviđanje, preciznost i dr. Izazov koji se nameće nastavnicima je kako učiniti ove ideje ekplicitnijima. Razvijanje matematičkog mišljenja kod učenika važno je kako bi ga mogli primijeniti u novonastalim situacijama, što će im pomoći u kasnijim životnim izazovima.

Učenici se u višim razredima osnovne škole nalaze u fazi učenja za koju je karakteristična promjena od formaliziranja svakodnevnog razumijevanja do učenja novih formalnih ideja koje je teško susreti u svakodnevnom životu. Iskustveno znanje je početna točka za razvoj rasuđivanja za mlađe učenike, jer se tada ideje mogu nadograđivati u sitacijama koje se rjeđe mogu iskusiti. Usporedno, stariji učenici se upoznaju s formalnim idejama koje nisu intuitivne, ali nude nove poglede na pojave unutar i izvan matematike. Istraživanje o učenju na ovoj razini se često svodi na uobičajne pogreške. Razlog zbog kojih često dolazi do pogrešaka su posebno osmišljene okoline u kojima se podučava. Na ovoj razini učenja mnogo toga ovisi o ciljevima kurikuluma, poretku tema, korištenju alata i pedagogiji.

Održivi kurikulum sa stajališta vrijednosti učenika je bitan za kasnije školovanje i zapošljavanje. Istraživanje ukazuje na potrebu za drugačijim, kvalitetnijim kurikulumom od onih koji ograničavaju upitne teme organizirane u tradicionalni poredak. Učenici su često zbunjeni jer se oslanjaju na ono što su naučili ili nisu naučili, pod utjecajem prošlih iskustava ili nisu tečni s dvoznačnim zapisima koji zahtjevaju posebno tumačenje i iskustvo koje se ponavlja. Brzaju koristeći postupke s kojima su se nedavno susreli i usvojili bez da s razumijevanjem pristupe rješavanju danog zadatka. U isto vrijeme znaju zanemariti, ili ne pokušavaju koristiti strukture, veze i smislene postupke koje možda nisu vidljive na prvi pogled.

Višestruko svrhovito iskustvo unutar i izvan matematike može olakšati i potaknuti snažno i značajno matematičko mišljenje kod učenika adolescenata. Takvo učenje zahtjeva dodatne napore i duže vremensko razdoblje te često može biti zbrkano. Učenici možda neće koristiti nove ideje spontano, ali će im biti dostupne ukoliko se njeguju. Iskustva iz svakodnevnog života često se u nastavi koriste kao motivacija, no može ograničavati učenje u jednostavnim situacijama.

Grafički zorni prikazi su važna svojstva matematike i ključni alat u učenju matematike, posebice upotreba višestrukih povezanih prikaza. Vizualne pojave i crteži na percepiranim prikazima mogu pomoći učenicima pri susretu s novim gradivom. Konceptualni se razvoj često nalazi u prepoznavanju snage prikaza ili sastavnih veza između prikaza. Koristeći grafičke prikaze, učenici mogu prepoznati da se osnovna matematička ideja može proširiti i u neočekivane domene. Pristupi u podučavanju grafičkih prikaza trebaju olakšati vezu između grafičkih i drugih prikaza kao što su algebarski, tablični i računalni prikaz. Učenici mogu razviti naviku prikazivanja podataka grafički proizvedenih sitaucijski i analiziranjem ponašanja pojmova u zbirci funkcija i drugih matematičkih alata.

Postoje razni računalni programi[2] koji služe kao pomoć u učenju i podučavanju matematike. Uvježbajaći korištenje pažljivo osmišljenih računalnih programa, učenici mogu postaviti bitna pitanja i angažirati se ispitivanju novih pristupa, razvijajući vještine za buduće školovanje i zapošljavanje. Na primjer, koristeći Logo[3], učenici mogu upravljati u kojem smjeru će se odvijati njihov projekt. Za napredovanje njihova projekta, učenici trebaju označiti značenje varijable kako bi razvili općenitije postupke koje bi mogli iskoristiti učinkovitije. Korištenje matematike kao sredstvo za rješavanje problema postaje veoma važna vještina u budućem školovanju i pri zapošljavanju.

[2]Primjeri računalni programi za algebru: Mathematica, Wolfram Alpha, Maple
[3]Jednostavni programski jezik za podučavanje i učenje matematike

2 Odnosi između količina i algebarski izrazi

Algebra je jedna od najistraživanijih područja u matematičkom obrazovanju. Razlog tomu je središnja svrha algebre u školskom kurikulumu. Učenje algebre bez razumijevanja uzrokuje zbrku i nezadovoljstvo kod učenika. U prošlosti školska algebra je uglavnom bila usmjerena na pretvaranje izraza i jednadžbi koje je lakše za koristiti i povezati s grafovima. Napredovanjem tehnologije mnogi zadaci se mogu riješiti koristeći računalne programe, no učenici još uvijek moraju znati konstruirati i prepoznati algebarske izraze u njihovim različitim oblicima, pa se iz tog razloga nameću novi obrazovni zadaci: korištenje algebarskih metoda kako bi se modelirali, razumijeli, upravljali i predvidjeli odnosi između količina i varijabli. 'Značenje' u školskoj algebri dolazi od načina na koji se izražavaju odnosi između količina i varijable. 'Odnosi između količina' i 'algebarsko rasuđivanje' su protkani kroz matematiku. Rukovanje algebarskim izrazima omogućuje nam izražavanje matematičkih veza na različite načine i veće znanje o njima. Iako je tečno pretvaranje vrijedna vještina koju je lako ispitati, javnim prikazom školskog kurikuluma dominira rukovanje algebarskim izraza bez razumijevanja. Kroz nastavne metode nastavnici moraju učenike preusmjeriti sa razmišljanja o matematici kao računanju s brojevima, prema shvaćanju matematike kao načinu logičkog razmišljanja.

Razumijevanje algebre uključuje:

- formuliranje, pretvaranje i razumijevanje generaliziranja numeričkih i prostornih situacija i odnosa
- korištenje simbola za predviđanje i objašnjavanje matematičkih i drugih situacija
- kontroliranje, korištenje, razumijevanje i prilagođavanje tabličnih prikaza, bilo grafičkim prikazima ili programima za baze podataka

Pojedinosti algebre često su u udžbenicima prikazani drugačije nego što zahtjeva kurikulum, usmjeravajući se uglavnom na formuliranje zadataka s riječima i transformiranje faktorizacijom, promjenom mjesta i grupiranjem u monome. Školska algebra je usmjerena na rješavanje jednadžbi, funkcija i grafova. Osmišljavajući vlastite metode računanja ili koristeći aritmetičke metode, učenici razumiju i koriste osnovne veze koje kasnije mogu izraziti algebarski. Najjednostavnija upotreba algebre je izražavanje odnosa između brojeva jer su učenici već upoznati s tim odnosima. Na primjer, pronalaženje nepoznanice x u izrazu $2+x=5$ uključuje operaciju zbrajanja. Učenici znaju da je odgovor broj 3. Slično, izraz $a+b-a=b$ izražava relaciju koju učenik može primjeniti kad ga se pita da izražuna koliko je $37+49-37$.

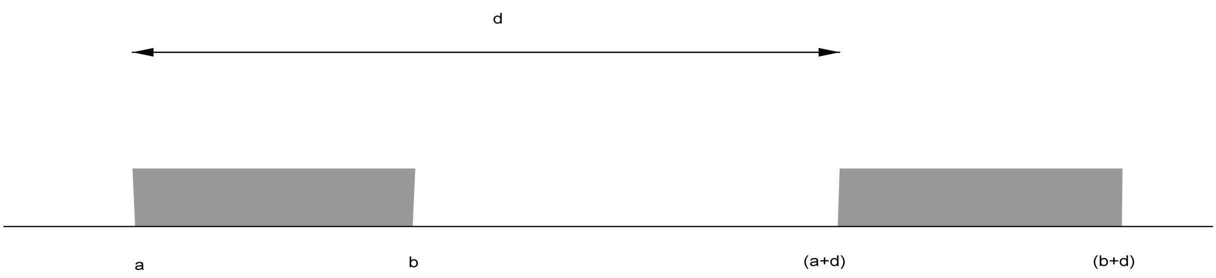
Kako bi se bolje razumijela algebra, potrebno je usmjeriti pažnju na široku dostupnost simboličkih transformacija koje mogu preobraziti izraze, riješiti jednadžbe i sprovesti ostale algebarske vještine. Računalni programi koji se time bave su dostupni i besplatni za učenike koji imaju pristup internetu. Njihova uporaba može pomoći učenicima pri rješavanju problemskih zadataka. Ipak učenici moraju razumijeti kako program radi i zašto, što se može postići iz algebarskog razumijevanja.

2.1 Što učenici uče?

U nižim razredima osnovne škole učenici se susreću s nekoliko računskih radnji. Većina učenika dobro razumije operaciju zbrajanja. Znaju da za tri broja koja su povezana izrazom $a+b=c$ vrijedi: $b+a=c$, $c=a+b$, $c=b+a$, $c-b=a$, $c-a=b$, $a=c-b$, $b=c-a$. Svoje znanje vjerojatno neće izraziti koristeći simbole, ali su već iskusili korištenje ovih varijacija. Znanje da se sve varijante mogu primjeniti u pojedinim slučajevima te znanje da su istinite za sve slučajeve je razlog za karakteristično napredovanje razumijevanja algebre. Neki učenici, ovisno o prošlim iskustvima, su u stanju izražavati ovu vezu algebarski. Također znaju da vrijedi $a+(b+c)=(a+b)+c$, no mogu se zbuniti ukoliko se radi o negativnim brojevima.

Kad se radi o množenju, većina učenika zna da iz $ab=c$ slijedi $ba=c$ ako su brojevi prirodni. Većina također zna da iz početne jednakosti slijedi $c=ab$ i $c=ba$, iako možda ne znaju izraziti te jednakosti simbolima. Znanje o jednakostima može ovisiti o činjenici jesu li dobro upoznati s pravilima množenja te mogu li prepoznati faktore. Učenici bolje razumiju odnose kod zbrajanja nego množenja, i vjerojatno ne razumiju u potpunosti kako je dijeljenje inverzna operacija množenja. Naglasak na mentalne metode i osmišljavanje vlastitih metoda računanja, omogućuje učeniku bira svoje najdraže metode koje koristi pri računanju.

Primjerice, dodavanje istog broja razlici dva broja neće utjecati na njihovu razliku: $(a+d)-(b+d)=a-b$. Tu činjenicu možemo prikazati i na brojevnom pravcu:



Slika 1: Prikaz na brojevnom pravcu

Također znaju da se jednakost neće promijeniti ako prvo zbroje dva broja, a zatim pomnože skalarom, ili svaki broj prvo pomnože sa skalarom, te ih zatim zbroje. Razumijevanje distributivnosti i asocijativnosti na intuitivnoj razini se može postići ako učenici pri računanju velikih brojeva koriste metodu 'komadanja'. Primjerice, u zbroju $1296 + 687$ trebaju zaokružiti pribrojnike na stotice i primjetiti da je zbroj $1296 + 687$ približno zbroju $1300 + 700$ koji je jednak 2000. Rezultat pribrojnika $1296 + 687$ je 1983 što je približno broju 2000.

Veze između količina mogu se razumijeti i bez poznavanja stvarnih količina. Čak i vrlo mlada djeca mogu razumijeti veze između nemjerljivih količina uspoređivajući ih. Razumijevanje veza između količina je zapravo osnova za algebarsko razumijevanje. Na primjer, učenici znaju da ako je $a > b$ i $b > c$, onda je i $a > c$ te znaju izraziti te odnose iako ne znaju vrijednosti brojeva a, b i c. Slično, znaju da ako je $a = 2b$ i $b = 2c$, onda je $a = 4c$. Neki učenici znaju izraziti veze između količina algebarski ili su upoznati s nekim algebarskim formulama kao što je formula za površinu pravokutnika, $a \cdot b$ gdje je a duljina i b širina. Upotreba pretvorbe i formule za površine, opseg i volumen su korisno predznanje za algebru. Učenici također mogu biti u mogućnosti baratati s problemima 'skrivenih brojeva' u kojima nepoznati brojevi upotpunjuju brojevnu izjavu. Zadatak podučavanja algebre je ujedinjavanje iskustva ranijeg obrazovanja sa ciljevima algebarskog razumijevanja, te dodatni zadatak razvijanja tečnosti u tehnici koja čini to ujedinjavanje mogućim.

Većina istraživanja koja uključuje algebru usmjerena je na učeničke pogreške. Potraga za općenitim pogreškama daje uvid kako učenici doživljavaju algebru. Primjerice, do mnogih pogreška dolazi zbog slabog razumijevanja simbola. Povijest učenja i podučavanja algebre ukazuje nam da isticanje apstraktnih manipulacija, razdvojenih od relacijskih značenja, mogu uzrokovati rad sklon pogreškama i također nezadovoljstvo s matematikom. Daljnji izvori pogreški su nejasnoće povezane s algebrom, posebice praznine između aritmetičkog i algebarskog razumijevanja i simbola. Konačno, učenici često užurbano primjenjuju posljednju stvar koju su naučili, ili reagiraju na vizualni prikaz, radije nego da 'pročitaju' značenje algebarskih izraza u odnosima koji su prikazani.

2.2 Problemi s tumačenjem simbola

Učenici na različite načine koriste slova kako bi razumjeli i koristili simboliku algebre, te izražavali veze. Učenici stoga mogu:

- procijeniti vrijednost slova, na primjer $a = 1$
- zanemariti slova, na primjer monom $3a$ zamjene s 3
- smatrati slova kraticom, na primjer $a =$ auto
- koristiti slova kao posebne nepoznanice koje treba pronaći
- koristiti slova kao općenite brojeve
- koristiti slova kao varijable

Dodatne poteškoće s kojima se učenici susreću su:

- Neki učenici smatraju da različita slova moraju imati različite vrijednosti, npr. u jednadžbi $3x + 5y = 8$ ne prihvaćaju da je rješenje $x = y = 1$.
- Suprotno tome, neki učenici pak smatraju da isto slovo ne može imati različite vrijednosti u jednom problemu, kao na primjer jedndžba koja ima višestruka rješenja.
- Učenici mogu očekivati da isto slovo ima istu vrijednost u različitim zadacima.
- Upotreba slova u algebri mogu navesti učenike da očekuju da vrijednost brojeva je povezana s abecedom. Na primjer, $a = 1$, $b = 2$,..., stoga je $y > p$ jer je y abecedno nakon p.

- U algebri slova ne označavaju objekte kao na primjer a za auto, ali se koriste za označavanje jedinica (m za metar).

- Slova su u nekim udžbenicima uvijek poredani abecedno, ali u algebri to nije pravilo, npr. $px + qy = k$.

Algebarska pravila nisu uvijek očigledna, već su često u udžbenicima i kurikulumima zapostavljena. Kao što učenici moraju razumijeti da znak '=' označava jednakost, a ne iznos, moraju razumijeti i značenje ekvivalencije i istovjetnost. Važno je da razumiju razliku između sljedeća dva izraza: $3(x + 2) = 3x + 6$ i $3(x + 2) = 2x - 7$. Prvi izraz označava jednakost s lijeve i desne strane znaka '=', dok drugi izraz je jednažba s nepoznanicom x. Daljnji problem s kojim se susreću učenici i nastavnici je činjenica da slova mogu predstavljati oznaku, poznanice, nepoznanice, varijable, parametre ili konstante, te neka slova imaju posebna značenja. Učenici trebaju biti svjesni razlike između formula (povezivanje količina), jednadžbi (nepoznanica x), istovjetnosti (x je argument funkcije), svojstva (generaliziranje obrazaca) i funkcija (veze između varijabli). Također trebaju iskusiti širok raspon algebarskih postupaka: pretvaranje, generaliziranje, rješavanje, pojednostavljivanje, crtanje i izražavanje veza i struktura. Samo znanje da 'slova predstavljaju brojeve' nije dovoljno.

Za ilustraciju složenosti razumijevanja simbola nameće se pitanje:
Za koje vrijednosti parametara p i q jednadžba $(p + 2q)x^2 + x = 5x^2 + (3p - q)x$ je istitnita za svaku vrijednost od x?

Za rješavanje ovog problema jako je važno uvidjeti različito značenje slova. Problemu treba pristupiti s razumijevanjem njegove strukture, a ne kao nizu operacija ili kao kvadratnoj jednadžbi s nepoznanicom x jer je u zadatku naglašeno da je istinito za sve vrijednosti broja x. U zadatku se traži da koeficijenti budu jednaki kako bi obje strane bile identične. Važno je da učenici znaju razliku između parametara i varijabli, inače dolazi do sukoba u razumijevanju aritmetičkih operacija. Učenici trebaju znati što tražiti, poistovjećivati dvije promjene težina. Prva promjena je čitanje algebarskih izraza kao nizova operacija za razumijevanje prikazanih odnosa varijabla i kako parametri oblikuju odnose. Druga promjena je vezana uz viđenje slova kao nepoznatih brojeva do viđenja slova kao varijable. Međutim, pristup čitanja simbola nije najadvekatniji niz podučavanja.

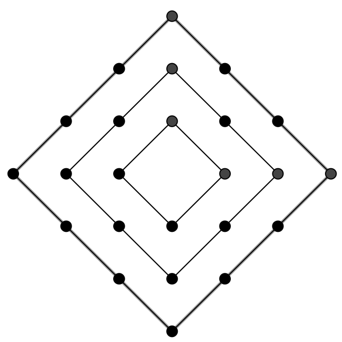
2.3 Pristupi u učenju i podučavanju algebre

Uspješnost pojedinih pristupa u podučavanju i učenju algebre uvijek ovisi o ciljevima koje želimo postići. Neki učenici mogu naučiti i uspješno svladati algebru kao oruđe koje će kasnije upotrijebiti, iako kad se radi o negativnim brojevima, pogreške su uobičajne. Istraživanje o ponavljanju i pamćenju pokazuje da oslanjanje na same vještine uzrokuje da učenici čine pogreške i nisu u mogućnosti se prilagoditi. Stoga se algebra treba podučavati kao instrument za izražavanje i preoblikovanje situacija. Učenike navodi da smisleno koriste preoblikovanja razmišljajući o izrazima koje trebaju koristiti kako bi riješili neki problem ili dokazali rezultat.

Glavna početnička greška koju učenici čine pri prvom susretu s algebrom je njihova želja za sjedinjavanje monoma kako bi 'riješili' zadatak, npr. $3a + 2b = 5ab$. Postoje različiti pristupi u objašnjavanju zbrajanju monoma, a ritualni pristup je jedan od njih, te nam on objašnjava da postoje monomi koji se "vole" i koji se "ne vole". Potrebno je uvježbati mnogo primjera kako bi se generalizirali postupci. Učenici u kratkom vremenu svladaju točna pravila za pojednostavljivanje algebarskih izraza. Pristup sukoba koristi supstituciju za uspoređivanje posljedica koje se dobiju izvršavajući računske operacije u različitom poretku i kombinacijama. Učenici tako uče o nejednakosti te stječu razumijevanje o izrazima i objektima. Učeničko svladavanje zbrajanja monoma ovisi vrednuje li nastavnik više tečnost ili razumijevanje. Jedan od pristupa je upotreba računalnog algebarskog sustava (computer algebra system - CAS). Prednosti računalnog algebarskog sustava je što daje uvid u skup proceduralnih i supstitucijskih metoda, dok su nedostaci što nisu naglašeni razlozi za pravilno rukovanje te tečnost koja se stječe vježbanjem.

Razvojem tehnologije, u nastavi se često koriste računala kako bi učenici bolje razumijeli materiju. Osmišljene su razne aplikacije kao što je računalni algebarski sustav pomoću kojeg bi se olakšalo rukovanje s matematičkim formulama. Osnovni cilj tih računalnih programa je automatiziranje monotonih i ponekad teških algebarskih zadataka. Glavna razlika između računalnog algebarskog sustava i klasičnog kalkulatora je što računalni algebarski sustav rješava jednadžbe simbolički, a ne samo numerički. Osim rješavanja jednadžbi, računalni algebarski sustavi nude i sadržaje za crtanje jednadžbi. U istraživanju financiranom od organizacije bolje rezultate su postigli učenici koji su koristili računalni algebarski sustav, zato što su zadatke rješavali postupno. Međutim, slabiji učenici nisu postigli bolje rezultat nakon korištenja računalnog algebarskog sustava jer su ga koristili za imitaciju postupaka nalazeći uzorak, a ne kao izvor informacija. Uporaba računalnih algebarskog sustava je omogućila većini učenika da razumiju ulogu koeficijenata i rezultata ukoliko se promijene. Krajnji cilj je da učenici sami postignu tečnost i točnost pri rješavanju zadataka.

Postoji tek nekolicina istraživanja na temu kako učenici uče tehničke aspekte u algebri nakon osnovne razine. Istraživanje podupire stajališe da razumijevanje i očekivanje namjene i odnosa smislenog rukovanja čini razliku u učenju za većinu učenika. Kako bi učenici poimali algebru kao alat za izgrađivanje općenitih izjava može se iskoristiti njihov urođen osjećaj za traženje uzoraka. Korištenjem nizova uzoraka izražavaju se općenita funkcionalna pravila koja su povezana s $n$tim pojmovima njihove vrijednosti. Na primjer, tablica podataka za niz grupiranih kvadrata navodi da se niz poveća za 4 osim u prvom slučaju.



n	točkice
1	4
2	8
3	12
4	16
5	...

Slika 2: Broj točkica za $n$ti kvadrat je $4n$

Kako bi se razumijela algebra, učenici moraju proći kroz nekoliko razina razumijevanja. Učenici koji uče algebru na taj način, nakon početnih pogrešaka u proceduralnom pristupu, imaju veće šanse da postanu tečniji u postupcima, jer ih motivira razumijevanje njihove svrhe. Većina metoda se razlikuje u učenikovom razumijevanju ciljeva i svrsi zadataka. Podučavanje, zadaci i tehnologija trebaju poduprijeti konačnu promjenu prema funkcionalnoj vezi, ako se zahtjeva promjena fokusa od tabličnog pristupa. Učenici često koriste vizualne ideje kako bi potakli pamćenje metoda. Mnoge uobičajne pogreške su stoga posljedice pretjeranog oslanjanja na izgled problema, npr. tumačenje r^2 kao 'dvostruki r'. U primjeru s kvadratima (naveden iznad) učenici ponekad označe da prvi kvadrat ima 2 točkice jer je to broj točkica na njegovoj stranici. Većina korisnih analogija su sličnosti odnosa, ne uočljive sličnosti. Traženje sličnih odnosa i struktura među vizualno različitim izrazima je ključno kako bi postali vještiji u algebri.

2.4 Sadržaj i organizacija kurikuluma

Proširenjem radnih i akademskih potreba za algebarskim rasuđivanjem, stručnjaci koji stvaraju kurikulum su pokušali razviti različite pristupe kako bi algebarske ideje bile pristupačnije u školama. Neki od pristupa su izrazi općenitosti, modeliranje realnih situacija, rješavanje problemskih zadataka, konstruiranje algoritama te grafičke funkcije. Učenici kojima je prvi susret s algebrom način izražavanja uzoraka, veza i funkcija koje razumiju i s kojima mogu rukovati, korištenje računalnog programa pomaže ne samo u shvaćanju gradiva, nego zahvaljujući tome mogu ga primjeniti u drugim raznim problemima.

Promjenom uobičajnog kurikulumskog programa od aritmetike do prelaska na algebarsko rukovanje, zatim do grafova i funkcija, pokazano je da napredak ovisi o kurikulumu i podučavanju. Na nastavnicima je da izaberu koji će pristup koristiti u podučavanju algebre. Poželjno je razmotriti mogućnosti koje nudi svaki pojedini pristup, ali uzeti u obzir koje aspekte algebarskog razumijevanja bi učenici trebali savladati. Način na koji se može postići je kurikulumskim redoslijedom koji ujedinjuje postupke i koncepte kroz integriranje, pojednostavljivanje i generaliziranje. Generaliziranje tada postaje novi matematički objekt koji djeluje u apstraktnijem sustavu. Primjer problema rukovanja: ako se n ljudi međusobno rukuju, koliko će biti rukovanja? Pri rješavanju ovog problema, učenici isprobavaju različite brojeve ljudi koji se međusobno rukuju, traže način kako prikazati tu strukturu, zatim generaliziraju rješenje po uzoru na prikazane strukture. Stariji učenici će pokušati predvidjeti traženi broj razmatrajući strukture uzoraka rukovanja. Takvim razmišljanjem dolaze do formule koja vrijedi za bilo koji broj ljudi, tj. novi matematički objekt. Formula može postati izvor novih pitanja: Koliko brzo broj rukovanja raste?

Ako je $n = 1$, je li broj rukovanja 0? Može li se naći broj ljudi čiji broj međusobnog rukovanja će biti 100?

Razvitak misaonog učenja kroz ovu vrstu aktivnosti ovisi o ponavljanju zadataka. Algebarsko razmišljanje postaje jedno od nekoliko alata koje nastavnici i učenici koriste u bilo kojem matematičkom kontekstu. Istraživanje organizacije Nuffield pokazalo je da korištenjem algebre s višestrukim prikazivanjem postignut je značajan uspjeh u podučavanju mlađih učenika. Učenici su učili ponavaljajući opisivanje situacija, dohvaćanjem podatka, grafovima, predlaganjem formula itd. U udžbenicima su ponuđeni dva pravca u algebri. Jedan se kreće od linearnog niza do predstavljanja nizova na koordinatnim osima, opisivajći ih kao linearne funkcije, zatim kvadratnim i kubnim jednadžbama. Osnovna ideja je izražavanje generalizacije uzoraka brojeva. Drugi pravac kreće od aritmetičkih pravila do sintakse algebarskih izraza, preko transformacija za lakše rješavanje jednadžbi, do susreta s metodama grafova za rješavanje jednadžbi višeg reda. Iako su oba pravca konceptualno povezana u udžbenicima, postoji naglasak na na tehničkom aspektu povrh svrhe. Stoga učenici ponekad ne razumiju razvoj rasuđivanja u popunosti.

2.5 Matematički ciljevi za kurikulum algebre izvan okvira modeliranja

Krajnji je cilj školske algebre modeliranje, tj. izražavanje situacija pomoću prilagodljivih funkcija. U tome se slažu i poslodavci. Međutim, sposobnost algebarskog izražavanja nepoznatih situacija je također središte napredne matematike. Konstruiranje dokaza, uporaba algebre za izražavanje objekata koji ne mogu biti predstavljeni jednim brojem (npr. vektori, matrice, grupe) ovisi o sposobnosti razumijevanja algebre i upotrebi simbolike. Učenici su u višim razredima osnovne škole voljni i spremni raditi s matematičkim sustavom čija korist nije očita. Ciljevi za kurikulum algebre su kompatibilni sa ciljevima modeliranja, ali također navode potrebu čiste matematike. Naglašena je nužnost vještina za:

- procjenjivanjem uzoraka koji se mogu pojaviti u danim algebarskim izrazima
- uspoređivanjem niza funkcija
- pretpostavljanjem algebarskih izraza koji opisuju dani skup vrijednosti ili graf

- izborom najprikladnijeg ekvivalentnog oblika veza za danu namjenu
- naslućivanjem rezultata algebarskih operacija

Nemoguće je u potpunosti definirati popis što znači razumjeti simbole. Skupom raspoređivanja koji potiču iz različitih iskustava u školskoj algebri dolazi do razumijevanja simbola. Raspoređivanje uključuje: biti u prijateljskim odnosima sa simbolima, moći ih čitati i rukovati s njima kako bi ih lakše pročitali, moći ih koristiti sa svrhom te znati kad su simboli ekvivalenti. Za postizanje te razine znanja, učenicima su potrebna složena iskustva učenja u kojema su usklađeni upotreba simbola, rukovanje simbolima, razumijevanje simbola, korištenje alata kako bi se oslobodio um za stvaranje veza i razumijevanja, izražavanja općenitih izraza, procjenjivanje metoda i rješenja te proširivanjem učeničkog znanja postavljanjem pitanja 'što ako'.

2.6 Pristupi u podučavanju

Uzimajući u obzir razne izbore za ciljeve kurikuluma, njegov sadržaj i raspored, podučavanju se može pristupiti na nekoliko načina. Svaki pristup ima svoje prednosti i ograničenja. Na nastavniku je da odluči koji pristup odgovara njegovim učenicima kako bi bolje savladali danu materiju.

Stvaranje potrebe za algebrom kako bi se izrazile ekvivalentne aritmetičke veze

PRIMJERI

1. Brojanjem naslaganih pločica oko kvadrata čija je stranica duljine a na različite načine mogu nastati ekvivalentni izrazi, npr. $4a+4 \equiv 4(a+1) \equiv 2(a+2)+2a \equiv 4(a+2)-4$.
2. Igranjem igre 'skriven broj' mogu nastati ekvivalentne jednadžbe, npr. $x = 3$, $x+2=5$, $2x-3=3$, $7=2x+1$.

PRETPOSTAVKE O PRIJAŠNJEM ISKUSTVU
Razumijevanje da aritmetički izrazi izražavaju veze između brojeva omogućava učenicima da znaju da je $7-5=2$ drugi način za zapisivanje $5+2=7$.

MOGUĆNOSTI OVOG PRISTUPA

Zapis simbola je značajan ako učenici razumiju osnovne veze. U primjeru $3a + 3b$ učenici znaju da je to zbroj tri količine od a i tri količine od b. Taj izraz učenici mogu zapisati kao $3a + 3b$ ili $3(a + b)$ i primjetiti da su izrazi ekvivalentni. Prije nego se upoznaju s algebarskim izrazima, učenici mogu naučiti razmišljati o značenju veza. Mentalne metode mogu biti izražene kao općenita pravila. Raspravljajući među kolegama o različitim načinima za izražavanje neke situacije, učenici mogu bolje razumijeti ekvivalenciju. Ovaj pristup može biti podloga za razumijevanje varijabli i funkcija, te za programiranje algoritma u nekom programu. Izraz $p+q = 10$ može proizaći iz raznih situacija, te označava zbroj dva broja jednak je broju deset. Ako je poznat broj p, iz relacije $p + q = 10$ možemo pronaći q koristeći $10 - p$.

OGRANIČENJE PRISTUPA

Algebra je 'generalizirana' aritmetika. Česte su pogreške kad se radi o zapisu. Te pogreške mogu se spriječiti razmišljanjem o razumijevanju veza, ali to može usporiti tečnost.

POSEBNI SLUČAJEVI I POVEZNICE KOJE TREBA UZETI U OBZIR PRI KORIŠTENJU OVOG PRISTUPA

Za razumijevanje preoblikovanja algebarskih izraza može pomoći uspoređivanje ekvivalentnih izraza. Inverzne operacije su zbrajanje i oduzimanje, te množenje i djeljenje. Posebnu pažnju treba usmjeriti prema manje očitim zapisima i njihovim značenjima, npr. $2r$ i r^2. Učenici se mogu bolje upoznati s ekvivalentnim izrazima korištenjem računalnog algebarskog sustava. Redoslijed izvršavanja operacija je određeno zapisom. Ponekad može doći do pogrešne primjene pravila, npr. rezultat u $8 - 5 + 2$ je 1 umjesto 5.

Izražavanje odnosa između količina

PRIMJERI

1. Izraz $p + q = 10$ može opisivati količinu dvije posude koje sadrže ukupno 10 jedinica nečega, npr. litara vode. Ako je poznato koliko jedinica sadrži posuda p, preoblikovanjem izraza $10 - p$ se može pronaći koliko jedinica sadrži posuda q.

PRETPOSTAVKE O PRIJAŠNJEM ISKUSTVU

Poučeni iskustvom, učenici razumiju dimenzije količine, kao što su duljina, kapacitet i dr. Također razumiju i znaju izraziti veze između izraza kao što su $<$, $>$ i $=$. Znaju opisati zbrajanje količina, te koliko količine jedne mjere ide u drugu. Znaju izraziti i neke ekvivalente mjere.

MOGUĆNOSTI OVOG PRISTUPA

U izražavanju već poznatih situacija pomaže nam algebra. Algebrom se mogu izraziti veze između količina iako nisu poznate pojedine količine. U primjeru $t + 10$ je označno vrijeme 10 minuta nakon vremena t. U tom slučaju slovo može biti parametar ili nepoznanica koju treba pronaći. Algebra je korisna u pretvaranju mjera jer izražava odnose između varijabli. Zbog izražavanja jedne količne pomoću druge, stvara se potreba za razlomcima i decimalnim brojevima. Ovaj pristup nudi osnovu za razumijevanje varijabli i funkcija, te za modeliranje stvarnih situacija i programiranje algoritamskih softwarea.

OGRANIČENJA PRISTUPA

Kombiniranjem količina mogu se izraziti linearne, kvadratne i kubne jednadžbe. Teško je uočiti polinome višeg reda kombiniranjem količina. Za kvadratne jednadžbe i skalarno množenje su pogodni modeli za površine, dok su volumen i kapacitet pogodni za kubne jednadžbe.

POSEBNI SLUČAJEVI I POVEZNICE KOJE TREBA UZETI U OBZIR PRI KORIŠTENJU OVOG PRISTUPA

Učenici trebaju razviti tečnost u rukovanju i korištenju sporazumnog zapisa, te vidjeti slične odnose koji nastaju iz fizičkih različitih situacija, spajanje simbola u značajne grafičke prikaze, cijeniti dimenzionalnost, korištenje računalnih programa za istraživanje ekvivalentnih izraza, smisliti najučinkovitije izraze koristeći nekolicinu varijabli.

Učenje o izrazima 'čitajući' ih

PRIMJERI

1. Koje god bile vrijednosti x i y, z će biti trostruko veći od x kojem je dodan dvostruki y.

2. Uvijek je istina da kvadrat zbroja je jednako zbroju kvadrata i njihovom dvostrukom umnošku.

PRETPOSTAVKE O PRIJAŠNJEM ISKUSTVU
Znanje o aritmetičkim operacijama i značenje zagrada i znaka '$=$'.

MOGUĆNOSTI OVOG PRISTUPA
Čitanjem algebarskih izraza u slijedu operacija uvježbava se korištenja skupova zapisa i spaja zapis matematičkog značenja i izražavanja odnosa. Manje je vjerojatno da će učenici napraviti nepotrebne korake u izrazima koje razumiju.

OGRANIČENJA PRISTUPA
Dobiva na složenosti ako se proširi razmišljanje o funkcijama više varijabli i jednadžbi višeg reda.

POSEBNI SLUČAJEVI I POVEZNICE KOJE TREBA UZETI U OBZIR PRI KORIŠTENJU OVOG PRISTUPA
Vrijedi se vratiti na 'što znači ovaj dio algebre?' kad učenici koriste pogrešnu radnju ili algoritam. Učenici trebaju razmišljati o značenju odnosa prije primjene bilo koje algebarske tehnike/metode rada.

Učenje o izrazima modelirajući ih dijagramima

PRIMJERI

1. Štapni dijagrami i površinski dijagrami

PRETPOSTAVKE O PRIJAŠNJEM ISKUSTVU

Poznavanje slika korištenih objekata te njihove kombinacije i proširenja.

MOGUĆNOSTI OVOG PRISTUPA

Cuisenaireovi štapići, brojevna crta i modeli površina predstavljaju količine i stoga se mogu proširiti i na algebarske odnose. Također pružaju fizičko iskustvo preslagivanja i pojednostavljanja i slike kojih se mogu prisjetiti u budućnosti. Izomorfni modeli[4] omogućavaju dvosmjerno razumijevanje ili s modelom ili sa simbolima. Na primjer, model ravnoteže naglašava jednakost za linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

OGRANIČENJA PRISTUPA

Umne slike su posebno korisne ako se uklope u slično značenje u matematici koje predstavljaju, inače bi njihova upotreba bila ograničena i učenici ih ne bi primjenjivali ispravno. Konkretni i metaforički modeli nisu prilagođeni za negativne brojeve i ponekad nisu prilagođeni za razlomke. Objektni modeli ne predstavljaju količine i mogu potaknuti pogrešan pogled da su slova kratice ili šifre za riječi. Oni jedino predstavljaju zbrajanje, oduzimanje i skalarno množenje. Ako se koriste kako bi se razlikovali pojmovi koje učenici misli da 'sličnost' ovisi o pojedinim slovima, nego oblik pojmova. U algebri, a i b ne moraju nužno biti različitih vrijednosti.

POSEBNI SLUČAJEVI I POVEZNICE KOJE TREBA UZETI U OBZIR PRI KORIŠTENJU OVOG PRISTUPA

Veliki problemi u algebri uključuju: razumijevanje da slovo predstavlja nepoznanicu, varijablu, specifičnu konstantu (pr. π), parametar, ili neki drugi objekt kao što je funkcija. Algebra nije samo aritmetika sa slovima, nego je tu riječ i o odnosima među količinama i apstraktnim brojevima. Ako koriste vizualizaciju, učenici moraju odvojiti slike koje su postale zastarjele ili ograničene u naprednijem kontekstu.

[4]Izomorfni modeli imaju iste tipove varijable i rješavaju se istim metodama, a mogu se razlikovati u interpretaciji tih varijabli.

Konstrukcijski zadaci

PRIMJERI

1. Isprogramirati program koji crta pravilne poligone za koje duljina stranice i unutrašnji kut mogu varirati.

2. Konstruirati graf kvadratne funkcije koji ima minimum u danoj točki, ali čiji nagib može varirati.

PRETPOSTAVKE O PRIJAŠNJEM ISKUSTVU
Dostupnost alata kao što su fizički materijali, računalni algebarski sustav i vrijeme za rad na proširenju zadatka.

MOGUĆNOSTI OVOG PRISTUPA
U ovim zadacima algebra je alat za kontroliranje računalnih postupaka, davanje uputa, izražavanje projektnih svojstava i opisivanje izlaznih varijabli. Stvaranje algoritma za računanje i transformiranje zahtjeva razumijevanje odnosa između varijabli, nedvosmislen konvencionalni zapis, poznavanje kako su ulazni podaci povezani s izlaznim podacima i kojim redom operacije trebaju biti napravljene. Objekti mogu imati osobine varijable ili biti predmet nekih ograničenja kao što je biti u skladu s određenim odnosima.

OGRANIČENJA PRISTUPA
Potrebno je mnogo energije i vremena za stvaranje faza, za pokušaj i prilagodbu. Zadaci moraju biti osmišljeni kako bi učenici koristili simbolični alat, a ne koristili naprečac gotove metode.

POSEBNI SLUČAJEVI I POVEZNICE KOJE TREBA UZETI U OBZIR PRI KORIŠTENJU OVOG PRISTUPA
Učenici trebaju: vidjeti potencijalnu unakrsnu nastavu i upletenost radnog mjesta, prepoznati neovisne i ovisne varijable, koristiti ugnježđenje postupke i rekurzivne metode, i koristiti iterativne metode približavajući se danoj razini preciznosti.

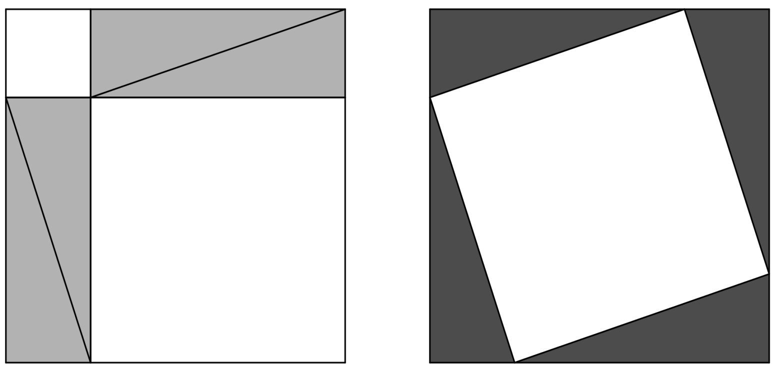
3 Prostorno i geometrijsko razumijevanje

Geometrija je jedna od osnovnih grana matematike te kao veoma važan dio matematike uzima primat i u drugim poljima. Učenje geometrije pomaže učenicima u razvoju vještina kao što su vizualizacija, kritičko mišljenje, intuicija, perspektiva, pretpostavljanje, deduktivno rasuđivanje, logično argumentiranje i dokazivanje. Geometrijski prikazi mogu se koristiti za objašnjavanje drugih grana matematike, primjerice razlomaka i množenja u aritmetici, veza između grafova funkcija te grafičkih prikaza podataka u statistici. Primjena geometrije je široko rasprostranjena u različitim područjima kao što su robotika, računalno proizvedeni filmovi, kristalografija, arhitektura, neuroznanost, te sama priroda našeg svijeta. Mnoge nove geometrijske ideje su proizašle iz tih različitih područja znanosti.

Razvoj geometrije se može pratiti kroz širok raspon kultura i civilizacija. Kroz 200 godina, geometrija se ogromno proširila, toliko da danas postoji 50 različitih vrsta geometrije. Iako to ilustrira bogatstvo moderne geometrije, u isto vrijeme stvara osnovni problem za stručnjake koji sudjeluju u stvaranju kurikuluma. Potrebno je izabrati što uključiti u školski kurikulum matematike, a što isključiti. Nadalje, bogatstvo geometrije nudi značajne izazove za nastavnike jer podučavanje geometrije uključuje znanje i prepoznavanje zanimljivih geometrijskih problema i teorema. Cijeneći povijesni i kulturalni kontekst geometrije i razumijevanje mnogih različitih upotreba u koje je geometrija stavljena i kroz koje je korištena. Povrh toga, napori u podučavanju geometrije nisu uvijek dobro podržani u udžbenicima, pogotovo u državama gdje je kvaliteta udžbenika upitna i pažnja je usmjerena na aspekte imenovanja, kao što su imena i svojstva geometrijskih oblika, te kasnije na posebne oblike za postavljanje geometrijskog dokaza. Kako bi se riješio problem koji dio geometrije treba ulaziti u školski kurikulum matematike, doneseni su različiti prijedlozi, no napori za reformiranje školske geometrije su dugotrajni i ne postoji jedinstveno rješenje za sve probleme.

Razvojem digitalne tehnologije dolazi do novih mogućnosti u podučavanju geometrije. Danas postoje razna dinamičko geometrijska okruženja kao što su Geogebra i Geometer's Sketchpad. Pomoću njih možemo prikazati i rukovati s geometrijskim objektima na način koji se ne može postići koristeći samo papir, olovku, šestar i ravnalo. Dinamička geometrijska okruženja omogućuju učenicima različite mogućnosti upoznavanja geometrijskih objekata i njihovih mjerenja te im može pomoći u razvoju boljeg razumijevanja geometrijskih svojstava i teorema.

Geometrijsko obrazovanje u višim razredima treba sadržavati dva usko povezana gledišta geometrije kroz dvodimenzionalnu i trodimenzionalnu geometriju: prostorna gledišta i gledišta koja mogu povezati rasuđivanje s geometrijskom teorijom. Početno obrazovanje obuhvaća prostorno razmišljanje i vizualizaciju, dok kasnije obrazovanje obuhvaća deduktivno rasuđivanje koristeći pristupe koji upotrebljava primjerene transformacije i/ili kongruentne argumente. Ta dva bliska aspekta geometrije (prostorno i deduktivno) nisu odvojeni, već su isprepleteni, kao *yin* i *yang* geometrijskog obrazovanja. Upravo je isprepletenost razlog zbog kojeg matematički dijagrami mogu pomoći učenicima pri razumijevanju matematičkih ideja, dokaza i argumenata. Zato se prostorno i deduktivno rasuđivanje može spojiti kao 'dokaz bez riječi' i 'vizualni dokazi'. Najčešći primjer dokaza bez riječi je dokaz Pitagorina teorema.



Slika 3: Dokaz Pitagorina teorema

3.1 Priroda prostornog i geometrijskog rasuđivanja

Britanski matematičar Sir Christopher Zeeman definira geometriju kao: 'Geometrija obuhvaća grane matematike koje istražuju vizualnu intuiciju (naše najdominatnije čulo) za pamćenje teorema, razumijevanje dokaza, nadahnjivanje pretpostavki, spoznavanje stvarnosti i daje sveukupan uvid'. Geometrija je najviše primjenjivana i povezana sa stvarnošću od svih grana matematike te je također jedna od najvažnijih područja matematičke teorije. To znači da geometriju vidimo svuda oko nas (ima široku upotrebu u umjetnosti, dizajnu, arhitekturi, inženjerstvu, itd). S druge strane, geometrija je teorijsko područje koje omogućava matematičarima čija je specijalizacija geometrija i drugim matematičarima, zajedno s kozmolozima i drugim znanstvenicima, rad s hipotetskim objektima u n-dimenzinalnom prostoru koristeći, uz druge stvari, matematičke tehnike vizualizacije i visoko pogonska računala.

Ideja 'koncepta likova' obuhvaća kombiniranu ulogu figuralnog i konceptualnog u geometriji. 'Viđenje' kruga predstavljenog na papiru ili na računalnom zaslonu zapravo je viđenje tekstualnog prikaza nečega što je element geometrijske teorije. Jedan način rada s dvostrukom prirodom geometrije je razlikovanje između 'skice' i 'konstrukcije'. Drugi način je promatrati geometrijski dijagram kao 'neobičnu' pojavu u kojoj nije apstrakcija iskustvenog objekta. Zapravo, to je pokušaj da se od apstraktnog koncepta stvori konkretan pojam. Pojam 'geometrijski dijagram' obuhvaća ideju da je geometrijski objekt koji vidimo zapravo i materijalna 'skica' i teorijska 'figura'. Na primjer: paralelnost nasuprotnih stranica paralelograma u dijagramu kao što je prikazano na slici povezuje aspekt slike dijagrama, tj. teorijski aspekt. Materijalni aspekt je isprepleten s teorijskim aspektom skice, možda su dvije stranice paralelograma vodoravne.

Slika 4: Skica paralelograma

Od trećeg stoljeća prije Krista, kad je većina dotadašnjeg znanja o geometriji obuhvaćena u tekstovima koji su poznati pod nazivom Euklidovi elementi, geometrijsko rasuđivanje je postalo sinonim za deduktivnu metodu. Iako je u početku broj aksioma i postulata bio ograničen, pomoću ove metode dokazan je veliki broj teorema. Ideje dokaza te blisko povezane ideje definicija su prožete kroz svu matematiku. U školskoj matematici je geometrijsko rasuđivanje često prvotno ili čak jedino deduktivno dokazivanje. Tim pristupom zanemaruje se proces kojim se stvara nova matematika kroz postavljanje i rješavanje problemskih zadataka, analiziranjem primjera, stvaranjem i ponovnim ispitivanjem pretpostavki, traženjem skupine protuprimjera i sl.

Prostorno rasuđivanje definirano je kao 'skup kognitivnih procesa pomoću kojih su mentalni prikazi za prostorne objekte, veze i preoblikovanja konstruirani i s kojima rukuju.' Prostorno rasuđivanje oblik je mentalne aktivnosti koji omogućuje stvaranje prostornih slika i rukovanje pomoću kojeg se rješavaju primjenjeni i teorijski problemski zadaci u matematici. To je povezano s vizualizacijom, nešto što se obično uzima kao 'sposobnost za predstavljanje, preoblikovanje, proizvodnju, komunikaciju, dokumentaciju vizualnih informacija'. Prostorno rasuđivanje i vizualizacija imaju bitne uloge ne samo u geometriji i geometrijskom obrazovanju, već i šire u matematici i matematičkom obrazovanju.

3.2 Teorije o prostornom i geometrijskom rasuđivanju

Istraživači koji su utjecali na razvoj prostornog i geometrijskog rasuđivanja su Jean Piaget, Pierre van Hiele i Raymond Duval. Jean Piaget je proučavao razvoj dječjeg razumijevanja, promatrajući ih, razgovarajući i slušajući ih dok su rješavali zadatke koje im je on dao. Njegovo istraživanje razvoja dječjeg uma uvelike je utjecalo na teorije podučavanja. Piaget je smatrao da je spoznaja prostora djeci urođena. Nakon navršene četvrte godine djeca počinju opažati i prikazivati objekte iz različitih točki gledišta ujedinjujući ideje o perspektivi. Prema Piagetovom istraživanju, djeca tek nakon devete godine mogu usvojiti pojam kuta i paralelnosti.

Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja govori da učenici napreduju kroz pet razina mišljena o geometriji. Predstavio ih je nizozemski matematičar Pierre van Hiele u razinama od 0 do 4. Nedavna istraživanja su započinjala brojenje razina od 1 do 5. Sljedeća karakterizacija razina koristi suvremeno brojanje od 1 do 5 te odgovara originalnoj van Hieleovoj taksonomiji.

Razina 1: izgled – na početnoj razini likovi se prepoznaju po izgledu

Razina 2: svojstva – na sljedećoj razini likovi su skupovi svojstava

Razina 3: neformalna dedukcija – na sljedećoj razini svojstva mogu biti izvedeni međusobno, ali unutarnje značenje dedukcije nije razumljivo

Razina 4: dedukcija – na ovoj razini, učenici razumiju ideje dedukcije kao što su suprotnost teorema i ideje nužnih i dovoljnih uvjeta

Razina 5: aksiomatika – na petoj razini, rasuđivanje o formalnom matematičkom sustavu kao što je utvrđivanje, rasuđivanje i uspoređivanje aksiomatskog sustava geometrije

Pored ovih pet razina mišljenja u geometriji, van Hieleov model također uključuje pet faza pristupa u podučavanju geometrije. Pristup u podučavanju geometrije se temelji na ideji da prelazak iz jedne razine van Hiele teorije na višu razinu ovisi o načinu podučavanja te kako učenici usvajaju pojedine ideje i pojmove, a ne o dobi učenika.

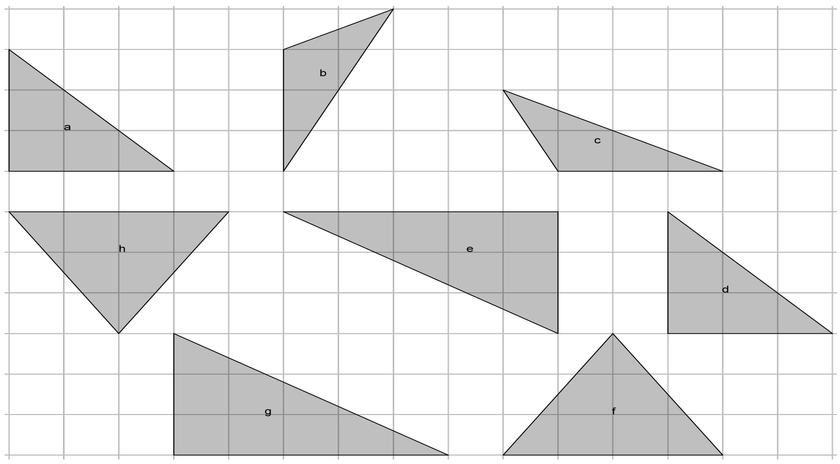
Duvalov pristup geometriji je s perceptivnog i kognitivnog gledišta. U svom radu poistovjećuje tri načina kognitivnog procesa: *vizualni proces* (na primjer, vizualni prikaz geometrijskih izjavi), *konstrukcijski proces* (pri uporabi alata, bilo da je ravnalo i šestar ili računalo) te *proces rasuđivanja*. Iako ta tri kognitivna procesa se mogu izvoditi odvojeno, Duval tvrdi da su oni 'blisko povezani i njihova sinergija je kognitivno potrebna za geometrijsku vještinu'. Korisni aspekt Duvalovog rada je kako povezati upotrebu dijagrama u učenju i podučavanju geometrije. Teškoće s kojima se učenici mogu susresti su rezultat njihovih 'spontantnih procesa vizualnih percepcija' koje s vremena na vrijeme mogu 'biti kontradiktorni s geometrijskim konceptima koje nastavnici i problemski zadaci traže'. Potrebno je više istraživanja na načine koji omogućava sinergiju koja se događa između tri vrste kognitivnih procesa koje Duval tvrdi da su kognitivno potrebne za geometrijsku vještinu.

3.3 Prostorno i geometrijsko razumijevanje u nižim razredima osnovne škole

Učenje geometrije u predškolskoj dobi i nižim razredima uključuje aktivnosti u učionicama koje potiču učenike na vizualiziranje, crtanje, stvaranje i razgovaranje o dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim oblicima. Tijekom tih godina, mnoga podučavanja geometrije su usmjerena na razvoj izraza za oblike (npr. imena mnogokuta) i za položaj (npr. lijevo i desno). Poznavanje matematičke terminologije je veoma važno za modeliranje, vizualizaciju i komunikaciju u svim područjima matematike. Naglasak na opisni jezik i definicije može ograničavati napredak u geometriji u nižim razredima osnovne škole. Geometrijske ideje su veoma važne za učenikovo napredovanje u matematici.

Učenici u nižim razredima osnovne škole diljem svijeta uče o svojstvima geometrijskih oblika kao što su jednostavni mnogokuti i poliedri. Također uče o pravcima u dvodimenzionalnoj ravnini, kao što su paralelni ili okomiti pravci, te o veličini kuta i kako ih nacrtati. Ipak učenje o vezama između dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika je slabije zastupljeno. Česti su zadaci u kojima učenici računaju opsege i površine kvadrata i pravokutnika, dok su zadaci u kojima se procjenjuju površine i volumeni rjeđi. U zadacima se rijetko traži poznavanje osne simetrije, refleksije i rotacije, koje su uvelike važne za dizajniranje i inženjerstvo. Pokrivenost geometrijskih ideja često je na ovoj razini školovanja ograničena. Učenici često imaju dobro znanje o prostornim vezama jer su okruženi prostornim objektima. Jedan od najvažnijih izazova u podučavanju matematike je pronaći najbolji način kako uklopiti učeničko znanje u nastavu. Učeći o imenima jednostavnih oblika, prepoznavanje veza između oblika koji su rotirani, osnosimetrični i homotetični učenicima mogu predstavljati problem. Na primjer, učenicima u nižim razredima je potrebno mnogo iskustva s preoblikovanjem likova. To iskustvo pomaže učenicima u prepoznavanju istog lika bez obzira na položaj i veličinu. Iako učenici razumiju osnovnu logičnost mjerenja, ponekad imaju poteškoća s mjerenjem duljina i površina. Slično, imaju poteškoća u učenju prikazivanja kuta na matematički način iako se svakodnevno susreću s kutovima.

Učeći o dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim oblicima, učenici često čine neke ili sve od sljedećeg: nedovoljno generaliziranje uključujući nebitne karakteristike koje koče generalizaciju, previše generaliziranja izostavljanjem ključnih svojstava što može rezultirati preširokom generalizacijom te napraviti pogrešno shvaćanje povezano s jezikom, primjerice 'dijagonalno' znači 'nakošeno'. Za učenike svaki geometrijski lik ima jedan ili više prototipnih primjera koji su podskup primjera koji imaju "najduži" popis svojstava. Primjerice, učenici će prije prepoznati jednakokračne trokute ako su položeni na osnovicu nego jednakokračne trokute koji su drugačije orijentirani. Često imaju poteškoće pri odluci koji su trokuti jednakokračni prikazani na slijedećoj slici:



Slika 5: Trokuti

Druga pitanja s kojima se učenici susreću povezanih s imenima likova i pravaca tiču se definicija i učeničkog elementarnog razumijevanja nužnih i dovoljnih uvjeta. Primjeri takvih poteškoća uključuju upotrebu pojmova kao što je 'duguljasta figura' (pravokutnik koji nije kvadrat) i 'dijamant' (za posebno orijentirani romb koji je gotovo sigurno kvadrat) te zbunjenost između 'pravilnih figura' i 'simetričnih figura'.

3.4 Učenički napredak u prostornom i geometrijskom razumijevanju

Prema školskim kurikulumima matematike diljem svijeta, sastavni dio geometrije u matematici viših razreda je usmjeren na geometriju ravnine u kojima se obrađuju pojmovi kao što su točke, pravci, krugovi, trokuti i drugi mnogokuti. Također se obrađuje i prostorna geometrija, tj. trodimenzionalni objekti kao što su poliedri (kocka, tetraedar i sl.) i sfera. Rijetko se obrađuje tzv. 'ne-euklidska' geometrija kao što je sferna geometrija gdje se učenici upoznaju s objektima kao što je sferni trokut i sferni mnogokut.

Radeći s dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim oblicima, sastavni dio kurikuluma za geometriju uključuje mjerenje i određivanje geometrijskih obilježja kao što je kao što je duljina, površina, volumen ili kut. Učenici imaju poteškoća s mjerenjem i računanjem, pogotovo ako se radi o decimalnim brojevima. Kako učenici napreduju, dio kurikuluma za geometriju naginje k analitičkoj geometriji. Na primjer, grafovi funkcija mogu se poimati kao geometrijski oblici. Na toj razini obrazovanja započinje uvod u vektorsku geometriju. Nijedna od ovih očitih sličnosti u geometriji ne ukazuje na jednolikost u kurikulumu. Postoje znatne promjene u kurikulumu geometrije u različitim zemljama. Geometrija u školskom kurikulumu Nizozemske je 'praktična', dok je geometrija u kurikulumu Francuske ili Japana više 'teorijska' i naglasak je stavljen na deduktivno dokazivanje.

Euklidska geometrija ne bi trebala biti isključena iz školskog kurikuluma (i zamjenjena linearnom algebrom kao što je predloženo 1960-ih godina) niti bi se trebala podučavati samo kao teorijska konstrukcija. Stručnjaci za stvaranje kurikuluma trebaju imati na umu da prostorno i geometrijsko razumijevanje se razvija usporedno. Način koji bi osigurao usporedni razvoj prostornog i geometrijskog razumijevanja je planiranje učeničkog napretka kroz ključne geometrijske ideje kao što su simetrija, invarijantnost, preoblikovanje, sličnost i kongruencije, te upotreba tih ideja koje bi omogućile učenicima izgradnju ispravnih vještina prostornog i geometrijskog razumijevanja.

Usmjerenost na prostor i percepciju uravnotežava razvoj rigoroznih argumenata. Pitanje koje se nameće u kurikulumu matematike, posebice u geometriji, je što empirijski argumenti ponekad mogu zadovoljiti učenike u dobi od 11 do 16 godina. Na primjer, šesnaestogodišnji učenici se oslanjaju na mjerenje kutova kako bi 'dokazali' da su simetrale dva kuta (koji u zbroju daju 180°) međusobno okomite. Istraživanja o primjeni programa dinamične geometrije pokazala su da mogućnosti 'viđenja' matematičkih svojstava na ekranu mogu smanjiti, ili čak zamijeniti, motivaciju za dokazivanjem ili u suprotnom otvara nove značajne pristupe u učenju dokaza.

Tijekom viših razreda učenici kontunuirano idu naprijed i nazad između 'prostorno-grafičke geometrije' i 'teorijske geometrije'. Pri provođenju geometrijskog dokaza, učenici viših razreda donose pretpostavke koristeći mjere uzete iz geometrijskog crteža, zatim korištenjem definicija i teorema, pa vraćanjem na crtež i tako dalje. Prijelaz između 'prostorno-grafičke geometrije' i 'teorijske geometrije' nameće pitanje nesigurne povezanosti između mjerenja i dokazivanja u geometriji. Ta nesigurna povezanosti postoji i u mjerenju površina, na primjer razmatrajući teorijske veze između geometrijskih likova mogu se dobiti točna rješenja. Primjerice, formula za izračunavanje površine pravokutnika, 'osnovica · visina', se može primjeniti za računanje površine paralelograma. To se može dokazati transformiranjem pravokutnika u paralelogram jednake visine i duljine osnovice znajući da se površina ne mijenja primjenom transformacije. Slično, formula za površinu trokuta, $P = \frac{1}{2}$ osnovica · visina, može se dokazati ako trokut preoblikujemo u paralelogram koji ima jednaku visinu i duljinu osnovice. Prema tome, formule za točno mjerenje površina su stvorene iz teorijskih odnosa između geometrijskih likova.

U višim razredima učenici mogu iskusiti poteškoće u ispravnom korištenju definicija te ne mogu u potpunosti cijeniti ulogu definicija u geometriji. Jedan od načina kako nadići taj problem je aktivnost učenika u definiranju geometrijskih oblika. Slični geometrijski oblici omogućuju korisne umne slike omjera i ekvivalentnih razlomaka te pružaju obrazac za neke pojmove racionalnih brojeva.

Jedno od neriješenih pitanja u kurikulumu geometrije je napredovanje u trodimenzionalnoj geometriji te kako je povezana s dvodimenzionalnom geometrijom. Iako se digitalna tehnologija koristi u podučavanju trodimenzionalne geometrije nameće se pitanje interpretacije trodimenzionalne geometrije na ravnom računalnom ekranu. Osim što je učenje trodimenzionalnih objekata na dvodimenzionalnom ekranu možda čudno, pojavljuje se i pitanje kako su trodimenzionalni objekti prikazani na dvodimenzionalnom ekranu te kako ih učenik interpretira. Te uočljive poteškoće koje se odnose na trodimenzionalne objekte su otežane činjenicom da su mrežnice naših očiju u suštini dvodimenzionalne. Posljedica toga je otežana interpretacija stvarnih trodimenzionalnih objekata, što je dodatno otežano pojavljivanje trodimenzionalnih objekata na dvodimenzionalnom računalnom ekranu. Razvoj trodimenzionalnih prikaza, bilo na ekranu ili kao projekcija, otvara nove neistražene mogućnosti u geometrijskom obrazovanju.

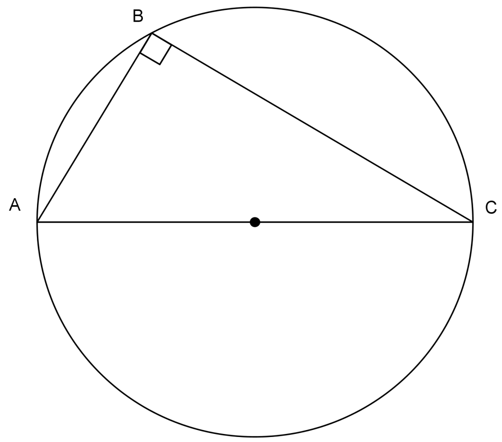
3.5 Pristupi u podučavanju prostornog i geometrijskog razumijevanja

Ciljevi u podučavanju geometrije trebaju biti: razvijanje svjesnosti prostora, geometrijska intuicija, sposobnost vizualizacije, proširivanje znanja i razumijevanja geometrijskih svojstava i teorema, poticanje pretpostavljanja, deduktivnog razumijevanja i dokazivanja, razvijanje vještina primjenjene geometrije modeliranje i rješavanjem problemskih zadataka iz svakodnevnog života, svjesnost povjesnog i kulturalnog nasljeđa geometrije i suvremenih primjena geometrije.

Mnogo je razloga zašto je usmjerenost na simetričnost dobra ideja u podučavanju. Učenicima nije nužno jasno da se nešto dogodilo geometrijskom liku ako ga samo pomjerimo. Na primjer, ako je kocka translatirana, čini se kao da se ništa nije dogodilo, no ako je postavljana na jedan od vrhova, tada se očito nešto promijenilo. Najbolju uočljivost omogućava nam zrcalna refleksija. Stoga je pristup u podučavanju kojemu je središnja ideja simetričnost najbolja osnovna za učeničko napredovanje. Takav pristup se može proširiti i na druge grane matematike, npr. u algebri, trigonometriji i infinitezimalnom računu. U algebri se učenici susreću sa simetričnim funkcijama i izrazima, kao što su izraz jednadžbe pravca. U trigonometriji se sa simetričnošću upoznaju kod simetričnih odnosa kao što je cos A = sin (90° - A). Središnju ulogu u računu ima simetrija pri korištenju integralnih i diferencijalnih tehnika.

Međutim, simetrija nije jednostavna za podučavanje. Istraživanja pokazuju da mnogi učenici imaju poteškoće u učenju simetričnosti. Poteškoće mogu biti jednostavne, kao što je identificiranje neispravnih simetričnih osi ili neprepoznavanje točnih simetričnih osi ili poteškoće s odražavanjem u kosim pravcima. Učenici srednjih škola se sureću s istim poteškoćama kada se radi o simetriji u trodimenzionalnoj geometriji. Za bolje razumijevanje simetrije uvelike im pomaže digitalna tehnologija.

U geometriji, uz simetriju, važnu ulogu ima invarijatnost. Stoga je posebno važna i bitna u podučavanju geometrije. Većina teorema u geometriji su rezultat istraživanja dopuštenih promjena u kojima se veze ili svojstva ne mijenjaju. Na primjer, kut nad promjerom kružnice uvijek iznosi 90° bez obzira gdje se njegov vrh nalazi na kružnici. Ako se vrh pomakne unutar kruga, tada je kut veći od 90°. Ako se vrh nalazi izvan kruga, tada je kut manji od 90°. Stoga možemo reći da je valjana definicija kružnice skup svih točaka koje zajedno sa krajnjim točkama neke dužine razapinju kut od 90°.



Slika 6: Kut nad promjerom kružnice

Upotreba transformacije u podučavanju može biti sredstvo koje olakšava učenje invarijantnosti. Pomoću transformacija učenici mogu povezati svoje prijašnje intuicijske ideje s definicajama simetričnosti. Transformacije su u školski kurikulum uvedene u vrijeme kad je školska matematika više pažnje posvećivala funkcijama nego geometriji. Zbog toga su učenici transformacije povezivali s transformiranjem matematičkih operacija.

Središnja ideja geometrije je 'pojam figura'. Važno je spoznati utjecaj tzv. prototipnih geometrijskih dijagrama na učenike, primjerice jednakokračni trokuti trebaju stojati na svojoj osnovici. Izvještaj o geometrijskom obrazovanju raspravlja o upotrebljavanju logičkih argumenata s kojima su učenici već upoznati kako bi prikazali istinitost nekih geometrijskih rezultata. Geometrijske situacije (primjerice teoremi) trebaju biti izabrane kako bi bili korisni, zanimljivi i/ili iznenađujući učenicima. Razina sofisticiranosti očekivanja u logičkim argumentima ovise o dobi i postignuću učenika, a provedeni dokaz se može nazvati "objašnjenje", "opravdanje" ili "razlog" za rezultat. Kako bi se to postiglo, treba učenike potaknuti da budu 'kritični prema sebi i svojim vršnjacima'. Objašnjavajući razvijaju sofisticiranost i rigoroznost svojih argumenata. Takav pristup omogućuje učenicima da deduktivno razumijevanje nije samo iskazivanje mišljenja ili provjeravanje da je rezultat ispravan u posebnim slučajevima. Međutim, nije lako odrediti kako to postići s pojedinim učenikom i pojedinim rezultatom te koji pristup izabrati.

Postupak deduktivnog razumijevanja i dokazivanja mora negdje početi. Početna točka apstraktne matematike je mali skup početnih razboritih pretpostavki koji se zovu aksiomi. Međutim, takav pristup nije razuman u podučavanju učenika u srednjoj školi. Bolji pristup je početi s općepoznatim i 'očitim' činjenicama. Te činjenice je potrebno pažljivo izabrati da budu jasne. Skup srodnih rezultata može se nadograditi korištenjem deduktivnog razumijevanja. To se naziva *lokalna dedukcija*, gdje učenici koriste poznata geometrijska svojstva kako bi zaključili ili objasnili neke druge činjenice i rezultate. Ideja se sastoji da tečnost lokalne dedukcije pruža osnovu na kojoj se može uspješno izgraditi znanje o sistematskoj aksiomatici u primjerenijem stupnju matematičkog obrazovanja. Stoga se u kasnijem obrazovanju mogu ponovo objasniti činjenice i teoremi koji su 'očiti' u ranijem stupnju obrazovanja. Tečnost u lokalnoj dedukciji se najbolje razvija kroz učeničko rješavanje problemskih zadataka.

Korištenje digitalnih geometrijskih računalnih programa u podučavanju omogućuje stvaranje i rukovanje geometrijskim konstrukcijama. Učenicima je pružena mogućnost interakcije s geometrijskim teoremima i rezultatima. Digitalni geometrijski računalni program nudi razne mogućnosti, na primjer učenici uče upotrebu programskih sposobnosti 'pomicanja' objekata kao što su točke pri konstruiranju geometrijskih figura. Na taj način učenici bolje razumiju geometrijske ideje i pojmove.

Zanimljiv je utjecaj računalnih programa u podučavanju i učenju dokaza u geometriji. Upotreba računalnih programa u ranijoj fazi učenja dokaza može napredovati s vremenom. Računalni programi za mjerenje mogu biti snažni alat u podučavanju pretpostavljanja i dokazivanja, dok u isto vrijeme mogu biti složeni alat koji zahtjeva primjereno upravljanje i interpretaciju.

Geometrija je temelj za matematičko modeliranje u fizici i inženjerstvu te za znanost o mjerenju u stvarnom svijetu. Metode podučavanja geometrije su zastarjele, računalno i konceptualno su neprilagođene suvremenim metodama u podučavanju analitičke geometrije. Za uspješnije podučavanje geometrije mogu se primjeniti neki od sljedećih savjeta:

- Geometrijske situacije trebaju biti izabrane kako bi bile korisne, zanimljive i/ili iznenađujuće za učenike
- Rješavajući zadatke, učenici trebaju objasniti, obrazložiti i promisliti te biti kritični prema svojim i tuđim objašnjenjima
- Zadaci bi trebali omogućiti učenicima razvijanje vještina njihova rješavanja
- Koristeći primjere lokalne dedukcije učenici mogu iskoristiti znanje o geometrijskim svojstvima kako bi izveli zaključak ili objasnili rezultat
- U želji za izgradnjom na učeničkom prijašnjem iskustvu, problemski zadaci bi trebali uključivati svojstva dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika, gledište položaja i smjera te upotrebu argumenata za geometrijske situacije koje uče
- Iako su mjere važne u matematici i mogu igrati važnu ulogu u izgradnji pretpostavki, generiranje podataka u obliku mjerenja ne bi trebala nužno biti krajnja točka za učeničke geometrijske aktivnosti

Zaključak

Nastavnik matematike treba si postaviti ciljeve koje želi postići podučavajući matematiku. Ciljevi matematike mogu biti: osposobljavanje učenika za upravljanjem vlastitim životom u današnjem svijetu, razumijevanje informacija koje ih okružuju i razvijanje deduktivnog rasuđivanja. Važno je učenicima objasniti zašto nešto funkcionira, a ne samo pokazati kako nešto funkcionira.

Učenici uče algebru mehanički, bez razumijevanja njezine svrhe unutar i izvan matematike. Nastavnikovo znanje i iskustvo mogu doprinijeti praktičnom razumijevanju algebre. Primjenjivanje razultata donesenih istraživanjem u praksi doprinose boljem razumijevanju veza među količinama i algebarskih izraza. Podučavanje algebre te učenikovo znanje može se poboljšati konstruiranjem raznolikih problemskih zadataka i procjenjivanjem učenikovog razumijevanja i korištenja algebre.

Važan dio kurikuluma školske matematike je geometrija. Razlog tome je što proučava vizualne pojave te je dobar primjer za razvijanje deduktivnog rasuđivanja. Geometrija je učenicima jedna od najmržih grana matematike, jer se često zanemaruju osnovne prostorne vještine učenika. Nastavnici bi se trebali usmjeriti na pristupe podučavanja koji njeguju učeničko znanje geometrije. Aktivnosti u kojima učenici rukuju s geometrijskim objektima poboljšavaju učenikovo razumijevanje i svladavanje geometrijskih pojmova.

Osim ploče, krede i udžbenika, nastavnik može obogatiti svoje predavanje i raznim računalnim programima, interaktivnim aktivnostima, opipljivim pomagalima kojima djeca mogu rukovati. Raznolik izbor pomagala u nastavi matematike ponekad može biti opterećenje za nastavnike. Poznavanje nekolicine matematičkih pomagala u potpunosti je učinkovitije, nego nepromišljeno traženje novih aktivnosti koji bi obogatili predavanje.

Literatura

[1] Keith Jones, Dave Pratt, Anne Watson, *Key Ideas in Teaching Mathematics*, Oxford University Press, Vol. 1, No. 8(2013), 10-14

[2] John A. Van de Walle, Karen S. Karp, Jennifer M. Bay-Williams, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Pearson, 2015

[3] Daniel J. Brahier, *Teaching Secondary and Middle School Mathematics*, Pearson, 2014

[4] `http://www.nuffieldfoundation.org/`

Sažetak

U prvom poglavlju ovog diplomskog rada opisane su poteškoće s kojima se učenici susreću pri učenju matematike. Nadalje je objašnjeno kako učenici često dolaze do pogreški u dvije veoma značajne grane matematike: algebri i geometriji. Na kraju su prikazani različiti pristupi u podučavanju matematike koje mogu primjeniti nastavnici. Za kvalitetnije predavanje preporuča se da nastavnik koristi računalne programe i razna pomagala.

Summary

In the first chapter we discussed the difficulties which students face while studying mathematics. We then explained why students often make mistakes in algebra and geometry, the two most important branches of mathematics. Finally, we have shown some of the different ways of teaching that teachers can use to present knowledge to students. In order the elevate the quality of teaching, it is advised to use computer programs and many other tools and helpers for teaching.

Životopis

Moje ime je Željka Šutalo. Rođena sam 23.5.1989. u Osijeku. Prva četiri razreda osnovne škole sam pohađala u Donjem Miholjcu. Više razrede osnovne škole sam pohađala u Belom Manastiru, gdje sam upisala i Gimnaziju, opći smjer. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja upisala sam Preddiplomski studij na Odjelu za matematiku u Osijeku, a 2012. sam se prebacila na Nastavnički studij matematike i informatike.