Sebi - slični procesi

Ćurić, Mia

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Mia Ćurić

Sebi-slični procesi

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Mia Ćurić

Sebi-slični procesi

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Mnogi objekti u stvarnosti, poput obale, imaju svojstvo da su u potpunosti ili približno slični nekom dijelu sebe, odnosno cjelina ima isti oblik kao jedan ili više njezinih dijelova. U matematici je taj fenomen poznat kao sebi-sličnost. Može se reći da se sebi-slični objekti ponašaju isto pri skaliranju vremena ili prostora. Slučajni procesi sa svojstvom invarijantnosti distribucije pri skaliranju vremena, nazivaju se sebi-slični procesi. To svojstvo opisuje kako se konačno-dimenzionalne distribucije procesa mijenjaju skaliranjem vremena. Važnost sebi-sličnih procesa u teoriji vjerojatnosti proizlazi iz njihove veze s graničnim teoremima, a jedan od najvjažnijih je Lampertijev fundamentalni granični teorem. Neki aspekti sebi-sličnih procesa primjenjuju se u raznim područjima poput fizike, geofizike, hidrologije, ekonomije i drugih. Također su od velikog interesa u modeliranju jer prirasti stacionarnih sebi-sličnih procesa dobro prikazuju svojstvo dugoročne zavisnosti ili dugoročnog pamćenja.
Cilj ovog rada je definirati sebi-slične procese, proučiti svojstva koja su posljedica sebi-sličnosti te se upoznati s nekim primjerima takvih procesa. U prvom poglavlju, nakon definicije i svojstava sebi-sličnih procesa, govorit ćemo o korespodenciji sebi-sličnih procesa i strogo stacionarnih procesa, koja je poznata kao Lampertijeva transformacija. Jedan od temeljnih graničnih teorema, Lampertijev fundamentalni granični teorem, dokazan je u prvom poglavlju. U drugom poglavlju bavit ćemo se s primjerima sebi-sličnih procesa, od kojih ćemo prvo upoznati Brownovo gibanje. Sljedeće ćemo definirati stabilne distribucije kako bismo mogli proučiti stabilne Lévyjeve procese. Frakcionalno Brownovo gibanje je, kao i Brownovo gibanje, primjer Gaussovskog sebi-sličnog procesa sa stacionarnim prirastima, dok Brownovo gibanje ima i nezavisne priraste. Pokazat ćemo integralnu reprezentaciju frakcionalnog Brownovog gibanja koristeći stabilne integrale. Posebno, proučit ćemo niz prirasta frakcionalnog Brownovog gibanja, koji se naziva frakcionalni Gaussovski šum. Vidjet ćemo da je frakcionalni Gaussovski šum stacionaran, te da u određenim uvjetima pokazuje svojstvo dugoročne zavisnosti. U posljednjem poglavlju ćemo proučiti sebi-slične procese sa stacionarnim prirastima, a koji nisu nužno Gaussovski, i njihova svojstva. Posebno ćemo razmotriti slučajeve sebi-sličnih procesa s konačnom varijancom te s beskonačnom varijancom. Sebi-slični procesi s konačnom varijancom, od kojih posebno navodimo Hermitov proces, ćemo reprezentirati koristeći višestruke Wiener-Itôve integrale. Na kraju ćemo proučiti sebi-slične procese s beskonačnom varijancom, a posebno linearno frakcionalno stabilno gibanje, koje je jedna generalizacija frakcionalnog Brownovog gibanja.

1 Sebi-slični procesi

U ovom poglavlju ćemo definirati sebi-slične procese te navesti svojstva koja su posljedica sebi-sličnosti. Pokazat ćemo vezu sebi-sličnih procesa i strogo stacionarnih procesa te dokazati Lampertijev fundamentalni granični teorem.

1.1 Definicija i svojstva

Na početku navodimo oznake koje ćemo radi jednostavnosti koristiti u radu. Neka su $\{X_t, t \geq 0\}$ i $\{Y_t, t \geq 0\}$ slučajni procesi definirani na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kažemo da ta dva slučajna procesa imaju jednake sve konačnodimenzionalne distribucije ako za proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}).$$

Pisat ćemo $\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{Y_t\}$.

Definicija 1.1 *Za slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ kažemo da je* ***sebi-sličan*** *ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ tako da vrijedi*

$$\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{bX_t\}. \tag{1}$$

Dakle, ako je slučajni proces sebi-sličan onda za proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(X_{at_1}, \ldots, X_{at_n}) \stackrel{d}{=} (bX_{t_1}, \ldots, bX_{t_n}).$$

Definicija 1.2 *Kažemo da je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$* ***stohastički neprekidan*** *u t ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$\lim_{h \to 0} P\{|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon\} = 0.$$

Za slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ ćemo reći da je *netrivijalan* ukoliko X_t nije konstanta za svaki t gotovo sigurno, odnosno ako je X_t nedegenerirana za svaki t.

Prije iskaza teorema, pomoću kojeg se često u literaturi definiraju sebi-slični procesi, navodimo lemu koja će nam biti potrebna za dokaz teorema.

Lema 1.1 *Neka je X nenul slučajni vektor u $\mathbb{R}^m$ te neka vrijedi $b_1 X \stackrel{d}{=} b_2 X$ za $b_1, b_2 > 0$. Tada je $b_1 = b_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $b_1 \neq b_2$. Tada vrijedi $X \stackrel{d}{=} bX$, za neki $b \in (0,1)$. Dakle, $X \stackrel{d}{=} b^n X$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, ako $n \to \infty$ tada je $X = 0$ gotovo sigurno, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. □

Teorem 1.1 *Neka je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ netrivijalan, stohastički neprekidan u $t = 0$ i sebi-sličan. Tada postoji jedinstveni $H \geq 0$ tako da vrijedi $b = a^H$, gdje su a i b iz Definicije 1.1.*

Dokaz. Prvo pokažimo da je b u (1) jedinstveno određen s a. Pretpostavimo da za proizvoljan t vrijedi:

$$X_{at} \stackrel{d}{=} b_1 X_t \stackrel{d}{=} b_2 X_t.$$

Ako je $X_t \neq 0$ za odabrani t, onda prema prethodnoj lemi slijedi $b_1 = b_2$. Zbog pretpostavke da je $\{X_t, t \geq 0\}$ netrivijalan znamo da takav t postoji. Tada je b u potpunosti određen s a prema (1). Stoga pišemo $b = b(a)$. Nadalje, zbog (1) imamo

$$X_{aa't} \stackrel{d}{=} b(a) X_{a't} \stackrel{d}{=} b(a)b(a')X_t,$$

a s druge strane

$$X_{aa't} \stackrel{d}{=} b(aa')X_t.$$

Dakle, slijedi $b(aa') = b(a)b(a')$.

Sljedeće ćemo pokazati monotonost od $b(a)$. Pretpostavimo $a < 1$ te pustimo $n \to \infty$ u $X_{a^n} \stackrel{d}{=} b(a)^n X_1$. Ako $n \to \infty$, onda $a^n \to 0$. Zbog stohastičke neprekidnosti slučajnog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ u $t = 0$, imamo da X_{a^n} konvergira prema X_0 po vjerojatnosti. Stoga, mora biti $b(a) \leq 1$. Zatim, kako je $b(1) = 1$ vrijedi sljedeće:

$$b(1) = b\big(a \cdot \frac{1}{a}\big) = b(a)b\big(\frac{1}{a}\big) = 1,$$

pa možemo zaključiti da je $b\big(\frac{1}{a}\big) = \frac{1}{b(a)}$. Dakle,

$$b\big(\frac{a_1}{a_2}\big) = b(a_1)b\big(\frac{1}{a_2}\big) = \frac{b(a_1)}{b(a_2)}.$$

Ako je $a_1 < a_2$, tj. $\frac{a_1}{a_2} < 1$, onda je $\frac{b(a_1)}{b(a_2)} \leq 1$, odnosno $b(a_1) \leq b(a_2)$ te je stoga $b(a)$ neopadajući. Dakle, imamo da je $b(a)$ neopadajući te da zadovoljava $b(aa') = b(a)b(a')$ što je multiplikativni oblik Cauchyjeve funkcijske jednadžbe. Prema tome je $b(a) = a^H$, za jedinstveni $H \geq 0$ kao rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe (detaljnije se može vidjeti u [6, Poglavlje 2]). □

Parametar H iz prethodnog teorema nazivamo eksponent ili parametar sebi-sličnosti slučajnog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$(također poznat i kao Hurstov indeks ili Hurstov parametar). Češće kažemo da je proces H-sebi sličan ili sebi-sličan s parametrom H.

Propozicija 1.1 *Ako je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H i $H > 0$, onda je $X_0 = 0$ gotovo sigurno.*

Dokaz. Kako je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H, za svaki $a > 0$ vrijedi $X_0 \stackrel{d}{=} X_{a0} \stackrel{d}{=} a^H X_0$. Dovoljno je pustiti da $a \to 0$ i slijedi tvrdnja. □

Tvrdnja propozicije ne vrijedi za $H = 0$ što ćemo pokazati na primjeru. No, prije toga ćemo se prisjetiti definicije strogo stacionarnih procesa.

Definicija 1.3 *Slučajni proces* $\{X_t, t \in T\}$ *je* ***strogo stacionaran*** *ili stacionaran u užem smislu ako su mu konačnodimenzionalne distribucije invarijantne na vremenske pomake, tj.*

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}),$$

za svaki $h > 0$ *i proizvoljne* $t_1, \dots, t_n \in T$.
Specijalno, $X_t \stackrel{d}{=} X_s$, *za svaki* $s, t \in T$.

Primjer 1.1 *Neka je* $\{Y_s, s \in \mathbb{R}\}$ *strogo stacionaran proces i* ξ *slučajna varijabla nezavisna od slučajnog procesa* $\{Y_s, s \in \mathbb{R}\}$. *Definiramo* $\{X_t, t \geq 0\}$ *na sljedeći način:*

$$X_t = \begin{cases} Y_{\log t}, & t > 0 \\ \xi, & t = 0. \end{cases}$$

Za $t > 0$ *imamo,*

$$X_{at} = Y_{\log at} = Y_{\log a + \log t} \stackrel{d}{=} Y_{\log t} = X_t,$$

pri čemu smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili da je $\{Y_s, s \in \mathbb{R}\}$ *strogo stacionaran.*
Dakle,

$$\{\{X_{at}, t > 0\}, \xi\} \stackrel{d}{=} \{\{X_t, t > 0\}, \xi\},$$

pa zaključujemo da je $\{X_t, t \geq 0\}$ *sebi-sličan s parametrom* 0, *ali da je* $X_0 \neq 0$.

Propozicija 1.2 *Neka je slučajni proces* $\{X_t, t \geq 0\}$ *sebi-sličan s parametrom* H *i* $H > 0$. *Tada, za svaki* $t \neq 0$, *vrijedi* $X_t \stackrel{d}{=} t^H X_1$.

Dokaz. Tvrdnja je direktna posljedica sebi-sličnosti. Dakle, kako je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H vrijedi $X_t = X_{1 \cdot t} \stackrel{d}{=} t^H X_1$. □

Teorem 1.2 *Neka je slučajni proces* $\{X_t, t \geq 0\}$ *netrivijalan, stohastički neprekidan u* $t = 0$ *i sebi-sličan s parametrom* H. *Tada je* $H = 0$ *ako i samo ako je* $X_t = X_0$ *za svaki* $t > 0$ *gotovo sigurno.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom 0. Dakle, $\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{X_t\}$. Za zajedničku distribuciju u $t = 0$ i $t = \dfrac{s}{a}$ vrijedi:

$$(X_0, X_{\frac{s}{a}}) \stackrel{d}{=} (X_{a0}, X_{a\frac{s}{a}}) = (X_0, X_s), \text{ za svaki } a > 0.$$

Stoga, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$P\{|X_s - X_0| > \varepsilon\} = P\{|X_{\frac{s}{a}} - X_0| > \varepsilon\}.$$

Zbog stohastičke neprekidnosti slučajnog procesa u $t = 0$ vrijedi:

$$\lim_{h \to 0} P\{|X_h - X_0| > \varepsilon\} = 0, \text{ za svaki } \varepsilon > 0.$$

Dakle, kada $a \to \infty$, onda $\frac{s}{a} \to 0$ te je $P\{|X_{\frac{s}{a}} - X_0| > \varepsilon\} = 0$. Zaključujemo, za svaki $s > 0$ je

$$P\{|X_s - X_0| > \varepsilon\} = 0, \text{ za svaki } \varepsilon > 0,$$

tj. $X_s = X_0$ gotovo sigurno. Drugi smjer dokaza je trivijalan. □

Iz prethodnog teorema zaključujemo da ima smisla proučavati samo sebi-slične procese koji su stohastički neprekidni u 0 i čiji je parametar sebi-sličnosti pozitivan. Stoga ćemo u ostatku rada podrazumijevati da su sebi-slični procesi koje spominjemo upravo takvi.

1.2 Lampertijeva transformacija

Netrivijalan sebi-sličan proces ne može biti strogo stacionaran. Zaista, kada bi on bio strogo stacionaran tada bi za svaki $a > 0$ i $t > 0$ vrijedilo

$$X_t \stackrel{d}{=} X_{at} \stackrel{d}{=} a^H X_t.$$

No, ako $a \to \infty$ tada $a^H X_t \to \infty$, odnosno desna strana gornjeg izraza u tom slučaju divergira. Međutim, iako sebi-slični procesi ne mogu biti strogo stacionarni, postoji veza između njih. Ta korespodencija poznata je kao *Lampertijeva transformacija* te o njoj govori sljedeći teorem.

Teorem 1.3 *Neka je $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ strogo stacionaran proces. Za neki $H > 0$ definiramo:*

$$X_t = \begin{cases} t^H Y_{\log t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Tada je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H.
Obratno, neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H i

$$Y_t = e^{-tH} X_{e^t}, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tada je $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ strogo stacionaran proces.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ strogo stacionaran. Trebamo pokazati da je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H, tj. da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$ vrijedi $(X_{at_1}, \ldots, X_{at_n}) \stackrel{d}{=} (a^H X_{t_1}, \ldots, a^H X_{t_n})$. Prema Cramér-Woldovom sredstvu, distribucija n-dimenzionalnog slučajnog vektora u potpunosti je određena distribucijom proizvoljne linearne kombinacije komponenata tog vektora, pa je dovoljno pokazati da su proizvoljne linearne kombinacije komponenata vektora $(X_{at_1}, \ldots, X_{at_n})$ i $(a^H X_{t_1}, \ldots, a^H X_{t_n})$ jednako distribuirane. Za sve $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_n > 0$ i $a > 0$ imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j X_{at_j} &= \sum_{j=1}^n c_j (at_j)^H Y_{\log at_j} = \sum_{j=1}^n c_j a^H t_j^H Y_{\log a + \log t_j} \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n c_j a^H t_j^H Y_{\log t_j} = \sum_{j=1}^n c_j a^H X_{t_j}. \end{aligned}$$

Prva jednakost slijedi prema (2), zatim smo iskoristili svojstva logaritamske funkcije, dok treća jednakost vrijedi jer je $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ strogo stacionaran. Zadnja jednakost slijedi ponovno prema (2). Dakle, pokazali smo da su proizvoljne linearne kombinacije jednako distribuirane pa možemo zaključiti da je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H.

Sada pretpostavimo da je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H. Želimo pokazati da je $(Y_{t_1+h}, \ldots, Y_{t_n+h}) \stackrel{d}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ za proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$ i $h \in \mathbb{R}$. Analogno kao gore, dovoljno je pokazati jednaku distribuiranost proizvoljnih linearnih kombinacija. Za sve $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_n > 0$ i $h \in \mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_j Y_{t_j+h} &= \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-(t_j+h)H} X_{e^{t_j+h}} = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-t_j H} e^{-hH} X_{e^h e^{t_j}} \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-t_j H} X_{e^{-h} e^h e^{t_j}} = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-t_j H} X_{e^{t_j}} = \sum_{j=1}^{n} c_j Y_{t_j}.\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti smo iskoristili (3), a zatim svojstva eksponencijalne funkcije. Treća jednakost vrijedi jer je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H te zadnja jednakost slijedi ponovno prema (3). Dakle, pokazali smo jednaku distribuiranost linearnih kombinacija pa je $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ je strogo stacionaran proces. □

Ovaj teorem nam govori da sebi-sličnih procesa ima najmanje onoliko koliko je strogo stacionarnih procesa. Jedan od najpoznatijih primjera Lampertijeve transformacije je transformacija standardnog Brownovog gibanja kojom se dobije stacionaran Ornstein–Uhlenbeckov proces što ćemo pokazati u poglavlju 2.1.

1.3 Fundamentalni granični teorem

Sebi-slični procesi su iznimno važni u teoriji vjerojatnosti zbog njihove veze sa graničnim teoremima. O toj vezi govori Lampertijev fundamentalni granični teorem. Prije teorema, navodimo definicije koje će biti potrebne za njegovo iskazivanje.

Definicija 1.4 *Za pozitivnu, izmjerivu funkciju L kažemo da je* ***sporo varirajuća*** *ako za svaki $x > 0$ vrijedi:*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Za pozitivnu, izmjerivu funkciju f kažemo da je ***regularno varirajuća*** *sa indeksom $\alpha \in \mathbb{R}$ ako je*

$$f(x) = x^{\alpha} L(x),$$

gdje je L sporo varirajuća funkcija.

Primjer 1.2 *(Primjeri sporo-varirajućih funkcija)*

- *Neka je $L(t) = \log t$. Tada,*

$$\frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{\log tx}{\log t} = \frac{\log t + \log x}{\log t} = 1 + \frac{\log x}{\log t}.$$

Kada $t \to \infty$, *onda* $\frac{\log x}{\log t} \to 0$, *odnosno* $\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1$. *Dakle,* $L(t) = \log t$ *je sporo varirajuća.*

- *Funkcija* $L(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$ *je sporo varirajuća. Štoviše, svaka funkcija* L *za koju vrijedi* $\lim_{t\to\infty} L(t) = c$ *je sporo varirajuća funkcija.*

S $\{X_{nt}\} \stackrel{d}{\Rightarrow} \{Y_t\}$ označavat ćemo konvergenciju svih konačnodimenzionalnih distribucija slučajnih procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ i $\{Y_t, t \geq 0\}$, kada $n \to \infty$.

Teorem 1.4 (Lampertijev fundamentalni granični teorem) *Neka je* $\{X_t, t \geq 0\}$ *slučajni proces takav da je* X_t *nedegenerirana za svaki* $t > 0$.

(i) Ako postoji slučajni proces $\{Y_t, t \geq 0\}$ *i niz realnih brojeva* $\{A_\lambda, \lambda \geq 0\}$ *takav da je* $A_\lambda > 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda = \infty$ *i*

$$\frac{1}{A_\lambda}\{Y_{\lambda t}\} \stackrel{d}{\Rightarrow} \{X_t\}, \text{ kada } \lambda \to \infty, \tag{4}$$

tada je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ *sebi-sličan s parametrom* H, *za neki* $H > 0$.

(ii) A_λ *iz (i) je oblika* $A_\lambda = \lambda^H L(\lambda)$, *gdje je* L *sporo varirajuća funkcija.*

(iii) Ako je $\{X_t, t \geq 0\}$ *sebi-sličan s parametrom* H, $H > 0$, *onda postoje* $\{Y_t, t \geq 0\}$ *i* $\{A_\lambda, \lambda \geq 0\}$ *koji zadovoljavaju (4).*

Dokazat ćemo dijelove *(i)* i *(ii)*. Dio *(iii)* je trivijalan ako se uzme $\{Y_t, t \geq 0\} = \{X_t, t \geq 0\}$ i $A_\lambda = \lambda^H$. Za dokaz teorema će nam biti potrebna sljedeća lema o konvergenciji koju navodimo bez dokaza, a njen dokaz se može pronaći u [5, str. 275, Teorem 8.7.1].

Lema 1.2 *Neka su* $G_1, G_2, \ldots$ *funkcije distribucija nekog niza slučajnih varijabli te* F_1 *i* F_2 *funkcije distribucija nedegeneriranih slučajnih varijabli. Nadalje, neka za* $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n > 0$ *te* $\beta_n \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$G_n(a_n x + b_n) \to F_1(x),$$

$$G_n(\alpha_n x + \beta_n) \to F_2(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ *u kojem su* F_1 *i* F_2 *neprekidne. Tada postoji sljedeći limes*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} \in (0, \infty).$$

Dokaz Teorema 1.4.
Prema (4) ako $\lambda \to \infty$ imamo:

$$P\Big\{\frac{1}{A_\lambda} Y_\lambda \leq x\Big\} \to P\{X_1 \leq x\}, \text{ tj. } P\{Y_\lambda \leq A_\lambda x\} \to P\{X_1 \leq x\}$$

i

$$P\Big\{\frac{1}{A_{\lambda t}} Y_{\lambda t \frac{1}{t}} \leq x\Big\} \to P\{X_{\frac{1}{t}} \leq x\}, \text{ tj. } P\{Y_\lambda \leq A_{\lambda t} x\} \to P\{X_{\frac{1}{t}} \leq x\},$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ u kojem su funkcije distribucija neprekidne. Da bismo mogli iskoristiti prethodnu lemu, označimo s G_{Y_λ}, F_{X_1} i $F_{X_{\frac{1}{t}}}$ funkcije distribucija slučajnih varijabli Y_λ, X_1 i $X_{\frac{1}{t}}$. Prema prethodnom razmatranju imamo:

$$G_{Y_\lambda}(A_\lambda x) \to F_{X_1}(x) \text{ i } G_{Y_\lambda}(A_{\lambda t} x) \to F_{X_{\frac{1}{t}}}(x),$$

pri čemu je $a_n = A_{\lambda t}$, $\alpha_n = A_\lambda$, $b_n = \beta_n = 0$. Zbog pretpostavke da je X_t nedegenerirana i prethodne leme, za svaki $t > 0$ vrijedi sljedeće:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A_{\lambda t}}{A_\lambda} \in (0, \infty).$$

Prema [1, str. 5, Teorem 1.1.8.] postoji $H \geq 0$ i sporo varirajuća funkcija L tako da vrijedi:

$$A_\lambda = \lambda^H L(\lambda). \tag{5}$$

Ponovno prema (4), za svaki $a > 0$ i proizvoljne $t_1, t_2, \ldots, t_k \geq 0$ i točke $(x_1, \ldots, x_k)$ u kojima su funkcije distribucija od $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ i $(X_{at_1}, \ldots, X_{at_k})$ neprekidne imamo:

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\Big\{\frac{1}{A_\lambda} Y_{\lambda t_1} \leq x_1, \ldots, \frac{1}{A_\lambda} Y_{\lambda t_k} \leq x_k\Big\} = P\big\{X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_k} \leq x_k\big\}, \tag{6}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\Big\{\frac{1}{A_\lambda} Y_{\lambda a t_1} \leq x_1, \ldots, \frac{1}{A_\lambda} Y_{\lambda a t_k} \leq x_k\Big\} = P\big\{X_{at_1} \leq x_1, \ldots, X_{at_k} \leq x_k\big\}. \tag{7}$$

Prema (5), $A_\lambda = \lambda^H L(\lambda)$ i $A_{\lambda a} = a^H \lambda^H L(\lambda a)$, odakle je $\lambda^H = \dfrac{A_{\lambda a}}{a^H L(\lambda a)}$.

Tada, kako je L sporo varirajuća, $h(\lambda) = \dfrac{L(\lambda a)}{L(\lambda)} \to 1$, za $\lambda \to \infty$.

Promotrimo sljedeće:

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{1}{A_\lambda} Y_{\lambda a t_1} \leq x_1, \ldots, \frac{1}{A_\lambda} Y_{\lambda a t_k} \leq x_k\right\} &= P\left\{\frac{1}{\lambda^H L(\lambda)} Y_{\lambda a t_1} \leq x_1, \ldots, \frac{1}{\lambda^H L(\lambda)} Y_{\lambda a t_k} \leq x_k\right\} \\
&= P\left\{\frac{a^H L(\lambda a)}{A_{\lambda a} L(\lambda)} Y_{\lambda a t_1} \leq x_1, \ldots, \frac{a^H L(\lambda a)}{A_{\lambda a} L(\lambda)} Y_{\lambda a t_k} \leq x_k\right\} \\
&= P\left\{\frac{a^H h(\lambda)}{A_{\lambda a}} Y_{\lambda a t_1} \leq x_1, \ldots, \frac{a^H h(\lambda)}{A_{\lambda a}} Y_{\lambda a t_k} \leq x_k\right\} \\
&= P\left\{\frac{a^H}{A_{\lambda a}} Y_{\lambda a t_1} \leq \frac{x_1}{h(\lambda)}, \ldots, \frac{a^H}{A_{\lambda a}} Y_{\lambda a t_k} \leq \frac{x_k}{h(\lambda)}\right\}.
\end{aligned}$$

Prema (6) i jer $h(\lambda) \to 1$ imamo:

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{a^H}{A_{\lambda a}} Y_{\lambda a t_1} \leq \frac{x_1}{h(\lambda)}, \ldots, \frac{a^H}{A_{\lambda a}} Y_{\lambda a t_k} \leq \frac{x_k}{h(\lambda)}\right\} = P\left\{a^H X_{t_1} \leq x_1, \ldots, a^H X_{t_k} \leq x_k\right\}.$$

Kako su lijeva strana gornjeg raspisa i lijeva strana u (7) jednake, moraju i desne biti jednake, odnosno mora vrijediti:

$$P\Big\{X_{at_1} \leq x_1, \ldots, X_{at_k} \leq x_k\Big\} = P\Big\{a^H X_{t_1} \leq x_1, \ldots a^H X_{t_k} \leq x_k\Big\}.$$

Stoga zaključujemo da je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H.

Pokažimo još da mora biti $H > 0$. Kada $\lambda \to \infty$, onda $A_\lambda \to \infty$, što implicira da je $X_0 = 0$ gotovo sigurno. Ako je $H = 0$ prema Teoremu 1.2 imamo da $X_t = X_0 = 0$ gotovo sigurno za svaki $t > 0$. Dobili smo kontradikciju sa početnom pretpostavkom da je X_t nedegenerirana te prema tome mora biti $H > 0$. $\square$

2 Primjeri sebi-sličnih procesa

U ovom poglavlju ćemo proučiti neke primjere sebi-sličnih procesa. Za početak ćemo se upoznati s jednim od najpoznatijih primjera sebi-sličnih procesa, a to je Brownovo gibanje. Zatim ćemo se baviti stabilnim Lévyjevim procesima, koji čine posebnu klasu sebi-sličnih procesa, te frakcionalnim Brownovim gibanjem, koje je poopćenje Brownovog gibanja.

2.1 Brownovo gibanje

Definicija 2.1 *Slučajni proces $\{B_t, t \geq 0\}$ u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja je **Brownovo gibanje** ako vrijede sljedeća svojstva:*

(i) za proizvoljne $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ su prirasti $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ međusobno nezavisne slučajne varijable, tj. Brownovo gibanje ima nezavisne priraste,

(ii) za $0 \leq s < t$ je slučajna varijabla $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$,

(iii) $P\{B_0 = 0\} = 1$, tj. $B_0 = 0$ gotovo sigurno,

(iv) za svaki $t \geq 0$, funkcija $t \mapsto B_t(\omega)$ je neprekidna gotovo sigurno , tj. trajektorije Brownovog gibanja su gotovo sigurno neprekidne.

Definicija 2.2 *Kažemo da slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ ima **stacionarne priraste** ako vrijedi*

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

za sve $s, t \in T$, $s < t$ i sve h takve da je $t+h, s+h \in T$. Drugim riječima, distribucija prirasta $X_{t+h} - X_t$ ovisi samo o duljini pomaka h i ne ovisi o vremenu t.

Napomena 2.1 *Iz definicije Brownovog gibanja slijedi:*

- *Za svaki h i $0 \leq s < t$ tako da je $(s+h), (t+h) \geq 0$, prema (ii) vrijedi:*

$$B_{t+h} - B_{s+h} \sim \mathcal{N}(0, t+h-s-h), \text{ tj. } B_{t+h} - B_{s+h} \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

  Dakle,

$$B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t+h} - B_{s+h},$$

  tj. Brownovo gibanje ima stacionarne priraste.

- *Iz (ii) i (iii) slijedi da $B_t - B_0 = B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, za svaki $t > 0$.*

Teorem 2.1 *Za $s, t > 0$ funkcija autokovarijanci Brownovog gibanja jednaka je:*

$$Cov(B_s, B_t) = \min\{s, t\}.$$

Dokaz. Kako je $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, slijedi da je $E[B_t] = 0$ i $Var(B_t) = t$, za svaki $t > 0$. Dakle,

$$Cov(B_s, B_t) = E[B_sB_t] - E[B_s]E[B_t] = E[B_sB_t].$$

Promotrimo sljedeće:

$$E[(B_s - B_t)^2] = E[B_s^2 - 2B_sB_t + B_t^2] = E[B_s^2] - 2E[B_sB_t] + E[B_t^2],$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi zbog linearnosti očekivanja. Nadalje, iz gornjeg izraza slijedi:

$$E[B_sB_t] = \frac{1}{2}\Big(E[B_s^2] + E[B_t^2] - E[(B_s - B_t)^2]\Big).$$

Sada iskoristimo $B_s - B_t \stackrel{d}{=} B_{|s-t|}$, što vrijedi zbog stacionarnosti prirasta Brownovog gibanja, te imamo:

$$\begin{aligned}
E[B_sB_t] &= \frac{1}{2}\Big(E[B_s^2] + E[B_t^2] - E[B_{|s-t|}^2]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(Var(B_s) + Var(B_t) - Var(B_{|s-t|})\Big) \\
&= \frac{1}{2}(s + t - |s - t|) = \min\{s, t\},
\end{aligned}$$

$\square$

Definicija 2.3 *Kažemo da je slučajni proces* $\{X_t, t \in T\}$ ***Gaussovski proces*** *ako za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i proizvoljne* $t_1, \ldots, t_n \in T$ *slučajni vektor* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *ima višedimenzionalnu Gaussovu distribuciju.*

Teorem 2.2 *Brownovo gibanje* $\{B_t, t \geq 0\}$ *je Gaussovski proces.*

Dokaz. Normalnost proizlazi iz sljedeće tvrdnje: ako su $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ i A regularna matrica, tada je $\mathbf{Z} = A\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(A\boldsymbol{\mu}, A\Sigma A^T)$.
Za $m = 2$ i $0 < t_1 < t_2$ imamo:

$$\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \end{bmatrix}}_{\sim\mathcal{N}(0,\Sigma_{2\times 2})},$$

pri čemu je A_2 regularna matrica, a $\Sigma_{2\times 2} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 \end{bmatrix}$, odnosno $\Sigma_{2\times 2}$ je matrica autokovarijanci vektora $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1})$. Slijedi da je $(B_{t_1}, B_{t_2}) \sim \mathcal{N}(A_2 0, A_2\Sigma_{2\times 2}A_2^T)$, tj. $(B_{t_1}, B_{t_2}) \sim \mathcal{N}(0, \begin{bmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix})$.
Za $m = 3$ i $0 < t_1 < t_2 < t_3$ imamo:

$$\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ B_{t_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ B_{t_3} - B_{t_2} \end{bmatrix}}_{\sim\mathcal{N}(0,\Sigma_{3\times 3})}.$$

Analogno slijedi, $(B_{t_1}, B_{t_2}, B_{t_3}) \sim \mathcal{N}(0, \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix})$.

Za $m = n$ i $0 < t_1 < \cdots < t_n$ imamo:

$$\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{A_n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{bmatrix}}_{\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{n \times n})}.$$

Slijedi, $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \sim \mathcal{N}(0, A_n \Sigma_{n\times n} A_n^T)$, pri čemu je $A_n \Sigma_{n\times n} A_n^T = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$.

Dakle, vidimo da sve konačnodimenzionalne distribucije Brownovog gibanja imaju Gaussovu distribuciju, tj. Brownovo gibanje je Gaussovski proces. $\square$

Teorem 2.3 *Brownovo gibanje* $\{B_t, t \geq 0\}$ *je sebi-sličan proces s parametrom* $H = \frac{1}{2}$, *tj. za svaki* $a > 0$ *i proizvoljne* $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$(B_{at_1}, \ldots, B_{at_n}) \overset{d}{=} (a^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, \ldots, a^{\frac{1}{2}} B_{t_n}).$$

Dokaz. Kako je Brownovo gibanje Gaussovski proces znamo da za proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$ vrijedi $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})})$, pri čemu je $\Sigma_{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})}$ matrica autokovarijanci vektora $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$.

Promotrimo prvo vektor $(\sqrt{a} B_{t_1}, \ldots, \sqrt{a} B_{t_n}) = \sqrt{a}(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Kako je on linearna transformacija normalnog slučajnog vekora, zaključujemo da je i on sam normalno distribuiran slučajni vekor. Zatim,

$$E[(\sqrt{a} B_{t_1}, \ldots, \sqrt{a} B_{t_n})] = \sqrt{a} E[(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})] = \sqrt{a} \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} Cov(\sqrt{a} B_{t_i}, \sqrt{a} B_{t_j}) &= E[\sqrt{a} B_{t_i} \sqrt{a} B_{t_j}] - E[\sqrt{a} B_{t_i}] E[\sqrt{a} B_{t_j}] \\ &= aE[B_{t_i} B_{t_j}] - aE[B_{t_i}] E[B_{t_j}] = aCov(B_{t_i}, B_{t_j}) = a \min\{t_i, t_j\}. \end{aligned}$$

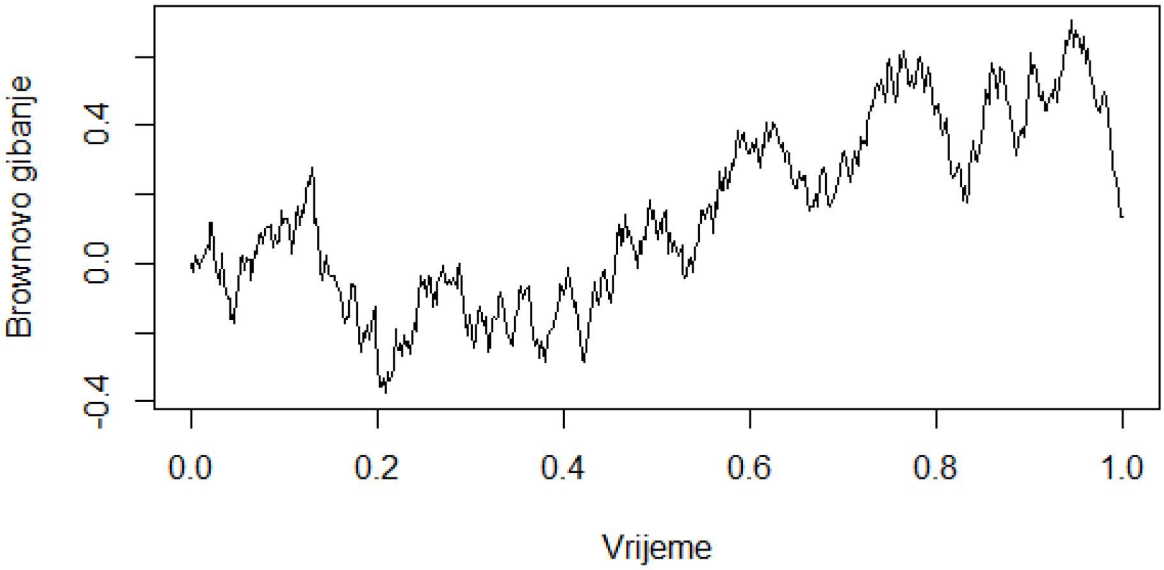
Dakle, $\Sigma_{(\sqrt{a} B_{t_1}, \ldots, \sqrt{a} B_{t_n})} = a \Sigma_{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})}$.

Nadalje, uočimo da je vektor $(B_{at_1}, \ldots, B_{at_n})$ normalno distribuiran budući je on jedna konačnodimenzionalna distribucija Brownovog gibanja, a Brownovo gibanje je Gaussovski proces. Stoga, za $(B_{at_1}, \ldots, B_{at_n})$ vrijede sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} &E[(B_{at_1}, \ldots, B_{at_t})] = 0, \\ &Cov(B_{at_i}, B_{at_j}) = \min\{at_i, at_j\} = a \min\{t_i, t_j\}. \end{aligned}$$

Slijedi, $\Sigma_{(B_{at_1}, \ldots, B_{at_n})} = a \Sigma_{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})}$. Dakle, vidimo da su slučajni vektori $(B_{at_1}, \ldots, B_{at_t})$ i $(\sqrt{a} B_{t_1}, \ldots, \sqrt{a} B_{t_n})$ jednako distribuirani pa je Brownovo gibanje sebi-sličan proces s parametrom $\frac{1}{2}$. $\square$

Na sljedećoj slici prikazana je simulirana trajektorija Brownovog gibanja. Budući da je Brownovo gibanje sebi-sličan proces, dovoljno je simulirati trajektoriju Brownovog gibanja na $[0, 1]$. Dakle, ako simuliramo $(B_{Tt_1}, \ldots, B_{Tt_n})$, za $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$, onda odgovarajućim skaliranjem za $T > 0$ dobijemo trajektoriju na $[0, T]$.



Slika 1: Simulirana trajektorija Brownovog gibanja.

Primjer 2.1 *(Lampertijeva transformacija Brownovog gibanja)*
Neka je $\{B_t, t \geq 0\}$ *Brownovo gibanje, za koje smo vidjeli da je sebi-sličan proces s parametrom* $\frac{1}{2}$. *Tada je slučajni proces* $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$*, definiran na sljedeći način:*

$$Y_t = e^{-\frac{t}{2}} B_{e^t}, t \in \mathbb{R},$$

strogo stacionaran prema Teoremu 1.3. Nadalje, $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ *je Gaussovski proces kao transformacija Brownovog gibanja te ima sljedeća svojstva:*

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= E[e^{-\frac{t}{2}} B_{e^t}] = e^{-\frac{t}{2}} E[B_{e^t}] = 0, \\ Cov(Y_t, Y_s) &= E[Y_t Y_s] - E[Y_t]E[Y_s] = E[Y_t Y_s] = E[e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{s}{2}} B_{e^t} B_{e^s}] \\ &= e^{-\frac{1}{2}(t+s)} Cov(B_{e^t}, B_{e^s}) = e^{-\frac{1}{2}(t+s)} \min\{e^t, e^s\} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|t-s|}. \end{aligned}$$

Slučajni proces $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ *poznat je kao stacionaran Ornstein–Uhlenbeckov(OU) proces (detaljnije o OU procesu se može pronaći u [4, Primjer 1.1.2]).*

2.2 Stabilni Lévyjevi procesi

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s još jednim primjerom sebi-sličnih procesa, a to su stabilni Lévyjevi procesi. Da bismo definirali stabilne Lévyjeve procese, potrebno je poznavanje stabilnih distribucija. Stoga ćemo se prvo u sljedećem potpoglavlju upoznati sa pojmom stabilnih distribucija te navesti neka osnovna svojstva.

2.2.1 Stabilne distribucije

Postoji više ekvivalentnih definicija stabilnih distribucija, koje čitatelj može pronaći u [7, Poglavlje 1.1], a mi navodimo sljedeću.

Definicija 2.4 *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima* ***stabilnu distribuciju*** *ako za bilo koji $n \geq 2$, postoji pozitivan broj C_n i realan broj D_n tako da vrijedi:*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n,$$

gdje su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable kao X. Za slučajnu varijablu X kažemo da ima ***strogo stabilnu distribuciju*** *ako je $D_n = 0$.*

Slučajna varijabla ima *simetričnu stabilnu distribuciju* ako ima stabilnu distribuciju te ako X i $-X$ imaju iste distribucije. Uočimo, ako slučajna varijabla ima simetričnu stabilnu distribuciju, tada je njena distribucija i strogo stabilna. Obrat ne mora vrijediti. Nadalje, može se pokazati da C_n iz prethodne definicije zadovoljava:

$$C_n = n^{1/\alpha},$$

za neki $0 < \alpha \leq 2$. Za dokaz ove tvrdnje vidjeti [3, Teorem 6.1]. Parametar α se naziva *indeks stabilnosti*, a za slučajnu varijablu koja ima stabilnu distribuciju s indeksom α kažemo da ima *α-stabilnu distribuciju.*

Stabilne distribucije slučajnih vektora definiraju se analogno kao stabilne distribucije slučajnih varijabli.

Definicija 2.5 *Slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ ima* ***stabilnu distribuciju*** *ako za bilo koji $n \geq 2$, postoje $\alpha \in (0, 2]$ i vektor $\mathbf{D}_n \in \mathbb{R}^d$ takvi da vrijedi:*

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha}\mathbf{X} + \mathbf{D}_n,$$

pri čemu su $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ nezavisni i jednako distribuirani vektori kao $\mathbf{X}$.

U nastavku ćemo se baviti stabilnim distribucijama slučajnih varijabli, a analogni rezultati za stabilne distribucije slučajnih vektora mogu se pronaći u [7, Poglavlje 2].

Za stabilne distribucije je karakteristično da im se gustoća i funkcija distribucije općenito ne mogu eksplicitno izraziti. Zbog toga se često stabilne distribucije karakteriziraju preko karakterističnih funkcija. Prisjetimo se definicije karakteristične funkcije slučajne varijable.

Definicija 2.6 ***Karakteristična funkcija*** *slučajne varijable X, tj. njezine funkcije distribucije F_X, je funkcija $\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana izrazom*

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF_X(x), t \in \mathbb{R}.$$

U sljedećoj propoziciji dana je karakterizacija stabilnih distribucija pomoću karakterističih funkcija, koju navodimo bez dokaza (ideja dokaza se može pronaći u [9]).

Propozicija 2.1 *Ako postoje parametri $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ i $\mu \in \mathbb{R}$, takvi da karakteristična funkcija slučajne varijable X ima sljedeći oblik:*

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta(\operatorname{sign} t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu t\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma|t|(1 - i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} t) \ln|t|) + i\mu t\}, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{8}$$

pri čemu je

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases}$$

tada slučajna varijabla X ima stabilnu distribuciju.

Iz prethodne propozicije vidimo da su stabilne distribucije određene sa četiri parametra: α je indeks stabilnosti, β je parametar asimetrije, σ parametar skaliranja te μ parametar pomaka. Ako slučajna varijabla ima stabilnu distribuciju, pisat ćemo:

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

a ako ima simetričnu stabilnu distribuciju s indeksom α pisat ćemo:

$$X \sim S\alpha S.$$

U sljedećoj propoziciji navest ćemo neka svojstva stabilnih distribucija. Za dokaz pogledati [7, Poglavlje 1.2.]

Propozicija 2.2 *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Vrijedi:*

(i) *Za realnu konstantu a je: $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.*

(ii) *Za realnu konstantu $a \neq 0$ je:*

$$\begin{aligned} aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, \operatorname{sign}(a)\beta, a\mu), && \text{ako } \alpha \neq 1, \\ aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, \operatorname{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta), && \text{ako } \alpha = 1. \end{aligned}$$

(iii) *X ima simetričnu distribuciju ako i samo ako je $\beta = 0$ i $\mu = 0$. X ima simetričnu distribuciju oko μ ako i samo ako je $\beta = 0$.*

(iv) *Za $\alpha \neq 1$, X ima strogo stabilnu distribuciju ako i samo ako je $\mu = 0$. Za $\alpha = 1$, X ima strogo stabilnu distribuciju ako i samo ako je $\beta = 0$.*

Primjer 2.2 *Neka je $X \sim S_2(\sigma, \beta, \mu)$. Prema (8) karakteristična funkcija slučajne varijable X jednaka je:*

$$\varphi_X(t) = \exp\{-\sigma^2 t^2(1 - i\beta \text{sign}(t) tan(\pi)) + i\mu t\} = \exp\{-\sigma^2 t^2 + i\mu t\},$$

što je karakteristična funkcija normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ i varijancom $2\sigma^2$. Dakle, ako slučajna varijabla X ima 2-stabilnu distribuciju, tada je $X \sim \mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$. Uočimo, iako parametar β nije jednoznačno određen jer je $\beta \tan(\pi) = 0$, budući se radi o normalnoj distribuciji, za koju znamo da je simetrična, možemo pretpostaviti da je $\beta = 0$ prema svojstvu (iii) prethodne propozicije.

U prethodnom primjeru vidjeli smo da su slučajne varijable koje imaju 2-stabilnu distribuciju, normalno distribuirane pa znamo da imaju konačnu varijancu. Dakle, ako je indeks stabilnosti $\alpha = 2$, drugi moment postoji. No, to nije slučaj kada je $0 < \alpha < 2$, o čemu govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.3 *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i $0 < \alpha < 2$. Tada je:*

$$E[|X|^p] < \infty, \text{ za } 0 < p < \alpha$$
$$E[|X|^p] = \infty, \text{ za } p \geq \alpha.$$

Za dokaz ove propozicije pogledati [7, Poglavlje 1.2.]. Nepostojanje drugih momenata za $0 < \alpha < 2$ je veliki nedostatak stabilnih distribucija jer se mnogi rezultati koje primjenjujemo za Gaussove slučajeve ovdje ne mogu primjeniti.

2.2.2 α-stabilni Lévyjevi procesi

Nakon što smo se upoznali sa stabilnim distribucijama, u nastavku ćemo definirati stabilne procese te stabilne Lévyjeve procese.

Definicija 2.7 *Za slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ kažemo da je* ***stabilan*** *ako su sve njegove konačnodimenzionalne distribucije stabilne. Nadalje, kažemo da je* ***strogo stabilan****, odnosno da je* ***simetričan i stabilan*** *ako su sve njegove konačnodimenzionalne distribucije strogo stabilne, odnosno simetrične stabilne.*

Reći ćemo da je slučajni proces α-*stabilan* ako su mu sve konačnodimenzionalne distribucije α-stabilne.

Definicija 2.8 *Slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se naziva* ***α-stabilan Lévyjev proces*** *ako vrijedi:*

(i) $X_0 = 0$ *gotovo sigurno,*

(ii) *za proizvoljne $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, slučajne varijable $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne, tj. $\{X_t, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste,*

(iii) $X_t - X_s \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$, *za sve $0 \leq s < t$ i neke $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$.*

Napomena 2.2 *Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ α-stabilan Lévyjev proces. Uočimo:*

- *Za $0 \leq s < t$ i proizvoljan h, takav da je $t+h, s+h \geq 0$, prema svojstvu (iii) prethodne definicije imamo $X_{t+h} - X_{s+h} \sim S_\alpha((t+h-s-h)^{1/\alpha}, \beta, 0)$. Dakle,*

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

  tj. α-stabilan Lévyjev proces ima stacionarne priraste.

- *2-stabilan Lévyjev proces je Brownovo gibanje. Zaista, ako je $\{X_t, t \geq 0\}$ 2-stabilan Lévyjev proces, prema prethodnoj definiciji vrijedi da je $X_t - X_s \sim S_2((t-s)^{1/2}, \beta, 0)$. Dakle, slučajna varijabla $X_t - X_s$ ima 2-stabilnu distribuciju pa prema Primjeru 2.2 ona ima normalnu distribuciju, tj. $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.*

Iz prethodnog poglavlja znamo da je Brownovo gibanje sebi-sličan proces s parametrom $H = \frac{1}{2}$. Dakle, 2-stabilan Lévyjev proces je sebi-sličan s parametrom $H = \frac{1}{2}$. Postavlja se pitanje jesu li i ostali α-stabilni Lévyjevi procesi sebi slični? Odgovor na to pitanje daje nam sljedeći teorem.

Teorem 2.4 *Za $0 < \alpha < 2$, α-stabilan Lévyjev proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je sebi-sličan s parametrom $H = \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2}$, osim u slučaju kada su $\alpha = 1$ i $\beta \neq 0$.*

Dokaz. Treba pokazati da za svaki $a > 0$ vrijedi $\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{a^{1/\alpha} X_t\}$. Kako je $\{X_t, t \geq 0\}$ α-stabilan Lévyjev proces, prema definiciji znamo da ima nezavisne priraste. Stoga je dovoljno pokazati da za svaki $a > 0$ i $0 \leq s < t$ vrijedi

$$X_{at} - X_{as} \stackrel{d}{=} a^{1/\alpha}(X_t - X_s).$$

Prema *(iii)* iz Definicije 2.8 imamo:

$$X_t - X_s \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0),$$

a prema *(ii)* iz Propozicije 2.2, za $a > 0$ i $\alpha \neq 1$ vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} a^{1/\alpha}(X_t - X_s) &\sim S_\alpha(a^{1/\alpha}(t-s)^{1/\alpha}, \mathrm{sign}(a)\beta, a \cdot 0), \\ \Rightarrow a^{1/\alpha}(X_t - X_s) &\sim S_\alpha(a^{1/\alpha}(t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0). \end{aligned}$$

S druge strane, ponovno prema *(iii)* iz Definicije 2.8 imamo,

$$\begin{aligned} X_{at} - X_{as} &\sim S_\alpha((at-as)^{1/\alpha}, \beta, 0), \\ \Rightarrow X_{at} - X_{as} &\sim S_\alpha(a^{1/\alpha}(t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0). \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da $X_{at} - X_{as} \stackrel{d}{=} a^{1/\alpha}(X_t - X_s)$, pa možemo zaključiti da je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom $\frac{1}{\alpha}$. □

2.3 Frakcionalno Brownovo gibanje

2.3.1 Definicija i svojstva

U poglavlju 2.1 smo vidjeli da je Brownovo gibanje primjer sebi-sličnog procesa sa stacionarnim prirastima, a u ovom poglavlju ćemo pokazati da je takvo i frakcionalno Brownovo gibanje. Do definicije frakcionalnog Brownovog gibanja će nas dovesti tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 2.5 *Neka je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H i sa stacionarnim prirastima te pretpostavimo $E[X_1^2] < \infty$. Tada za $s, t \geq 0$ vrijedi:*

$$E[X_t X_s] = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big)E[X_1^2].$$

Dokaz. Promotrimo sljedeće:

$$E[(X_t - X_s)^2] = E[X_t^2 - 2X_tX_s + X_s^2] = E[X_t^2] - 2E[X_tX_s] + E[X_s^2],$$

odakle je

$$E[X_tX_s] = \frac{1}{2}\Big(E[X_t^2] + E[X_s^2] - E[(X_t - X_s)^2]\Big).$$

Zbog stacionarnosti prirasta imamo $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{|t-s|}$, a zbog sebi-sličnosti vrijedi $X_t = t^H X_1$. Stoga slijedi:

$$\begin{aligned} E[X_tX_s] &= \frac{1}{2}\Big(E[X_t^2] + E[X_s^2] - E[X_{|t-s|}^2]\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(E[t^{2H}X_1^2] + E[s^{2H}X_1^2] - E[|t-s|^{2H}X_1^2]\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big)E[X_1^2]. \end{aligned}$$

□

Definicija 2.9 *Neka je $0 < H \leq 1$. Gaussovski proces $\{B_t^H, t \geq 0\}$ se naziva* ***frakcionalno Brownovo gibanje*** *ako je $E[B_t^H] = 0$, za svaki $t \geq 0$ i*

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big)E[(B_1^H)^2]. \tag{9}$$

Ako je $E[(B_1^H)^2] = 1$, tada se $\{B_t^H, t \geq 0\}$ naziva standardno frakcionalno Brownovo gibanje.

Uočimo, (9) je zapravo funkcija autokovarijanci frakcionalnog Brownovog gibanja budući je $E[B_t^H] = 0$, za svaki t. Također, iz definicije slijedi:

$$Var(B_t^H) = E[(B_t^H)^2] = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}\Big)E[(B_1^H)^2] = t^{2H}E[(B_1^H)^2]. \tag{10}$$

U slučaju standardnog frakcionalnog Brownovog gibanja je $Var(B_t^H) = t^{2H}$.

Napomena 2.3 *Distribucija slučajnog procesa je određena svim zajedničkim distribucijama tog procesa, a Gaussova višedimenzionalna distribucija je određena s očekivanjem i matricom autokovarijanci. Dakle, distribucija Gaussovskog procesa determinirana je očekivanjem i strukturom funkcije autokovarijanci. Prema tome, uvjeti iz prethodne definicije određuju jedinstveni Gaussovski proces.*

Teorem 2.6 *Za $H = \frac{1}{2}$, frakcionalno Brownovo gibanje $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je Brownovo gibanje do na multiplikativnu konstantu.*

Dokaz. Neka je $\{B_t^{\frac{1}{2}}, t \geq 0\}$ frakcionalno Brownovo gibanje. Tada je prema (9)

$$
\begin{aligned}
Cov(B_t^{\frac{1}{2}} B_s^{\frac{1}{2}}) = E[B_t^{\frac{1}{2}} B_s^{\frac{1}{2}}] &= \frac{1}{2}\Big(t^{2\frac{1}{2}} + s^{2\frac{1}{2}} - |t-s|^{2\frac{1}{2}}\Big) E[(B_1^{\frac{1}{2}})^2] \\
&= \frac{1}{2}(t + s - |t-s|)\sigma_1^2 = \min\{t, s\}\sigma_1^2,
\end{aligned}
$$

gdje je $\sigma_1^2 = Var(B_1^{\frac{1}{2}})$. Gornji izraz za funkciju autokovarijanci i izraz iz Teorema 2.1 za funkciju autokovarijanci Brownovog gibanja su jednaki do na multiplikativnu konstantu. Dakle, Gaussovski proces $\{B_t^{\frac{1}{2}}, t \geq 0\}$ s očekivanjem 0 je određen strukturom funkcije autokovarijanci Brownovog gibanja pa prethodnoj napomeni slijedi tvrdnja teorema. □

U sljedećem teoremu navodimo važne tvrdnje o frakcionalnom Brownovom gibanju.

Teorem 2.7 *Za frakcionalno Brownovo gibanje $\{B_t^H, t \geq 0\}$ vrijedi:*

(i) $\{B_t^H, t \geq 0\}$ *je sebi-sličan proces sa parametrom* H.

(ii) $\{B_t^H, t \geq 0\}$ *ima stacionarne priraste.*

(iii) *Ako je* $H = 1$, *onda je* $B_t^1 = tB_1^1$ *gotovo sigurno.*

(iv) *Frakcionalno Brownovo gibanje je jedinstveno u smislu da se klasa svih frakcionalnih Brownovih gibanja podudara s klasom svih Gaussovskih sebi-sličnih procesa sa stacionarnim prirastima.*

(v) $\{B_t^H, t \geq 0\}$ *ima nezavisne priraste ako i samo ako je* $H = \frac{1}{2}$.

Dokaz.

(i) Trebamo pokazati da je $\{B_{at}^H\} \stackrel{d}{=} \{a^H B_t^H\}$, za proizvoljan $a > 0$. Prema definiciji frakcionalnog Brownovog gibanja, oba procesa su Gaussovska i s očekivanjem 0. Stoga je još potrebno provjeriti jesu li im jednake i funkcije autokovarijanci. Prema (9) imamo:

$$
\begin{aligned}
Cov(B_{at}^H, B_{as}^H) = E[B_{at}^H B_{as}^H] &= \frac{1}{2}\Big((at)^{2H} + (as)^{2H} - (a|t-s|)^{2H}\Big) E[(B_1^H)^2] \\
&= a^{2H}\frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big) E[(B_1^H)^2] \\
&= a^{2H} E[B_t^H B_s^H] = E[(a^H B_t^H)(a^H B_s^H)] \\
&= Cov(a^H B_t^H, a^H B_s^H).
\end{aligned}
$$

Dakle, autokovarijance su jednake pa možemo zaključiti da je $\{B_t^H, t \geq 0\}$ sebi-sličan sa parametrom H.

(ii) Da bismo dokazali da frakcionalno Brownovo gibanje ima stacionarne priraste, trebamo pokazati da je $\{B_{t+h}^H - B_h^H\} \stackrel{d}{=} \{B_t^H\}$. Analogno kao u (i) dovoljno je razmatrati samo funkcije autokovarijanci. Prema (9) imamo:

$$
\begin{aligned}
&Cov(B_{t+h}^H - B_h^H, B_{s+h}^H - B_h^H) = E[(B_{t+h}^H - B_h^H)(B_{s+h}^H - B_h^H)] \\
&= E[B_{t+h}^H B_{s+h}^H] - E[B_{t+h}^H B_h^H] - E[B_{s+h}^H B_h^H] + E[(B_h^H)^2] \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\Big((t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - |t-s|^{2H}\Big) - \Big((t+h)^{2H} + h^{2H} - t^{2H}\Big) \\
&- \Big((s+h)^{2H} + h^{2H} - s^{2H}\Big) + \Big(h^{2H} + h^{2H}\Big)\Big\} E[(B_1^H)^2] \\
&= \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big) E[(B_1^H)^2] = E[B_t^H B_s^H] = Cov(B_t^H, B_s^H).
\end{aligned}
$$

Slijedi, $\{B_{t+h}^H - B_h^H\} \stackrel{d}{=} \{B_t^H\}$, odnosno frakcionalno Brownovo gibanje ima stacionarne priraste.

(iii) Pretpostavimo da je $H = 1$. Tada prema (9) vrijedi:

$$E[B_t^1 B_s^1] = \frac{1}{2}\Big(t^2 + s^2 - (t-s)^2\Big) E[(B_1^1)^2] = tsE[(B_1^1)^2].$$

Specijalno, za $t = s$:

$$E[(B_t^1)^2] = t^2 E[(B_1^1)^2].$$

Nadalje, imamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
E[(B_t^1 - tB_1^1)^2] &= E[(B_t^1)^2] - 2tE[B_t^1 B_1^1] + t^2 E[(B_1^1)^2] \\
&= (t^2 - 2t^2 + t^2) E[(B_1^1)^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, $B_t^1 = tB_1^1$ gotovo sigurno za svaki t.

(iv) Uočimo, čim je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H i ima stacionarane priraste, prema Teoremu 2.5, taj proces ima istu strukturu funkcije autokovarijanci kao u (9). Kako je $\{X_t, t \geq 0\}$ Gaussovski s očekivanjem 0, slijedi da je jednak $\{B_t^H, t \geq 0\}$ po distribuciji.

(v) Prvo pretpostavimo da je $H = \frac{1}{2}$. Tada, prema Teoremu 2.6, vrijedi da je $\{B_t^H, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje, a ono ima nezavisne priraste. Sada pretpostavimo da $\{B_t^H, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste. Tada za $0 < s < t$ mora vrijediti

$$E[B_s^H(B_t^H - B_s^H)] = E[B_s^H] E[B_t^H - B_s^H].$$

Budući je $E[B_t^H]=0$, prema definiciji frakcionalnog Brownovog gibanja, gornji izraz je jednak 0. Nadalje, prema (9) imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} E[B_s^H(B_t^H-B_s^H)] &= E[B_t^H B_s^H]-E[B_s^H B_s^H] \\ &= \frac{1}{2}\Big(t^{2H}+s^{2H}-(t-s)^{2H}-2s^{2H}\Big)E[(B_1^H)^2] \\ &= \frac{1}{2}\Big(t^{2H}-s^{2H}-(t-s)^{2H}\Big)E[(B_1^H)^2]. \end{aligned}$$

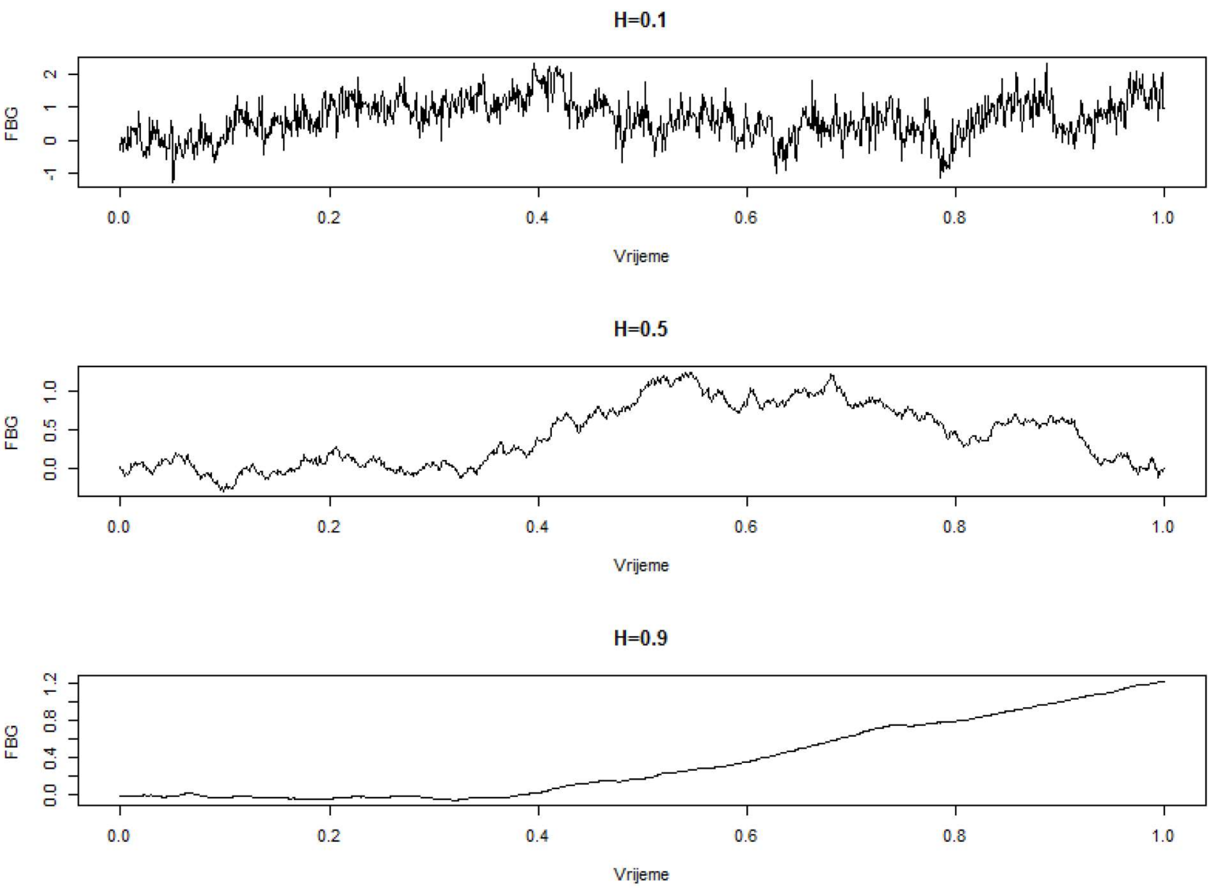
Dakle, mora vrijediti

$$\frac{1}{2}\Big(t^{2H}-s^{2H}-(t-s)^{2H}\Big)E[(B_1^H)^2]=0,$$

a to je moguće samo za $H=\frac{1}{2}$, budući da su $s,t\neq 0$. Stoga zaključujemo, ako frakcionalno Brownovo gibanje $\{B_t^H, t\geq 0\}$ ima nezavisne priraste, tada je $H=\frac{1}{2}$.

□

Na sljedećoj slici prikazane su simulirane trajektorije frakcionalnog Brownovog gibanja (FBG), za različite vrijednosti parametra sebi-sličnosti H. Uočimo, fluktuacije frakcionalnog Brownovog gibanja su veće kada je parametar sebi-sličnosti H manji.



Slika 2: Simulirane trajektorije frakcionalnog Brownovog gibanja za $H=0.1$, $H=0.5$ i $H=0.9$.

2.3.2 Integralna reprezentacija

Definiranjem procesa preko njegovih konačnodimenzionalnih distribucija često ne možemo dobiti jasnu sliku o samoj strukturi procesa, zato je integralna reprezentacija procesa ponekad puno korisnija. Za integralnu reprezentaciju frakcionalnog Brownovog gibanja bit će nam potrebni stabilni intergali koji se definiraju u odnosu na stabilnu slučajnu mjeru. Da bi M bila slučajna mjera mora vrijediti da je $(M(A_1), M(A_2), \ldots, M(A_d))$ slučajni vektor i da je M aditivna, tj. da za disjunktne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_d$ vrijedi $M(\cup_i A_i) = \sum_i M(A_i)$ gotovo sigurno. Sada ćemo definirati α-stabilnu slučajnu mjeru.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te $L^0(\Omega)$ skup svih slučajnih varijabli definiranih na tom vjerojatnosnom prostoru. Nadalje, neka je $(E, \mathcal{E}, m)$ prostor mjere, $\beta\colon E \to [-1, 1]$ izmjeriva funkcija i $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E}\colon m(A) < \infty\}$.

Definicija 2.10 *Za $M\colon \mathcal{E}_0 \to L^0(\Omega)$ kažemo da je **α-stabilna slučajna mjera** na $(E, \mathcal{E})$ s kontrolnom mjerom m i intenzitetom asimetrije β ako vrijedi:*

(i) Za međusobno disjunktne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{E}_0$, $M(A_1), M(A_2), \ldots, M(A_k)$ su nezavisne slučajne varijable,

(ii) Za međusobno disjunktne skupove $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}_0$ takve da je $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$, vrijedi

$$M\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} M(A_j) \text{ g.s.},$$

(iii) Za svaki $A \in \mathcal{E}_0$,

$$M(A) \sim S_\alpha\left((m(A))^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(x)dm(x)}{m(A)}, 0\right).$$

Iz *(iii)* vidimo da za svaki $A \in \mathcal{E}_0$, $M(A)$ ima stabilnu distribuciju pri čemu se zahtjeva da je parametar pomaka μ jednak 0. Dakle, možemo reći da je stabilna slučajna mjera M određena mjerom m i funkcijom β.

Definicija 2.11 *Slučajna mjera M se naziva **SαS slučajna mjera** ako je intenzitet asimetrije β nula.*

Dokaz da stabilna slučajna mjera postoji može se pronaći u [7, Poglavlje 3.3]. Sada ćemo ukratko uvesti stabilne integrale, koji se definiraju u odnosu na stabilnu slučajnu mjeru i koji će nam biti potrebni za integralnu reprezentaciju frakcionalnog Brownovog gibanja, a detaljna konstrukcija te svojstva stabilnih integrala su objašnjeni u [7, Poglavlje 3.2 i 3.4]. Ukratko, konstruiraju se integrali jednostavnih funkcija u odnosu na α-stabilnu slučajnu mjeru te se pokaže da se α-stabilni integral može dobiti kao limes (po distribuciji) integrala jednostavnih funkcija.

Neka je M α-stabilna slučajna mjera na $(E, \mathcal{E})$ s kontrolnom mjerom m i intenzitetom asimetrije β. Sa $I(f)$ označavat ćemo α-stabilni integral determinističke funkcije $f\colon E \to \mathbb{R}$ u odnosu na α-stabilnu slučajnu mjeru M . Dakle, *α-stabilni integral* je integral oblika

$$I(f) = \int_E f(x)dM(x).$$

Može se pokazati da $I(f)$ ima α-stabilnu distribuciju ([7, Propozicija 3.4.1]). Štoviše, može se pokazati i da $(I(f_1), \ldots, I(f_d))$ ima višedimenzionalnu α-stabilnu distribuciju ([7, Propozicija 3.4.2]).

Sada želimo dobiti integralnu reprezentaciju frakcionalnog Brownovog gibanja oblika $\int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)dM(x)$. Neka je $(E, \mathcal{E}, m)$ prostor mjere i M $S\alpha S$ slučajna mjera s kontrolnom mjerom m te $0 < \alpha \leq 2$. Za svaki $0 < \alpha \leq 2$ se mogu definirati stabilni integrali u odnosu na $S\alpha S$ slučajnu mjeru, a označavat ćemo ih s $I(f_t) = \int_E f_t(x)dM(x)$. Kada je $\alpha = 2$, $I(f_t)$ je dobro definiran ako je $\int_E |f_t(x)|^2 dm(x) < \infty$ te vrijedi:

$$E[I(f_{t_1})I(f_{t_2})] = Cov(I(f_{t_1})I(f_{t_2})) = 2\int_E f_{t_1}(x)f_{t_2}(x)dm(x).$$

Posebno, $E[M^2(A)] = 2m(A)$, za svaki $A \in \mathcal{E}$ s konačnom mjerom m. Za dokaz ovih tvrdnji pogledati [7].

Uzmimo da je $\alpha = 2$ te da je $(E, \mathcal{E}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, |\cdot|/2)$, gdje je $\mathcal{B}$ Borelova σ-algebra, a $|\cdot|$ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$. Tada je $E[M^2(A)] = |A|$, za svaki $A \in \mathcal{B}$ s konačnom Lebesgueovom mjerom, te

$$E[I(f_{t_1})I(f_{t_2})] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{t_1}(x)f_{t_2}(x)dx.$$

U ovom slučaju, $S2S$ slučajna mjera, koju ćemo označavati s B, naziva se *Gaussovska slučajna mjera* s Lebesgueovom kontrolnom mjerom.

Sljedeći teorem nam daje integralnu reprezentaciju frakcionalnog Brownovog gibanja u kojem ćemo koristiti sljedeću funkciju:

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

te ćemo smatrati da je $0^0 = 0$.

Teorem 2.8 *Neka je $0 < H < 1$. Standardno frakcionalno Brownovo gibanje $\{B_t^H, t \geq 0\}$ ima integralnu reprezentaciju:*

$$\frac{1}{C_1(H)} \int_{-\infty}^{\infty} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right) dB(x), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

gdje je

$$C_1(H) = \left(\int_{-\infty}^{0} \left((1-x)^{H-1/2} - (-x)^{H-1/2} \right)^2 dx + \frac{1}{2H} \right)^{1/2}.$$

Kada je $H = \frac{1}{2}$, $C_1(\frac{1}{2}) = 1$, reprezentacija (11) se interpretira kao $\displaystyle\int_0^t dB(x)$, tj. kao integralna reprezentacija Brownovog gibanja.

Dokaz. Označimo integral (11) sa X_t. Prema [7, Propozicija 7.2.6], X_t je dobro definiran te ima Gaussovu distribuciju s očekivanjem 0. Da bismo pokazali da se standardno frakcionalno Brownovo gibanje može reprezentirati procesom $\{X_t, t \geq 0\}$, potrebno je još pokazati da je funkcija autokovarijanci procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ jednaka funkciji autokovarijanci frakcionalnog Brownovog gibanja (9), pri čemu je $E[(B_1^H)^2] = 1$. Uočimo da je $X_0 = 0$ gotovo sigurno. Sada promotrimo sljedeće:

$$E[(X_t - X_s)^2] = E[X_t^2] - 2E[X_t X_s] + E[X_s^2],$$

odakle je

$$E[X_t X_s] = \frac{1}{2}\Big(E[X_t^2] + E[X_s^2] - E[(X_t - X_s)^2]\Big).$$

Koristit ćemo tvrdnju iz [2, Teorem 3.5.1] koja kaže da ako $\int_A |f(x)|^2 dx < \infty$, tada

$$E\left[\Big(\int_A f(x)dB(x)\Big)^2\right] = \int_A f(x)^2 dx.$$

Dakle, prema prethodnoj tvrdnji imamo:

$$E[X_t^2] = \frac{1}{C_1(H)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2}\right]^2 dx.$$

Uočimo, za $t \geq 0$ i $x < 0$, imamo da je $t - x > 0$ pa je $(t-x)_+ = t - x$. S druge strane, za $t \geq 0$ i $x \geq 0$, $t - x \geq 0 \iff x \leq t$ pa je $(t-x)_+ = t - x$, za $x \leq t$. Prema tome gornji izraz je jednak:

$$E[X_t^2] = \frac{1}{C_1(H)^2}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\Big((t-x)^{H-1/2} - (-x)^{H-1/2}\Big)^2 dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^t (t-x)^{2H-1}dx}_{I_2}\Bigg]$$

Da bismo riješili integral I_2 uzmemo supstituciju $z = t - x$. Tada imamo

$$I_2 = -\int_t^0 z^{2H-1}dz = -\frac{1}{2H}z^{2H}\Big|_t^0 = \frac{1}{2H}t^{2H}.$$

U integralu I_1 uzmemo supstituciju $x = st$. Tada je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{0}\Big((t-st)^{H-1/2} - (-st)^{H-1/2}\Big)^2 t ds \\
&= \int_{-\infty}^{0}\Bigg(t^{H-1/2}\Big((1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\Big)\Bigg)^2 t ds \\
&= t^{2H}\int_{-\infty}^{0}\Big((1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\Big)^2 ds.
\end{aligned}$$

Sada je

$$E[X_t^2] = \frac{1}{C_1(H)^2}\Big[\int_{-\infty}^{0}\Big((1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\Big)^2 ds + \frac{1}{2H}\Big]t^{2H}.$$

Ako u gornji izraz uvrstimo

$$C_1(H)^2 = \int_{-\infty}^{0}\Big((1-x)^{H-1/2} - (-x)^{H-1/2}\Big)^2 dx + \frac{1}{2H},$$

konačno dobijemo

$$E[X_t^2] = t^{2H}.$$

Slično, za $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&E[(X_t - X_s)^2] = \\
&= \frac{1}{C_1(H)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(t-x)_+^{H-1/2} - (s-x)_+^{H-1/2} \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{C_1(H)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(t-s-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right]^2 dx \\
&= |t-s|^{2H}.
\end{aligned}$$

Nadalje,

$$E[X_t X_s] = \frac{1}{2}\Big(E[X_t^2] + E[X_s^2] - E[(X_t - X_s)^2] \Big) = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \Big).$$

Dakle, pokazali smo da je funkcija autokovarijanci procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ jednaka (9), pri čemu je $E[(B_1^H)^2] = 1$, pa možemo zaključiti da je za $0 < H < 1$, $\{X_t, t \geq 0\}$ standardno frakcionalno Brownovo gibanje. □

Integralna reprezentacija dana u prethodnom teoremu nije jedinstvena. Neka je

$$x_{\text{-}} = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Za sve realne brojeve a i b, integralna reprezentacija:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big[a\big((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \big) + b\big((t-x)_{\text{-}}^{H-1/2} - (-x)_{\text{-}}^{H-1/2} \big) \Big] dB(x), \quad t \geq 0, \tag{12}$$

je također integralna reprezentacija frakcionalnog Brownovog gibanja do na multiplikativnu konstantu (za dokaz vidi [7]). Uočimo, ako u (12) uzmemo da je $a = \frac{1}{C_1(H)}$ i $b = 0$, dobit ćemo integralnu reprezentaciju standardnog frakcionalnog Brownovog gibanja (11).

2.3.3 Frakcionalni Gaussovski šum

Ranije smo pokazali da frakcionalno Brownovo gibanje ima stacionarne priraste. U ovom poglavlju pokazat ćemo da je niz prirasta frakcionalnog Brownovog gibanja stacionaran proces. Prije toga, prisjetimo se definicije stacionarnog procesa.

Definicija 2.12 *Slučajni proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je* ***(slabo) stacionaran ili stacionaran u širem smislu*** *ako vrijedi:*

(i) $E[X_t^2] < \infty$, *za svaki* $t \in \mathbb{Z}$,

(ii) $E[X_t] = c$, *za svaki* $t \in \mathbb{Z}$,

(iii) $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$, *za svaki* $t, s \in \mathbb{Z}$.

Označimo s $\gamma(t,s)$ funkciju autokovarijanci procesa $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Uočimo, ako u *(iii)* stavimo $h = -t$, tada je $\gamma(t,s) = \gamma(0, s-t)$, za svaki $t, s \in \mathbb{Z}$. Dakle, funkcija autokovarijanci stacionarnog procesa ovisi samo o $t-s$ pa ju možemo promatrati kao funkciju jedne varijable, tj. možemo pisati $\gamma(h) = \gamma(0,h) = Cov(X_t, X_{t+h})$.

Neka je sada $\{B_t^H, t \geq 0\}$ frakcionalno Brownovo gibanje. Označimo priraste frakcionalnog Brownovog gibanja s $Y_j = B_j^H - B_{j-1}^H, j = 1, 2, \dots$ i promotrimo niz $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$. Pokazat ćemo da je $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ stacionaran proces. Kako je $E[B_t^H] = 0$ za svaki $t \geq 0$, imamo:

$$E[Y_j] = E[B_j^H - B_{j-1}^H] = E[B_j^H] - E[B_{j-1}^H] = 0, \quad j \in \mathbb{N},$$

pa je uvjet *(ii)* iz prethodne definicije zadovoljen. Nadalje, koristeći (9) i (10) imamo:

$$\begin{aligned} Var(Y_j) &= E[Y_j^2] = E[(B_j^H - B_{j-1}^H)^2] = E[(B_j^H)^2] - 2E[B_j^H B_{j-1}^H] + E[(B_{j-1}^H)^2] \\ &= \Big(j^{2H} - (j^{2H} + (j-1)^{2H} - |j-j+1|^{2H}) + (j-1)^{2H}\Big) E[(B_1^H)^2] \\ &= E[(B_1^H)^2] < \infty. \end{aligned}$$

Dakle, zadovoljen je i uvjet *(i)* iz prethodne definicije. Preostaje provjeriti vrijedi li $\gamma(i,j) = \gamma(i+h, j+h)$, za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Imamo sljedeće:

$$\gamma(i,j) = Cov(Y_i, Y_j) = E[Y_i Y_j] = E[(B_i^H - B_{i-1}^H)(B_j^H - B_{j-1}^H)].$$

S druge strane, zbog stacionarnosti prirasta frakcionalnog Brownovog gibanja imamo:

$$\gamma(i+h, j+h) = E[Y_{i+h} Y_{j+h}] = E[(B_{i+h}^H - B_{i+h-1}^H)(B_{j+h}^H - B_{j+h-1}^H)] = E[(B_i^H - B_{i-1}^H)(B_j^H - B_{j-1}^H)].$$

Dakle, pokazali smo da su zadovoljeni svi uvjeti iz Definicije 2.12, odnosno da je $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ stacionaran niz.

Definicija 2.13 *Neka je $\{B_t^H, t \geq 0\}$ frakcionalno Brownovo gibanje. Niz $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$, gdje je $Y_j = B_j^H - B_{j-1}^H, j \in \mathbb{N}$, naziva se* ***frakcionalni Gaussovski šum****. Ako je $Var(Y_j) = 1$, onda se $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ naziva standardni frakcionalni Gaussovski šum.*

Propozicija 2.4 *Funkcija autokovarijanci frakcionalnog Gaussovskog šuma $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ jednaka je:*

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2}{2}\Big((h+1)^{2H} - 2h^{2H} + (h-1)^{2H}\Big),$$

gdje je $\sigma^2 = Var(Y_j)$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\sigma^2 = 1$. Znamo da je $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ stacionaran proces, pa je funkcija autokovarijanci za $h > 0$ jednaka:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(Y_j, Y_{j+h}) = Cov(Y_1, Y_{1+h}) = Cov(Y_{1+h}, Y_1) = E[Y_{1+h} Y_1] \\ &= E[(B_{1+h}^H - B_h^H)(B_1^H - B_0^H)] = E[B_{1+h}^H B_1^H] - E[B_h^H B_1^H] \\ &= \frac{1}{2}\Big((h+1)^{2H} - h^{2H}\Big) - \frac{1}{2}\Big(h^{2H} - (h-1)^{2H}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((h+1)^{2H} - 2h^{2H} + (h-1)^{2H}\Big). \end{aligned}$$

U gornjem raspisu iskoristili smo da je $B_0^H = 0$ gotovo sigurno, što vrijedi prema Propoziciji 1.1 jer je $\{B_t^H, t \geq 0\}$ sebi-sličan proces, te izraz za funkciju autokovarijanci frakcionalnog Brownovog gibanja (9). Za $h < 0$, ponovno jer je $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ stacionaran proces, vrijedi:

$$\gamma(h) = Cov(Y_j, Y_{j+h}) = Cov(Y_{j+h}, Y_j) = Cov(Y_j, Y_{j-h}) = \gamma(-h).$$

$\square$

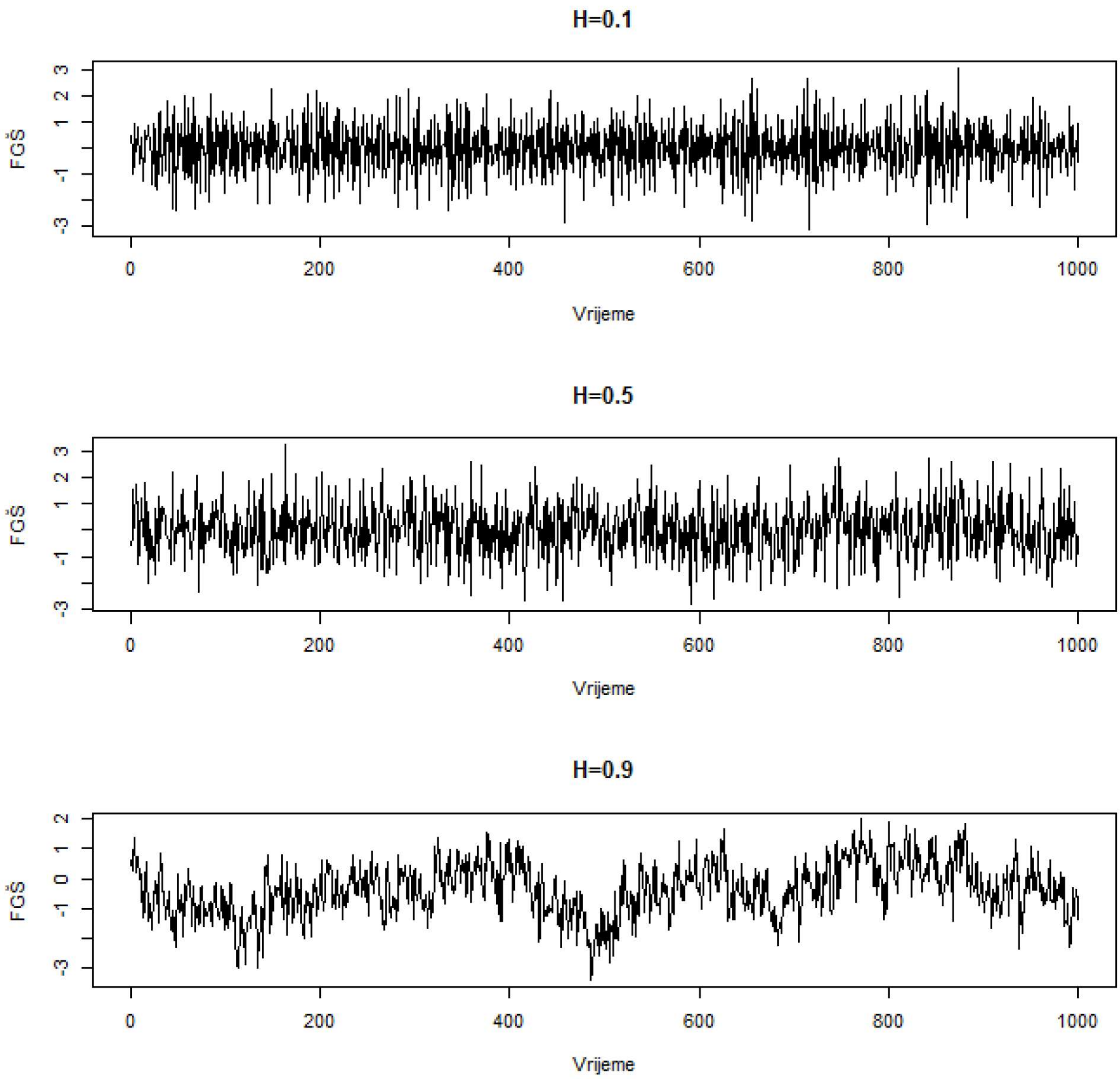
Uočimo, ako je $H = \frac{1}{2}$, za funkciju autokovarijanci frakcionalnog Gaussovskog šuma vrijedi $\gamma(h) = 0,\ h \neq 0$. Ranije smo pokazali da je $\{B_t^{\frac{1}{2}}, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Nadalje, prema svojstvu *(ii)* Definicije 2.1 vrijedi $Y_j = B_j^{\frac{1}{2}} - B_{j-1}^{\frac{1}{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, za svaki $j = 1, 2, \ldots$. Stoga, za $H = \frac{1}{2}$, proces $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ je niz nezavisnih jednako distribuiranih Gaussovih slučajnih varijabli. Sljedeća propozicija govori o asimptotskom ponašanju funkcije autokovarijanci frakcionalnog Gaussovskog šuma (za dokaz vidi [7, Propozicija 7.2.10]).

Propozicija 2.5 *Neka je $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ frakcionalni Gaussovski šum. Za $H \neq \frac{1}{2}$ vrijedi:*

$$\gamma(h) \sim \sigma^2 H(2H-1)h^{2H-2}, \qquad \textit{kada } h \to \infty.$$

Primjetimo da funkcija autokovarijanci $\gamma(h)$ opada u nulu kada $h \to \infty$, za sve $0 < H < 1$. No, kada je $1/2 < H < 1$, $\gamma(h)$ opada u nulu toliko sporo da $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(h)$ divergira. U tom slučaju kažemo da je $\{Y_j, j \in \mathbb{N}\}$ proces s dugoročnim pamćenjem ili dugoročnom zavisnošću. Dakle, možemo reći da je stacionaran proces s dugoročnim pamćenjem, proces kojemu zavisnost među trenutcima opada jako sporo kako se ti trenutci udaljavaju.

Simulirane trajektorije frakcionalnog Gaussovskog šuma (FGŠ) za $H = 0.1$, $H = 0.5$ i $H = 0.9$, prikazane su na sljedećoj slici. Možemo vidjeti da što je manji parametar sebi-sličnosti H, to su veće fluktuacije frakcionalnog Gaussovskog šuma. S druge strane, što je parametar sebi-sličnosti H veći, dugoročna zavisnost je jača.



Slika 3: Simulirane trajektorije frakcionalnog Gaussovskog šuma za $H = 0.1$, $H = 0.5$ i $H = 0.9$.

3 Sebi-slični procesi sa stacionarim prirastima

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da su α-stabilni Lévyjevi procesi, uključujući i Brownovo gibanje koje je 2-stabilan Lévyjev proces, primjeri sebi-sličnih procesa sa stacionarnim i nezavisnim prirastima. Štoviše, oni su jedini sebi-slični procesi koji imaju i stacionarne i nezavisne priraste. Često se proučavaju sebi-slični procesi koji imaju samo ili stacionarne ili nezavisne priraste. U ovom poglavlju ćemo proučavati sebi-slične procese koji imaju stacionarne priraste. Prije smo vidjeli da je frakcionalno Brownovo gibanje, koje je Gaussovski proces, sebi-sličan proces sa stacionarnim prirastima. U ovom poglavlju ćemo pokazati karakteristike sebi-sličnih procesa koji imaju stacionarne priraste, a koji nisu nužno Gaussovski.

3.1 Osnovna svojstva

U sljedećem teoremu navedena su neka svojstva sebi-sličnih procesa sa stacionarnim prirastima te na koji način egzistencija momenata utječe na vrijednost parametra sebi-sličnosti.

Teorem 3.1 *Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan proces s parametrom $H > 0$ i sa stacionarnim prirastima, te neka je X_t nedegenerirana za svaki $t > 0$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je $E[|X_1|^\gamma] < \infty$ za neki $0 < \gamma < 1$, onda je $0 < H < 1/\gamma$.

(ii) Ako je $E[|X_1|^\gamma] < \infty$ za neki $\gamma \geq 1$, onda je $0 < H \leq 1$.

(iii) Ako je $E[|X_1|] < \infty$ i $0 < H < 1$, onda je $E[X_t] = 0$ za sve $t \geq 0$.

(iv) Ako je $E[|X_1|] < \infty$ i $H = 1$, onda je $X_t = tX_1$ gotovo sigurno.

Dokaz. *(i)* Uočimo, ako je $a_j \geq 0$ za svaki $1 \leq j \leq N$, $a_m > 0$, $a_n > 0$ za neke $1 \leq m \neq n \leq N$, te $0 < \gamma < 1$, onda vrijedi:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} a_j\right)^\gamma < \sum_{j=1}^{N} a_j^\gamma. \tag{13}$$

Označimo s $\varepsilon = P\{X_1 \neq 0\}$. Zbog pretpostavke o nedegeneriranosti zaključujemo da je $\varepsilon > 0$. Nadalje, neka je N cijeli broj takav da je $N > 1/\varepsilon$. Zbog stacionarnosti prirasta i jer je $X_0 = 0$ gotovo sigurno (prema 1.1) imamo $X_j - X_{j-1} \stackrel{d}{=} X_1 - X_0 = X_1$. Dakle,

$$P\{X_j - X_{j-1} \neq 0\} = P\{X_1 \neq 0\} = \varepsilon > 0, \quad 1 \leq j \leq N,$$

pa postoje m i n, $1 \leq m < n \leq N$, takvi da događaj

$$A := \{\omega \in \Omega : X_m(\omega) - X_{m-1}(\omega) \neq 0 \text{ i } X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega) \neq 0\}$$

ima strogo pozitivnu vjerojatnost. Za svaki $\omega \in A$ imamo:

$$
\begin{aligned}
|X_N(\omega)|^\gamma &= \Big|\sum_{j=1}^{N} X_j(\omega) - X_{j-1}(\omega)\Big|^\gamma \\
&\le \Big(\sum_{j=1}^{N} |X_j(\omega) - X_{j-1}(\omega)|\Big)^\gamma \\
&< \sum_{j=1}^{N} |X_j(\omega) - X_{j-1}(\omega)|^\gamma,
\end{aligned} \tag{14}
$$

pri čemu prva nejednakost vrijedi zbog nejednakosti trokuta, a druga prema (13). Kako relacija (14), uz nejednakost $\le$, vrijedi i za $\omega \in A^c$ te $P(A) > 0$, slijedi:

$$
E[|X_N|^\gamma] < \sum_{j=1}^{N} E[|X_j - X_{j-1}|^\gamma].
$$

Zbog sebi-sličnosti imamo $E[|X_N|^\gamma] = E[|N^H X_1|^\gamma] = N^{H\gamma} E[|X_1|^\gamma]$. S druge strane, zbog stacionarnosti prirasta imamo $E[|X_j - X_{j-1}|^\gamma] = E[|X_1|^\gamma]$, za svaki $j = 1, \dots, N$. Dakle,

$$
N^{H\gamma} E[|X_1|^\gamma] < N E[|X_1|^\gamma],
$$

pa prema tome mora biti $N^{H\gamma} < N$, tj. mora vrijediti $H < 1/\gamma$.
(ii) Prema pretpostavci vrijedi $E[|X_1|^\gamma] < \infty$, ako je $\gamma \ge 1$. No, tada je i $E[|X_1|^p] < \infty$, za svaki $p < 1$. Stoga, prema *(i)* vrijedi $H < 1/p$, za svaki $p < 1$, što implicira $H \le 1$.
(iii) Uočimo, zbog sebi-sličnosti vrijedi $X_{2t} = 2^H X_t$, a zbog stacionarnosti prirasta možemo pisati $X_t = X_{2t} - X_t$. Dakle, imamo sljedeće:

$$
E[X_t] = E[X_{2t} - X_t] = E[2^H X_t - X_t] = (2^H - 1)E[X_t],
$$

tj.

$$
(2^H - 2)E[X_t] = 0.
$$

Kako je, prema pretpostavci $H \ne 1$, slijedi $E[X_t] = 0$.
(iv) Generalni dokaz pod pretpostavkom $E[|X_1|] < \infty$ je izostavljen, a može se pronaći u [10]. Jednostavniji slučaj je ako se zahtjev $E[|X_1|] < \infty$ zamijeni s $E[X_1^2] < \infty$, što ćemo ovdje pretpostaviti. Neka je $H = 1$, tada prema Teoremu 2.5 vrijedi

$$
E[X_t X_s] = \frac{1}{2}\big(t^2 + s^2 - (t - s^2)\big)E[X_1^2] = tsE[X_1^2].
$$

Promotrimo sada $E[(X_t - tX_1])^2]$ te iskoristimo gornju tvrdnju. Imamo:

$$
\begin{aligned}
E[(X_t - tX_1])^2] &= E[X_t^2] - 2tE[X_t X_1] + t^2 E[X_1^2] \\
&= t^2 E[X_1^2] - 2t^2 E[X_1^2] + t^2 E[X_1^2] \\
&= (t^2 - 2t^2 + t^2)E[X_1^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, $X_t = tX_1$ gotovo sigurno. □

Primjer 3.1 *Neka je $\{Z_t^\alpha, t \geq 0\}$ α-stabilan Lévyjev proces i $\alpha < 1$. Prema Teoremu 2.4, znamo da je $\{Z_t^\alpha, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom $H = 1/\alpha$. Nadalje, znamo da Z_t^α ima α-stabilnu distribiciju za svaki $t \geq 0$, pa su prema Propoziciji 2.3, svi momenti reda $\gamma < \alpha$ konačni. Dakle, zadovoljeni su uvjeti prethodnog teorema pa prema tvrdnji (i), jer je $E[|Z_1^\alpha|^\gamma] < \infty$ za $0 < \gamma < \alpha < 1$, slijedi da parametar sebi-sličnosti H mora zadovoljavati $0 < H < 1/\gamma$, tj. mora biti $1/\alpha < 1/\gamma$.*

Znamo da za α-stabilan Lévyjev proces $\{Z_t^\alpha, t \geq 0\}$, $0 < \alpha < 2$, vrijedi $E[|Z_1^\alpha|^\alpha] = \infty$. Dakle, ako imamo proces $\{X_t, t \geq 0\}$ koji je sebi-sličan i sa stacionarnim prirastima te ako je $\{X_t\} \overset{d}{=} \{Z_t^\alpha\}$, onda je $E[|X_1|^{1/H}] = \infty$. U sljedećem teoremu ćemo vidjeti da isto vrijedi i za bilo koji drugi sebi-sličan proces sa stacionarnim prirastima i parametrom sebi-sličnosti $H > 1$.

Teorem 3.2 *Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom $H > 1$ i sa stacionarnim prirastima. Tada je $E[|X_1|^{1/H}] = \infty$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $E[|X_1|^{1/H}] < \infty$. Kako je $\gamma := 1/H < 1$, prema tvrdnji *(i)* Teorema 3.1, imamo $H < 1/\gamma = H$. To je očito kontradikcija, stoga mora biti $E[|X_1|^{1/H}] = \infty$. □

Neka je slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ netrivijalan sebi-sličan s parametrom $0 < H < 1$ i sa stacionarnim prirastima te neka je $E[X_1^2] < \infty$. Definiramo priraste procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ na sljedeći način:

$$\xi_n = X_{n+1} - X_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

te funkciju autokovarijanci prirasta s:

$$\gamma(n) = E[\xi_0 \xi_n], \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ako iskoristimo da je $X_0 = 0$ gotovo sigurno, prema Propoziciji 1.1, te izraz za funkciju autokovarijanci sebi-sličnog procesa sa stacionarnim prirastima iz Teorema 2.5, imamo da je funkcija autokovarijanci prirasta jednaka:

$$\begin{aligned}
\gamma(n) = E[\xi_0 \xi_n] &= E[(X_1 - X_0)(X_{n+1} - X_n)] = E[X_1 X_{n+1}] - E[X_1 X_n] \\
&= \frac{1}{2}\Big((n+1)^{2H} + 1 - n^{2H} - n^{2H} - 1 + (n-1)^{2H}\Big) E[X_1^2] \\
&= \frac{1}{2}\Big((n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\Big) E[X_1^2].
\end{aligned}$$

Gornji izraz za funkciju autokovarijanci nam je poznat iz Poglavlja 2.3.3, gdje smo proučavali priraste frakcionalnog Brownovog gibanja, koje je upravo i primjer sebi-sličnih procesa sa stacionarnim prirastima. Također, u Propoziciji 2.5 smo vidjeli asimptotsko ponašanje funkcije autokovarijanci frakcionalnog Gaussovskog šuma, a isti rezultat vrijedi i za funkciju autokovarijanci prirasta sebi-sličnih procesa sa stacionarnim prirastima. Dakle,

$$\gamma(n) \sim H(2H-1) n^{2H-2} E[X_1^2], \qquad \text{kada } n \to \infty, \text{ za } H \neq \frac{1}{2},$$

$$\gamma(n) = 0, \quad n \geq 1, \text{ za } H = \frac{1}{2}.$$

Funkcija autokovarijanci prirasta $\gamma(n)$ opada u nulu kada $n \to \infty$ za svaki $0 < H < 1$. Kada je $0 < H < 1/2$, onda je $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| < \infty$. No, kada je $1/2 < H < 1$, funkcija autokovarijanci nije apsolutno sumabilna, odnosno $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| = \infty$. To svojstvo da je $\sum |\gamma(n)| = \infty$, poznato je kao dugoročna zavisnost te je od velikog interesa u statistici. Detaljnije se može pronaći u [4].

3.2 Sebi-slični procesi s konačnom varijancom

U ovom poglavlju vidjet ćemo kada su slučajni procesi s konačnom varijancom, sebi-slični i sa stacionarnim prirastima. Ovi procesi se mogu reprezentirati preko višestrukih integrala u odnosu na kompleksnu slučajnu mjeru, tj. preko višestrukih Wiener-Itôvih integrala. Kompleksna slučajna mjera definira se u odnosu na spektralnu mjeru, stoga ćemo prvo nešto reći o spektralnoj analizi procesa. Pretpostavimo da je $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ stacionaran proces s funkcijom autokovarijanci γ i da je $\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. *Spektralna gustoća* procesa $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ je funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana s:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-ih\lambda} \gamma(h).$$

Uočimo, spektralna gustoća je dobro definirana. Kako je funkcija γ sumabilna te $|e^{-ih\lambda}| = |\cos(h\lambda) - i\sin(h\lambda)| = \sqrt{\cos^2(h\lambda) + \sin^2(h\lambda)} = 1$, slijedi $|f(\lambda)| = \sum_{-\infty}^{\infty} |e^{-ih\lambda}||\gamma(h)| < \infty$. Funkcije sin i cos su periodične s periodom 2π pa je i f periodična s periodom 2π, stoga je spektralnu gustoću dovoljno promatrati za $\lambda \in (-\pi, \pi]$. Iako spektralna gustoća ne mora uvijek postojati, svaki (slabo) stacionaran slučajni proces ima spektralnu reprezentaciju. Dakle, ako je $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ stacionaran proces, tada se on može zapisati na sljedeći način:

$$X_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{it\lambda} dZ(\lambda),$$

gdje je Z kompleksna slučajna mjera takva da je $dZ(-\lambda) = \overline{dZ(\lambda)}$. Za kompleksnu slučajnu mjeru Z vrijedi $\mathbb{E}[|dZ(\lambda)|^2] = dF(\lambda)$, a F se naziva *spektralna mjera* na $(-\pi, \pi]$.

Za spektralnu mjeru na $\mathbb{R}$, koju ćemo označiti s G, definirajmo kompleksnu slučajnu mjeru Z_G na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) $Z_G(A)$ je kompleksna Gaussova slučajna varijabla,

(ii) $E[Z_G(A)] = 0$,

(iii) $E[Z_G(A)\overline{Z_G(B)}] = G(A \cap B)$,

(iv) $Z_G(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} Z_G(A_j)$, za međusobno disjunktne $A_1, \ldots, A_n$,

(v) $Z_G(A) = \overline{Z_G(-A)}$.

Nadalje, s H_G^k ćemo označiti klasu svih kompleksnih funkcija f s k varijabli koje zadovoljavaju sljedeće:

(i) $f(-x_1, \dots, -x_k) = \overline{f(x_1, \dots, x_k)}$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^k} |f(x_1, \dots, x_k)|^2 dG(x_1) \cdots dG(x_k) < \infty$,

(iii) $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = f(x_1, \dots, x_k)$, kada je $\{i_1, \dots i_k\} = \{1, \dots k\}$.

Sada za svaku funkciju $f \in H_G^k$, možemo definirati višestruki Wiener-Itôv integral:

$$\int_{\mathbb{R}^k}'' f(x_1, \dots, x_k) dZ_G(x_1) \cdots dZ_G(x_k),$$

gdje je $\int_{\mathbb{R}^k}''$ integral na $\mathbb{R}^k$ izuzev hiperravnina $x_i = \pm x_j$, $i \neq j$.

Sljedeći teorem daje uvjet da procesi, koji imaju spomenutu integralnu reprezentaciju preko Wiener-Itôvih integrala, budu sebi-slični i sa stacionarnim prirastima. Dokaz teorema je tehnički kompliciran te je ovdje izostavljen, a ideja je da se koristi formula zamjene varijabli, koja se može pronaći u [2, Poglavlje 3.3].

Teorem 3.3 *Za $k > 0$ i $f \in H_G^k$, neka je*

$$X_t = \int_{\mathbb{R}^k}'' f(x_1, \dots, x_k) \phi_t(x_1 + \cdots + x_k) dZ_G(x_1) \cdots dZ_G(x_k), \tag{15}$$

gdje je $\phi_t(x) = (e^{itx} - 1)/ix$. Ako za neki $p > 0$ i $q \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(i) $f(cx_1, \dots, cx_k) = c^p f(x_1, \dots, x_k)$,

(ii) $G(cA) = c^q G(A)$, za $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

onda je slučajni proces $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ sebi-sličan s parametrom $H = 1 - p - kq/2$ i sa stacionarnim prirastima.

Prema pretpostavci ovog poglavlja, tj. budući da promatramo slučajne procese s konačnom varijancom, vrijedi $E[X_t^2] < \infty$. Tada, prema tvrdnjama (ii) i (iv) iz Teorema 3.1, mora vrijediti $0 < H < 1$, odnosno $0 < 1 - p - kq/2 < 1$, iz čega slijedi da p i q iz prethodnog teorema moraju zadovoljavati $0 < p + kq/2 < 1$.

Promotrimo sada specijalni slučaj sebi-sličnih procesa, definiranih kao u prethodnom teoremu. Dakle, ako u (15) stavimo $f \equiv 1$ imamo:

$$X_t = \int_{\mathbb{R}^k}'' \phi_t(x_1 + \cdots + x_k) dZ_G(x_1) \cdots dZ_G(x_k).$$

Ovako definiran proces naziva se *Hermitov proces*, a u specijalnom slučaju kada je $k = 2$, poznat je kao *Rosenblattov proces*. Kada je $k = 1$ Hermitov proces je i Gaussovski, dok za $k \geq 2$ nije Gaussovski. Kako je, za Hermitov proces, uvjet (i) iz prethodnog teorema očito trivijalan kada je $p = 0$, slijedi da je Hermitov proces sebi-sličan s parametrom $H = 1 - kq/2$.

Može se pokazati da, za proizvoljan k, Hermitov proces ima smisla definirati samo kada je $0 < q < 1/k$, te tada vrijedi $H \in (1/2, 1)$. Hermitov proces $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ može se reprezentirati kao integral u odnosu na Gaussovsku slučajnu mjeru, slično kao u Poglavlju 2.3.2, gdje smo pokazali integralnu reprezentaciju frakcionalnog Brownovog gibanja. Za Hermitov proces vrijedi:

$$X_t = C_q \int_{\mathbb{R}^k}' \left[\int_0^t \prod_{j=1}^{k} (s - u_j)_+^{-(1+q)/2} ds \right] dB(u_1) \cdots dB(u_k), \tag{16}$$

gdje je $\int_{\mathbb{R}^k}'$ integral na $\mathbb{R}^k$ izuzev hiperravnine $x_i = x_j$, $i \neq j$, a C_q konstanta koja ovisi samo o q. Da je (16) zaista integralna reprezentacija Hermitovog procesa, može se pokazati koristeći tzv. Parsevalov identitet, o čemu se detaljnije može pronaći u [2, Poglavlje 3.3].

3.3 Sebi-slični procesi s beskonačnom varijancom

U ovom poglavlju proučavat ćemo α-stabilne sebi-slične procese sa stacionarnim prirastima, pri čemu je $0 < \alpha \leq 2$. S α-stabilnim procesima smo se upoznali u Poglavlju 2.2.2, gdje smo ih definirali kao procese kojima su sve konačnodimenzionalne distribucije α-stabilne. Simetrične α-stabilne procese zvat ćemo $S\alpha S$ procesi. Ako je slučajni proces α-stabilan sebi-sličan sa stacionarnim prirastima, onda je on određen s dva parametra, s parametarom sebi-sličnosti $H > 0$ i indeksom stabilnosti $0 < \alpha \leq 2$. Idući teorem govori o dozvoljenim vrijednostima parametara H i α.

Teorem 3.4 *Za $H > \max\{1, 1/\alpha\}$, ne postoji α-stabilan sebi-sličan proces s parametrom H i sa stacionarnim prirastima.*

Dokaz. Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ α-stabilan sebi-sličan proces s parametrom H i sa stacionarnim prirastima. Za $\alpha < 2$, α-stabilni procesi imaju konačne sve momente reda manjeg od α. Dakle, vrijedi $E[|X_1|^\gamma] < \infty$, za $0 < \gamma < \alpha$, te $E[|X_1|^\alpha] = \infty$. Kada je $\alpha = 2$, radi se o Gaussovskom procesu, koji ima konačne sve momente. Pretpostavimo prvo da je $\alpha > 1$. Tada je $E[|X_1|^\gamma] < \infty$, za sve $\gamma < \alpha$. Kako je $\alpha > 1$, sigurno je za $\gamma = 1$, $E[|X_1|] < \infty$. Prema Teoremu 3.1 *(ii)*, slijedi da je onda $H \leq 1$. Sada pretpostavimo da je $0 < \alpha \leq 1$. Sada su svi momenti reda $\gamma < \alpha \leq 1$ konačni. Stoga prema Teoremu 3.1 *(i)*, vrijedi $H < 1/\gamma$, za svaki $\gamma < \alpha$, odnosno $H \geq 1/\alpha$. Dakle, zaključujemo da parametar sebi-sličnosti H ne može biti veći od $\max\{1, 1/\alpha\}$. □

Često se $S\alpha S$ sebi-slični procesi sa stacionarnim prirastima prikazuju koristeći inetgralnu reprezentaciju. Dakle, $S\alpha S$ sebi-sličan proces sa stacionarnim prirastima $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ ima integralnu reprezentaciju

$$X_t = \int_E f_t(x) dM(x),$$

gdje je M $S\alpha S$ slučajna mjera s kontrolnom mjerom m.

U sljedećem primjeru upoznat ćemo se s *linearnim frakcionalnim stabilnim gibanjem*, koje je jedna generalizacija frakcionalnog Brownovog gibanja na $S\alpha S$ slučajni proces.

Primjer 3.2 *Neka je $0 < H < 1$, $0 < \alpha < 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| > 0$.* ***Linearno frakcionalno stabilno gibanje*** *je slučajni proces $\{L_{\alpha,H}(a,b;t), t \geq 0\}$ definiran s:*

$$L_{\alpha,H}(a,b;t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) dM(x),$$

gdje je M $S\alpha S$ slučajna mjera na $\mathbb{R}$ s Lebesgueovom kontrolnom mjerom,

$$f_t(x) = a\big((t-x)_+^{H-1/\alpha} - (-x)_+^{H-1/\alpha}\big) + b\big((t-x)_-^{H-1/\alpha} - (-x)_-^{H-1/\alpha}\big), \tag{17}$$

te $x_+ = \max\{x, 0\}$, $x_- = \max\{-x, 0\}$.

Integralna reprezentacija linearnog frakcionalnog stabilnog gibanja je bazirana na integralnoj reprezentaciji (12) frakcionalnog Brownovog gibanja, pri čemu je ovdje eksponent $H - 1/\alpha$ umjesto $H - 1/2$. Stoga, kada je $\alpha = 2$ linearno frakcionalno stabilno gibanje je zapravo frakcionalno Brownovo gibanje.

Teorem 3.5 *Linearno frakcionalno stabilno gibanje $\{L_{\alpha,H}(a,b;t), t \geq 0\}$ je $S\alpha S$ sebi-sličan proces s parametrom H i sa stacionarnim prirastima.*

Prije dokaza teorema, navodimo tvrdnju koju ćemo iskoristiti kasnije. Za dokaz tvrdnje pogledati [2, Teorem 3.5.2].

Teorem 3.6 *Ako je $\{f_t(\cdot), t \geq 0\}$ skup izmjerivih funkcija te*

$$\int_E |f_t(x)|^\alpha dx < \infty, \quad \text{za svaki } t \geq 0,$$

onda je proces $\{X_t, t \geq 0\}$ definiran s

$$X_t = \int_E f_t(x) dM(x), \quad t \geq 0,$$

$S\alpha S$ slučajni proces.

Dokaz Teorema 3.5. Kako je proces $\{L_{\alpha,H}(a,b;t), t \geq 0\}$ dobro definiran, tj. $f_t \in L^\alpha(\mathbb{R})$ (vidi [4, Dokaz propozicije 2.6.21]) prema prethodnom teoremu slijedi da je $\{L_{\alpha,H}(a,b;t), t \geq 0\}$ $S\alpha S$ slučajni proces. Promotrimo $L_{\alpha,H}(a,b;ct) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ct}(cv) dM(cv)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
f_{ct}(cv) &= a\big((ct-cv)_+^{H-1/\alpha} - (-cv)_+^{H-1/\alpha}\big) + b\big((ct-cv)_-^{H-1/\alpha} - (-cv)_-^{H-1/\alpha}\big) \\
&= c^{H-1/\alpha}\Big(a\big((t-x)_+^{H-1/\alpha} - (-x)_+^{H-1/\alpha}\big) + b\big((t-x)_-^{H-1/\alpha} - (-x)_-^{H-1/\alpha}\big)\Big) \\
&= c^{H-1/\alpha} f_t(v).
\end{aligned}$$

Sada je

$$L_{\alpha,H}(a,b;ct) = c^{H-1/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(v) dM(cv).$$

Ako iskoristimo svojstvo $dM(cv) \stackrel{d}{=} c^{1/\alpha} dM(v)$ dobijemo

$$L_{\alpha,H}(a,b;ct) = c^{H-1/\alpha} c^{1/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(v) dM(v),$$

tj. $L_{\alpha,H}(a,b;ct) \stackrel{d}{=} c^H L_{\alpha,H}(a,b;t)$, što znači da je slučajni proces $\{L_{\alpha,H}(a,b;t), t \geq 0\}$ sebi-sličan s parametrom H. Slično, korirsteći svojstvo $dM(u+h) \stackrel{d}{=} dM(u)$ pokaže se da linearno frakcionalno stabilno gibanje ima stacionarne priraste. $\square$

Kada je $H = 1/\alpha$, linearno frakcionalno stabilno gibanje je $S\alpha S$ Lévyjev proces. Za dokaz ove tvrdnje pogledati [4, Primjedba 2.6.22].

Sljedeći teorem govori da se linearna frakcionalna stabilna gibanja razlikuju za različite realne brojeve a i b . Dokaz je izostavljen, a može se pronaći u [7, Teorem 7.4.5]

Teorem 3.7 *Neka je $0 < H < 1$, $0 < \alpha < 2$, $H \neq 1/\alpha$ i neka su a, b, a', b' realni brojevi koji zadovoljavaju $|a| + |b| > 0$ te $|a'| + |b'| > 0$. Tada vrijedi*

$$\left\{ \frac{1}{C_H(a,b)} L_{\alpha,H}(a,b;t) \right\} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{1}{C_H(a',b')} L_{\alpha,H}(a',b';t) \right\},$$

gdje je

$$C_H(a,b) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| a\left\{ (1-v)_+^{H-1/\alpha} - (-v)_+^{H-1/\alpha} \right\} + b\left\{ (1-v)_-^{H-1/\alpha} - (-v)_-^{H-1/\alpha} \right\} \right|^\alpha dv \right\}^{1/\alpha},$$

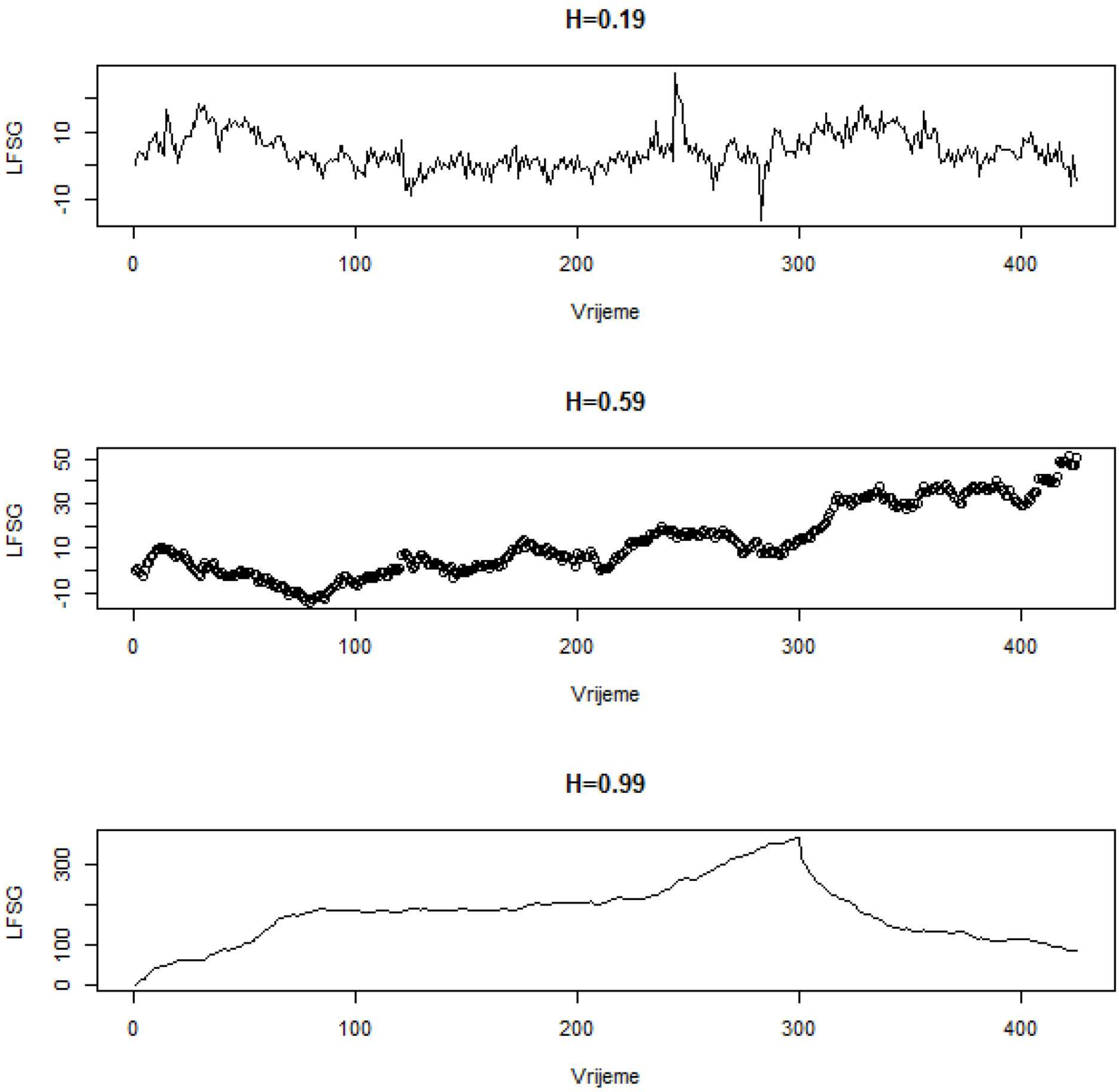
ako i samo ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta

(i) $a = a' = 0$,

(ii) $b = b' = 0$,

(iii) $aa'bb' \neq 0$ *i* $a/a' = b/b'$.

Uzmimo da je indeks stabilnosti $\alpha = 1.7$. Na sljedećoj slici su prikazane simulirane trajektorije linearnog frakcionalnog stabilnog gibanja (LFSG), za različite vrijednosti parametra sebi-sličnosti H.



Slika 4: Simulirane trajektorije linearnog frakcionalnog stabilnog gibanja za $\alpha = 1.7$ te $H = 0.19$, $H = 0.59$ i $H = 0.99$.

Možemo vidjeti da su fluktuacije veće za manje vrijednosti parametra sebi-sličnosti. U slučaju kada je $H = 0.59$, zapravo se radi o $S\alpha S$ Lévyjevom procesu, budući da je $H = 1/\alpha$. Trajektorije $S\alpha S$ Lévyjevog procesa nisu neprekidne pa simulirana trajektorija nema oblik odgovarajuće krivulje.

Literatura

[1] N. H. BINGHAM, C. H. GOLDIE, J. L. TEUGELS, *Regular Variation*, Cambridge University Press, 1987.

[2] P. EMBRECHTS, M. MAEJIMA, *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press, 2002.

[3] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, INC., New York, 1971.

[4] V. PIPIRAS, M. S. TAQQU, *Long-Range Dependence and Self-Similarity*, Cambridge University Press, 2017.

[5] S. I. RESNICK, *A Probability Path*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[6] P. K. SAHOO, P. KANNAPPAN, *Introduction to functional equations*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2011.

[7] G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, 1994.

[8] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

[9] V. V. UCHAIKIN, V. M. ZOLOTAREV: *Chance and Stability: Stable Distributions and Their Applications*, VSP, 1999.

[10] W. VERVAAT, *Sample path properties of selfsimilar processes with stationary increments*, The Annals of Probability, 13(1985), 1-27.

Sažetak

U ovom diplomskom radu predstavljeni su sebi-slični procesi, njihova definicija i svojstva koja su direktna posljedica sebi-sličnosti. Opisana je veza sebi-sličnih procesa i strogo stacionarnih procesa te je dokazan Lampertijev fundamentalni granični teorem. Nadalje, dani su primjeri sebi-sličnih procesa, kao što su Brownovo gibanje, stabilni Lévyjevi procesi te frakcionalno Brownovo gibanje. Proučen je frakcionalni Gaussovski šum, koji je stacionaran niz prirasta frakcionalnog Brownovog gibanja. Simulirane su trajektorije frakcionalnog Gaussovskog šuma za različite vrijednosti parametra sebi-sličnosti. Zatim je proučena klasa sebi-sličnih procesa sa stacionarnim prirastima, koji nisu nužno Gaussovski. Promatran je slučaj sebi-sličnih procesa s konačnom varijancom, te posebno Hermitov proces. Opisani su stabilni sebi-slični procesi sa stacionarnim prirastima, te linearno frakcionalno stabilno gibanje kao primjer takvih procesa.

Ključne riječi: sebi-slični procesi, parametar sebi-sličnosti, strogo stacionaran proces, stacionarnost prirasta, Gaussovski proces, stabilni procesi.

Summary

In this graduate thesis, self-similar processes, their definition and properties which are direct result of self-similarity, are presented. The connection of self-similar processes and strictly stationary processes is described and Lamperti's fundamental limit theorem is proved. Furthermore, examples of self-similar processes, such as Brownian motion, stable Lévy processes and fractional Brownian motion, are given. Fractional Gaussian noise, which is stationary sequence of increments of fractional Brownian motion, is studied. Sample paths of fractional Gaussian noise are simulated for different value of self-similarity parameter. Then, class of self-similar processes with stationary increments, which are not necessarily Gaussian, is studied. Next, the self-similar processes with the finite variance are studied, in particular Hermite processes. Stable self-similar processes with stationary increments are described, and linear fractional stable motion is given as example.

Key words: self-similar processes, self-similarity parameter, strictly stationary process, stationary increments, Gaussian process, stable processes.

Životopis

Rođena sam 12. prosinca 1993. godine u Slavonskom Brodu u Republici Hrvatskoj. Pohađala sam Osnovnu školu "Đuro Pilar" od 2000. do 2008. godine te Gimnaziju "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu od 2008. do 2012. godine. Nakon završene srednje škole, 2012. godine sam upisala Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv *prvostupnice matematike* stječem 2016. godine uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Dragane Jankov Maširević i završni rad *Diskretan slučajni vektor*. U jesen iste godine upisujem Diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Tijekom diplomskog studija, odradila sam stručnu praksu u Hrvatskoj agenciji za hranu tijekom koje sam se bavila statističkom analizom baze podataka.