Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dunja Katić

Ekstremi realne diferencijabilne funkcije jedne i više realnih varijabli

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dunja Katić

Ekstremi realne diferencijabilne funkcije jedne i više realnih varijabli

Završni rad

Voditelj: prof.dr.sc. Kristian Sabo

Osijek, 2019.

Extrema of real differentiable function of one and several real variables

Sažetak

U matematici minimalnu i maksimalnu vrijednost neke funkcije nazivamo minimumom, maksimumom odnosno ekstremom funkcije. Ekstreme funkcije možemo promatrati na okolini neke točke ili na cijelom području definicije. Ovisno o tome, razlikujemo lokalne i globalne ekstreme. U cilju ilustracije ovih pojmova izrađeno je nekoliko vlastitih primjera. U tu svrhu, korištene su mogućnosti programskog paketa Mathematica.

Ključne riječi: lokalni ekstremi, globalni ekstremi, nužan uvjet za postojanja ekstrema, dovoljan uvjet postojanja ekstrema

Abstract

In mathematics, the minimal and maximal value of a function are called the minimum and maximum, i.e. the extrema of a function. The extrema can be observed either within a specific range of a given point or on the entire domain of a function. Accordingly, there are local and global extrema of a function. In order to illustrate these terms, a set of examples was created, by the author of the paper, using the technical computing system Mathematica.

Key words: local extrema, global extrema, necessary conditions for an extremum, sufficient conditions for an extremum

Sadržaj

1 Uvod

U ovom završnom radu dati ćemo osnovne definicije i teoreme s dokazima potrebne za razumijevanje ekstrema funkcija jedne i više varijabli. Ekstremi funkcija su od velike važnosti kako u matematici, tako i u ostalim znanostima i svakodnevnome životu. Njihovo određivanje u slučaju funkcija jedne varijable bazira se na derivacijama. Vidjet ćemo da se analogan problem za funkcije više varijabli rješava pomoću parcijalnih derivacija. Ovaj rad sastoji se od dva poglavlja.

U prvom poglavlju uvest ćemo pojam ε-okoline koja nam je potrebna za definiranje lokalnih ekstrema te u iskazima i dokazima teorema o ekstremima. Definirat ćemo pojam ekstrema funkcije, a zatim i stacionarne točke potrebne za iskazivanje teorema za postojanje nužnog odnosno dovoljnog uvjeta za postojanje ekstrema. Na kraju poglavlja primjenit ćemo iskazane uvjete u svrhu pronalaska estrema zadane funkcije.

U drugom ćemo se poglavlju, analogno kao i kod funkcija jedne varijeble, upoznati sa samom definicijom lokalnih i globalnih ekstrema funkcija više varijabli. Također, bavit ćemo se nužnim i dovoljnim uvjetima za njihovo postojanje, a zatim ćemo primjerima ilustrirati kako ih pronaći.

2 Ekstremi funkcija jedne varijable

Prije samog opisivanja postupka pronalaženja ekstrema funkcije jedne varijable definirat ćemo pojmove ekstrema i stacionarnih točaka i navesti nužan i dovoljan uvjet za postojanje ekstrema funkcije. U tu svrhu definirat ćemo ϵ-okolinu točke.

Definicija 1. *Neka je $\epsilon > 0$. ϵ-okolina točke x je interval $(x-\epsilon, x+\epsilon)$.*

Definicija 2. *Za funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da ima:*

i) lokalni minimum $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako postoji ϵ-okolina točke c takva da pri tome vrijedi

$$f(x) \geq f(c) \text{ za svaki } x \in (c-\epsilon, c) \cup (c, c+\epsilon),$$

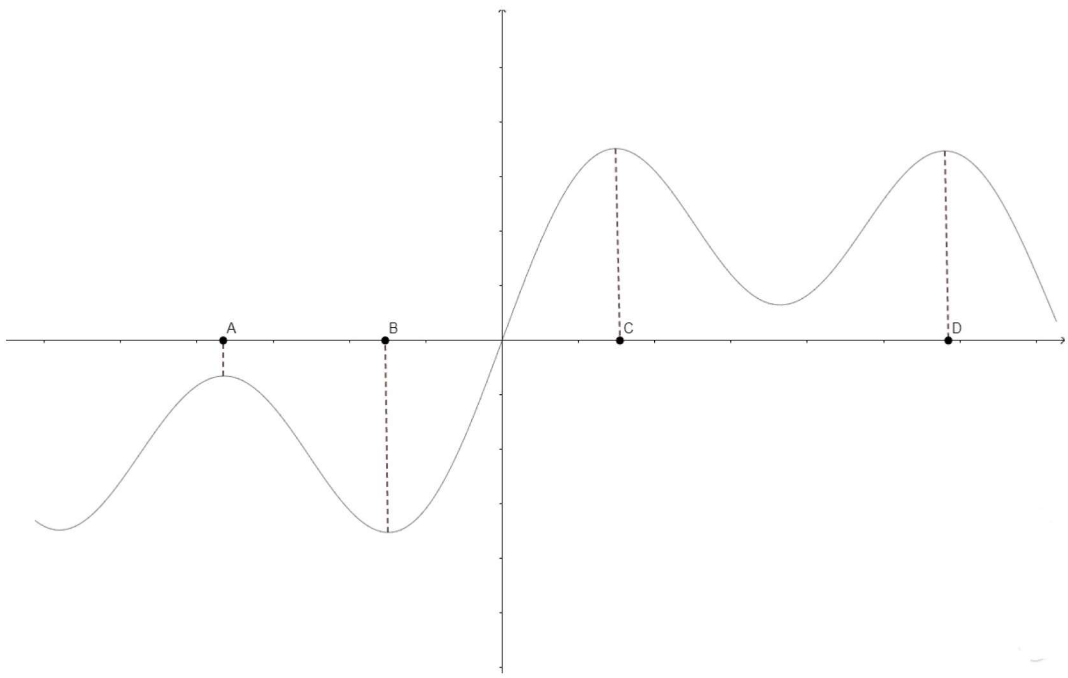
ii) lokalni maksimum $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako postoji ϵ-okolina točke c takva da pri tome vrijedi

$$f(x) \leq f(c) \text{ za svaki } x \in (c-\epsilon, c) \cup (c, c+\epsilon),$$

iii) globalni minimum $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako je $f(x) \geq f(c)$, za svaki $x \in \mathcal{D}$,

iv) globalni maksimum $f(c)$ u točki $c \in \mathcal{D}$ ako je $f(x) \leq f(c)$, za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Ukoliko za svaki $x \neq c$ vrijede stroge nejednakosti, govorimo o strogom lokalnom, odnosno globalnom ekstremu.



Slika 1: Grafički prikaz ekstrema funkcije

U skladu s navedenom definicijom, funkcija f čiji je graf prikazan na slici 1 u točkama C i D ima lokalne maksimume dok u točkama A i B ima lokalne minimume. Dakle, lokalni ekstremi dane funkcije su u točkama A,B,C,D.

Definicija 3. *Neka je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna u točki $c \in \mathcal{D}$. Za točku c kažemo da je stacionarna točka funkcije f ako vrijedi $f'(c) = 0$.*

Fermatov teorem jedan je od najvažnijih teorema Diferencijalnog računa. Također, teorem je poznat kao nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije definirane na intervalu.

Teorem 1 (Vidi [3]). *(*Nužan uvjet postojanja ekstrema*) Neka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ u točki x_0 otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem. Ako je f derivabilna u točki x_0, onda je $f'(x_0) = 0$.*

Pretpostavimo li da funkcija f :I$\to \mathbb{R}$ u točki x_0 otvorenog intervala I ima derivaciju $f'(x_0)$, vrijedi:
Ako je $f'(x_0) > 0$ onda oko x_0 postoji mali interval, takav da u točkama toga intervala koje su lijevo od x_0 funkcija f prima vrijednosti strogo manje od $f(x_0)$, a u točkama desno od x_0 vrijednosti strogo veće od $f(x_0)$, tj. postoji $\delta > 0$ takav da

$$\begin{cases} (x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle) \Rightarrow (f(x) < f(x_0)), \\ (x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle) \Rightarrow (f(x_0) < f(x)). \end{cases} \tag{1}$$

Ako je $f'(x_0) < 0$ onda postoji $\delta > 0$, takav da

$$\begin{cases} (x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle) \Rightarrow (f(x) > f(x_0)), \\ (x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle) \Rightarrow (f(x_0) > f(x)). \end{cases} \tag{2}$$

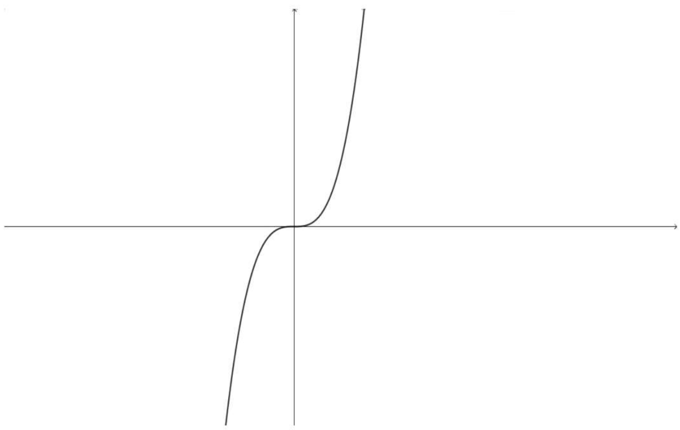
Dokažimo sada Teorem 1.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f u točki $x_0 \in \langle a, b \rangle$ postiže lokalni maksimum.
Kada bi vrijedilo $f'(x_0) > 0$ onda bi postojao $\delta > 0$ takav da vrijedi tvrdnja (1) iz prethodno navedenoga teksta. To bi značilo da je $f(x) > f(x_0)$ za svaki x između x_0 i $x_0 + \delta$ i protivilo bi se pretpostavci da funkcija f u x_0 postiže lokalni maksimum, tj. da je $f(x) \leq f(x_0)$. Dakle, $f'(x_0) \leq 0$.

Isto tako, ako bismo pretpostavili da je $f'(x_0) < 0$, postojao bi $\delta > 0$ takav da vrijedi (2) iz prethodno navedenoga teksta, tj. za svaki x između $x_0 - \delta$ i x_0 vrijedilo bi da je $f(x) > f(x_0)$. Tu bi bila kontradikcija s pretpostavkom da je x_0 točka lokalnog maksimuma funkcije f. Prema tome je $f'(x_0) \geq 0$. Iz $f'(x_0) \leq 0$ i $f'(x_0) \geq 0$ dobivamo $f'(x_0) = 0$. □

Prema Fermatovom teoremu ako derivabilna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki x_0, onda je x_0 stacionarna točka funkcije f. Zato se kaže da Fermatov teorem daje nužne uvjete za egzistenciju lokalnog ekstrema derivabilne funkcije. Kako bismo se uvjerili da to nije i dovoljan uvjet, proučimo sljedeći primjer.

Primjer 1. *Promotrimo derivabilnu funkciju $f(x) = x^3$. Kako bismo izračunali stacionarnu točku dane funkcije, najprije trebamo izračunati njenu derivaciju. Nakon izjednačavanja prve derivacije $f'(x) = 3x^2$ s nulom, dobivamo stacionarnu točku $x_0 = 0$. U toj točki, ova funkcija nema lokalni ekstrem što je moguće uočiti i iz grafa funkcije prikazanog na slici 2.*



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = x^3$

Dakle, nužan uvjet nije i dovoljan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije pa je potrebno definirati i dovoljan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema.

Teorem 2 (Vidi [5]). *(*Dovoljan uvjet postojanja ekstrema*) Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$ i neka je $f'(x_0) = 0$. U točki x_0 funkcija postiže ekstrem u sljedeća dva slučaja:*

1. *Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f'(x) < 0$ za sve $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, onda funkcija f u x_0 postiže lokalni maksimum.*

2. *Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f'(x) > 0$ za sve $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, onda funkcija f u x_0 postiže lokalni minimum.*

U svrhu dokaza Teorema 2 iskazat ćemo sljedeći teorem.

Teorem 3 (Vidi [7]). *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada*

(a) funkcija f monotono raste [strogo monotono raste] na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$ [ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$].

(a) funkcija f monotono pada [strogo monotono pada] na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$ [ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$].

Dokažimo sada Teorem 2:

Dokaz. U prvom slučaju funkcija f je prema Teoremu 3 rastuća lijevo od x_0 i padajuća desno od x_0. Dakle, x_0 je točka lokalnog maksimuma. Štoviše, točka x_0 je točka strogog lokalnog maksimuma funkcije f.
Argumentacija za drugu tvrdnju je sasvim analogna. □

Napomena 1. *Navedeni teorem govori da derivabilna funkcija f u točki x_0 postiže lokalni ekstrem ukoliko derivacija f' prolazeći kroz x_0 mijenja predznak. Ako se predznak mijenja od "-" na "+", x_0 je točka lokalnog minimuma. Ako se predznak mijenja od "+" na "-", x_0 je* *točka lokalnog maksimuma. Ako se predznak derivacije ne mijenja, $f(x)$ nije niti minimum niti maksimum i na grafu postoji točka infleksije s tangentom koja je paralelna osi x.*

U slučaju kada funkcija f ima neprekidnu drugu derivaciju, lokalni ekstremi mogu se okarakterizirati i pomoću druge derivacije.

Teorem 4 (Vidi [2])**.** *U točki $x_0 \in \mathcal{D}$ dva puta neprekidno derivabilna funkcija f postiže lokalni ekstrem ako je $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) \neq 0$. Pri tome, ako je $f''(x_0) > 0$, x_0 je točka lokalnog minimuma, a ako je $f''(x_0) < 0$, x_0 je točka lokalnog maksimuma.*

Dokaz. Ako je $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$, onda postoji interval $< x_0 - \delta, x_0 + \delta >$ takav da je $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \setminus \{x_0\}$, odakle slijedi:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0, &\quad \text{za svaki } x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0, &\quad \text{za svaki } x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{aligned}$$

Prema Teoremu 2, funkcija f ima lokalni maksimum u točki x_0. Dokaz tvrdnje, ako je $f''(x_0) > 0$ onda je x_0 točka lokalnog minimuma, sličan je prethodno dokazanom. □

Sada, na osnovu prethodno navedenoga, možemo navesti postupak pronalaženja lokalnih ekstrema funkcije:

1. Nađemo derivaciju f' funkcije f.
2. Rješavamo jednadžbu $f'(x) = 0$ i nalazimo stacionarne točke.
3. Nalazimo f'' drugu derivaciju funkcije f i izračunavamo njezinu vrijednost $f''(c)$ u stacionarnoj točki c. Ako je $f''(c) > 0$, c je točka strogog lokalnog minimuma, a ako je $f''(c) < 0$, c je točka strogog lokalnog maksimuma funkcije f.

Ilustrirajmo postupak na sljedećim primjerima:

Primjer 2. *Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = x^2 + 4x + 6$.*

1. Odredimo prvu derivaciju funkcije f: $f'(x) = 2x + 4$.
2. Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ dobivamo stacionarnu točku $c = -2$ dane funkcije f.
3. Trebamo još pronaći drugu derivaciju funkcije f i njezinu vrijednost u točki c. Druga derivacija je $f''(x) = 2$, odakle je $f''(-2) = 2$. Budući je $f''(x) = 2 > 0$, slijedi da je -2 točka strogog lokalnog minimuma. Dakle, $f(-2) = 2$ je lokalni minimum funkcije f.

Odredimo ekstreme funkcije f iz prethodnog primjera koristeći Teorem 2:

Odredimo $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x + 4.$$

Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ dobivamo stacionarnu točku $x = -2$.
Za $x < -2$ je $f'(x) < 0$, a za $x > -2$ vrijedi da je $f'(x) > 0$. Prema Teoremu 2 funkcija f ima lokalni minumum u točki $x = -2$.

Primjer 3. *Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ koristeći Teorem 4. Odredimo prvu derivaciju funkcije f:*

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}.$$

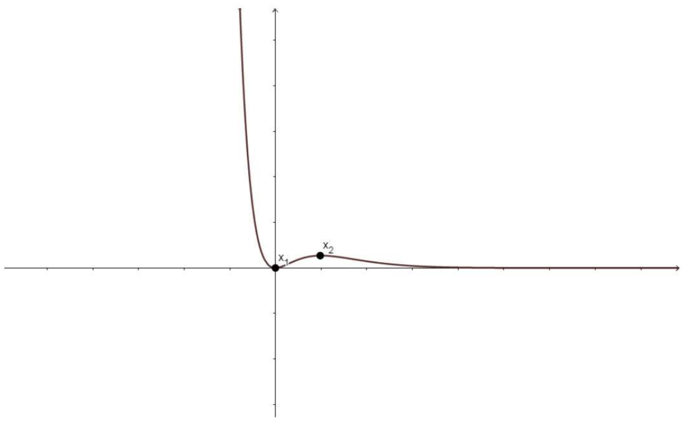
Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ dobivamo stacionarne točke funkcije f:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Odredimo sada $f''(x)$:

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(-2x + x^2 + 2 - 2x).$$

Budući je $f''(0) = 2 > 0$, prema Teoremu 4 funkcija f ima lokalni minimum u točki 0, a u točki 2 lokalni maksimum jer je $f''(2) < 0$.



Slika 3: Graf funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

Primjer 4. *Odredimo globalne ekstreme funkcije* $f(x) = (x^2 - 2x - 8)^2$ *na intervalu* $[-3, 3]$. *Izračunajmo najprije* $f'(x)$:

$$f'(x) = 2(x^2 - 2x - 8) \cdot (2x - 2).$$

Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ *dobivamo sljedeće stacionarne točke:*

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4.$$

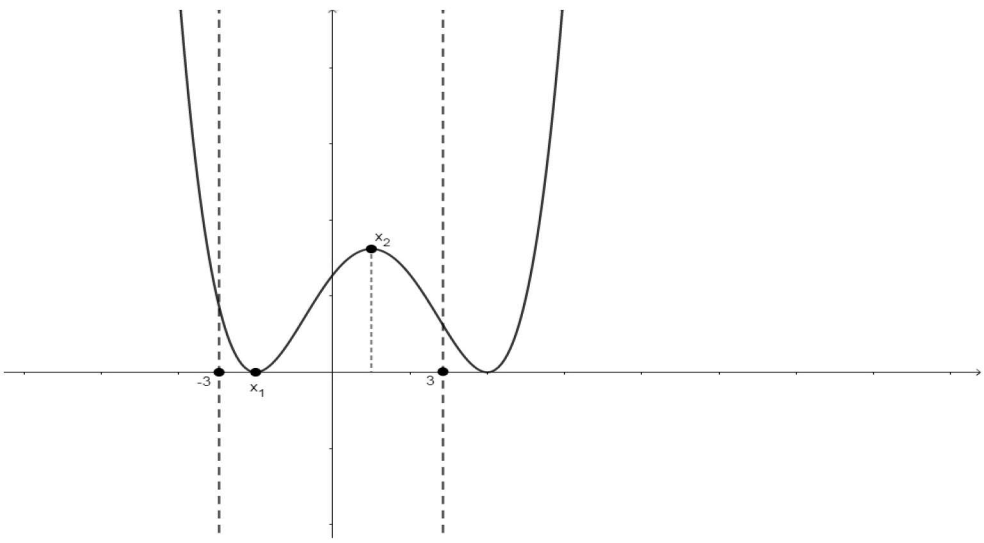
Primijetimo kako točka $x_3 = 4 \notin [-3, 3]$ *pa ju u nastavku ne moramo promatrati. Odredimo sada* $f''(x)$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 24.$$

Kako je $f''(-2) > 0$, *prema Teoremu 4 funkcija* f *u točki* -2 *ima lokalni minimum. Isto tako,* $f''(1) < 0$ *pa funkcija* f *u točki* 1 *postiže lokalni maksimum. Kako bismo zaključiti da su to ujedno i globalni ekstremi, moramo se uvjeriti da funkcija u rubovima ne postiže globalni ekstrem. U tu svrhu izračunajmo vrijednost funkcije u stacionarnim i rubnim točkama:*

$$f(-3) = 49, \quad f(-2) = 0, \quad f(1) = 81, \quad f(3) = 25.$$

Od promatranih točki, funkcija najmanju vrijednost postiže u točki -2 *pa je to točka globalnog minimuma funkcije* f. *Najveću vrijenost funkcija* f *postiže u točki* 1, *pa u njoj ima globalni maksimum.*



Slika 4: Graf funkcije $f(x) = (x^2 - 2x - 8)^2$

3 Ekstremi funkcija više varijabli

Kao i kod ektrema funkcije jedne varijable, najprije ćemo definirati pojmove lokalnog ekstrema i stacionarnih točaka, navesti nužan i dovoljan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema funkcije više varijabli, a zatim ćemo provesti i sam postupak pronalaženja ekstrema jedne takve funkcije. U tu svrhu, definirat ćemo otvorenu kuglu i otvoren skup.

Definicija 4. *Za točku $P_0 \in \mathbb{R}^n$ i realan broj $r > 0$ skup*

$$K(P_0, r) := \{P = (x_1, \ldots, x_n) : ||P - P_0|| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

zovemo otvorenom kuglom oko P_0 radijusa r.

Definicija 5. *Za skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ ako za svaku točku $P_0 \in \Omega$ postoji broj $r > 0$ takav da je $K(P_0, r) \subseteq \Omega$.*

Definicija 6. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Kažemo da funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ u točki $P_0 \in \Omega$ postiže lokalni minimum ako postoji okolina $K(P_0, r) \subseteq \Omega$ takva da vrijedi*

$$(\forall P \in K(P_0, r) \setminus \{P_0\})(f(P) \geq f(P_0)),$$

odnosno funkcija f u $Po \in \Omega$ postiže lokalni maksimum ako vrijedi:

$$(\forall P \in K(P_0, r) \setminus \{P_0\})(f(P) \leq f(P_0)).$$

Vrijednost $f(P_0)$ je minimum, odnosno maksimum funkcije f na skupu Ω.

Ako u prethodnim definicijama vrijedi stroga nejednakost, kažemo da funkcija f u točki P_0 postiže strogi lokalni minimum odnosno strogi lokalni maksimum. Ako vrijede sljedeće nejednakosti:

$$f(P) \geq f(P_0),$$

$$f(P) \leq f(P_0),$$

za svaku točku $P \in \Omega$, tada funkcija f u točki P_0 ima globalni minimum, odnosno globalni maksimum. Lokalne minimume i maksimume funkcije f nazivamo lokalnim ekstremima funkcije f, a globalne minimume i maksimume nazivamo globalnim ekstremima funkcije f.

Definicija 7. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Za točku $P_0 \in \Omega$ kažemo da je stacionarna ili kritična točka funkcije f ukoliko je $Df(P_0) = 0$, tj. ako je $\partial f(P_0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

Teorem 5 (Vidi [6]). *(*Nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema*) Ako je $P_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ točka lokalnog ekstrema diferencijabilne funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onda je P_0 stacionarna točka funkcije f.*

Dokaz. Ako funkcija f u P_0 postiže lokalni minimum, onda $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ i restrikcija

$$\rho_i : x_i \mapsto f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

funkcije f na pravac kroz P_0 određen i-tim koordinatnim vektorom, ima u točki x_i^0 lokalni minimum. Kako je ρ_i funkcija jedne varijable, vrijedi da je $\rho_i'(x_i^0) = 0$. Ako za neki indeks i postoji parcijalna derivacija od f po varijabli x_i u točki P_0, onda vrijedi $\rho_i'(x_i^0) = \partial_i f(P_0)$. Zaključujemo:

$$\partial_i f(P_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Analogno se zaključuje u slučaju lokalnog maksimuma. □

Kao i kod funkcija jedne varijable, stacionarnost preslikavanja funkcije f nije i dovoljna za ekstrem, odnosno postoji mogućnost da stacionarna točka nije lokalni minimum odnosno maksimum, nego je ona tzv. sedlasta točka (točka infleksije). Iz tog razloga, potrebno je promatrati drugi diferencijal dane funkcije.

Prije nego definiramo dovoljne uvjete postojanja lokalnog ekstrema, potrebno je definirati pojmove vezane uz kvadratne forme, tj. funkcije $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oblika

$$q(H) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad H \in \mathbb{R}^n,$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dani brojevi.

Definicija 8. *Neka je $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oblika $q(H) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, H \in \mathbb{R}^n$ kvadratna forma.*

a) q je pozitivno definitna ako je $q(H) > 0, \quad \forall H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   q je negativno definitna ako je $q(H) < 0, \quad \forall H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

b) q je pozitivno semidefinitna ako je $q(H) \geq 0, \quad \forall H \in \mathbb{R}^n$.
   q je negativno semidefinitna ako je $q(H) \leq 0, \quad \forall H \in \mathbb{R}^n$.

c) q je indefinitna ukoliko nije niti pozitivno, niti negativno semidefinitna.

Kako nije uvijek jednostavno ustanoviti kakva je, s obzirom na definitnost, kvadratna forma, postoji nekoliko kriterija kako to učiniti. Neki od njih navedeni su u sljedećim dvama teoremima:

Teorem 6. *Neka su $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ svojstvene vrijednosti simetrične matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vrijedi da je matrica A:*

1. *pozitivno definitna* $\iff$ $\lambda_i > 0$, *za svaki* $i = 1, \ldots, n$

2. *pozitivno semidefinitna* $\iff$ $\lambda_i \geq 0$, *za svaki* $i = 1, \ldots, n$

3. *negativno definitna* $\iff$ $\lambda_i < 0$, *za svaki* $i = 1, \dots, n$

4. *negativno semidefinitna* $\iff$ $\lambda_i \leq 0$, *za svaki* $i = 1, \dots, n$

5. *indefinitna* $\iff$ *postoje* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *takvi da su* λ_i *i* λ_j *različite od nule i suprotnog predznaka.*

Teorem 7 (Vidi [6]). *(Sylvesterov kriterij) Neka je* $q(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i,j=1} a_{ij} t_i t_j$ *kvadratna forma i označimo redom determinante*

$$\alpha_1 := a_{11}, \alpha_2 := \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \dots, \alpha_n := \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

i) *q je pozitivno definitna kvadratna forma ako i samo ako je* $\alpha_i > 0$ *za sve* $i = 1, \dots, n$.

ii) *q je negativno definitna kvadratna forma ako i samo ako je* $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 < 0, \alpha_4 > 0, \dots$.

iii) *q je indefinitna kvadratna forma ako su sve determinante* α_i *različite od nule i nije riječ niti o jednom prethodno navedenom slučaju.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati za n=2. Kvadratna (simetrična) forma dviju varijabli $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je oblika

$$q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{b2} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini, a (e_1, e_2) ortonormirana baza. Tada za kvadratnu formu vrijedi

$$q(x_1, x_2) = \mathcal{A} x \cdot x,$$

gdje je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, a linearni operator $\mathbb{A}$ u bazi (e_1, e_2) zadan je matricom

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednosti matrice A, tada vrijedi:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = detA = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \quad i \quad \lambda_1 + \lambda_2 = TrA = a_{11} + a_{22}.$$

i) Neka je $q(x_1, x_2)$ pozitivno definitna kvadratna forma, tj. $q(x_1, x_2) > 0$ za svaki $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$.
Tada svojstvene vrijednosti matrice A, λ_1 i λ_2 moraju biti pozitivne, pa slijedi da je $detA > 0$. Nadalje vrijedi:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} a_{22} > a_{12}^2 \geq 0, \quad tj. a_{11} a_{22} > 0.$$

Slijedi da su a_{11} i a_{22} različiti od nule i moraju biti istog predznaka. Taj predznak iz

$$TrA = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

mora biti pozitivan. Konačno,

$$\alpha_1 = \alpha_{11} > 0 \quad i \quad \alpha_2 = detA > 0.$$

Obratno, ako je $\alpha_1 = \alpha_{11}$ i $\alpha_2 = detA > 0$, primijetimo da zbog $detA > 0$ vrijedi $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$, tj. $a_{11}a_{22} > 0$ što znači da su a_{11} i a_{22} istog predznaka. Kako je po pretpostavci $a_{11} > 0$, slijedi da je i $a_{22} > 0$.

Zbog $detA = \alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$ slijedi da su α_1 i α_2 različiti od nule te da su istog predznaka. Taj predznak zbog

$$\alpha_1 + \alpha_2 = TrA = a_{11} + a_{22} > 0$$

mora biti pozitivan. Konačno, svojstvene vrijednosti matrice A su pozitivne što znači da je matrica pozitivno definitna kao i pridružena kvadratna forma $q(y_1, y_2)$.

ii) Dokaz ove tvrdnje može se pokazati na sličan način kao i prethodni slučaj.

iii) U slučaju n=2, q je indefinitna kvadratna forma ako i samo ako je $\alpha_2 = detA < 0$.

Neka je $q(x_1, x_2)$ indefinitna kvadratna forma. Tada svojstvene vrijednosti pridružene matrice A moraju biti različite od nule i suprotnog predznaka, odakle zaključujemo da je $detA = \lambda_1\lambda_2 < 0$.

Obratno, neka je $\alpha_2 = detA < 0$. Iz $detA = \lambda_1\lambda_2 < 0$ slijedi da λ_1 i λ_2 moraju biti različiti od nule i suprotnog predznaka. Zaključujemo da je matrica A indefinitna kao i pridružena kvadratna forma.

□

Definicija 9. *Za preslikavanje $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je diferencijabilno klase C^m i pišemo $f \in C^m(\Omega)$, ako postoje sve parcijalne derivacije reda $\leq m$ u svakoj točki iz Ω i ukoliko su one neprekidne na Ω.*

Ako je preslikavanje $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilno u svakoj točki iz skupa Ω, tada diferencijal Df možemo shvatiti kao preslikavanje $Df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, gdje je $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vektorski prostor svih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$. Ako je to preslikavanje diferencijabilno u točki P_0, pripadni diferencijal $D(Df)(P_0) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ označavamo s $D^2f(P_0)$ i zovemo drugi diferencijal preslikavanja f u točki $P_0 \in \Omega$.

Teorem 8 (Vidi [6]). *[Dovoljan uvjet postojanja lokalnog ekstrema] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija klase C^2 i $P_0 \in \Omega$ stacionarna točka funkcije f.*

i) Ako je $D^2 f(P_0)$ pozitivno definitna kvadratna forma, onda funkcija f u točki P_0 postiže strogi lokalni minimum.

ii) Ako je $D^2 f(P_0)$ negativno definitna kvadratna forma, onda funkcija f u točki P_0 postiže strogi lokalni maksimum.

iii) Ako je $D^2 f(P_0)$ indefinitna kvadratna forma, onda funkcija f u točki P_0 nema lokalni ekstrem, tj. P_0 je sedlasta točka funkcije f.

Dokaz. Kako je funkcija $f \in C^2(\omega)$ i $Df(P_0) = 0$, po Taylorovom teoremu za svaki P iz neke okoline točke P_0 postoji $\omega_P \in < 0, 1 >$ takav da je

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(P_0 + \omega_P(P - P_0))(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0), \tag{3}$$

gdje su x_i^0 komponente točke P_0, a x_i komponente točke $P = P_0 + H$.
Označimo

$$a_{ij} := \partial_i \partial_j f(P_0),$$
$$r_{ij}(P) := \partial_i \partial_j f(P_0 + \omega_P(P - P_0)) - \partial_i \partial_j f(P_0).$$

Za $P \neq P_0$, neka je $y_i := \frac{x_i - x_i^0}{\|P - P_0\|}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tada je $|y_i| \leq 1$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.
Uvrstimo li to sve u (3) dobivamo

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\|P - P_0\|^2}{2} (\sum_{i,j=1}^{n} y_{ij} y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j). \tag{4}$$

(i) Neka je $D^2 f(P_0)$, tj. funkcija $(y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$, pozitivno definitna kvadratna forma. To je neprekidna funkcija pa ona na jediničnoj sferi $\mathbb{S}^{n-1} := \{(y_1, \dots, y_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1\}$ poprima minimum. Označimo taj minimum sa ϵ. Zbog pozitivne definitnosti drugog diferencijala je $\epsilon > 0$. Kako je $f \in C^2(\Omega)$, to je $\lim\limits_{P \to P_0} r_{ij}(P) = 0$, pa postoji okolina U oko P_0 takva da je $|r_{ij}(P)| < \frac{\epsilon}{n^2}$ za sve $P \in U$. Zbog $|y_i| \leq 1$ za $P \in U \setminus \{P_0\}$, vrijedi

$$|\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}(P)||y_i||y_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}(P)| < \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\epsilon}{n^2} = \epsilon.$$

Sada je iz (4) izraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j > 0,$$

pa za svaki $P \in U \setminus \{P_0\}$ vrijedi $f(P) > f(P_0)$, tj. funkcija f u točki P_0 ima strogi lokalni minimum.

(ii) Ako je drugi diferencijal $D^2f(P_0)$ negativno definitna kvadratna forma, onda je $-D^2f(P_0) = D^2(-f)(P_0)$ pozitivno definitna. Odatle, prema (i) zaključujemo da funkcija $-f$ u P_0 ima strogi lokalni minimum odnosno da funkcija f u P_0 ima strogi lokalni maksimum.

(iii) Neka je $D^2f(P_0)$ indefinitna kvadratna forma. Tada postoje vektori $H' = (h'_1, \dots, h'_n)$ i $H'' = (h''_1, \dots, h''_n)$ takvi da je $\sum_{i,j} a_{ij}h'_ih'_j > 0$ i $\sum_{i,j} a_{ij}h''_ih''_j < 0$. Za $t \in \mathbb{R}$ neka je

$$P'_t = P_0 + tH', \quad P''_t = P_0 + tH''.$$

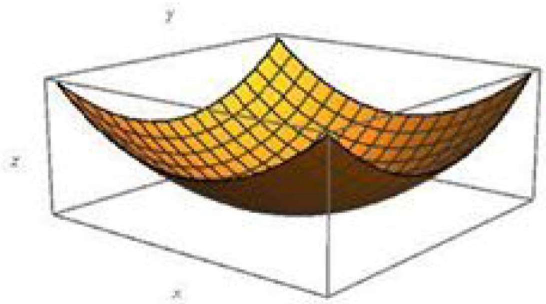
Tada je, uz oznake kao na početku teorema, $y'_i = \frac{th'_i}{|t|\|H'\|}$ pa je $y'_iy'_j = \frac{1}{\|H'\|^2}h'_ih'_j$. Uvrstimo li to u (3) dobivamo

$$f(P'_t) - f(P_0) = \frac{t^2}{2}(\sum_{ij} a_{ij}h'_ih'_j + \sum_{i,j} r_{ij}(P'_t)h'_ih'_j).$$

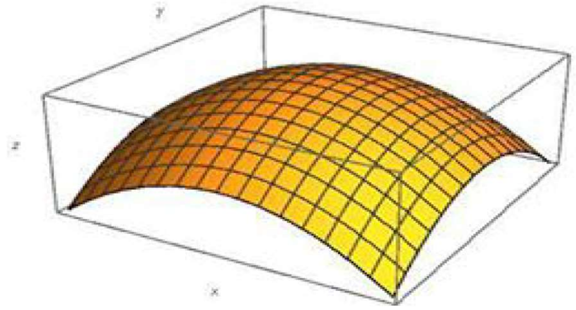
Kako je $\lim_{t\to 0} r_{ij}(P'_t) = 0$, to je za dovoljno malene t drugi sumand u zagradi po apsolutnoj vrijednosti manji od prvog (koji je pozitivan realan broj neovisan o t), pa je $f(P'_t) > f(P_0)$. Kako se za svaku okolinu U točke P_0 može uzeti t tako malen da je $P'_t \in U$, zaključujemo da f u P_0 nema lokalni maksimum.
Analogno, polazeći od točke P''_t, zaključujemo da funkcija f nema u P_0 niti lokalni minimum, čime je teorem dokazan.

$\square$

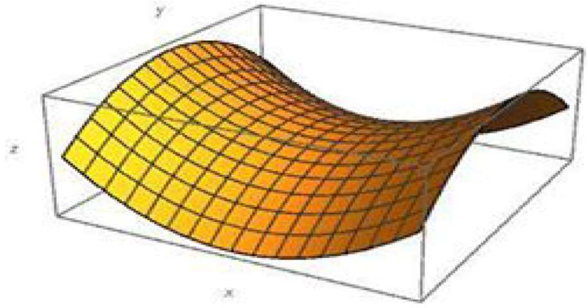
Primjer 5. *Primjeri grafova funkcija u okolini stacionarne točke u kojoj je drugi diferencijal pozitivno definitna, negativno definitna odnosno indefinitna kvadratna forma.*



Slika 5: Graf funkcije $f(x) = x^2 + y^2$ koja postiže lokalni minimum u točki $(0, 0)$



Slika 6: Graf funkcije $f(x) = -x^2 - y^2$ koja postiže lokalni maksimum u točki $(0, 0)$



Slika 7: Graf funkcije $f(x) = x^2 - y^2$ gdje je točka $(0, 0)$ sedlasta točka

Napomena 2. Ako je $D^2 f(P_0)$ pozitivno semidefinitna ili negativno semidefinitna kvadratna forma, onda nema odluke, tj. ne možemo ništa zaključiti o karakteru toče P_0 pa su potrebna dodatna ispitivanja kojima se u ovome radu nećemo baviti.

Dovoljni uvjeti za postojanje lokalnog ekstrema funkcije više varijabli mogu se provjeriti i preko Sylvesterovog kriterija. U slučaju funkcija s dvije ili tri varijable, relativno je jednostavno prikazati drugi diferencijal kao kvadratnu formu, pridružiti mu simetričnu matricu i odrediti sve subdeterminante. U slučaju funkcija s više od dvije ili tri varijable taj postupak je teži i kompliciraniji.

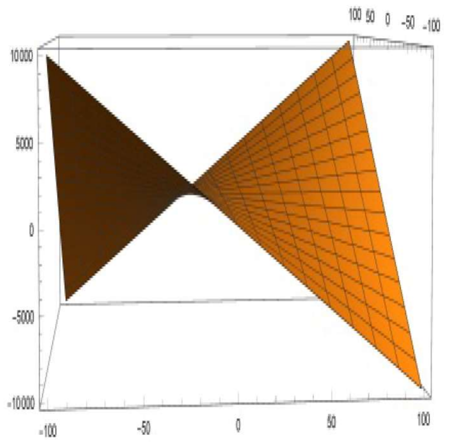
3.1 Postupak traženja ekstrema funkcije dvije varijable

U ovoj ćemo točki, koristeći prethodno navedene teoreme i definicije za $n = 2$, opisati postupak traženja ekstrema funkcija dviju varijabli.

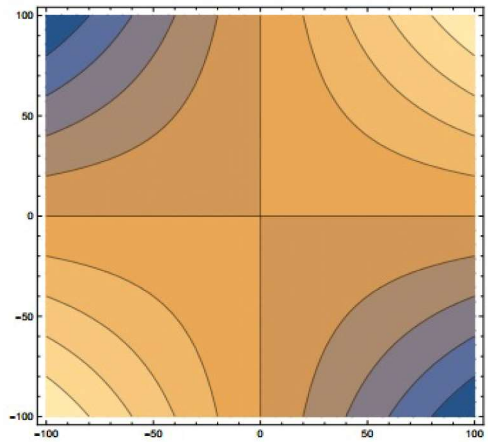
1. Pronaći stacionarne točke zadane funkcije $f(x, y)$, tj. uređene parove realnih brojeva (x_0, y_0) takve da je
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$
2. Pronaći parcijalne derivacije drugoga reda zadane funkcije $f(x, y)$:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$
3. Izračunati vrijednosti parcijalnih derivacija drugoga reda
$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
u svakoj stacionarnoj točki.
4. Promatrati matricu: $q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ i $detq = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}$.
   (a) Ako je $detq > 0$, onda funkcija f u promatranoj stacionarnoj točki postiže lokalni ekstrem. Dodatno, ukoliko je $a_{11} > 0$, radi se o minimumu, a ako je $a_{11} < 0$ o maksimumu.
   (b) Ako je $detq < 0$, onda funkcija f u promatranoj stacionarnoj točki nema ekstrema.
   (c) Ako je $detq = 0$, onda za odluku o ekstremu u promatranoj stacionarnoj točki treba vršiti posebna ispitivanja.

Primjer 6. *Koristeći prethodno navedeni postupak traženja ekstrema funkcija dviju varijabli, odredimo ekstreme funkcije* $f(x, y) = xy$.

1. *Parcijalna derivacija funkcije f po prvoj varijabli je jednaka y, dok je parcijalna derivacija funkcije f po drugoj varijabli jednaka x. Nakon izjednačavanja parcijalnih derivacija s nulom, slijedi da je stacionarna točka dane funkcije* $(0, 0)$.
2. *Potrebno je izračunati parcijalne derivacije drugoga reda funkcije f:*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 1.$$
3. *Nakon izračunavanja vrijednosti drugih parcijalnih derivacija u stacionarnoj točki* $(0, 0)$ *slijedi:*
$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 0.$$
4. *Promatramo matricu* $q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *i njezinu determinantu* $detq = 0 - 1 = -1$. *Budući je determinanta manja od nule, zaključujemo da funkcija u promatranoj točki nema ekstrem, tj. da je ta točka sedlasta.*



(a) Graf-ploha funkcije



(b) ContourPlot funkcije

Slika 8: Funkcija $f(xy) = xy$

Primjer 7. *Odredimo lokalne ekstreme funkcije* $f(x,y) = x^2 + 2y^3 + y^2 - 2x + 1$. *Prve parcijalne derivacije funkcije* f *su:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 + 2y.$$

Ako prve parcijalne derivacije izjednačimo s nulom dobit ćemo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0 \\ 6y^2 + 2y &= 0, \end{aligned}$$

čija su rješenja $x = 1$, $y_1 = 0$ *i* $y_2 = -\frac{1}{3}$. *Prema tome, funkcija* f *može imati ekstrem u točkama* $(1,0)$ *i* $(1, -\frac{1}{3})$.
Druge parcijalne derivacije funkcije f *su:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 0.$$

Za točku $(1,0)$ *vrijedi*

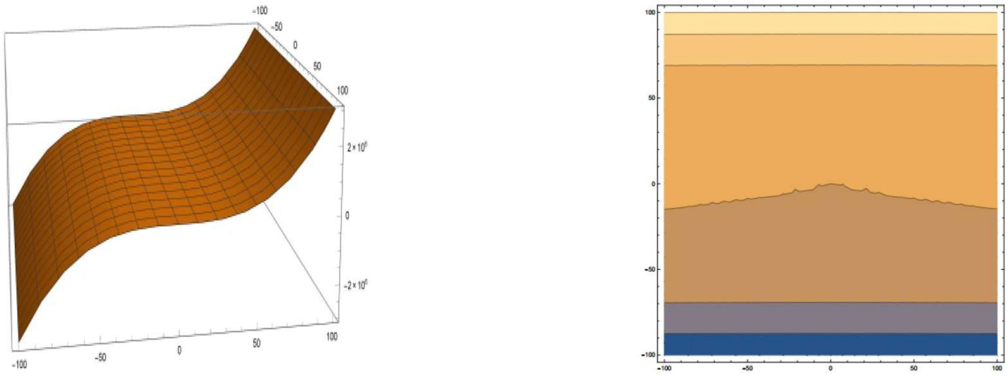
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1,0) = 0,$$

pa je $q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Kako je* $2 > 0$ *i* $\det q > 0$, *prema Teoremu 7 je* q *pozitivno definitna pa funkcija* f *u točki* $(1,0)$ *ima lokalni minimum.*

Za točku $(1, -\frac{1}{3})$ *vrijedi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -\frac{1}{3}) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -\frac{1}{3}) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1, -\frac{1}{3}) = 0,$$

pa je $q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Kako je* $2 > 0$ *i* $\det q = -4 < 0$, *prema Teoremu 7 je* q *indefinitna. Zaključujemo da je* $(1, -\frac{1}{3})$ *sedlasta točka funkcije* f.



(a) Graf-ploha funkcije (b) ContourPlot funkcije

Slika 9: Funkcija $f(x,y) = x^2 + 2y^3 + y^2 - 2x + 1$

Primjer 8. *Odredimo lokalne ekstreme funkcije* $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.
Prve parcijalne derivacije funkcije f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 8.$$

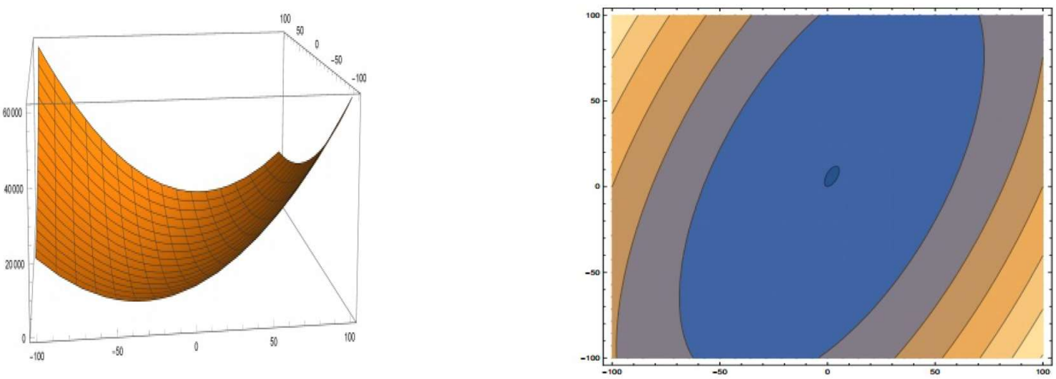
Nakon izjednačavanja parcijalnih derivacija s nulom i rješavanja pripadnog sustava dobijamo točku $(2,6)$ *u kojoj funkcija* f *može imati ekstrem.*
Druge parcijalne derivacije funkcije f *su:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -2,$$

pa je pripadna matrica $q = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.
Svojstvene vrijednosti matrice q *su:*

$$\lambda_1 \approx 6.86 > 0 \quad i \quad \lambda_2 \approx 1.17 > 0.$$

Prema Teoremu 6, q *je pozitivno definitna pa funkcija* f *u* $(2,6)$ *postiže lokalni minimum.*



(a) Graf-ploha funkcije (b) ContourPlot funkcije

Slika 10: Funkcija $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

Literatura

[1] M.CRNJAC, D.JUKIĆ, R.SCITOVSKI, *Matematika*, Odjel za matematiku, Osijek, 1994.

[2] S.KUREPA, *Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje)*, Tehnička knjiga, Zagreb 1989.

[3] S.KUREPA, *Matematička analiza 2* (funkcije jedne varijable), Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[4] S.KUREPA, *Matematička analiza 3* (funkcije više varijabli), Tehnička knjiga, Zagreb 1979.

[5] D.BAKIĆ, *Matematika*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet-Matematički odjel, Zagreb, 2009.

[6] Š.UNGAR, *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2005.

[7] I. SLAPNIČAR, *Matematika 1*, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 2002.