Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Nastavnički studij matematike i informatike

Eva Kalčić

Miquelov teorem

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Nastavnički studij matematike i informatike

Eva Kalčić

Miquelov teorem

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović
Komentor: dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Euklidska geometrija jedno je od najstarijih područja matematike koje je iznjedrilo velik broj ideja i rezultata. Velik broj rezultata vezan je uz trokut i kružnicu. Veliki broj utjecajnih matematičara bavilo se upravo njima i njihovim svojstvima. Također, velika pažnja posvećena je i proučavanju trokutu, na razne načine, pridruženih kružnica. Jedan od značajnijih matematičara koji je dao rezultate iz ovog područja je Auguste Miquel.

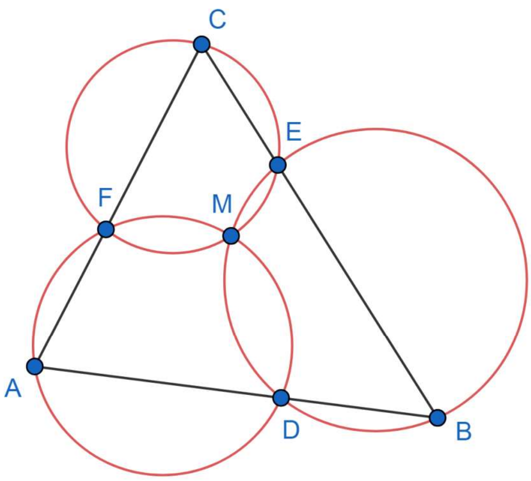
U ovom radu je razmatrana poznata tvrdnja o zajedničkoj točki tri kružnice koje prolaze vrhovima trokuta i po dvije točke na stranicama trokuta ili njihovim produženjima, poznata pod imenom Miquelov teorem.

U prvom poglavlju ovoga rada iskazat ćemo Miquelov teorem te navesti dva dokaza ove tvrdnje. Prvi dokaz je zasnovan na tvrdnji koncikličnosti točaka, a drugi dokaz je korištenjem inverzije. U drugom poglavlju definirat ćemo neke od pojmova vezanih uz Miquelov teorem te dokazati neke tvrdnje o njihovim svojstvima. Treće poglavlje bit će posvećeno nekim poznatim tvrdnjama vezanim uz Miquelov teorem.

1 Miquelov teorem

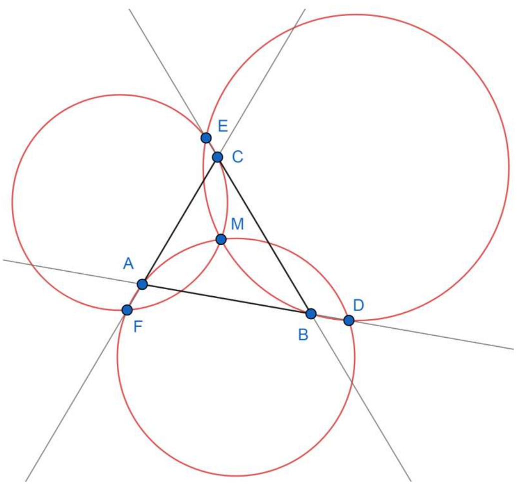
U ovom poglavlju iskazat ćemo i dokazati Miquelov teorem.

Teorem 1. *Ako na svakoj stranici trokuta (ili njihovim produženjima) odaberemo po jednu točku, tada se kružnice određene vrhom trokuta i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom sijeku u jednoj točki.*

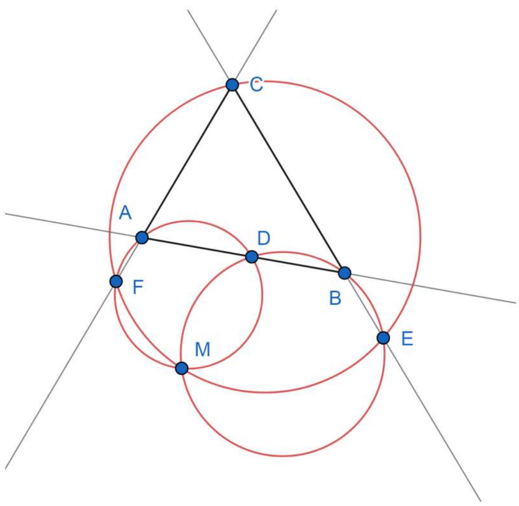


Slika 1

Slike 2 i 3 prikazuju slučaj kada su odabrane točke na produženjima stranica.



Slika 2



Slika 3

1.1 Iz povijesti Miquelovog teorema

Auguste Miquel (1816. – 1851., Albi, Francuska) bio je srednjoškolski učitelj u francuskom selu Nantua, u blizini Ženeve. Malo mjesto daleko od glavnog grada Pariza nije ga spriječilo objaviti svoja geometrijska otkrića u tada novoosnovanom časopisu o primijenjenoj matematici imena Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

U ovom radu govorit ćemo upravo o jednom njegovom rezultatu, ujedno i najpoznatijem, koji nosi njegovo ime. Tu tvrdnju, pod imenom Miquelov teorem, precizno je iskazao i dokazao 1838. godine.

Kao što je čest slučaj u matematici, postoje dokazi da su drugi već znali za ovu činjenicu, kao što je škotski matematičar William Wallace (1768. – 1843.) i švicarski matematičar Jakob Steiner (1797. – 1863.).

1.2 Dokazi Miquelovog teorema

U ovom poglavlju navest ćemo dva dokaza Miquelovog teorema. Možemo primijetiti kako se točka u kojoj se sijeku promatrane kružnice iz Miquelovog teorema može nalaziti unutar i izvan danog trokuta. Stoga ćemo prvi dokaz podijeliti na dva slučaja. Navedimo najprije definicije pojmova tetivni četverokut i konciklične točke.

Definicija 1. ***Tetivni četverokut*** *je četverokut kojem se može opisati kružnica.*

Osnovno svojstvo tetivnog četverokuta dano je sljedećim teoremom.

Teorem 2. *Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak* $180°$.

Pojam konciklčkih točaka usko je vezan uz tetivni četverokut.

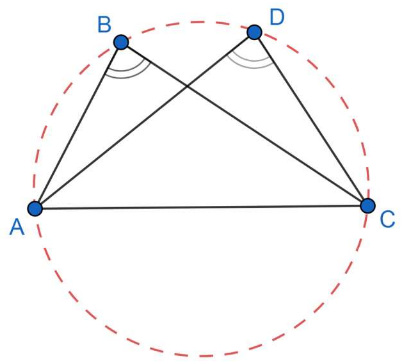
Definicija 2. *Točke koje leže na istoj kružnici zovemo* ***konciklične točke****.*

Prije iskaza tvrdnje o kocikličnosti točaka definiramo pojam orijentiranog kuta.

Definicija 3. *Orijentirani kut od pravca* l_1 *do pravca* l_2*, označava se* $\measuredangle(l_1, l_2)$*, je kut za koji treba zarotirati pravac* l_1 *u pozitivnom smjeru tako da se on podudara s pravcem* l_2 *ili je paralelan pravcu* l_2*.*
Orijentirani kut $\measuredangle ABC$ *je orijentirani kut pravca* AB *do pravca* BC*, odnosno kut za koji treba zarotirati pravac* AB *oko točke* B *u pozitivnom smjeru da se on podudara s pravcem* BC*.*

Veličina orijentiranog kuta $\measuredangle ABC$ može biti jednaka $\angle ABC$ ili njegovom suplementu.
Ako je trokut ABC pozitivno orijentiran, lako se vidi da su orijentirani kutovi $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ i $\measuredangle CAB$ jednaki odgovarajućim vanjskim kutovima, dok su unutarnji kutovi $\measuredangle CBA$, $\measuredangle ACB$ i $\measuredangle BAC$.

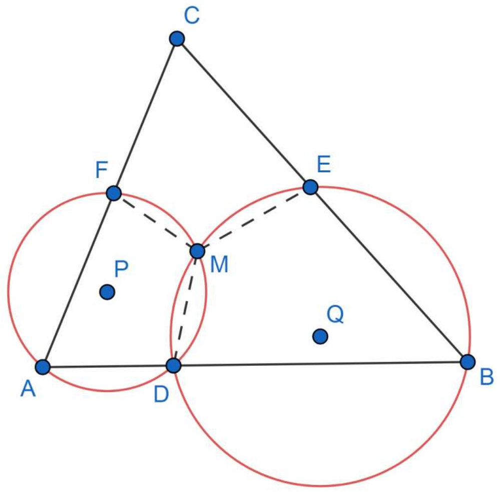
Lema 1. *Točke A, B, C i D su konciklične ako i samo ako je $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.*



Slika 4

Sada možemo navesti prvi dokaz Miquelova teorema ([8]).

Dokaz. **Slučaj I** Promatramo slučaj kada se točka M nalazi unutar $\triangle ABC$. Točke D, E i F su bilo koje točke redom na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Neka se kružnice sa središtima u točkama P i Q određene točkama A, D, F te B, E, D sijeku u točki M.
Nacrtamo dužine $\overline{MD}$, $\overline{ME}$ i $\overline{MF}$ (Slika 5).



Slika 5

Sada u tetivnom četverokutu $AFMD$ vrijedi:

$$\angle FMD = 180^\circ - \angle A.$$

Slično, u tetivnom četverokutu $BEMD$ vrijedi:

$$\angle EMD = 180^\circ - \angle B.$$

Zbrajanjem dobivamo

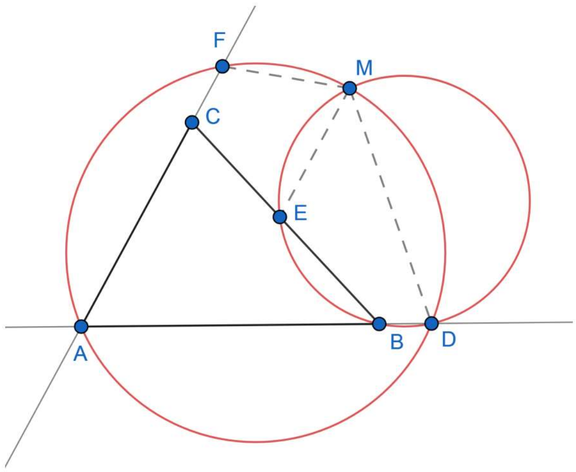
$$\angle FMD + \angle EMD = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$$
$$\angle FME = \angle A + \angle B.$$

No, u $\triangle ABC$ vrijedi:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C.$$

Stoga je $\angle FME = 180^\circ - \angle C$ iz čega slijedi da je četverokut $CFME$ također tetivni. Prema tome, točka M leži i na kružnici određenoj točkama F, E i C.

Slučaj II Slično se dokazuje i kada točka M leži izvan trokuta ABC. Kružnice određene točkama A, D i F te B, E i D sijeku se u točki M.
Nacrtamo dužine $\overline{MD}$, $\overline{ME}$ i $\overline{MF}$ (Slika 6).



Slika 6

Budući da je četverokut $AFMD$ tetivni, vrijedi

$$\angle FMD = 180^\circ - \angle A.$$

Slično, jer je četverokut $BEMD$ tetivni, vrijedi

$$\angle EMD = 180^\circ - \angle EBD = \angle B.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\angle FME &= \angle FMD - \angle EMD \\ &= 180^\circ - \angle A - \angle B \\ &= \angle C \\ &= 180^\circ - \angle ECF.\end{aligned}$$

Prema tome, vrhovi četverokuta $CFME$ su također konciklične točke i točka M leži na sve tri kružnice. □

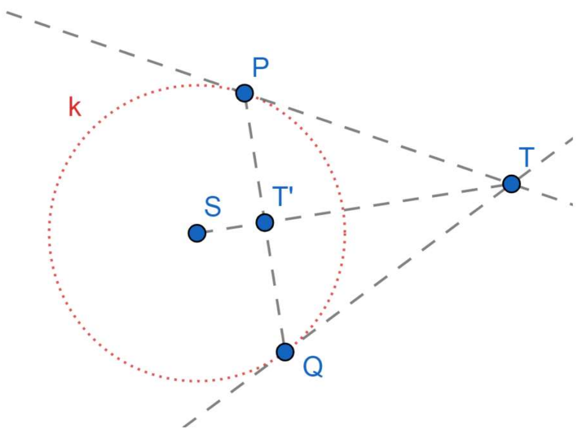
Teorem možemo dokazati i primjenom inverzije ([1]). Ova transformacija ravnine često je od velike pomoći pri rješavanju problema vezanih uz kružnice. Prisjetimo se definicije inverzije.

Definicija 4. *Neka je ravnina M i $S \in M$ čvrsta točka ravnine, $R > 0$ zadani pozitivan realan broj. Preslikavanje*

$$\mathcal{I}_S : M \backslash \{S\} \to M \backslash \{S\},$$
$$T \mapsto T' = \mathcal{I}_S(T),$$

*zove se **inverzija** sa središtem S i polumjerom R, ako vrijedi:*

1. *Točke S, T i T' su kolinearne.*
2. *Točke T i T' su s iste strane točke S.*
3. $|ST| \cdot |ST'| = R^2$.

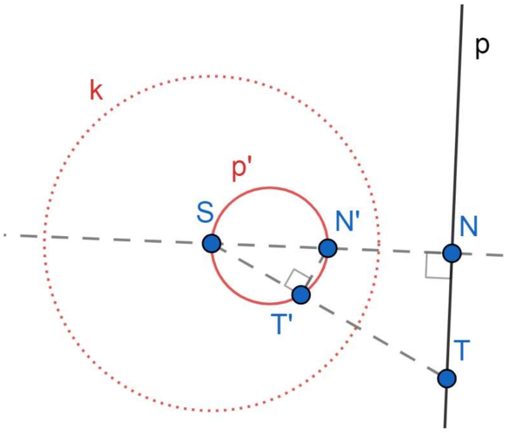


Slika 7. Konstrukcija inverzijom $\mathcal{I}_S$ pridruženih točaka T, T'

Na temelju same definicije možemo uočiti da je svaka točka kružnice sa središtem u centru inverzije S i polumjerom $r_S = R$ fiksna točka te inverzije. Tu kružnicu $k(S, R)$ zovemo **kružnicom inverzije**, a njezin polumjer **polumjerom inverzije**.

Osim toga, važno je znati i sljedeća svojstva inverzije:

1. Pravac p koji ne prolazi centrom inverzije $\mathcal{I}_S$ preslikava se u kružnicu p' koja prolazi centrom S te inverzije.



Slika 8. Slika pravca pri inverziji

Dokaz. Neka je p neki pravac ravnine $M\setminus\{S\}$ i neka je N nožište okomice spuštene iz S na p, a $N' = \mathcal{I}_S(N)$ (Slika 8). Vrijedi

$$|SN'| = \frac{R^2}{|SN|}.$$

Dalje, neka je T bilo koja točka pravca p i $T' = \mathcal{I}_S(T)$. Tada je

$$|SN| \cdot |SN'| = |ST| \cdot |ST'| = R^2.$$

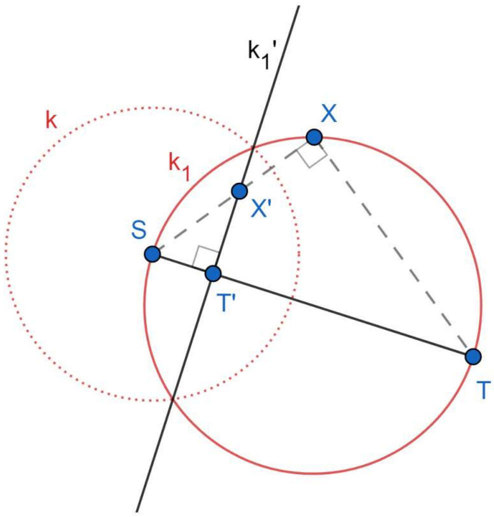
Slijedi

$$\frac{|SN|}{|ST|} = \frac{|ST'|}{|SN'|},$$

što povlači sličnost trokuta SNT i $N'T'S$, jer imaju zajednički kut $\angle NST$ i dvije proporcionalne stranice. Kako je uz to $\triangle SNT$ pravokutan s pravim kutom uz vrh N, to mora biti i $\triangle ST'N'$ pravokutan s pravim kutom uz vrh T'. Prema obratu Talesovog teorema, točka T' mora ležati na kružnici promjera $\overline{SN'}$.

Dakle, svaka točka pravca p preslikava se u točku kružnice promjera $\overline{SN'}$ koja prolazi centrom inverzije, odnosno u točku kružnice p'. Budući da je inverzija bijekcija, tvrdnja slijedi neposredno. $\square$

2. Kružnica k_1 koja prolazi centrom S inverzije $\mathcal{I}_S$ preslikava se u pravac k_1' koji ne prolazi centrom S.



Slika 9. Slika kružnice pri inverziji

Dokaz. Neka je S centar inverzije $\mathcal{I}$ i k_1 kružnica koja prolazi kroz S. Neka je $\overline{ST}$ promjer te kružnice, a $T' = \mathcal{I}_S(T)$. Uzmimo proizvoljnu točku X na kružnici k_1, a s X' označimo njezinu sliku, tj. $X' = \mathcal{I}_S(X)$. Označimo s k_1' pravac koji je okomit na ST i prolazi točkom T'. Tvrdimo da je k_1' slika kružnice k_1 (Slika 9).

Kako za pridružene točke T, T' i X, X' vrijedi

$$|ST| \cdot |ST'| = |SX| \cdot |SX'| = R^2,$$

a iz toga i

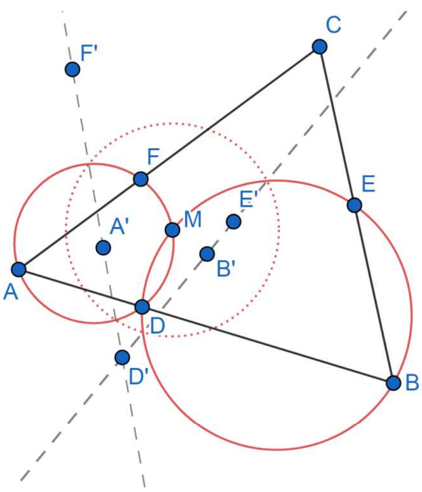
$$\frac{|ST|}{|SX|} = \frac{|SX'|}{|ST'|},$$

slijedi da su trokuti SXT i $ST'X'$ slični, jer imaju zajednički kut $\angle TSX$ i dvije proporcionalne stranice.

Prema Talesovom teoremu je $\angle SXT = 90°$, pa je onda i $\angle ST'X' = 90°$. Slijedi da se točka X' nalazi na pravcu k_1'. Kako to vrijedi za svaku točku kružnice k_1, zbog činjenice da je inverzija bijekcija, tvrdnja je dokazana. □

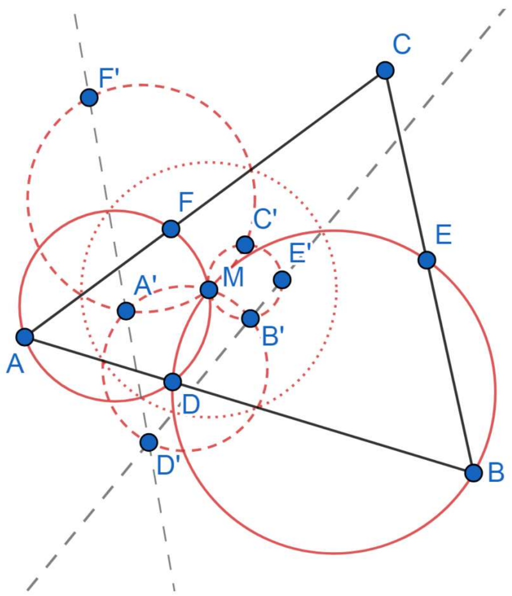
Primijenimo ova svojstva na dokazivanje Miquelovog teorema.

Dokaz. Neka je dan $\triangle ABC$ i točke D, E i F redom na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Neka se dvije kružnice određene vrhovima A, D, F i D, B, E sijeku u točki M. Kružnica inverzije s centrom inverzije M i proizvoljnim radijusom preslikava točke A, D, F u A', D', F', a točke D, B, E u D', B', E'. Točke A', D', F' su kolinearne, kao i točke D', B', E' (Slika 10).



Slika 10

Tada su četverokuti $A'D'B'M$, $B'E'C'M$ i $C'F'A'M$ tetivni (Slika 11).



Slika 11

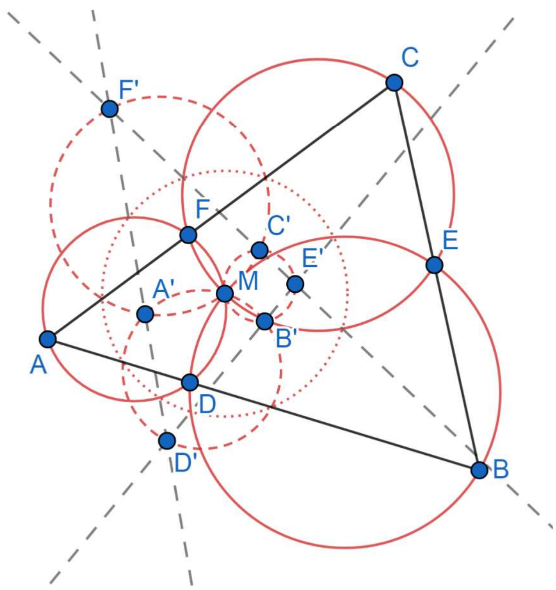
Označimo $\angle A'D'B' = \alpha$, $\angle A'F'C' = \beta$, $\angle B'E'C' = \gamma$. Tada će za kut oko točke M vrijediti

$$180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma = 360°,$$

što daje

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Sada, ako točka C' ne leži na $F'E'$, ta jednakost ne bi vrijedila. Prema tome, slijedi da su točke F', C' i E' kolinearne, tj. leže na istom pravcu koji ne prolazi centrom inverzije M (Slika 12). Djelovanjem istom inverzijom, točke F', C' i E' se preslikaju u točke F, C i E, redom, koje sada pripadaju istoj kružnici koja prolazi centrom inverzije M.



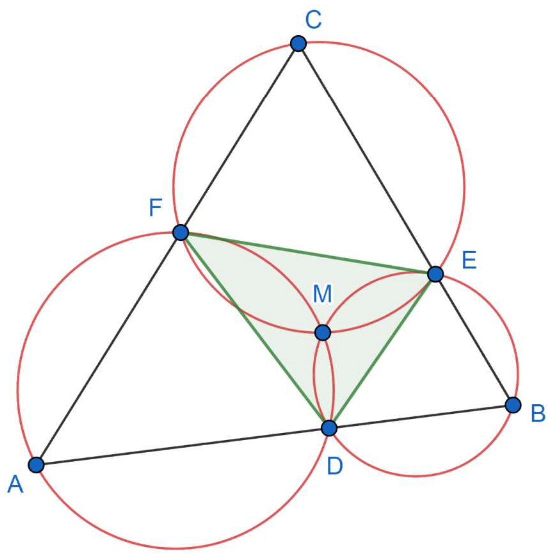
Slika 12

□

2 Miquelova točka i Miquelov trokut

Na početku ovog poglavlja definirat ćemo neke pojmove vezane uz ranije iskazani i dokazani Miquelov teorem.

Definicija 5. *Neka je ABC dani trokut i D, E i F bilo koje točke na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ ili njihovim produženjima, redom.*
Točka u kojoj se sijeku kružnice opisane trokutima ADF, BED i CFE zove se ***Miquelova točka*** *trokuta ABC.*
Trokut određen točkama D, E i F naziva se ***Miquelov trokut*** *trokuta ABC.*
Kružnice opisane trokutima ADF, BED i CFE zovemo ***Miquelove kružnice*** *trokuta ABC (Slika 13).*



Slika 13. Miquelov trokut

U daljnjem ćemo radu vidjeti kako jedna Miquelova točka definira beskonačno mnogo Miquelovih trokuta. Uz to iskazat ćemo i dokazati brojne tvrdnje vezane uz navedene pojmove.

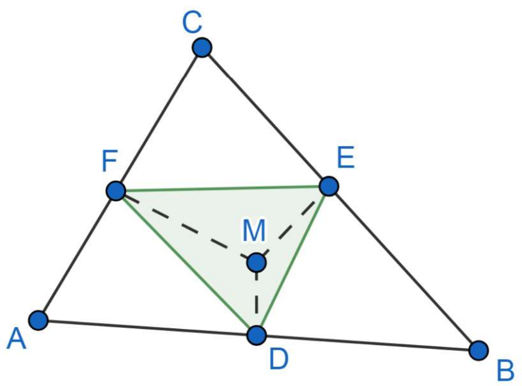
2.1 Tvrdnje o kutovima

Na početku ovog poglavlja dokažimo neke tvrdnje koje govore o položaju Miquelove točke u odnosu na Miquelov trokut.

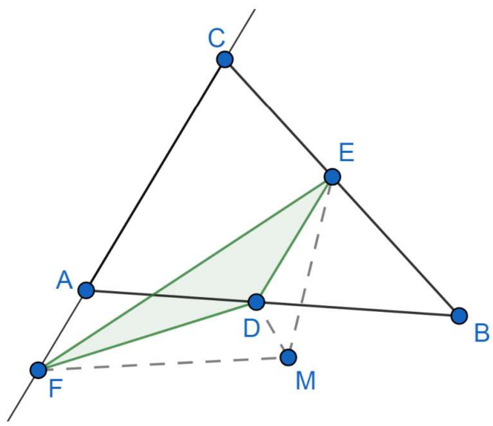
Lema 2. *Neka je dan trokut ABC i neka je M Miquelova točka trokuta ABC. Tada vrijedi:*

i. Ako se Miquelova točka M nalazi unutar trokuta ABC, tada se nalazi i unutar Miquelovog trokuta DEF.

ii. Ako se Miquelova točka M nalazi izvan trokuta ABC, tada se nalazi i izvan Miquelovog trokuta DEF.



Slika 14



Slika 15

Dokaz. Neka je dan $\triangle ABC$ i neka su $\triangle DEF$ i točka M pripadni Miquelov trokut i Miquelova točka trokuta ABC.

Ako se točka M nalazi unutar $\triangle ABC$ (Slika 14), tada vrijedi

$$\angle FMD + \angle DME + \angle EMF = 360°.$$

To vrijedi jer su kutovi s lijeve strane jednakosti suplementarni unutarnjim kutovima trokuta $\triangle ABC$, tj. s $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, redom. Stoga se M nalazi i unutar $\triangle DEF$.

Ako se točka M nalazi izvan $\triangle ABC$ (Slika 15), tada vrijedi nejednakost

$$\angle FMD + \angle DME + \angle EMF < 360°.$$

Sada su dva od tri kuta s lijeve strane jednaka s dva unutarnja kuta trokuta ABC, dok je treći kut suplementaran preostalom unutarnjem kutu trokuta ABC. Naprimjer,

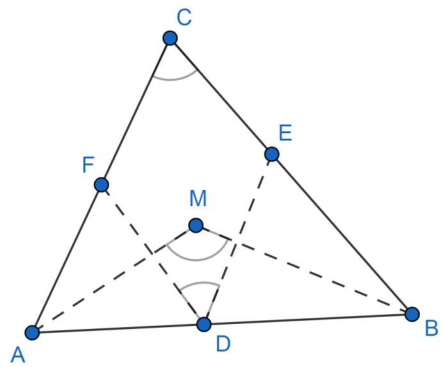
$$\begin{aligned}\angle FMD + \angle DME + \angle EMF =& \angle A + \angle B + (180^\circ - \angle C)\\ =& \angle A + \angle B + \angle C + 180^\circ - 2\angle C\\ =& 360^\circ - 2\angle C\\ <& 360^\circ.\end{aligned}$$

Prema tome, točka M se nalazi također izvan trokuta DEF. □

Sljedeću tvrdnju, koja će nam biti važna pri dokazivanju drugih teorema, nazivamo Miquelova jednakost ([3]).

Teorem 3. *Neka je M Miquelova točka i $\triangle DEF$ Miquelov trokut trokuta $\triangle ABC$. Vrijedi jednakost*

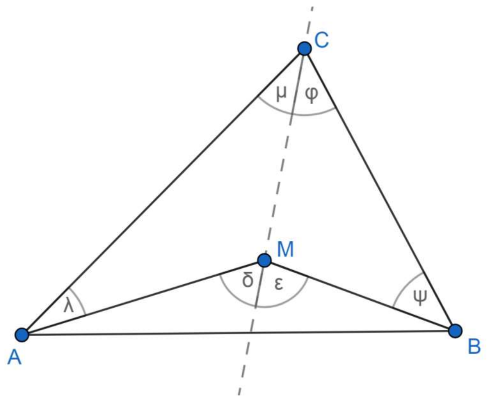
$$\angle AMB = \angle FDE + \angle ACB.$$



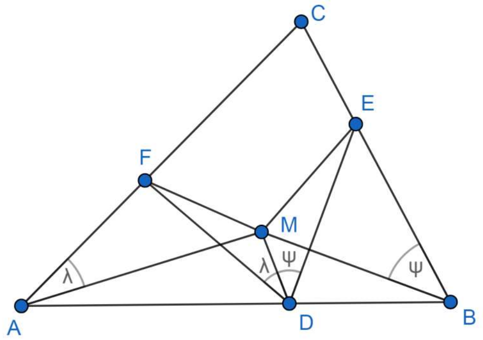
Slika 16

Dokaz. Neka je M Miquelova točka i $\triangle DEF$ Miquelov trokut trokuta $\triangle ABC$. Neka pravac CM dijeli kut $\angle AMB$ na dva dijela, δ i ϵ, kao na Slici 17. Kako je mjera vanjskog kuta trokuta jednaka zbroju mjera dvaju unutarnjih kutova koji s tim kutom nemaju zajednički vrh, imamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\delta &= \lambda + \mu\\ \epsilon &= \phi + \psi.\end{aligned}$$



Slika 17



Slika 18

Slijedi

$$\angle AMB = \delta + \epsilon = \lambda + \mu + \phi + \psi = \lambda + \angle ACB + \psi.$$

Budući da su A, D, M i F konciklične točke, prema Lemi 1, vrijedi jednakost kutova pri vrhovima A i D označenih s λ i analogno jednakost kutova pri vrhovima D i B označenih s ψ, zbog konciklčnosti točaka D, B, E i M (Slika 18). Prema tome je

$$\angle FDE = \lambda + \psi,$$

iz čega konačno slijedi

$$\angle AMB = \angle FDE + \angle ACB.$$

□

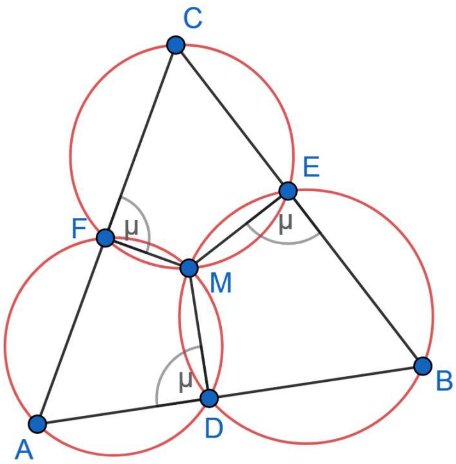
Teorem 4. *Dužine koje spajaju Miquelovu točku s vrhovima Miquelovog trokuta zatvaraju sa stranicama polaznog trokuta sukladne kutove.*

Vrijedi

$$\angle ADM = \angle BEM = \angle CFM = \mu.$$

Analogno,

$$\angle AFM = \angle BDM = \angle CEM = 180° - \mu.$$



Slika 19

Dokaz. Četverokut $ADMF$ je tetivni iz čega slijedi da su kutovi $\angle ADM$ i $\angle AFM$ suplementarni. No, to vrijedi i za kutove $\angle AFM$ i $\angle CFM$ (Slika 19). Prema tome, vrijedi

$$\angle ADM = \angle CFM,$$

a iz toga slijedi

$$\angle BDM = \angle AFM.$$

Preostale jednakosti dokazujemo analogno. □

Vrijedi i obrat Teorema 4. Štoviše, iz sljedećeg teorema doznajemo mnogo više o vezi Miquelove točke i Miquelovih trokuta.

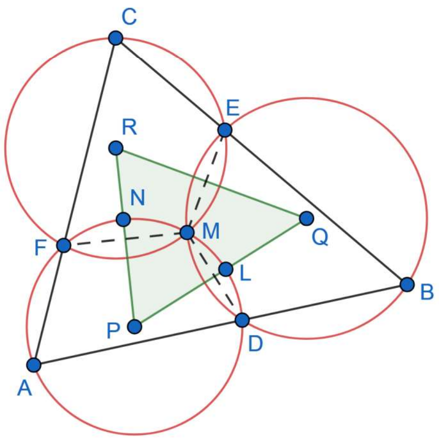
Teorem 5. *Ako bilo koja tri pravca koja prolaze kroz M zatvaraju sukladne kutove sa stranicama trokuta ABC, tada je M Miquelova točka za trokut DEF kojeg određuje. Nadalje, točka M je Miquelova točka za beskonačnu familiju trokuta.*

2.2 Trokuti slični polaznom trokutu

Sljedećih nekoliko tvrdnji reći će nam nešto više o trokutima sličnim polaznom trokutu ABC.

Teorem 6. *Središta Miquelovih kružnica danog trokuta određuju trokut sličan danom trokutu.*

Dokaz. Neka je ABC dani trokut i točke D, E i F na stranicama $\triangle ABC$. Neka je točka P središte kružnice određene točkama A, D i F, točka Q središte kružnice određene točkama B, E i D te točka R središte kružnice određene točkama C, F i E. Te tri kružnice sijeku se u točki M.
Najprije uočimo zajedničke tetive $\overline{MD}$, $\overline{ME}$ i $\overline{MF}$. Nadalje, $\overline{RP}$ i $\overline{PQ}$ sijeku kružnicu sa središtem P u točkama N i L, redom.



Slika 20

Budući da je pravac kroz središta R i P okomit na zajedničku tetivu te ju raspolavlja, taj je pravac simetrala dužine $\overline{FM}$. Stoga je $\angle FPN = \angle NPM$. Slično, pravac koji prolazi točkama P i Q je simetrala dužine $\overline{MD}$ pa je $\angle MPL = \angle LPD$. Sada je

$$\angle NPL = \angle NPM + \angle MPL = \frac{1}{2}\angle FPD.$$

Kako je

$$\angle FAD = \frac{1}{2}\angle FPD,$$

onda je

$$\angle NPL = \angle FAD = \angle CAB.$$

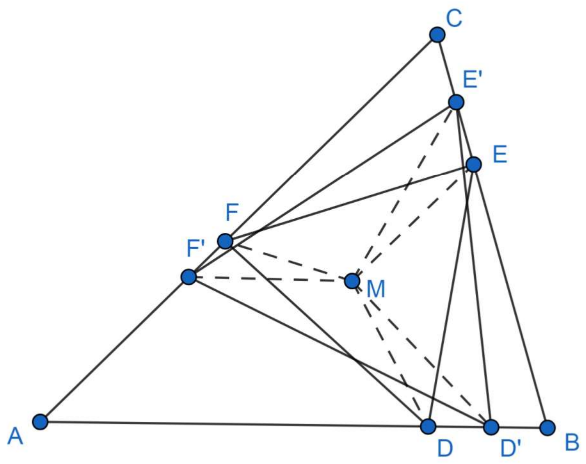
Na sličan način možemo dokazati da je

$$\angle PRQ = \angle FCE = \angle ACB.$$

Prema tome je $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. $\square$

Prije iskaza sljedeće tvrdnje podsjetimo da je trokut upisan u drugi trokut ako svaki od vrhova prvog trokuta leži na stranicama drugog trokuta.

Teorem 7. *Dva trokuta upisana u isti trokut koji imaju zajedničku Miquelovu točku su slična.*



Slika 21

Dokaz. Promatrajmo $\triangle DEF$ i $\triangle D'E'F'$ sa zajedničkom Miquelovom točkom M (Slika 21). Prema Teoremu 4, vrijedi:

$$\angle MFA = \angle MDB$$
$$\angle MD'A = \angle MF'C,$$

iz čega slijedi sličnost $\triangle MD'D$ i $\triangle MF'F$. Analogno je i $\triangle MF'F \sim \triangle ME'E$. Prema tome,

$$\angle DMD' = \angle FMF' = \angle EME'.$$

Odakle dobivamo

$$\angle D'MF' = \angle DMF$$
$$\angle D'ME' = \angle DME$$
$$\angle E'MF' = \angle EMF.$$

Također, kao rezultat sličnosti gore navedenih trokuta, imamo jednakosti

$$\frac{|MD|}{|MD'|} = \frac{|MF|}{|MF'|} = \frac{|ME|}{|ME'|}.$$

Budući da su dva trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne i odgovarajući kutovi jednake veličine, dobivamo sljedeće

$$\triangle D'MF' \sim \triangle DMF$$
$$\triangle D'ME' \sim \triangle DME$$
$$\triangle E'MF' \sim \triangle EMF.$$

Tada iz

$$\frac{|D'F'|}{|DF|} = \frac{|D'M|}{|DM|}$$

i

$$\frac{|D'E'|}{|DE|} = \frac{|D'M|}{|DM|}$$

slijedi

$$\frac{|D'F'|}{|DF|} = \frac{|D'E'|}{|DE|}.$$

Slično dobivamo

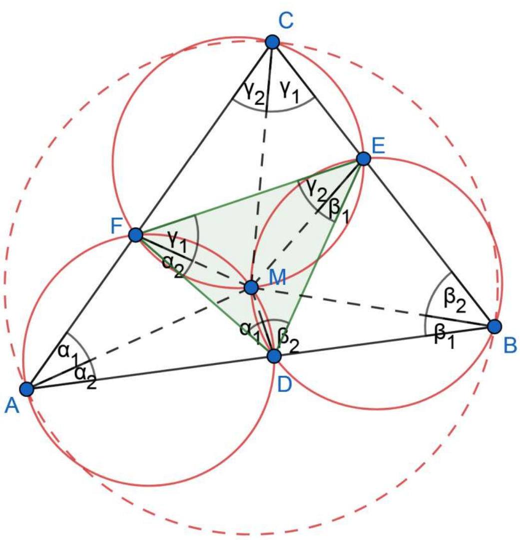
$$\frac{|E'F'|}{|EF|} = \frac{|D'E'|}{|DE|},$$

što dokazuje da zbog proporcionalnosti odgovarajućih stranica promatranih trokuta vrijedi $\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$. $\square$

Sljedeća lema reći će nam nešto više o kutovima Miquelovog trokuta koji je sličan polaznom trokutu. Najprije uvedimo oznake: $\angle CAM = \alpha_1$, $\angle MAB = \alpha_2$, $\angle ABM = \beta_1$, $\angle MBC = \beta_2$, $\angle BCM = \gamma_1$, $\angle MCA = \gamma_2$.

Lema 3. *Neka je točka M unutar trokutu ABC opisane kružnice i DEF Miquelov trokut točke M s obzirom na trokut ABC. Tada vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\begin{aligned} \measuredangle D =& \alpha_1 + \beta_2, \\ \measuredangle E =& \beta_1 + \gamma_2, \\ \measuredangle F =& \gamma_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$



Slika 22

Dokaz. Pri dokazivanju ove tvrdnje koristit ćemo Lemu 1. Promotrimo slučaj kada je M unutar trokuta ABC.

Dakle, budući da su točke A, D, M i Fkonciklične, vrijedi

$$\begin{aligned} \angle FDM &= \angle FAM = \alpha_1, \\ \angle MFD &= \angle MAD = \alpha_2. \end{aligned}$$

Analogno vrijedi za konciklične točke B, E, M i D te C, F, M i E, tj.

$$\begin{aligned}
\angle DBM &= \angle DEM = \beta_1, \\
\angle MDE &= \angle MBE = \beta_2, \\
\angle ECM &= \angle EFM = \gamma_1, \\
\angle MEF &= \angle MCF = \gamma_2.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\angle D = \angle FME = \angle FDM + \measuredangle MDE = \alpha_1 + \beta_2.$$

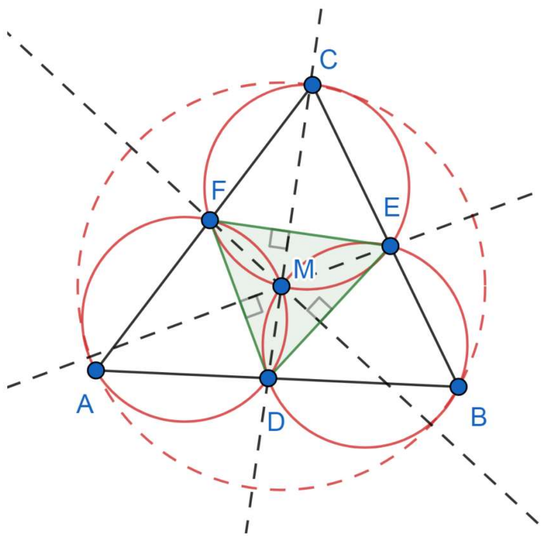
Analogno,

$$\begin{aligned}
\angle E &= \beta_1 + \gamma_2, \\
\angle F &= \gamma_1 + \alpha_2.
\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje kada je točka M izvan trokuta ABC, a unutar opisane kružnice trokuta. $\square$

U nastavku ćemo razmotriti još neka svojstva Miquelove točke. Pri dokazivanju istih koristit ćemo jednake oznake kao u prethodnoj lemi.

Teorem 8. *Ako je Miquelova točka M središte polaznom trokutu ABC opisane kružnice, onda je M ortocentar Miquelovog trokuta DEF.*



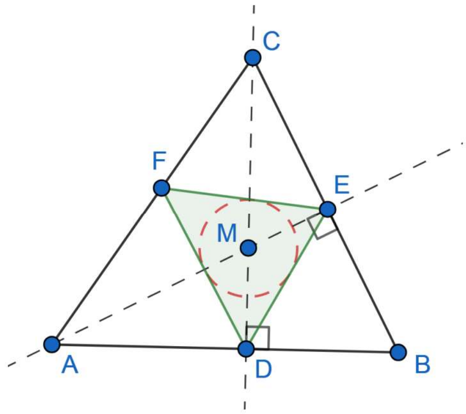
Slika 23

Dokaz. Ako je Miquelova točka M središte polaznom trokutu ABC opisane kružnice, onda je, prema Lemi 3, $\alpha_2 = \beta_1$, $\beta_2 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \alpha_1$ (Slika 22). Tako dolazimo do jednadžbe

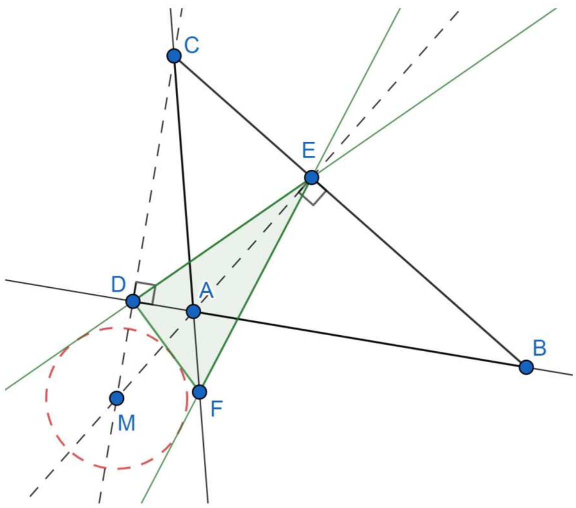
$$\gamma_2 + \gamma_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \alpha_2 = 90°.$$

Iz toga nam slijedi okomitost pravaca FM i DE, tj. $FM \perp DE$.
Slično dolazimo i do $DM \perp EF$, $EM \perp DF$, što povlači da je točka M ortocentar trokuta DEF. □

Teorem 9. *Ako je Miquelova točka M ortocentar trokuta ABC, tada je M središte upisane ili pripisane kružnice trokuta DEF.*



Slika 24



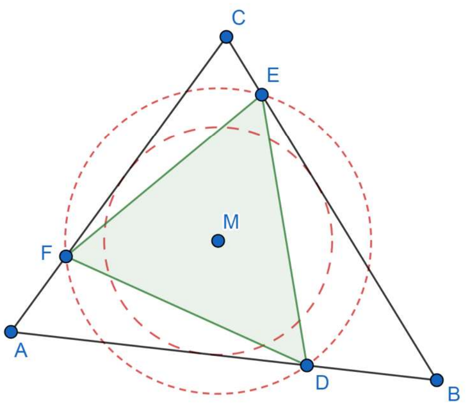
Slika 25

Dokaz. U obzir ćemo uzeti dva slučaja.

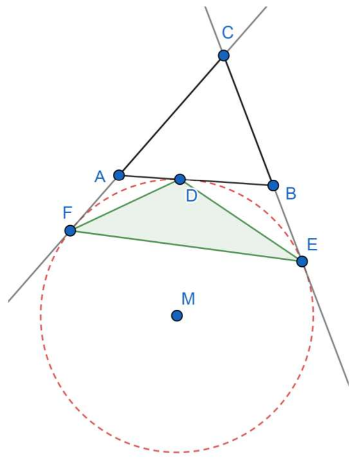
Slučaj I Neka je M ortocentar trokuta ABC kojemu su sva tri kuta šiljasta. Tada je $\gamma_1 = \alpha_2$ i $\alpha_1 = \beta_2$, stoga je točka M u $\triangle DEF$ sjecište simetrala unutarnjih kutova, tj. M je središte upisane kružnice trokuta DEF (Slika 24).

Slučaj II Neka je ABC tupokutan trokut tako da je kut pri vrhu A tup, tj. $\angle A > 90°$. U tom slučaju je $\beta_1 = \gamma_2$, $\gamma_1 = 180° - \alpha_2$, $\alpha_1 = 180° - \beta_2$. Prema tome su MD i MF simetrale vanjskih kutova, dok je ME unutarnja simetrala kuta. Slijedi, točka M je središte pripisane kružnice trokuta DEF (Slika 25). □

Teorem 10. *Ako je točka M središte upisane ili pripisane kružnice trokuta ABC, tada je M središte opisane kružnice trokuta DEF.*



Slika 26



Slika 27

Dokaz. Ponovno promatramo dva slučaja.

Slučaj I Neka je M središte trokutu ABC upisane kružnice. Tada je $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. Dakle, točka M je sjecište simetrala stranica trokuta DEF pa i središte opisane kružnice trokuta DEF.

Slučaj II Neka je M središte trokutu ABC pripisane kružnice koja dodiruje stranicu $\overline{AB}$. U tom slučaju, pravci AM, BM i CM su simetrale stranica trokuta DEF. Stoga je točka M središte trokutu DEF opisane kružnice. □

Zadnji teorem ovog potpoglavlja povezuje Miquelovu i Brocardovu točku polaznog i Miquelovog trokuta. Prije njegovog iskazivanja definirajmo Brocardovu točku trokuta ABC.

Definicija 6. *Neka je dan trokut ABC i točka Ω za koju vrijedi*

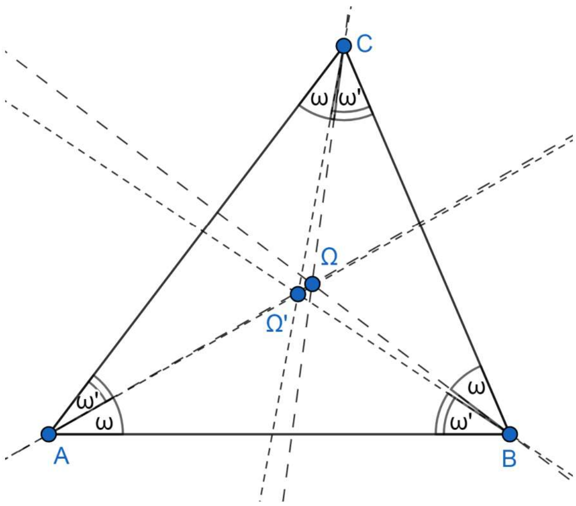
$$\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA = \omega.$$

*Točka Ω naziva se **prvom Brocardovom točkom** trokuta ABC, a kut ω **Brocardovim kutom** (Slika 28).*

Definicija 7. *Točka Ω' koju dobijemo kao sjecište pravaca $A\Omega'$, $B\Omega'$, $C\Omega'$ za koje vrijedi*

$$\angle\Omega' BA = \angle\Omega' CB = \angle\Omega' AC = \omega'$$

*zovemo **drugom Brocardovom točkom** trokuta ABC.*



Slika 28. Prva i druga Brocardova točka

Teorem 11. *Vrijedi:*

i. Ako je Miquelova točka M prva Brocardova točka trokuta ABC, onda je i prva Brocardova točka trokuta DEF.

ii. Ako je Miquelova točka M druga Brocardova točka trokuta ABC, onda je i druga Brocardova točka trokuta DEF.

Pri dokazivanju ovog teorema koristit ćemo oznake kao u Lemi 3.

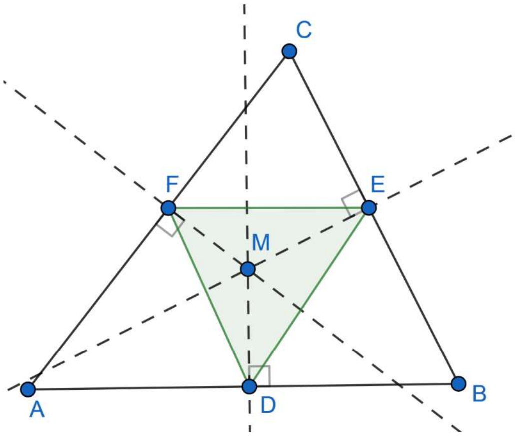
Dokaz. Ako je točka M prva Brocardova točka trokuta ABC, tada vrijedi $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2$ pa iz Leme 3 slijedi da je M Brocardova točka trokuta DEF.

Ako je točka M druga Brocardova točka trokuta ABC, tada vrijedi $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$ pa prema Lemi 3 slijedi da je M druga Brocardova točka trokuta DEF. $\square$

2.3 Miquelovi nožišni trokuti

Na početku poglavlja definirajmo nožišni trokut.

Definicija 8. *Trokut čiji su vrhovi nožišta okomica iz fiksne točke M na stranice trokuta ABC nazivamo **nožišni trokut** ili pedalni trokut pola M s obzirom na dani trokut ABC.*

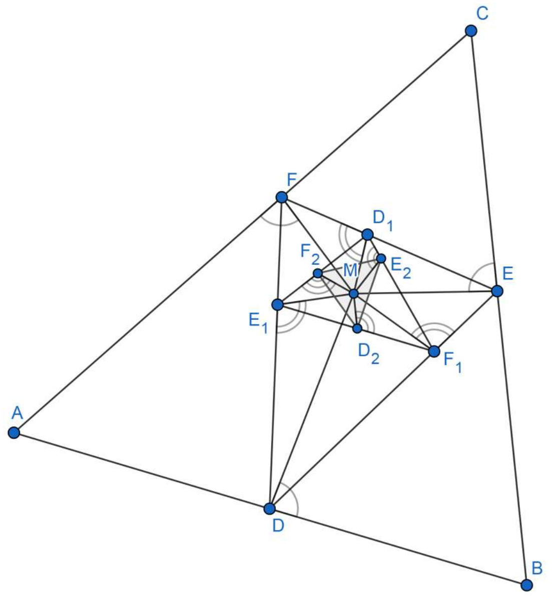


Slika 29

Takvi trokuti imaju brojna zanimljiva svojstva, a o jednom svojstvu govori sljedeća tvrdnja.

Teorem 12. (Neubergov teorem) *Ako je konstruiran niz nožišnih trokuta s obzirom na istu točku, tada je treći nožišni trokut sličan početnom trokutu.*

Međutim, ovaj teorem možemo generalizirati tako da konstruiramo dužine iz točke M prema stranicama trokuta ABC pri čemu one zatvaraju jednake kutove sa stranicama tog trokuta, tj. tako da vrijedi $\angle MDB = \angle MEC = \angle MFA$. Neka je dobiveni trokut DEF Miquelov. Sljedeće, iz iste točke M konstruiramo drugi Miquelov trokut, $\triangle D_1E_1F_1$, unutar prvog Miquelovog trokuta, a zatim i treći Miquelov trokut, $\triangle D_2E_2F_2$, unutar drugoga. Tada je treći Miquelov trokut $D_2E_2F_2$ sličan polaznom trokutu ABC (Slika 30).



Slika 30

Ono što ovu generalizaciju čini iznenađujućom jest to da se niz tih Miquelovih trokuta može konstruirati potpuno proizvoljno. Iako bi mogli pretpostaviti da kut koji zatvara dužina s jednim krajem u točki M sa stranicama drugog trokuta mora biti jednak kutu koji zatvara dužina s jednim krajem u točki M sa stranicama prvog trokuta, to uopće ne mora biti tako, tj. odabir Miquelovih trokuta je proizvoljan.

Dokažimo sada ovu generalizaciju.

Dokaz. Nacrtajmo dužinu $\overline{AM}$. Konstruirajmo dužine iz točke M prema stranicama trokuta ABC, DEF i $D_1E_1F_1$ uočavamo kako su četverokuti $ADMF$, E_1MD_1F i $F_2ME_2D_1$ tetivni. Prema tome,

$$\angle MAD = \angle MFD = \angle MD_1E_1 = \angle ME_2F_2.$$

Slično možemo pokazati da vrijedi i

$$\angle MAF = \angle ME_2D_2.$$

Slijedi

$$\angle F_2E_2D_2 = \angle BAC.$$

Na isti način možemo pokazati da su kutovi pri vrhovima B i F_2 te C i D_2 sukladni.

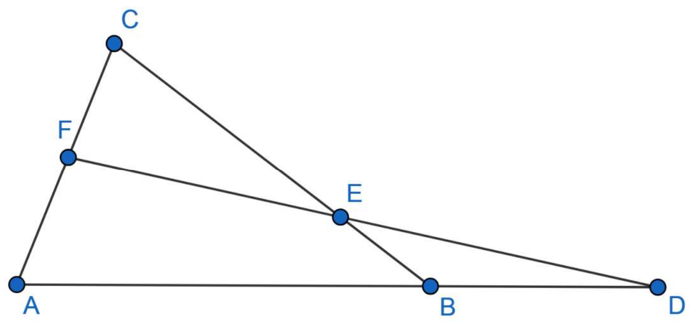
□

3 Zanimljive tvrdnje o konciklčnosti točaka

U ovom poglavlju razmatrat ćemo neke zanimljive tvrdnje o konciklčnosti točaka.

3.1 Miquelov i Steinerov teorem

Iz dosadašnjih razmatranja o Miquelovoj točki trokuta znamo da je Miquelova točka M drugo sjecište kružnica CFE i BDE (Slika 31). Promotrit ćemo slučaj kada točke D, E i F leže na istom pravcu. Za početni trokut u obzir ćemo uzeti $\triangle ADF$, a B, E i C točke na njegovim stranicama.

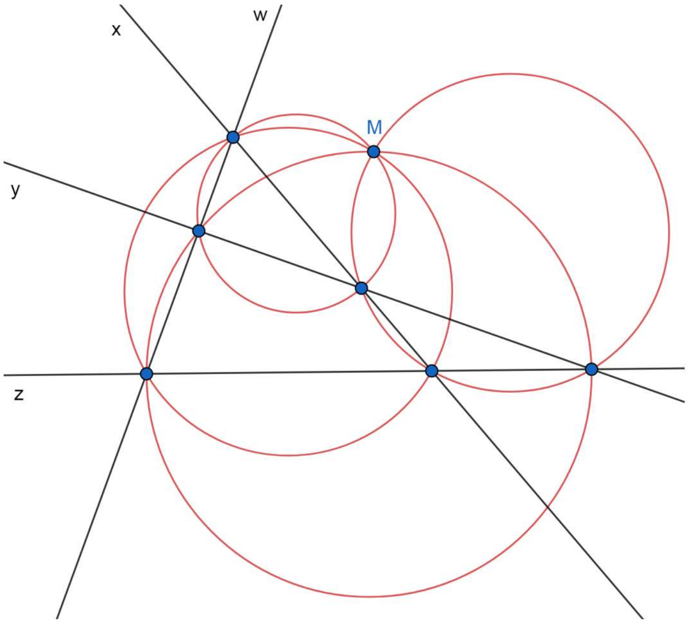


Slika 31

Ponovno primjećujemo kako su dvije od tri Miquelove kružnice one koje su opisane trokutima CFE i BDE, što implicira da one određuju istu Miquelovu točku M. Može se pokazati da se radi o uvijek istoj Miquelovoj točki bez obzira na koja tri od četiri pravca leže stranice trokuta, dok preostali pravac prolazi kroz točke na stranicama. Tako dolazimo do izvanrednog rezultata danog sljedećim teoremom ([3]).

Teorem 13. *Neka se četiri pravca sijeku dva po dva u šest točaka. Ta četiri pravca (uzeta po tri) određuju četiri trokuta čije opisane kružnice prolaze istom točkom.*

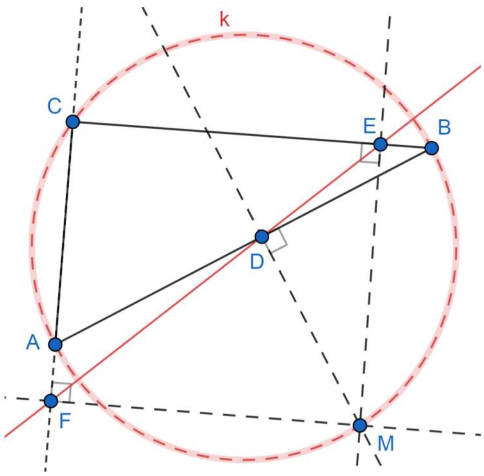
Točku presijecanja M tada nazivamo **Miquelova točka potpunog četverostrana**.



Slika 32

Za dokaz ove tvrdnje koristit ćemo jedno od osnovnih svojstava Simsonovog pravca. Za početak ćemo definirati Simsonov pravac.

Definicija 9. *Neka je dan trokut ABC, k kružnica opisana tom trokutu i M neka točka na kružnici k. Pravac koji prolazi nožištima okomica iz točke M na stranice trokuta ABC zove se* ***Simsonov pravac*** *trokuta ABC (Slika 33).*



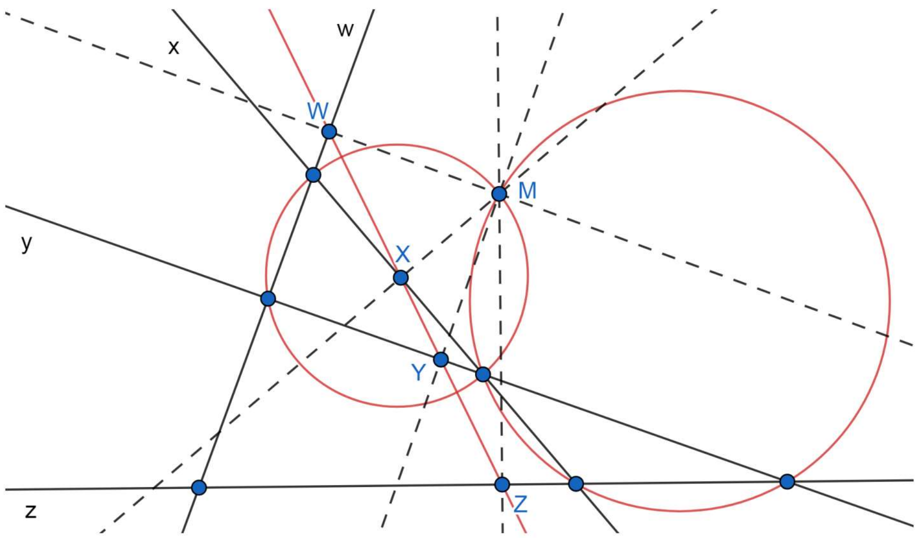
Slika 33. Simsonov pravac

Sljedeći teorem, koji će biti koristan pri dokazivanju Teorema 13, opisuje odnos između Miquelove točke i Simsonovog pravca ([3]).

Teorem 14. *Nožišta okomica iz Miquelove točke na stranice trokuta su kolinearna ako i samo ako se Miquelova točka nalazi na trokutu opisanoj kružnici.*

Sada možemo dokazati Teorem 13.

Dokaz. Kružnice koje se sijeku imaju najviše dvije zajedničke točke pa ih je potrebno razlikovati. Neka je M sjecište bilo koje dvije kružnice, koje ne leži ni na jednom od danih pravaca. Neka su to kružnice opisane trokutima koji su određeni pravcima w, x i y te x, y i z. Zatim, neka su točke W, X, Y i Z nožišta okomica na pravce w, x, y i z iz M.
Budući da M leži na kružnici opisanoj trokutu određenom pravcima w, x i y, nožišta W, X i Y su kolinearna na Simsonovom pravcu. Slično, nožišta X, Y i Z leže na Simsonovom pravcu s obzirom na točku M koja leži na kružnici opisanoj trokutu određenom pravcima x, y i z.



Slika 34

Kako su X i Y zajedničke točke Simsonovim pravcima, govorimo o istom pravcu. Na isti se način pokaže kako točke W, X, Y i Z leže na istom Simsonovom pravcu točke M s obzirom na bilo koji trokut konstruiran sa četiri dana pravca. No, kako samo točke koje leže na kružnicama opisanih trokutima imaju pripadni Simsonov pravac, točka M mora ležati na svakoj od kružnica. Drugim riječima, M je sjecište četiri kružnice od koje je svaka od njih opisana trokutima formiranih od četiri pravca.

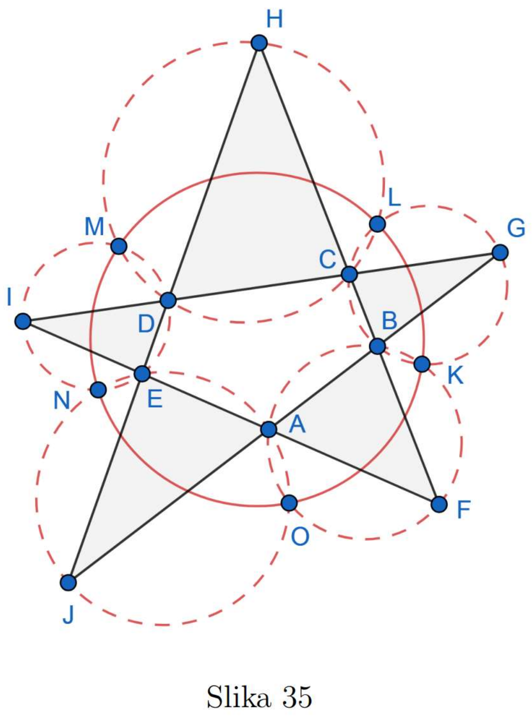
□

Teorem 13 daje jednak rezultat kao teorem kojega je objavio Jacob Steiner 1828. godine u matematičkom časopisu Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, a dokazao Auguste Miquel.

3.2 Miquelov teorem o peterokutu

Auguste Miquel također je zaslužan za još jedno značajno otkriće koje ponovno uključuje sjecište kružnica, tzv. Miquelov teorem o peterokutu ([6]).

Teorem 15. *Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut. Produžimo njegove stranice dok se ne sijeku u točkama F, G, H, I i J te nacrtamo trokutima AFB, BGC, CHD, DIE, EJA opisane kružnice. Tada su točke sjecišta susjednih kružnica K, L, M, N i O, koja su različita od vrhova početnog peterokuta, konciklične.*



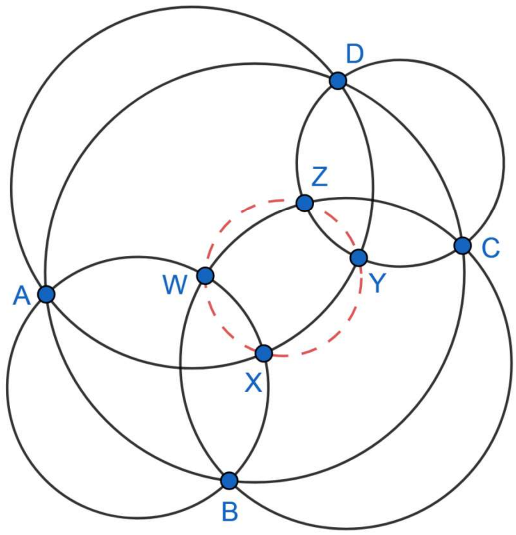
Slika 35

Teorem je poznat i po imenu Teorem o pet kružnica.

3.3 Miquelov teorem o šest kružnica

Još je jedan teorem koji nosi Miquelovo ime, Miquelov teorem o šest kružnica. On nam govori da ako pet kružnica dijeli četiri trostruke točke sjecišta, preostale četiri točke presjeka leže na šestoj kružnici.

Teorem 16. *Neka su A, B, C i D točke na kružnici i neka kroz svaki par susjednih točaka prolazi po jedna kružnica. Tada preostala sjecišta tih kružnica, W, X, Y i Z, leže na istoj kružnici (Slika 36).*



Slika 36

Zaključak

Miquelov teorem je u početku bio smatran kao tvrdnja važna za elementarnu geometriju trokuta, ali se ispostavilo da je od bitnog značaja i za geometriju kružnice. Pokazali smo to i ovim radom spominjući mnoga svojstva koja proizlaze iz odnosa trokuta i njemu pridruženih kružnica.

Iako se pretpostavlja da nije bio prvi, Auguste Miquel svojim je teoremom dotaknuo brojne dijelove geometrije. Pa smo tako primijenili inverziju kao transformaciju ravnine na njegovo dokazivanje, govorili o sličnosti trokuta, povezali nožišne s Miquelovim trokutima kao i karateristične točke trokuta s Miquelovom točkom.

Pažnju smo posvetili na početku iskazanom Miquelovom teoremu što ne umanjuje važnost teorema iz zadnjeg poglavlja, pogotovo Miquelovog teorema o šest kružnica koji je jedan od zanimljivijih i dokazivanijih teorema koji govore samo o kružnicama.

Literatura

[1] T. Davis, *Inversion in a Circle*, http://www.geometer.org/mathcircles, 2011.

[2] M. De Villiers, *From Nested Miquel Triangles to Miquel Distances*, The Mathematical Gazette, 2002, **85**(507), 390–395.

[3] R. Honsberge, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, New York, New York 1995.

[4] M. McDaniel, *Geometry by Construction: Object Creation and Problem-solving in Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Universal-Publishers, Boca Raton, Florida, 2015.

[5] V. Milchev, *Miquel point and isogonal conjugation*, "Petko Rachov Slaveikov" Secondary School, Kardzhali, Bulgaria, 2016.

[6] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer, New York, 2010.

[7] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.

[8] A.S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*, Key College Publishing, New York, New York, 2002.

[9] A.S. Posamentier, I. Lehmann, *The Secrets of Triangles: A Mathematical Journey*, Prometheus Books, Amherst, New York, 2012.

Sažetak

Miquelov teorem kaže da ako na svakoj stranici trokuta ili njihovim produženjima odaberemo po jednu točku, tada se kružnice određene vrhom trokuta i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom sijeku u jednoj točki. Tu točku nazivamo Miquelovom točkom polaznog trokuta, trokut određen odabranim točkama na stranicama Miquelov trokut polaznog trokuta, a kružnice određene vrhom trokuta i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom Miquelovim kružnicama polaznog trokuta.

U radu je teorem dokazan na dva načina koristeći svojstvo koncikličnosti točaka i primjenom inverzije. Osim Miquelovog teorema, dokazali smo i brojne tvrdnje koje govore o položaju Miquelove točke u odnosu na Miquelov trokut, o jednakostima kutova koje vrijede u polaznom i Miquelovom trokutu, o trokutima sličnim polaznom trokutu, o karakterističnim točkama Miquelovog trokuta.

U radu su razmatrane i zanimljive tvrdnje o koncikličnosti točaka u kojima se spominju Miquelovi elementi trokuta.

Ključne riječi: koncikličnost točaka, inverzija, Miquelov teorem, Miquelova točka, Miquelov trokut

Summary

Miquel's theorem is concerning the intersection of three circles, each drawn through one vertex of a triangle and two points on its adjacent sides. The point of intersection is called Miquel point relative to the initial triangle, the triangle connecting the side points is called Miquel triangle relative to the initial triangle and circles passing through each polygon vertex and its neighboring side points is called Miquel circles relative to the initial triangle.

We have proved the theorem in two ways, using properties of concyclic points and by applying inversion. Apart from Miquel's theorem, we have also proved many propositions about position of Miquel point in relation to the Miquel triangle, equality of angles in initial and Miquel's triangle, characteristic points of Miquel's triangle.

Also, in this paper are considered interesting claims about concyclic points in which the Miquel elements of the triangle are mentioned.

Key words: concyclic points, inversion, Miquel's theorem, Miquel point, Miquel triangle

Životopis

Rođena sam 14. prosinca 1993. godine u Osijeku. Završila sam Drugu srednju školu Beli Manastir u Belom Manastiru, smjer hotelijersko-turistički tehničar, nakon koje sam upisala Nastavnički studij Matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.

Tijekom studiranja radila sam u McDondald's-u. Zadnju godinu studiranja radila sam kao zamjena nastavnice matematike u Strojarskoj tehničkoj školi Osijek, Ekonomskoj i upravnoj školi Osijek i Ugostiteljsko-turističkoj školi Osijek u Osijeku te kao zamjena nastavnice informatike i računalstva u Medicinskoj školi Osijek u Osijeku.