

# Miquelov teorem

---

Kalčić, Eva

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:860283>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-31**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Nastavnički studij matematike i informatike

**Eva Kalčić**

## **Miquelov teorem**

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Nastavnički studij matematike i informatike

**Eva Kalčić**

## **Miquelov teorem**

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović  
Komentor: dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2019.

# Sadržaj

Uvod	i
<b>1 Miquelov teorem</b>	<b>1</b>
1.1 Iz povijesti Miquelovog teorema . . . . .	2
1.2 Dokazi Miquelovog teorema . . . . .	2
<b>2 Miquelova točka i Miquelov trokut</b>	<b>11</b>
2.1 Tvrdnje o kutovima . . . . .	12
2.2 Trokuti slični polaznom trokutu . . . . .	16
2.3 Miquelovi nožišni trokuti . . . . .	24
<b>3 Zanimljive tvrdnje o koncikličnosti točaka</b>	<b>26</b>
3.1 Miquelov i Steinerov teorem . . . . .	26
3.2 Miquelov teorem o peterokutu . . . . .	29
3.3 Miquelov teorem o šest kružnica . . . . .	30
<b>Zaključak</b>	<b>31</b>
<b>Literatura</b>	<b>32</b>
<b>Sažetak</b>	<b>33</b>
<b>Summary</b>	<b>34</b>
<b>Životopis</b>	<b>35</b>

## Uvod

Euklidska geometrija jedno je od najstarijih područja matematike koje je iznjedrilo velik broj ideja i rezultata. Velik broj rezultata vezan je uz trokut i kružnicu. Veliki broj utjecajnih matematičara bavilo se upravo njima i njihovim svojstvima. Također, velika pažnja posvećena je i proučavanju trokutu, na razne načine, pridruženih kružnica. Jedan od značajnijih matematičara koji je dao rezultate iz ovog područja je Auguste Miquel.

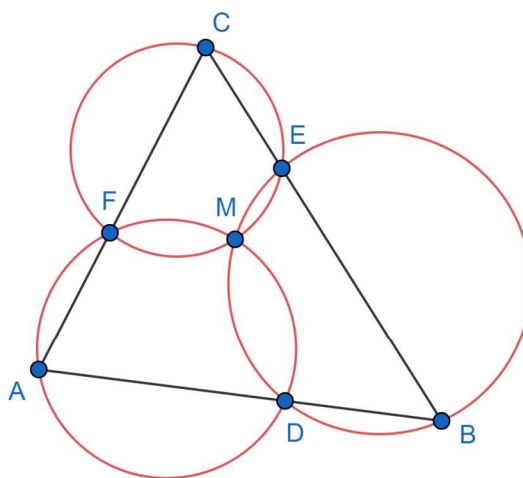
U ovom radu je razmatrana poznata tvrdnja o zajedničkoj točki tri kružnice koje prolaze vrhovima trokuta i po dvije točke na stranicama trokuta ili njihovim produženjima, poznata pod imenom Miquelov teorem.

U prvom poglavlju ovoga rada iskazat ćemo Miquelov teorem te navesti dva dokaza ove tvrdnje. Prvi dokaz je zasnovan na tvrdnji koncikličnosti točaka, a drugi dokaz je korištenjem inverzije. U drugom poglavlju definirat ćemo neke od pojmova vezanih uz Miquelov teorem te dokazati neke tvrdnje o njihovim svojstvima. Treće poglavlje bit će posvećeno nekim poznatim tvrdnjama vezanim uz Miquelov teorem.

# 1 Miquelov teorem

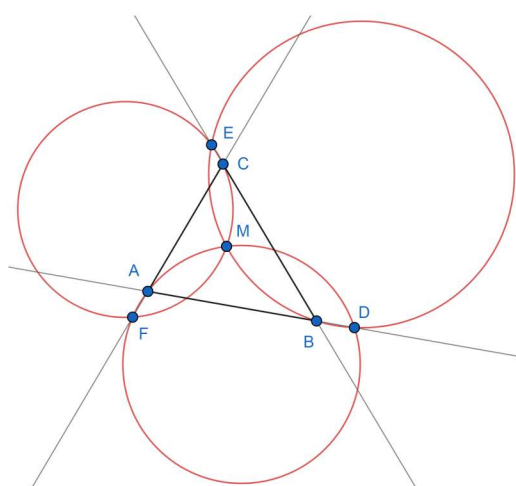
U ovom poglavlju iskazat ćemo i dokazati Miquelov teorem.

**Teorem 1.** *Ako na svakoj stranici trokuta (ili njihovim produženjima) odaberemo po jednu točku, tada se kružnice određene vrhom trokuta i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom sijeku u jednoj točki.*

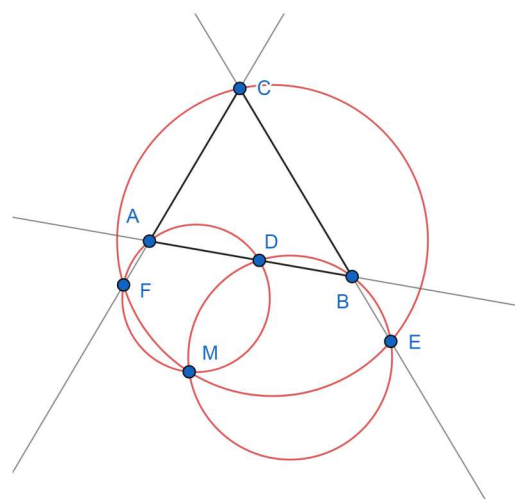


Slika 1

Slike 2 i 3 prikazuju slučaj kada su odabrane točke na produženjima stranica.



Slika 2



Slika 3

## 1.1 Iz povijesti Miquelovog teorema

Auguste Miquel (1816. – 1851., Albi, Francuska) bio je srednjoškolski učitelj u francuskom selu Nantua, u blizini Ženeve. Malo mjesto daleko od glavnog grada Pariza nije ga spriječilo objaviti svoja geometrijska otkrića u tada novoosnovanom časopisu o primijenjenoj matematici imena *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

U ovom radu govorit ćemo upravo o jednom njegovom rezultatu, ujedno i najpoznatijem, koji nosi njegovo ime. Tu tvrdnju, pod imenom Miquelov teorem, precizno je iskazao i dokazao 1838. godine.

Kao što je čest slučaj u matematici, postoje dokazi da su drugi već znali za ovu činjenicu, kao što je škotski matematičar William Wallace (1768. – 1843.) i švicarski matematičar Jakob Steiner (1797. – 1863.).

## 1.2 Dokazi Miquelovog teorema

U ovom poglavlju navest ćemo dva dokaza Miquelovog teorema. Možemo primijetiti kako se točka u kojoj se sijeku promatrane kružnice iz Miquelovog teorema može nalaziti unutar i izvan danog trokuta. Stoga ćemo prvi dokaz podijeliti na dva slučaja. Navedimo najprije definicije pojmova tetivni četverokut i koncikličke točke.

**Definicija 1.** *Tetivni četverokut* je četverokut kojem se može opisati kružnica.

Osnovno svojstvo tetivnog četverokuta dano je sljedećim teoremom.

**Teorem 2.** *Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutar-njih) kutova jednak  $180^\circ$ .*

Pojam koncikličkih točaka usko je vezan uz tetivni četverokut.

**Definicija 2.** *Točke koje leže na istoj kružnici zovemo **koncikličke točke**.*

Prije iskaza tvrdnje o koncikličnosti točaka definiramo pojam orijentiranog kuta.

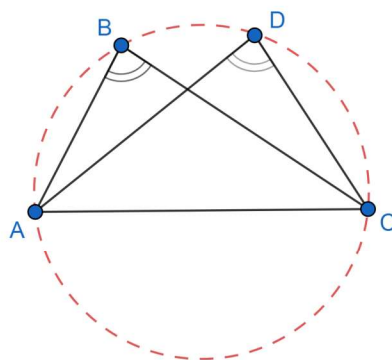
**Definicija 3.** *Orijentirani kut od pravca  $l_1$  do pravca  $l_2$ , označava se  $\angle(l_1, l_2)$ , je kut za koji treba zarotirati pravac  $l_1$  u pozitivnom smjeru tako da se on podudara s pravcem  $l_2$  ili je paralelan pravcu  $l_2$ .*

*Orijentirani kut  $\angle ABC$  je orijentirani kut pravca  $AB$  do pravca  $BC$ , odnosno kut za koji treba zarotirati pravac  $AB$  oko točke  $B$  u pozitivnom smjeru da se on podudara s pravcem  $BC$ .*

Veličina orijentiranog kuta  $\angle ABC$  može biti jednaka  $\angle ABC$  ili njegovom suplementu.

Ako je trokut  $ABC$  pozitivno orijentiran, lako se vidi da su orijentirani kutovi  $\angle ABC$ ,  $\angle BCA$  i  $\angle CAB$  jednaki odgovarajućim vanjskim kutovima, dok su unutar-nji kutovi  $\angle CBA$ ,  $\angle ACB$  i  $\angle BAC$ .

**Lema 1.** *Točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  su koncikličke ako i samo ako je  $\angle ABC = \angle ADC$ .*



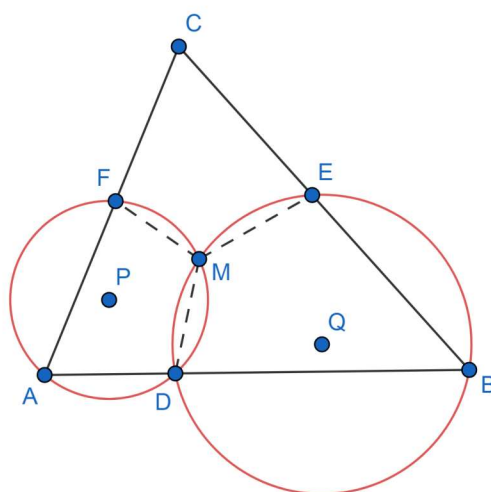
Slika 4

Sada možemo navesti prvi dokaz Miquelova teorema ([8]).

*Dokaz. Slučaj I* Promatramo slučaj kada se točka  $M$  nalazi unutar  $\triangle ABC$ . Točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  su bilo koje točke redom na stranicama  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ . Neka se kružnice sa središtima u točkama  $P$  i  $Q$  određene točkama  $A$ ,  $D$ ,  $F$  te  $B$ ,  $E$ ,  $D$  sijeku u točki  $M$ .

Nacrtamo dužine  $\overline{MD}$ ,  $\overline{ME}$  i  $\overline{MF}$  (Slika 5).





Slika 5

Sada u tetivnom četverokutu  $AFMD$  vrijedi:

$$\angle FMD = 180^\circ - \angle A.$$

Slično, u tetivnom četverokutu  $BEMD$  vrijedi:

$$\angle EMD = 180^\circ - \angle B.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\angle FMD + \angle EMD = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$$

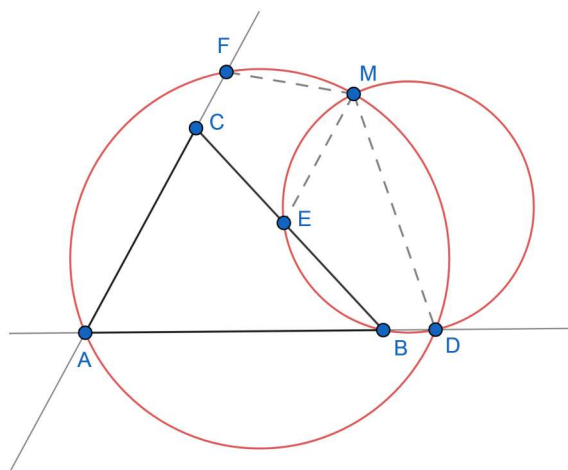
$$\angle FME = \angle A + \angle B.$$

No, u  $\triangle ABC$  vrijedi:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C.$$

Stoga je  $\angle FME = 180^\circ - \angle C$  iz čega slijedi da je četverokut  $CFME$  također tetivni. Prema tome, točka  $M$  leži i na kružnici određenoj točkama  $F$ ,  $E$  i  $C$ .

**Slučaj II** Slično se dokazuje i kada točka  $M$  leži izvan trokuta  $ABC$ . Kružnice određene točkama  $A, D$  i  $F$  te  $B, E$  i  $D$  sijeku se u točki  $M$ . Nacrtamo dužine  $\overline{MD}$ ,  $\overline{ME}$  i  $\overline{MF}$  (Slika 6).



Slika 6

Budući da je četverokut  $AFMD$  tetivni, vrijedi

$$\angle FMD = 180^\circ - \angle A.$$

Slično, jer je četverokut  $BEMD$  tetivni, vrijedi

$$\angle EMD = 180^\circ - \angle EBD = \angle B.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \angle FME &= \angle FMD - \angle EMD \\ &= 180^\circ - \angle A - \angle B \\ &= \angle C \\ &= 180^\circ - \angle ECF. \end{aligned}$$

Prema tome, vrhovi četverokuta  $CFME$  su također koncikličke točke i točka  $M$  leži na sve tri kružnice.  $\square$

Teorem možemo dokazati i primjenom inverzije ([1]). Ova transformacija ravnine često je od velike pomoći pri rješavanju problema vezanih uz kružnice. Prisjetimo se definicije inverzije.

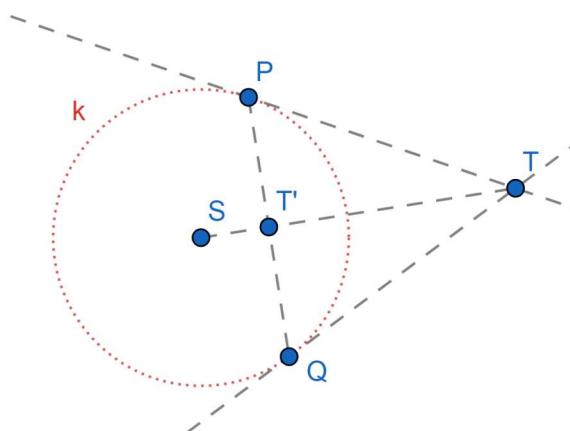
**Definicija 4.** Neka je ravnina  $M$  i  $S \in M$  čvrsta točka ravnine,  $R > 0$  zadani pozitivan realan broj. Preslikavanje

$$\mathcal{I}_S : M \setminus \{S\} \rightarrow M \setminus \{S\},$$

$$T \mapsto T' = \mathcal{I}_S(T),$$

zove se **inverzija** sa središtem  $S$  i polumjerom  $R$ , ako vrijedi:

1. Točke  $S$ ,  $T$  i  $T'$  su kolinearne.
2. Točke  $T$  i  $T'$  su s iste strane točke  $S$ .
3.  $|ST| \cdot |ST'| = R^2$ .

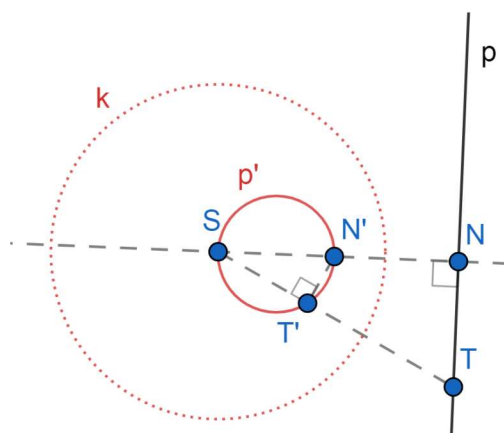


Slika 7. Konstrukcija inverzijom  $\mathcal{I}_S$  pridruženih točaka  $T$ ,  $T'$

Na temelju same definicije možemo uočiti da je svaka točka kružnice sa središtem u centru inverzije  $S$  i polumjerom  $r_S = R$  fiksna točka te inverzije. Tu kružnicu  $k(S, R)$  zovemo **kružnicom inverzije**, a njezin polumjer **polumjerom inverzije**.

Osim toga, važno je znati i sljedeća svojstva inverzije:

1. Pravac  $p$  koji ne prolazi centrom inverzije  $\mathcal{I}_S$  preslikava se u kružnicu  $p'$  koja prolazi centrom  $S$  te inverzije.



Slika 8. Slika pravca pri inverziji

*Dokaz.* Neka je  $p$  neki pravac ravnine  $M \setminus \{S\}$  i neka je  $N$  nožište okomice spuštene iz  $S$  na  $p$ , a  $N' = \mathcal{I}_S(N)$  (Slika 8). Vrijedi

$$|SN'| = \frac{R^2}{|SN|}.$$

Dalje, neka je  $T$  bilo koja točka pravca  $p$  i  $T' = \mathcal{I}_S(T)$ . Tada je

$$|SN| \cdot |SN'| = |ST| \cdot |ST'| = R^2.$$

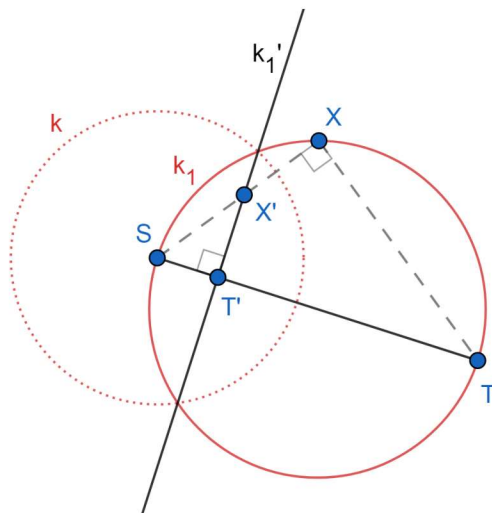
Slijedi

$$\frac{|SN|}{|ST|} = \frac{|ST'|}{|SN'|},$$

što povlači sličnost trokuta  $SNT$  i  $N'T'S$ , jer imaju zajednički kut  $\angle NST$  i dvije proporcionalne stranice. Kako je uz to  $\triangle SNT$  pravokutan s pravim kutom uz vrh  $N$ , to mora biti i  $\triangle ST'N'$  pravokutan s pravim kutom uz vrh  $T'$ . Prema obratu Talesovog teorema, točka  $T'$  mora ležati na kružnici promjera  $\overline{SN'}$ .

Dakle, svaka točka pravca  $p$  preslikava se u točku kružnice promjera  $\overline{SN'}$  koja prolazi centrom inverzije, odnosno u točku kružnice  $p'$ . Budući da je inverzija bijekcija, tvrdnja slijedi neposredno.  $\square$

2. Kružnica  $k_1$  koja prolazi centrom  $S$  inverzije  $\mathcal{I}_S$  preslikava se u pravac  $k'_1$  koji ne prolazi centrom  $S$ .



Slika 9. Slika kružnice pri inverziji

*Dokaz.* Neka je  $S$  centar inverzije  $\mathcal{I}$  i  $k_1$  kružnica koja prolazi kroz  $S$ . Neka je  $\overline{ST}$  promjer te kružnice, a  $T' = \mathcal{I}_S(T)$ . Uzmimo proizvoljnu točku  $X$  na kružnici  $k_1$ , a s  $X'$  označimo njezinu sliku, tj.  $X' = \mathcal{I}_S(X)$ . Označimo s  $k'_1$  pravac koji je okomit na  $ST$  i prolazi točkom  $T'$ . Tvrdimo da je  $k'_1$  slika kružnice  $k_1$  (Slika 9).

Kako za pridružene točke  $T, T'$  i  $X, X'$  vrijedi

$$|ST| \cdot |ST'| = |SX| \cdot |SX'| = R^2,$$

a iz toga i

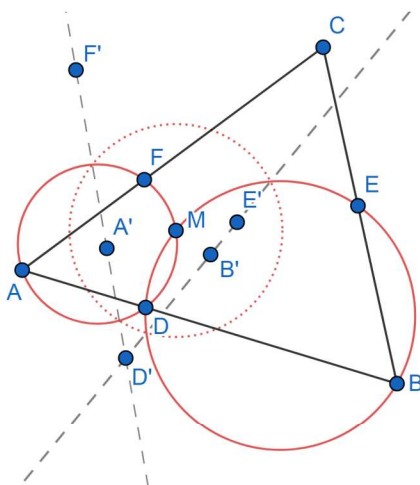
$$\frac{|ST|}{|SX|} = \frac{|SX'|}{|ST'|},$$

slijedi da su trokuti  $SXT$  i  $ST'X'$  slični, jer imaju zajednički kut  $\angle TSX$  i dvije proporcionalne stranice.

Prema Talesovom teoremu je  $\angle SXT = 90^\circ$ , pa je onda i  $\angle ST'X' = 90^\circ$ . Slijedi da se točka  $X'$  nalazi na pravcu  $k'_1$ . Kako to vrijedi za svaku točku kružnice  $k_1$ , zbog činjenice da je inverzija bijekcija, tvrdnja je dokazana.  $\square$

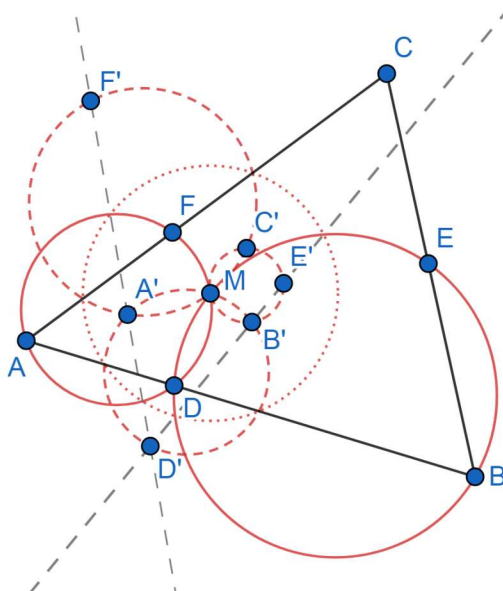
Primijenimo ova svojstva na dokazivanje Miquelovog teorema.

*Dokaz.* Neka je dan  $\triangle ABC$  i točke  $D, E$  i  $F$  redom na stranicama  $\overline{AB}, \overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ . Neka se dvije kružnice određene vrhovima  $A, D, F$  i  $D, B, E$  sijeku u točki  $M$ . Kružnica inverzije s centrom inverzije  $M$  i proizvoljnim radijusom preslikava točke  $A, D, F$  u  $A', D', F'$ , a točke  $D, B, E$  u  $D', B', E'$ . Točke  $A', D', F'$  su kolinearne, kao i točke  $D', B', E'$  (Slika 10).



Slika 10

Tada su četverokuti  $A'D'B'M$ ,  $B'E'C'M$  i  $C'F'A'M$  tetivni (Slika 11).



Slika 11

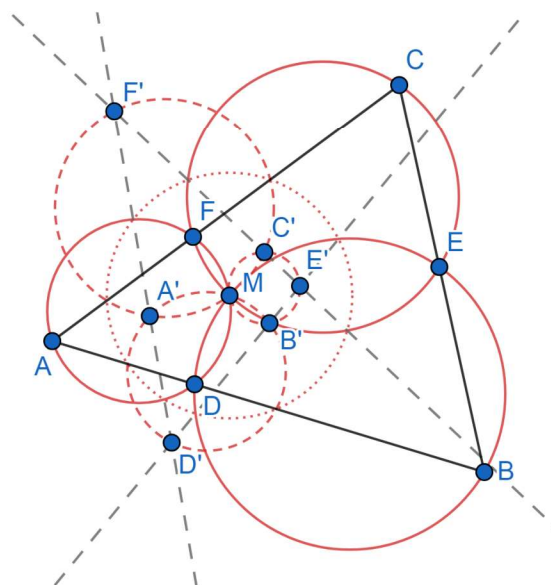
Označimo  $\angle A'D'B' = \alpha$ ,  $\angle A'F'C' = \beta$ ,  $\angle B'E'C' = \gamma$ . Tada će za kut oko točke  $M$  vrijediti

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma = 360^\circ,$$

što daje

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Sada, ako točka  $C'$  ne leži na  $F'E'$ , ta jednakost ne bi vrijedila. Prema tome, slijedi da su točke  $F'$ ,  $C'$  i  $E'$  kolinearne, tj. leže na istom pravcu koji ne prolazi centrom inverzije  $M$  (Slika 12). Djelovanjem istom inverzijom, točke  $F'$ ,  $C'$  i  $E'$  se preslikaju u točke  $F$ ,  $C$  i  $E$ , redom, koje sada pripadaju istoj kružnici koja prolazi centrom inverzije  $M$ .



Slika 12

□

## 2 Miquelova točka i Miquelov trokut

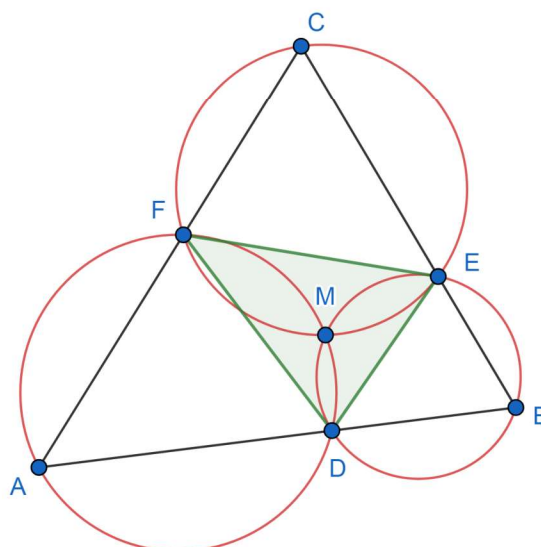
Na početku ovog poglavlja definirat ćemo neke pojmove vezane uz ranije iskazani i dokazani Miquelov teorem.

**Definicija 5.** Neka je  $ABC$  dani trokut i  $D$ ,  $E$  i  $F$  bilo koje točke na stranicama  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$  ili njihovim produženjima, redom.

Točka u kojoj se sijeku kružnice opisane trokutima  $ADF$ ,  $BED$  i  $CFE$  zove se **Miquelova točka** trokuta  $ABC$ .

Trokut određen točkama  $D$ ,  $E$  i  $F$  naziva se **Miquelov trokut** trokuta  $ABC$ .

Kružnice opisane trokutima  $ADF$ ,  $BED$  i  $CFE$  zovemo **Miquelove kružnice** trokuta  $ABC$  (Slika 13).



Slika 13. Miquelov trokut

U daljnjem ćemo radu vidjeti kako jedna Miquelova točka definira beskonačno mnogo Miquelovih trokuta. Uz to iskazat ćemo i dokazati brojne tvrdnje vezane uz navedene pojmove.

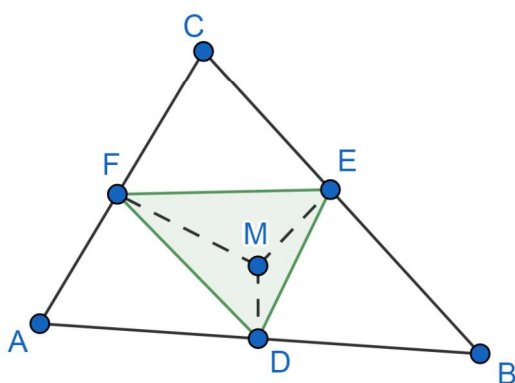


## 2.1 Tvrdnje o kutovima

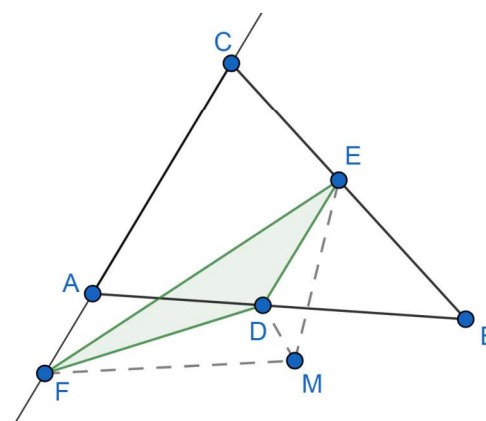
Na početku ovog poglavlja dokažimo neke tvrdnje koje govore o položaju Miquelove točke u odnosu na Miquelov trokut.

**Lema 2.** *Neka je dan trokut  $ABC$  i neka je  $M$  Miquelova točka trokuta  $ABC$ . Tada vrijedi:*

- i. Ako se Miquelova točka  $M$  nalazi unutar trokuta  $ABC$ , tada se nalazi i unutar Miquelovog trokuta  $DEF$ .*
- ii. Ako se Miquelova točka  $M$  nalazi izvan trokuta  $ABC$ , tada se nalazi i izvan Miquelovog trokuta  $DEF$ .*



Slika 14



Slika 15

*Dokaz.* Neka je dan  $\triangle ABC$  i neka su  $\triangle DEF$  i točka  $M$  pripadni Miquelov trokut i Miquelova točka trokuta  $ABC$ .

Ako se točka  $M$  nalazi unutar  $\triangle ABC$  (Slika 14), tada vrijedi

$$\angle FMD + \angle DME + \angle EMF = 360^\circ.$$

To vrijedi jer su kutovi s lijeve strane jednakosti suplementarni unutarnjim kutovima trokuta  $\triangle ABC$ , tj. s  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ , redom. Stoga se  $M$  nalazi i unutar  $\triangle DEF$ .

Ako se točka  $M$  nalazi izvan  $\triangle ABC$  (Slika 15), tada vrijedi nejednakost

$$\angle FMD + \angle DME + \angle EMF < 360^\circ.$$

Sada su dva od tri kuta s lijeve strane jednaka s dva unutarnja kuta trokuta  $ABC$ , dok je treći kut suplementaran preostalom unutarnjem kutu trokuta  $ABC$ . Naprimjer,

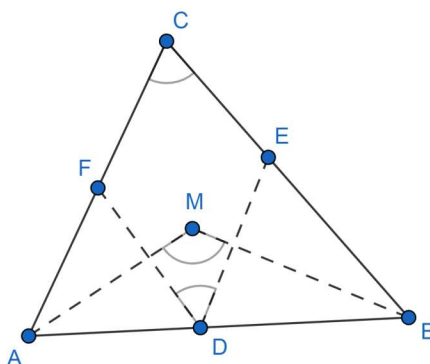
$$\begin{aligned}\angle FMD + \angle DME + \angle EMF &= \angle A + \angle B + (180^\circ - \angle C) \\ &= \angle A + \angle B + \angle C + 180^\circ - 2\angle C \\ &= 360^\circ - 2\angle C \\ &< 360^\circ.\end{aligned}$$

Prema tome, točka  $M$  se nalazi također izvan trokuta  $DEF$ . □

Sljedeću tvrdnju, koja će nam biti važna pri dokazivanju drugih teorema, nazivamo Miquelova jednakost ([3]).

**Teorem 3.** *Neka je  $M$  Miquelova točka i  $\triangle DEF$  Miquelov trokut trokuta  $\triangle ABC$ . Vrijedi jednakost*

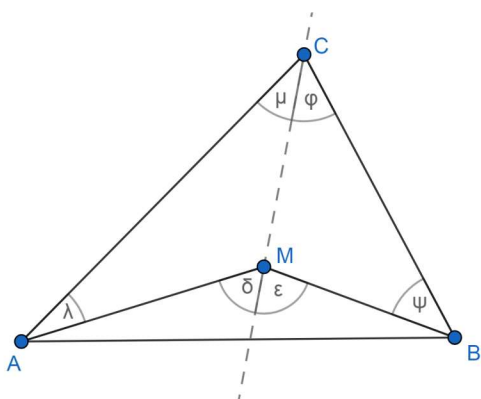
$$\angle AMB = \angle FDE + \angle ACB.$$



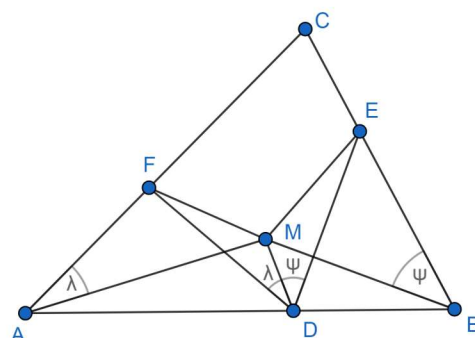
Slika 16

*Dokaz.* Neka je  $M$  Miquelova točka i  $\triangle DEF$  Miquelov trokut trokuta  $\triangle ABC$ . Neka pravac  $CM$  dijeli kut  $\angle AMB$  na dva dijela,  $\delta$  i  $\epsilon$ , kao na Slici 17. Kako je mjera vanjskog kuta trokuta jednaka zbroju mjera dvaju unutarnjih kutova koji s tim kutom nemaju zajednički vrh, imamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\delta &= \lambda + \mu \\ \epsilon &= \phi + \psi.\end{aligned}$$



Slika 17



Slika 18

Slijedi

$$\angle AMB = \delta + \epsilon = \lambda + \mu + \phi + \psi = \lambda + \angle ACB + \psi.$$

Budući da su  $A, D, M$  i  $F$  koncikličke točke, prema Lemi 1, vrijedi jednakost kutova pri vrhovima  $A$  i  $D$  označenih s  $\lambda$  i analogno jednakost kutova pri vrhovima  $D$  i  $B$  označenih s  $\psi$ , zbog koncikličnosti točaka  $D, B, E$  i  $M$  (Slika 18). Prema tome je

$$\angle FDE = \lambda + \psi,$$

iz čega konačno slijedi

$$\angle AMB = \angle FDE + \angle ACB.$$

□

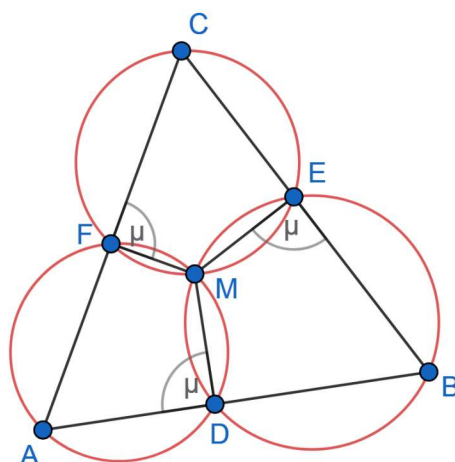
**Teorem 4.** *Dužine koje spajaju Miquelovu točku s vrhovima Miquelovog trokuta zatvaraju sa stranicama polaznog trokuta sukladne kutove.*

Vrijedi

$$\angle ADM = \angle BEM = \angle CFM = \mu.$$

Analogno,

$$\angle AFM = \angle BDM = \angle CEM = 180^\circ - \mu.$$



Slika 19

*Dokaz.* Četverokut  $ADMF$  je tetivni iz čega slijedi da su kutovi  $\angle ADM$  i  $\angle AFM$  suplementarni. No, to vrijedi i za kutove  $\angle AFM$  i  $\angle CFM$  (Slika 19). Prema tome, vrijedi

$$\angle ADM = \angle CFM,$$

a iz toga slijedi

$$\angle BDM = \angle AFM.$$

Preostale jednakosti dokazujemo analogno. □

Vrijedi i obrat Teorema 4. Štoviše, iz sljedećeg teorema doznajemo mnogo više o vezi Miquelove točke i Miquelovih trokuta.

**Teorem 5.** *Ako bilo koja tri pravca koja prolaze kroz  $M$  zatvaraju sukkladne kutove sa stranicama trokuta  $ABC$ , tada je  $M$  Miquelova točka za trokut  $DEF$  kojeg određuje. Nadalje, točka  $M$  je Miquelova točka za beskonačnu familiju trokuta.*

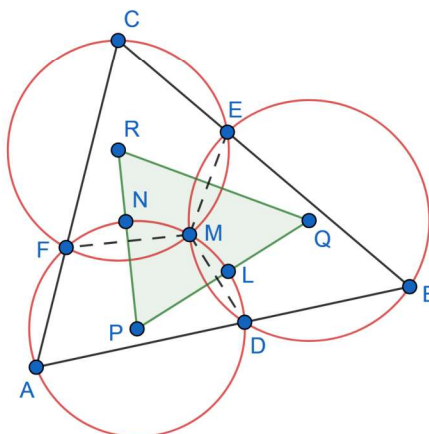
## 2.2 Trokuti slični polaznom trokutu

Sljedećih nekoliko tvrdnji reći će nam nešto više o trokutima sličnim polaznom trokutu  $ABC$ .

**Teorem 6.** *Središta Miquelovih kružnica danog trokuta određuju trokut sličan danom trokutu.*

*Dokaz.* Neka je  $ABC$  dani trokut i točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  na stranicama  $\triangle ABC$ . Neka je točka  $P$  središte kružnice određene točkama  $A$ ,  $D$  i  $F$ , točka  $Q$  središte kružnice određene točkama  $B$ ,  $E$  i  $D$  te točka  $R$  središte kružnice određene točkama  $C$ ,  $F$  i  $E$ . Te tri kružnice sijeku se u točki  $M$ .

Najprije uočimo zajedničke tetive  $\overline{MD}$ ,  $\overline{ME}$  i  $\overline{MF}$ . Nadalje,  $\overline{RP}$  i  $\overline{PQ}$  sijeku kružnicu sa središtem  $P$  u točkama  $N$  i  $L$ , redom.



Slika 20

Budući da je pravac kroz središta  $R$  i  $P$  okomit na zajedničku tetivu te ju raspolavlja, taj je pravac simetrala dužine  $\overline{FM}$ . Stoga je  $\angle FPN = \angle NPM$ . Slično, pravac koji prolazi točkama  $P$  i  $Q$  je simetrala dužine  $\overline{MD}$  pa je  $\angle MPL = \angle LPD$ . Sada je

$$\angle NPL = \angle NPM + \angle MPL = \frac{1}{2}\angle FPD.$$

Kako je

$$\angle FAD = \frac{1}{2}\angle FPD,$$

onda je

$$\angle NPL = \angle FAD = \angle CAB.$$

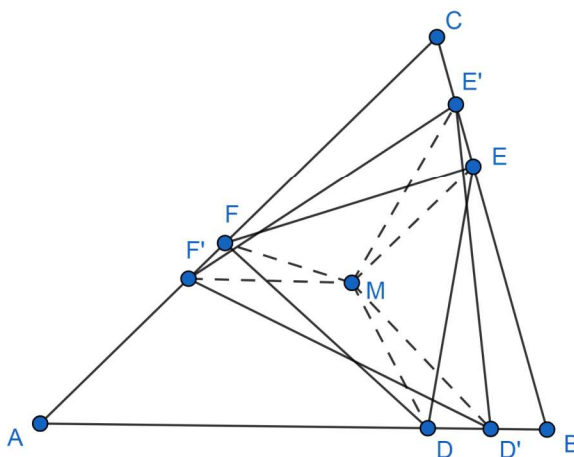
Na sličan način možemo dokazati da je

$$\angle PRQ = \angle FCE = \angle ACB.$$

Prema tome je  $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ . □

Prije iskaza sljedeće tvrdnje podsjetimo da je trokut upisan u drugi trokut ako svaki od vrhova prvog trokuta leži na stranicama drugog trokuta.

**Teorem 7.** *Dva trokuta upisana u isti trokut koji imaju zajedničku Miquelovu točku su slična.*



Slika 21

*Dokaz.* Promatrajmo  $\triangle DEF$  i  $\triangle D'E'F'$  sa zajedničkom Miquelovom točkom  $M$  (Slika 21). Prema Teoremu 4, vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle MFA &= \angle MDB \\ \angle MD'A &= \angle MF'C,\end{aligned}$$

iz čega slijedi sličnost  $\triangle MD'D$  i  $\triangle MF'F$ . Analogno je i  $\triangle MF'F \sim \triangle ME'E$ . Prema tome,

$$\angle DMD' = \angle FMF' = \angle EME'.$$

Odakle dobivamo

$$\angle D'MF' = \angle DMF$$

$$\angle D'ME' = \angle DME$$

$$\angle E'MF' = \angle EMF.$$

Također, kao rezultat sličnosti gore navedenih trokuta, imamo jednakosti

$$\frac{|MD|}{|MD'|} = \frac{|MF|}{|MF'|} = \frac{|ME|}{|ME'|}.$$

Budući da su dva trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne i odgovarajući kutovi jednake veličine, dobivamo sljedeće

$$\triangle D'MF' \sim \triangle DMF$$

$$\triangle D'ME' \sim \triangle DME$$

$$\triangle E'MF' \sim \triangle EMF.$$

Tada iz

$$\frac{|D'F'|}{|DF|} = \frac{|D'M|}{|DM|}$$

i

$$\frac{|D'E'|}{|DE|} = \frac{|D'M|}{|DM|}$$

slijedi

$$\frac{|D'F'|}{|DF|} = \frac{|D'E'|}{|DE|}.$$

Slično dobivamo

$$\frac{|E'F'|}{|EF|} = \frac{|D'E'|}{|DE|},$$

što dokazuje da zbog proporcionalnosti odgovarajućih stranica promatranih trokuta vrijedi  $\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$ . □

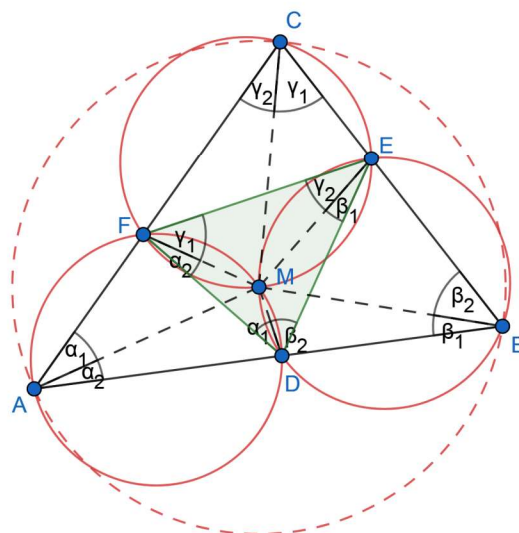
Sljedeća lema reći će nam nešto više o kutovima Miquelovog trokuta koji je sličan polaznom trokutu. Najprije uvedimo oznake:  $\angle CAM = \alpha_1$ ,  $\angle MAB = \alpha_2$ ,  $\angle ABM = \beta_1$ ,  $\angle MBC = \beta_2$ ,  $\angle BCM = \gamma_1$ ,  $\angle MCA = \gamma_2$ .

**Lema 3.** *Neka je točka  $M$  unutar trokuta  $ABC$  opisane kružnice i  $DEF$  Miquelov trokut točke  $M$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Tada vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\angle D = \alpha_1 + \beta_2,$$

$$\angle E = \beta_1 + \gamma_2,$$

$$\angle F = \gamma_1 + \alpha_2.$$



Slika 22

*Dokaz.* Pri dokazivanju ove tvrdnje koristit ćemo Lemu 1. Promotrimo slučaj kada je  $M$  unutar trokuta  $ABC$ .

Dakle, budući da su točke  $A, D, M$  i  $F$  koncikličke, vrijedi

$$\angle FDM = \angle FAM = \alpha_1,$$

$$\angle MFD = \angle MAD = \alpha_2.$$



Analogno vrijedi za koncikličke točke  $B, E, M$  i  $D$  te  $C, F, M$  i  $E$ , tj.

$$\angle DBM = \angle DEM = \beta_1,$$

$$\angle MDE = \angle MBE = \beta_2,$$

$$\angle ECM = \angle EFM = \gamma_1,$$

$$\angle MEF = \angle MCF = \gamma_2.$$

Slijedi

$$\angle D = \angle FME = \angle FDM + \angle MDE = \alpha_1 + \beta_2.$$

Analogno,

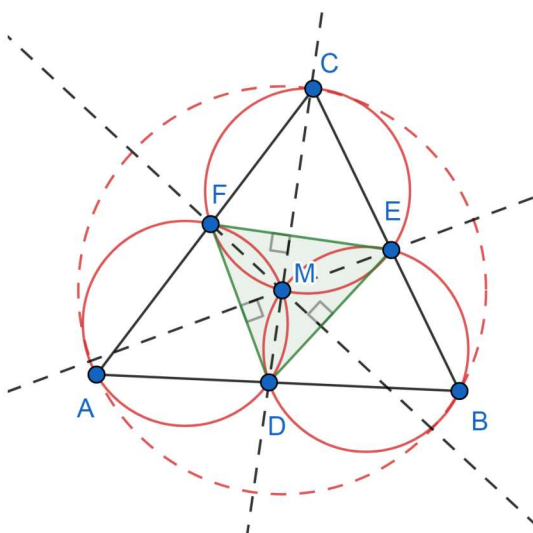
$$\angle E = \beta_1 + \gamma_2,$$

$$\angle F = \gamma_1 + \alpha_2.$$

Analogno se dokazuje kada je točka  $M$  izvan trokuta  $ABC$ , a unutar opisane kružnice trokuta.  $\square$

U nastavku ćemo razmotriti još neka svojstva Miquelove točke. Pri dokazivanju istih koristit ćemo jednake oznake kao u prethodnoj lemi.

**Teorem 8.** *Ako je Miquelova točka  $M$  središte polaznom trokutu  $ABC$  opisane kružnice, onda je  $M$  ortocentar Miquelovog trokuta  $DEF$ .*



Slika 23

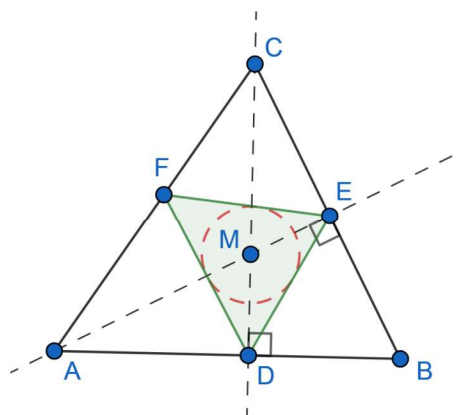
*Dokaz.* Ako je Miquelova točka  $M$  središte polaznom trokutu  $ABC$  opisane kružnice, onda je, prema Lemi 3,  $\alpha_2 = \beta_1$ ,  $\beta_2 = \gamma_1$ ,  $\gamma_2 = \alpha_1$  (Slika 22). Tako dolazimo do jednadžbe

$$\gamma_2 + \gamma_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \alpha_2 = 90^\circ.$$

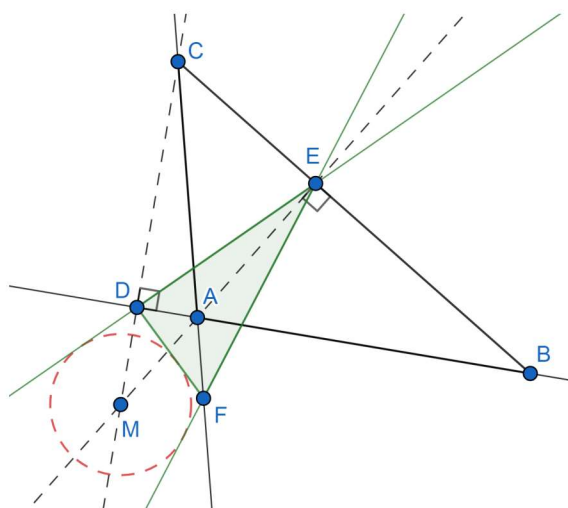
Iz toga nam slijedi okomitost pravaca  $FM$  i  $DE$ , tj.  $FM \perp DE$ .

Slično dolazimo i do  $DM \perp EF$ ,  $EM \perp DF$ , što povlači da je točka  $M$  ortocentar trokuta  $DEF$ .  $\square$

**Teorem 9.** *Ako je Miquelova točka  $M$  ortocentar trokuta  $ABC$ , tada je  $M$  središte upisane ili pripisane kružnice trokuta  $DEF$ .*



Slika 24



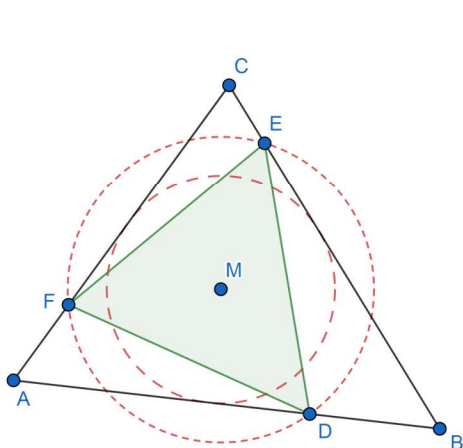
Slika 25

*Dokaz.* U obzir ćemo uzeti dva slučaja.

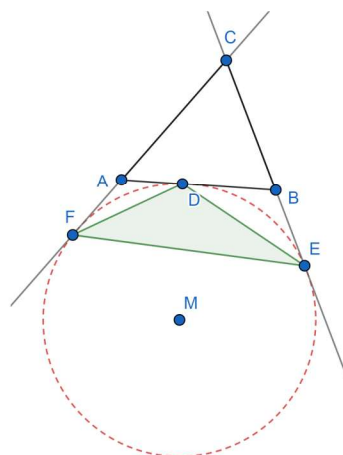
**Slučaj I** Neka je  $M$  ortocentar trokuta  $ABC$  kojemu su sva tri kuta šiljasta. Tada je  $\gamma_1 = \alpha_2$  i  $\alpha_1 = \beta_2$ , stoga je točka  $M$  u  $\triangle DEF$  sjecište simetrala unutarnjih kutova, tj.  $M$  je središte upisane kružnice trokuta  $DEF$  (Slika 24).

**Slučaj II** Neka je  $ABC$  tupokutan trokut tako da je kut pri vrhu  $A$  tup, tj.  $\angle A > 90^\circ$ . U tom slučaju je  $\beta_1 = \gamma_2$ ,  $\gamma_1 = 180^\circ - \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 180^\circ - \beta_2$ . Prema tome su  $MD$  i  $MF$  simetrale vanjskih kutova, dok je  $ME$  unutarnja simetrala kuta. Slijedi, točka  $M$  je središte pripisane kružnice trokuta  $DEF$  (Slika 25).  $\square$

**Teorem 10.** *Ako je točka  $M$  središte upisane ili pripisane kružnice trokuta  $ABC$ , tada je  $M$  središte opisane kružnice trokuta  $DEF$ .*



Slika 26



Slika 27

*Dokaz.* Ponovno promatramo dva slučaja.

**Slučaj I** Neka je  $M$  središte trokutu  $ABC$  upisane kružnice. Tada je  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Dakle, točka  $M$  je sjecište simetrala stranica trokuta  $DEF$  pa i središte opisane kružnice trokuta  $DEF$ .

**Slučaj II** Neka je  $M$  središte trokutu  $ABC$  pripisane kružnice koja dodiruje stranicu  $\overline{AB}$ . U tom slučaju, pravci  $AM$ ,  $BM$  i  $CM$  su simetrale stranica trokuta  $DEF$ . Stoga je točka  $M$  središte trokutu  $DEF$  opisane kružnice.  $\square$

Zadnji teorem ovog potpoglavlja povezuje Miquelovu i Brocardovu točku polaznog i Miquelovog trokuta. Prije njegovog iskazivanja definirajmo Brocardovu točku trokuta  $ABC$ .

**Definicija 6.** Neka je dan trokut  $ABC$  i točka  $\Omega$  za koju vrijedi

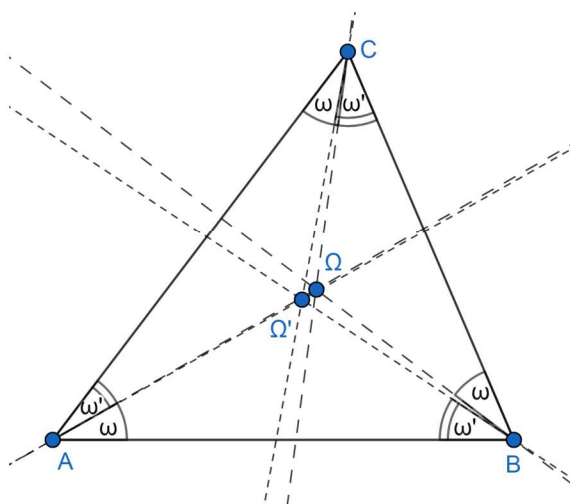
$$\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA = \omega.$$

Točka  $\Omega$  naziva se **prvom Brocardovom točkom** trokuta  $ABC$ , a kut  $\omega$  **Brocardovim kutom** (Slika 28).

**Definicija 7.** Točka  $\Omega'$  koju dobijemo kao sjecište pravaca  $A\Omega'$ ,  $B\Omega'$ ,  $C\Omega'$  za koje vrijedi

$$\angle\Omega' BA = \angle\Omega' CB = \angle\Omega' AC = \omega'$$

zovemo **drugom Brocardovom točkom** trokuta  $ABC$ .



Slika 28. Prva i druga Brocardova točka

**Teorem 11.** Vrijedi:

- i. Ako je Miquelova točka  $M$  prva Brocardova točka trokuta  $ABC$ , onda je  $i$  prva Brocardova točka trokuta  $DEF$ .
- ii. Ako je Miquelova točka  $M$  druga Brocardova točka trokuta  $ABC$ , onda je  $i$  druga Brocardova točka trokuta  $DEF$ .

Pri dokazivanju ovog teorema koristit ćemo oznake kao u Lemi 3.

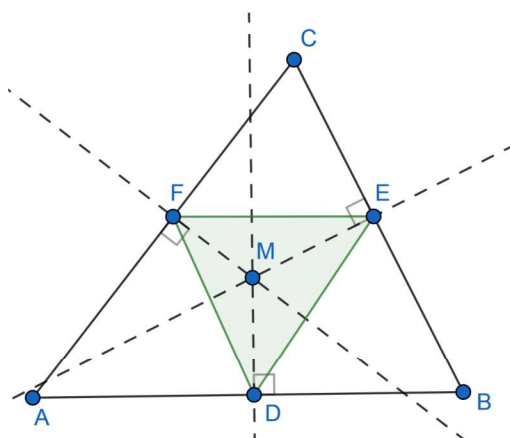
*Dokaz.* Ako je točka  $M$  prva Brocardova točka trokuta  $ABC$ , tada vrijedi  $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2$  pa iz Leme 3 slijedi da je  $M$  Brocardova točka trokuta  $DEF$ .

Ako je točka  $M$  druga Brocardova točka trokuta  $ABC$ , tada vrijedi  $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$  pa prema Lemi 3 slijedi da je  $M$  druga Brocardova točka trokuta  $DEF$ .  $\square$

## 2.3 Miquelovi nožišni trokuti

Na početku poglavlja definirajmo nožišni trokut.

**Definicija 8.** *Trokut čiji su vrhovi nožišta okomica iz fiksne točke  $M$  na stranice trokuta  $ABC$  nazivamo **nožišni trokut** ili **pedalni trokut** pola  $M$  s obzirom na dani trokut  $ABC$ .*

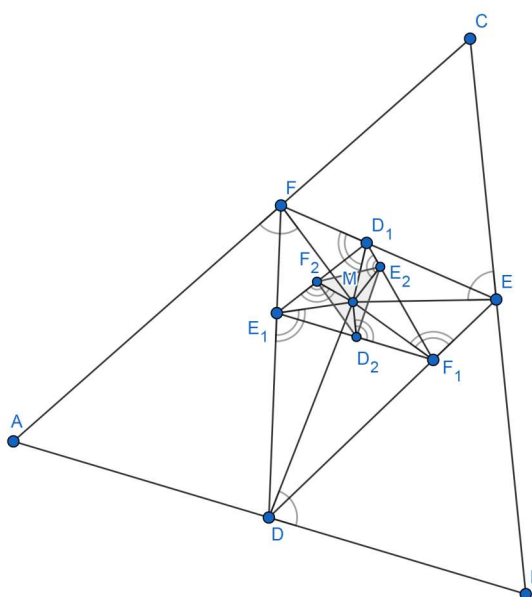


Slika 29

Takvi trokuti imaju brojna zanimljiva svojstva, a o jednom svojstvu govori sljedeća tvrdnja.

**Teorem 12. (Neubergov teorem)** *Ako je konstruiran niz nožišnih trokuta s obzirom na istu točku, tada je treći nožišni trokut sličan početnom trokutu.*

Međutim, ovaj teorem možemo generalizirati tako da konstruiramo dužine iz točke  $M$  prema stranicama trokuta  $ABC$  pri čemu one zatvaraju jednake kutove sa stranicama tog trokuta, tj. tako da vrijedi  $\angle MDB = \angle MEC = \angle MFA$ . Neka je dobiveni trokut  $DEF$  Miquelov. Sljedeće, iz iste točke  $M$  konstruiramo drugi Miquelov trokut,  $\triangle D_1E_1F_1$ , unutar prvog Miquelovog trokuta, a zatim i treći Miquelov trokut,  $\triangle D_2E_2F_2$ , unutar drugoga. Tada je treći Miquelov trokut  $D_2E_2F_2$  sličan polaznom trokutu  $ABC$  (Slika 30).



Slika 30

Ono što ovu generalizaciju čini iznenađujućom jest to da se niz tih Miquelovih trokuta može konstruirati potpuno proizvoljno. Iako bi mogli pretpostaviti da kut koji zatvara dužina s jednim krajem u točki  $M$  sa stranicama drugog trokuta mora biti jednak kutu koji zatvara dužina s jednim krajem u točki  $M$  sa stranicama prvog trokuta, to uopće ne mora biti tako, tj. odabir Miquelovih trokuta je proizvoljan.

Dokažimo sada ovu generalizaciju.

*Dokaz.* Nacrtajmo dužinu  $\overline{AM}$ . Konstruirajmo dužine iz točke  $M$  prema stranicama trokuta  $ABC$ ,  $DEF$  i  $D_1E_1F_1$  uočavamo kako su četverokuti  $ADMF$ ,  $E_1MD_1F$  i  $F_2ME_2D_1$  tetivni. Prema tome,

$$\angle MAD = \angle MFD = \angle MD_1E_1 = \angle ME_2F_2.$$

Slično možemo pokazati da vrijedi i

$$\angle MAF = \angle ME_2D_2.$$

Slijedi

$$\angle F_2E_2D_2 = \angle BAC.$$

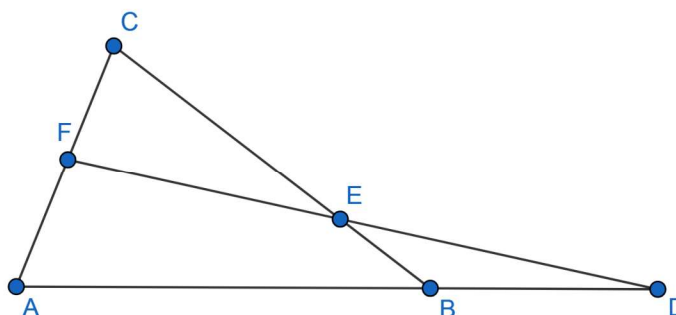
Na isti način možemo pokazati da su kutovi pri vrhovima  $B$  i  $F_2$  te  $C$  i  $D_2$  sukkladni.  $\square$

### 3 Zanimljive tvrdnje o koncikličnosti točaka

U ovom poglavlju razmatrat ćemo neke zanimljive tvrdnje o koncikličnosti točaka.

#### 3.1 Miquelov i Steinerov teorem

Iz dosadašnjih razmatranja o Miquelovoj točki trokuta znamo da je Miquelova točka  $M$  drugo sjecište kružnica  $CFE$  i  $BDE$  (Slika 31). Promotrit ćemo slučaj kada točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  leže na istom pravcu. Za početni trokut u obzir ćemo uzeti  $\triangle ADF$ , a  $B$ ,  $E$  i  $C$  točke na njegovim stranicama.

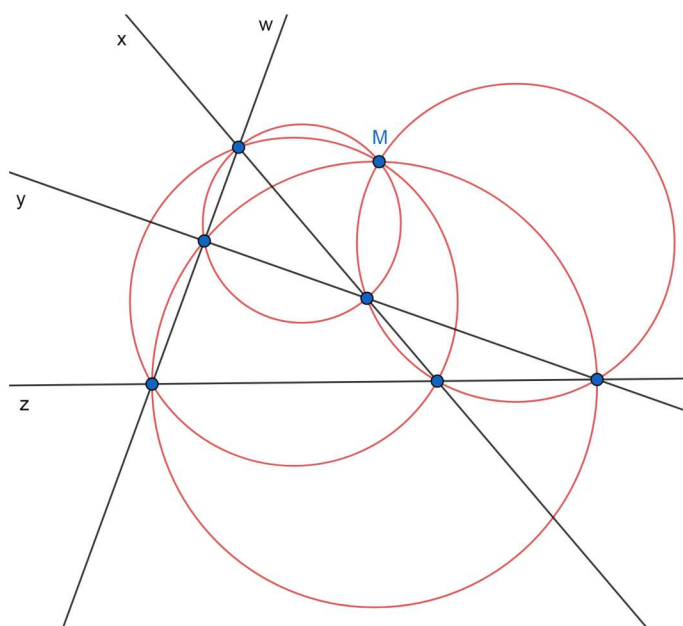


Slika 31

Ponovno primjećujemo kako su dvije od tri Miquelove kružnice one koje su opisane trokutima  $CFE$  i  $BDE$ , što implicira da one određuju istu Miquelovu točku  $M$ . Može se pokazati da se radi o uvijek istoj Miquelovoj točki bez obzira na koja tri od četiri pravca leže stranice trokuta, dok preostali pravac prolazi kroz točke na stranicama. Tako dolazimo do izvanrednog rezultata danog sljedećim teoremom ([3]).

**Teorem 13.** *Neka se četiri pravca sijeku dva po dva u šest točaka. Ta četiri pravca (uzeta po tri) određuju četiri trokuta čije opisane kružnice prolaze istom točkom.*

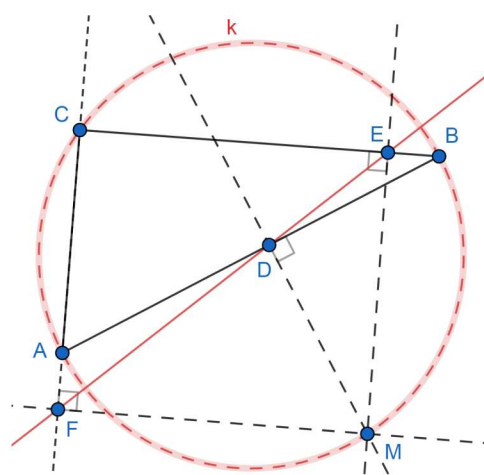
Točku presijecanja  $M$  tada nazivamo **Miquelova točka potpunog četverostrana**.



Slika 32

Za dokaz ove tvrdnje koristit ćemo jedno od osnovnih svojstava Simsonovog pravca. Za početak ćemo definirati Simsonov pravac.

**Definicija 9.** Neka je dan trokut  $ABC$ ,  $k$  kružnica opisana tom trokutu i  $M$  neka točka na kružnici  $k$ . Pravac koji prolazi nožištima okomica iz točke  $M$  na stranice trokuta  $ABC$  zove se **Simsonov pravac** trokuta  $ABC$  (Slika 33).



Slika 33. Simsonov pravac



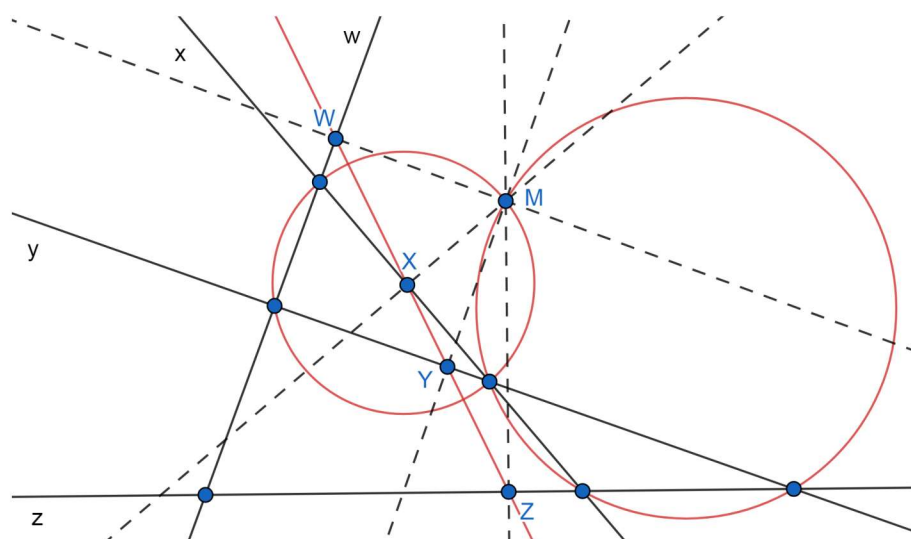
Sljedeći teorem, koji će biti koristan pri dokazivanju Teorema 13, opisuje odnos između Miquelove točke i Simsonovog pravca ([3]).

**Teorem 14.** *Nožišta okomica iz Miquelove točke na stranice trokuta su kolinearna ako i samo ako se Miquelova točka nalazi na trokutu opisanoj kružnici.*

Sada možemo dokazati Teorem 13.

*Dokaz.* Kružnice koje se sijeku imaju najviše dvije zajedničke točke pa ih je potrebno razlikovati. Neka je  $M$  sjecište bilo koje dvije kružnice, koje ne leži ni na jednom od danih pravaca. Neka su to kružnice opisane trokutima koji su određeni pravcima  $w$ ,  $x$  i  $y$  te  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Zatim, neka su točke  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  nožišta okomica na pravce  $w$ ,  $x$ ,  $y$  i  $z$  iz  $M$ .

Budući da  $M$  leži na kružnici opisanoj trokutu određenom pravcima  $w$ ,  $x$  i  $y$ , nožišta  $W$ ,  $X$  i  $Y$  su kolinearna na Simsonovom pravcu. Slično, nožišta  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  leže na Simsonovom pravcu s obzirom na točku  $M$  koja leži na kružnici opisanoj trokutu određenom pravcima  $x$ ,  $y$  i  $z$ .



Slika 34

Kako su  $X$  i  $Y$  zajedničke točke Simsonovim pravcima, govorimo o istom pravcu. Na isti se način pokaže kako točke  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  leže na istom Simsonovom pravcu točke  $M$  s obzirom na bilo koji trokut konstruiran sa četiri dana pravca. No, kako samo točke koje leže na kružnicama opisanih trokutima imaju pripadni Simsonov pravac, točka  $M$  mora ležati na svakoj od kružnica. Drugim riječima,  $M$  je sjecište

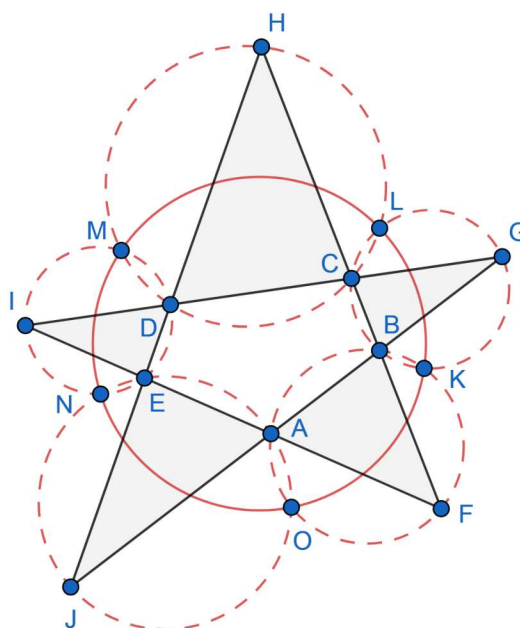
četiri kružnice od koje je svaka od njih opisana trokutima formiranih od četiri pravca.  $\square$

Teorem 13 daje jednak rezultat kao teorem kojega je objavio Jacob Steiner 1828. godine u matematičkom časopisu *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, a dokazao Auguste Miquel.

### 3.2 Miquelov teorem o peterokutu

Auguste Miquel također je zaslužan za još jedno značajno otkriće koje ponovno uključuje sjecište kružnica, tzv. Miquelov teorem o peterokutu ([6]).

**Teorem 15.** *Neka je  $ABCDE$  konveksan peterokut. Produžimo njegove stranice dok se ne sijeku u točkama  $F, G, H, I$  i  $J$  te nacrtamo trokutima  $AFB, BGC, CHD, DIE, EJA$  opisane kružnice. Tada su točke sjecišta susjednih kružnica  $K, L, M, N$  i  $O$ , koja su različita od vrhova početnog peterokuta, koncikličke.*



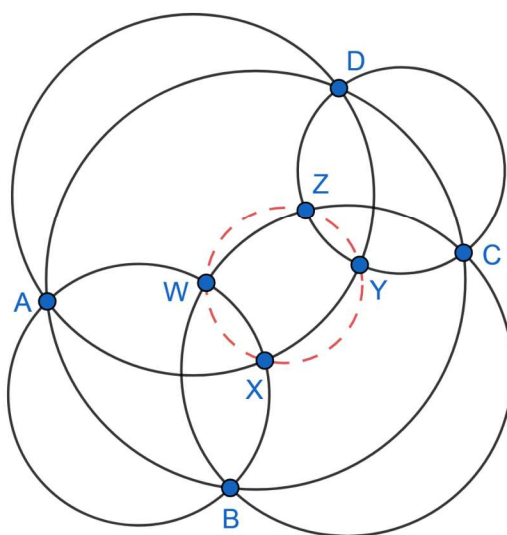
Slika 35

Teorem je poznat i po imenu Teorem o pet kružnica.

### 3.3 Miquelov teorem o šest kružnica

Još je jedan teorem koji nosi Miquelovo ime, Miquelov teorem o šest kružnica. On nam govori da ako pet kružnica dijeli četiri trostruke točke sjecišta, preostale četiri točke presjeka leže na šestoj kružnici.

**Teorem 16.** *Neka su  $A, B, C$  i  $D$  točke na kružnici i neka kroz svaki par susjednih točaka prolazi po jedna kružnica. Tada preostala sjecišta tih kružnica,  $W, X, Y$  i  $Z$ , leže na istoj kružnici (Slika 36).*



Slika 36

## Zaključak

Miquelov teorem je u početku bio smatran kao tvrdnja važna za elementarnu geometriju trokuta, ali se ispostavilo da je od bitnog značaja i za geometriju kružnice. Pokazali smo to i ovim radom spominjući mnoga svojstva koja proizlaze iz odnosa trokuta i njemu pridruženih kružnica.

Iako se pretpostavlja da nije bio prvi, Auguste Miquel svojim je teoremom dotaknuo brojne dijelove geometrije. Pa smo tako primijenili inverziju kao transformaciju ravnine na njegovo dokazivanje, govorili o sličnosti trokuta, povezali nožišne s Miquelovim trokutima kao i karakteristične točke trokuta s Miquelovom točkom.

Pažnju smo posvetili na početku iskazanom Miquelovom teoremu što ne umanjuje važnost teorema iz zadnjeg poglavlja, pogotovo Miquelovog teorema o šest kružnica koji je jedan od zanimljivijih i dokazivanijih teorema koji govore samo o kružnicama.

## Literatura

- [1] T. DAVIS, *Inversion in a Circle*, <http://www.geometer.org/mathcircles>, 2011.
- [2] M. DE VILLIERS, *From Nested Miquel Triangles to Miquel Distances*, *The Mathematical Gazette*, 2002, **85**(507), 390–395.
- [3] R. HONSBERGE, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, New York, New York 1995.
- [4] M. MCDANIEL, *Geometry by Construction: Object Creation and Problem-solving in Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Universal-Publishers, Boca Raton, Florida, 2015.
- [5] V. MILCHEV, *Miquel point and isogonal conjugation*, “Petko Rachov Slaveikov” Secondary School, Kardzhali, Bulgaria, 2016.
- [6] A. OSTERMANN, G. WANNER, *Geometry by Its History*, Springer, New York, 2010.
- [7] D. PALMAN, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.
- [8] A.S. POSAMENTIER, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*, Key College Publishing, New York, New York, 2002.
- [9] A.S. POSAMENTIER, I. LEHMANN, *The Secrets of Triangles: A Mathematical Journey*, Prometheus Books, Amherst, New York, 2012.

## Sažetak

Miquelov teorem kaže da ako na svakoj stranici trokuta ili njihovim produženjima odaberemo po jednu točku, tada se kružnice određene vrhom trokuta i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom sijeku u jednoj točki. Tu točku nazivamo Miquelovom točkom polaznog trokuta, trokut određen odabranim točkama na stranicama Miquelov trokut polaznog trokuta, a kružnice određene vrhom trokuta i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom Miquelovim kružnicama polaznog trokuta.

U radu je teorem dokazan na dva načina koristeći svojstvo koncikličnosti točaka i primjenom inverzije. Osim Miquelovog teorema, dokazali smo i brojne tvrdnje koje govore o položaju Miquelove točke u odnosu na Miquelov trokut, o jednakostima kutova koje vrijede u polaznom i Miquelovom trokutu, o trokutima sličnim polaznom trokutu, o karakterističnim točkama Miquelovog trokuta.

U radu su razmatrane i zanimljive tvrdnje o koncikličnosti točaka u kojima se spominju Miquelovi elementi trokuta.

**Ključne riječi:** koncikličnost točaka, inverzija, Miquelov teorem, Miquelova točka, Miquelov trokut

## Summary

Miquel's theorem is concerning the intersection of three circles, each drawn through one vertex of a triangle and two points on its adjacent sides. The point of intersection is called Miquel point relative to the initial triangle, the triangle connecting the side points is called Miquel triangle relative to the initial triangle and circles passing through each polygon vertex and its neighboring side points is called Miquel circles relative to the initial triangle.

We have proved the theorem in two ways, using properties of concyclic points and by applying inversion. Apart from Miquel's theorem, we have also proved many propositions about position of Miquel point in relation to the Miquel triangle, equality of angles in initial and Miquel's triangle, characteristic points of Miquel's triangle.

Also, in this paper are considered interesting claims about concyclic points in which the Miquel elements of the triangle are mentioned.

**Key words:** concyclic points, inversion, Miquel's theorem, Miquel point, Miquel triangle

## Životopis

Rođena sam 14. prosinca 1993. godine u Osijeku. Završila sam Drugu srednju školu Beli Manastir u Belom Manastiru, smjer hotelijersko-turistički tehničar, nakon koje sam upisala Nastavnički studij Matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.

Tijekom studiranja radila sam u McDondald's-u. Zadnju godinu studiranja radila sam kao zamjena nastavnice matematike u Strojarskoj tehničkoj školi Osijek, Ekonomskoj i upravnoj školi Osijek i Ugostiteljsko-turističkoj školi Osijek u Osijeku te kao zamjena nastavnice informatike i računalstva u Medicinskoj školi Osijek u Osijeku.



