Kamatni račun i primjene

Radan, Vjekoslav

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Vjekoslav Radan

Kamatni račun i primjene

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Vjekoslav Radan

Kamatni račun i primjene

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Mirela Jukić Bokun

Osijek, 2019.

Sažetak:

Tema ovog završnog rada je kamatni račun. Kamatni račun podrazumijeva izračunavanje naknade koju dužnik mora platiti vjerovniku u određenom vremenskom roku od trenutka dizanja kredita jer mu je vjerovnik dao pravo upravljanja određenom svotom novca. U radu ćemo obraditi načine računanja jednostavnih i složenih kamata, teoriju kamatnih stopa, akumulacijske faktore i inflaciju. Kroz teoriju renti ćemo obraditi sve što je potrebno da bi poglavlje zaključili osnovnim i najčešćim načinom otplate kredita. Rad završavamo poglavljem vrijednosni papiri u kojem ćemo ukratko objasniti dionice i malo više pažnje posvetiti obveznicama.

Ključne riječi: Kamate, kamatna stopa, anticipativni obračun, dekurzivni obračun, akumulacija, akumulacijski faktori, neprekidno ukamaćivanje, inflacija, rente, sadašnja vrijednost, akumulacije renti, otplata zajma, vrijednosni papiri, dionice, obveznice.

Interest rate and application

Abstract:

Subject of this paper is interest rate measurement. Interest rate measurement means calculating the fee that debitor needs to repay creditor during specific time period for giving him a specific amount of money on loan. This paper will cover methods for calculating simple and compound interest, theory of interest rates, accumulation factors and inflation. Through the theory of loans we will gather all the knowledge required for concluding the chapter with basic and most used method for loan repayment. We will end this paper with securities, by short explanation of stocks, and a little more attention to bonds.

Key words: Interest, interest rate, anticipative interest, decursive interest, accumulation, accumulation factor, continuous compounding, inflation, loans, present value, accumulation of loan, loan repayment, securities, stocks, bonds.

Sadržaj

Uvod **1**

1. Jednostavni kamatni račun **2**

1.1 Kamate i jednostavno ukamaćivanje 2

1.2 Načini računanja jednostavnih kamata 4

2. Složeni kamatni račun **6**

2.1 Akumulacija 6

2.2 Neprekidno ukamaćivanje 9

2.3 Inflacija 11

3. Rente **12**

3.1 Sadašnja vrijednost i akumulacije renti 12

3.2 Neprekidne rente 14

3.3 Otplata zajma 15

4. Vrijednosni papiri **21**

4.1 Dionice 21

4.2 Obveznice 22

Literatura **25**

Uvod

Krediti postoje od vremena kada još nije postojao novac. Razna dobra poput hrane, tekstilnih materijala i metala posuđivala su se dužniku uz "ugovornu" obvezu vraćanja sto ili više posto količine tog dobra. Neka je vjerovnik odlučio na godinu dana posuditi 100 kilograma željeza, dok se dužnik obvezao vratiti 110 kilograma. Trivijalnim računom dobivamo da je godišnja kamatna stopa iznosila 10%. Takav kredit naziva se naturalni kredit. U današnjem svijetu radimo s novčanim kreditima koji podrazumijevaju novčane kamate, a kamatna stopa pedstavljava postotak za koliko uvećan iznos posuđenog novca dužnik mora vratiti vjerovniku po isteku ugovornog vremena.

Velik broj mladih ljudi se po svome osamostaljenju susreću sa svakodnevnim problemom - upravljanje vlastitim financijama. Početni korak u vođenju vlastitih financija je matematički modelirati problem o kojem se radi. Važno je dobro razumijeti problem prije no što ga matematički modeliramo jer i najmanja greška u razumijevanju problema može dovesti do velikog gubitka, pa čak i bankrota. No, kako se korištenjem kamatnog računa slične nepoželjne situacije mogu izbjeći? U nastavku ovog rada pokušat ćemo na zanimljiv način dati odgovore na takve i mnoge slične probleme.

Rad ćemo započeti jednostavnim kamatnim računom tako što ćemo uvesti nekoliko osnovnih definicija i načina računanja jednostavnih kamata. U drugom poglavlju ćemo detaljnije obraditi složeni kamatni račun, akumulaciju kapitala pri složenom ukamaćivanju i neprekidno ukamaćivanje uz kratki osvrt na inflaciju. U sljedećem poglavlju objasnit ćemo rente, sadašnju vrijednost i akumulaciju renti, neprekidne rente te primjenu teorije renti u zajmovima. Rad ćemo zaključiti poglavljem vrijednosni papiri u kojem ćemo ukratko objasniti dionice i nešto više obraditi obveznice.

1. Jednostavni kamatni račun

1.1 Kamate i jednostavno ukamaćivanje

Za početak, važno je biti svjestan razlike između kamate i kamatne stope. Neka je C_0 vrijednost kapitala te C_n konačna vrijednost kapitala nakon n obračunskih razdoblja. Kamate su naknada koju dužnik plaća vjerovniku za posudbu kapitala

$$I = C_n - C_0.$$

Postotni iznos $p\%$ koji dužnik plaća vjerovniku na početni kapital za određeni vremenski interval naziva se kamatna stopa ili kamatnjak. Definirajmo sada proces ukamaćivanja. Kapitalizacija (ukamaćivanje) je preslikavanje

$$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad C = C(t),$$

gdje vrijednost funkcije $C(t)$ predstavlja iznos kapitala u trenutku t.

U jednostavnom kamatnom računu, ukamaćivanje se uvijek obavlja na početnu glavnicu. Točnije, ako se ukamaćivanje obavlja svakih $n \in \mathbb{N}$ vremenskih jedinica (dani, mjeseci, godine...) onda je kapital C nakon prvog ukamaćivanja dan sa

$$C(1) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Nakon drugog ukamaćivanja kapital je dan izrazom

$$C(2) = C_0 \left(1 + \frac{p \cdot 2}{100}\right).$$

Induktivno dobivamo da je kapital nakon n ukamaćivanja dan izrazom

$$C(n) = C_0 \left(1 + \frac{p \cdot n}{100}\right).$$

Napomena 1.1. *Kapital koji u trenutku $t = 0$ poprima vrijednost 1 naziva se jedinični kapital.*

Definicija 1.1. *Relativna kamata r omjer je kamata I za razdoblje od trenutka t_1 do t_2 i vrijednosti kapitala u trenutku t_2, to jest ako s $I(t_1, t_2)$ označimo dobivene kamate od trenutka t_1 do t_2, onda su relativne kamate za to razdoblje dane izrazom*

$$r(t_1, t_2) = \frac{I(t_1, t_2)}{C(t_1)} = \frac{C(t_2) - C(t_1)}{C(t_1)}.$$

Primjer 1.1. *Neka je početni kapital $C_0 = 3500$ kn stavljen na štednju uz ugovorno vrijeme od 4 godine s godišnjom kamatnom stopom od $p = 3\%$. Izračunajte relativne kamate za razdoblje od početka štednje do trenutka $n = 2$ godine.*

Prvo je potrebno odrediti koliko iznosi vrijednost štednje u trenutku $n = 2$.

$$C(2) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{pn}{100}\right) = 3500 \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 2}{100}\right) = 3710 \ kn.$$

Sada lako dolazimo do tražene vrijednosti :

$$r(0, 2) = \frac{C(2) - C_0}{C_0} = \frac{3710 - 3500}{3500} = 0.06.$$

Primjer 1.2. *Kolika mora biti početna glavnica da bi za 3 godine uz godišnju kamatnu stopu 5%, na štednji dobili 1200 kn jednostavnih kamata?*

Iz

$$K = \frac{Cpn}{100}$$

slijedi

$$C = \frac{100K}{pn}.$$

Uvrštavanjem danih vrijednosti dobivamo

$$C = \frac{100 \cdot 1200}{5 \cdot 3} = 8000\ kn.$$

Dakle, da bismo dobili 1200 kn kamata uz dane vrijednosti, na štednju trebamo staviti 8000 kn.

Često se ukamaćivanje odvija više puta u godini. Ukoliko se ukamaćivanje odvija k puta u godini, vrijednost kapitala nakon n ukamaćivanja dana je izrazom

$$C = C_0 \left(1 + \frac{np}{100k}\right).$$

Ukoliko se kamate računaju po danu, važno je napomenuti koliko godina ima dana u našem obračunu. Najčešće su sljedeće metode:

- **engleska metoda**: ujedno i "najprirodnija" metoda, uzima se u obzir da godina ima 365 dana, odnosno prijestupna 366, a dani se gledaju kalendarski,
- **francuska metoda**: dani se gledaju kalendarski, ali se u obzir uzima da godina ima 360 dana,
- **njemačka metoda**: uzima se da svaki mjesec ima 30 dana, a godina 360.

Za računanje jednostavnih kamata za bilo koju metodu nakon d dana koristi se formula:

$$K = \frac{1}{n}\frac{Cpd}{100},$$

pri čemu je n broj dana u godini koji metoda podrazumijeva. U svakoj od navedenih metoda prvi dan se ne uzima u obzir, dok se zadnji uzima. U većini slučajeva odabir metode ne može znatno utjecati na razliku u kamatama. Naravno, postoje slučajevi kada je kamatna stopa visoka, pa će promjena metode poprilično promjeniti iznos kamata.

Primjer 1.3. *Tvrtka za opskrbu plina izdala je račun za plin od $C = 1000kn$ na dan 25. ožujka 2018. Ako je dužnik račun podmirio 26. svibnja iste godine, koliko je kamata morao platiti na račun ukoliko zatezna kamatna stopa iznosi 7%?*
Račun provodimo za svaku metodu. Korištenjem prethodne formule dobivamo da je broj dana u engleskoj metodi jednak

$$d_{engleska} = 26 + 30 + (31 - 25) = 62\ dana$$

pa je iznos kamata po engleskoj metodi jednak

$$K_{engleska} = \frac{1}{365}\frac{1000 \cdot 7 \cdot 62}{100} = 11.89kn.$$

Kako se dani u engleskoj i francuskoj metodi računaju jednako imamo

$$d_{francuska} = 62\ dana$$

pa slijedi

$$K_{francuska} = \frac{1}{360} \frac{1000 \cdot 7 \cdot 62}{100} = 12.06kn.$$

Preostaje još samo njemačka metoda u kojoj dane računamo

$$d_{njemačka} = 26 + 30 + (30 - 25) = 61\ dan$$

pa kamate po njemačkoj metodi iznose

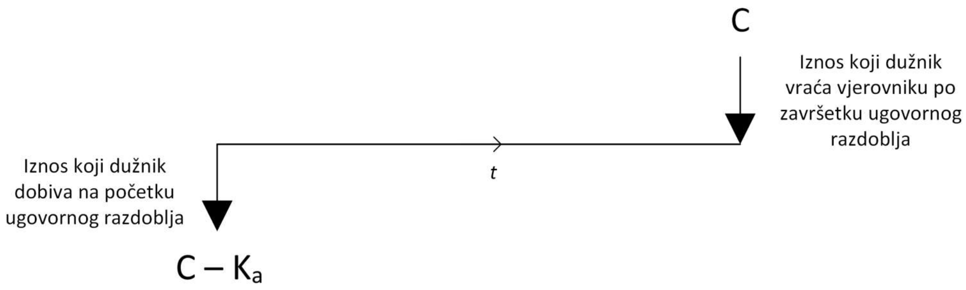
$$K_{njemačka} = \frac{1}{360} \frac{1000 \cdot 7 \cdot 61}{100} = 11.86kn.$$

1.2 Načini računanja jednostavnih kamata

Postoje dva načina obračuna kamata, a to su anticipativni i dekurzivni obračun. Anticipativni obračun kamata podrazumijeva da se obračunavanje i isplata kamata obavlja unaprijed na iznos konačne vrijednosti kapitala. Dakle, ako dužnik posudi iznos C uz kamatnu stopu $p\%$, odmah pri posudbi platit će kamate $K_a = \frac{Cp}{100}$, dok će iznos C koji je posudio vratiti po isteku ugovornog vremena.

Napomena 1.2. *Uočimo da je ovakvo ukamaćivanje ekvivalentno ukamaćivanju kada dužnik posuđuje iznos $C' = C - K_a = C\left(1 - \frac{p}{100}\right)$, a po završetku ugovornog vremena duguje početni iznos C.*

Anticipativni način obračuna kamata prikazan je na Slici 1.



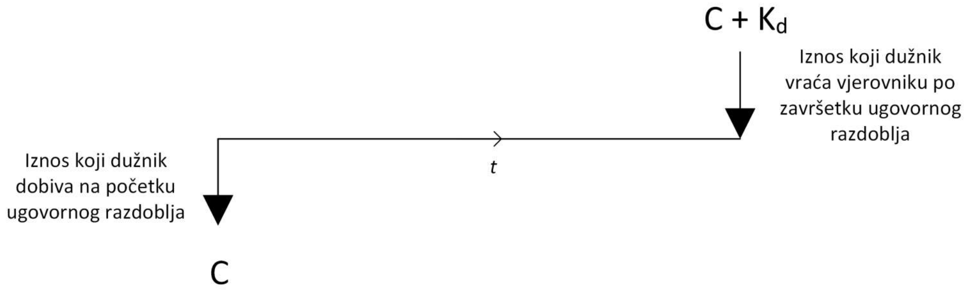
Slika 1: Anticipativni obračun kamata

Pojasnimo sve kroz jednostavan primjer.

Primjer 1.4. *Neka je iznos posudbe jednak $C = 300000$ kn, ugovorno vrijeme $t = 1$ godina uz godišnji anticipativni obračun kamata, a kamatna stopa $p = 7\%$.*
Tad će dužnik vjerovniku odmah pri posudbi isplatiti kamate u iznosu

$$K_a = \frac{300000 \cdot 7}{100} = 21000kn.$$

Po isteku ugovornog vremena, dužnik će vjerovniku vratiti iznos koji je posudio, točnije $C = 300000kn$.



Slika 2: Dekurzivni obračun kamata

Kada kamate računamo dekurzivno, na početku ugovornog vremena dužnik posuđuje iznos C te po završetku ugovornog vremena vraća vjerovniku iznos

$$C + K_d = C + \frac{Cp}{100} = C\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Dekurzivni način obračuna kamata možemo opisati grafički na sljedeći način:

Napomena 1.3. *Primjetimo kako smo u prošlom primjeru u trenutku sklapanja ugovora s vjerovnikom platili kamate, pa je stvarni iznos s kojim raspolažemo* $279000kn$. *Ukoliko na istom primjeru koristimo dekurzivni račun, kamate plaćamo po isteku ugovornog vremena pa je stvarni iznos s kojim raspolažemo* $300000kn$, *iz čega je očito da je dekurzivni način povoljniji za dužnika.*

Danas se jednostavno ukamaćivanje gotovo i ne koristi pa ćemo se u ovom radu znatno više baviti složenim ukamaćivanjem.

2. Složeni kamatni račun

U nastavku rada podrazumijevat ćemo korištenje dekurzivnog obračuna kamata osim ako se drukčije ne naglasi. Složeno ukamaćivanje podrazumijeva da se pri svakom ukamaćivanju računaju kamate na dosadašnje kamate. Dakle, ako označimo $i := \frac{p}{100}$, nakon prve godine kapital će biti dan izrazom

$$C(1) = C(0)(1 + i).$$

Obzirom da nakon druge godine računamo kamate na kamate, kapital je dan izrazom

$$C(2) = C(0)(1 + i)(1 + i) = C(0)(1 + i)^2.$$

Provođenjem indukcije dobivamo da je nakon n godina kapital dan izrazom

$$C(n) = C(0)(1 + i)(1 + i)\cdots(1 + i) = C(0)(1 + i)^n.$$

Ukupne kamate nakon n godina iznosit će

$$I = C(n) - C(0) = C(0)(1 + i)^n - C(0) = C(0)[(1 + i)^n - 1].$$

2.1 Akumulacija

Da bi uveli pojam akumulacije potrebno je razjasniti što znači efektivna kamatna stopa. Efektivna kamatna stopa u oznaci $i(t) := i_{[t,t+1]}$ je postotna promjena kapitala nakon jedne godine obzirom na kapital na početku te godine.

Definicija 2.1. *Akumulacija $A(t)$ je akumulirana vrijednost početnog kapitala A_0 u trenutku t. Akumulacijski faktor u oznaci $a(t)$ je akumulacija jediničnog kapitala u trenutku t.*

Napomena 2.1. *U složenom ukamaćivanju, uz efektivnu kamatnu stopu i, akumulacijski faktor dan je izrazom $a(t) = (1 + i)^t$. Kako je akumulacijski faktor akumulacija jediničnog kapitala, očigledno je funkcija akumulacije u složenom ukamaćivanju dana izrazom*

$$A(t) = A(0)a(t) = A(0)(1 + i)^t.$$

U jednostavnom ukamaćivanju akumulacijski faktor je $a(t) = 1 + it$.

Propozicija 2.1. *Neka je $i > 0$ konstantna efektivna kamatna stopa. Akumulacijiski faktor nakon t godina pri jednostavnom ukamaćivanju je veći, odnosno manji, od akumulacijskog faktora nakon t godina pri složenom ukamaćivanju ukoliko je $0 < t < 1$, odnosno $t > 1$.*

Dokaz:
Akumulacijski faktori pri jednostavnom, odnosno složenom ukamaćivanju dani su izrazima

$$a_{jednostavno} = 1 + it,$$

$$a_{složeno} = (1 + i)^t.$$

Odrediti kada je koja akumulacija veća ekvivalentno je kao i riješiti problem lokalnih ekstrema funkcije

$$f(i) = a_{složeno} - a_{jednostavno} = (1 + i)^t - 1 - it,$$

za $0 < t < 1$ i $t > 1$, pa prvo trebamo naći stacionarne točke. Derivacija funkcije f je

$$f'(i) = t(1 + i)^{t-1} - t,$$

pa su stacionarne točke riješenje jednadžbe

$$(1+i)^{t-1} = 1,$$

iz čega slijedi $i_0 = 0$. Sada računamo drugu derivaciju

$$f''(i) = t(t-1)(1+i)^{t-2}.$$

Preostaje provjeriti "ponašanje" funkcije f'' na intervalima $0 < t < 1$ i $t > 1$.

1) $0 < t < 1$:

$$f''(i_0) < 0,$$

pa f ima lokalni maksimum u i_0, odnosno

$$f(0) > f(i), \quad \forall i > 0,$$

pa je

$$0 > (1+i)^t - 1 - it,$$

iz čega dobivamo

$$a_{jednostavno} > a_{složeno}.$$

2) $t < 1$:

$$f''(i_0) > 0,$$

pa je i_0 točka lokalnog minimuma funkcije f, iz čega slijedi

$$a_{jednsotavno} < a_{složeno}.$$

$\square$

Usporedimo sada grafove akumulacijskih faktora u jednostavnom i složenom ukamaćivanju:

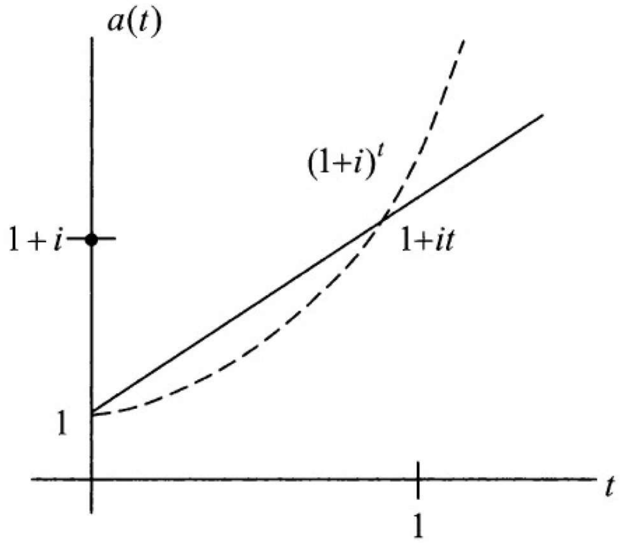
Promotrimo akumulaciju jediničnog kapitala ukamaćivanog m puta godišnje. Njegova akumulacija je dana izrazom

$$a(t) = a(0)\left(1 + \frac{1}{m} i_m\right) = 1 + \frac{1}{m} i_m.$$

Broj i_m naziva se **godišnja nominalna kamatna stopa**.
U praksi se za m najčešće koristi:

- $m = 2 \rightarrow$ polugodišnji obračun
- $m = 4 \rightarrow$ kvartalni obračun
- $m = 12 \rightarrow$ mjesečni obračun
- $m = 365 \rightarrow$ dnevni obračun.

Napomena 2.2. *Efektivna kamatna stopa za period duljine* $\frac{1}{m}$ *iznosi* $\frac{i_m}{m}$.



Slika 3: Grafovi akumulacijskih faktora složenog i jednostavnog ukamaćivanja [2]

Primjetimo da ako je dana nominalna stopa i_m te ekvivalentna efektivna godišnja kamatna stopa i vrijedi

$$1 + i = \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^m .$$

Ukoliko primjenjujemo anticipativni obračun, prethodna jednakost izgleda

$$1 - i = \left(1 - \frac{i_m}{m}\right)^m .$$

Primjer 2.1. *Neka je dana efektivna kamatna stopa $i = 0.107143$. Nađite ekvivalentne godišnje nominalne kamatne stope i_m za $m = 1, 2, 4, 12, 365$.*

Iz

$$1 + i = \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^m$$

jednostavnim računom dobijemo

$$i_m = m\left((1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right).$$

Uvrstimo zadane m:

- $m = 1 \to i_m = 0.107143$
- $m = 2 \to i_m = 0.104417$
- $m = 4 \to i_m = 0.103089$
- $m = 12 \to i_m = 0.102216$
- $m = 365 \to i_m = 0.101797.$

Nije neobično naći se u situaciji u kojoj se duljina razdoblja ukamaćivanja ne podudara s razdobljem na kojem je zadana kamatna stopa, pa je sasvim logično uvesti sljedeću definiciju.

Definicija 2.2. *Neka je i_m dana nominalna kamatna stopa, l_1 duljina razdoblja u kojem se odvija ukamaćivanje, a l_2 duljina razdoblja na kojem je definirana kamatna stopa. Uvedemo li oznaku*

$$l = \frac{l_2}{l_1},$$

relativnu kamatnu stopu definiramo kao

$$\bar{i} = \frac{i_m}{l}.$$

U praksi se koristi i kamatna stopa i' sa svojstvom da je konačna vrijednost kapitala uz nominalnu kamatnu stopu i_m jednaka konačnoj vrijednosti istog tog kapitala ukamaćivanog m puta po razdoblju uz kamatnu stopu i', to jest vrijedi

$$1 + i_m = (1 + i')^m,$$

odnosno

$$i' = \sqrt[m]{1 + i_m} - 1.$$

Kamatnu stopu i' nazivamo konformna kamatna stopa. Lako se vidi da je

$$i_m = (1 + i')^m - 1.$$

2.2 Neprekidno ukamaćivanje

Transakcije se odvijaju na diskretnom prostoru, no mnogi financijski modeli se odvijaju na neprekidnim prostorima. Procesi na neprekidnim prostorima općenito se modeliraju kao granične vrijednosti procesa na diskretnim prostorima na način da se diskretni vremenski intervali infinitezimalno smanjuju. Tako ćemo pristupiti i neprekidnom ukamaćivanju. Neka je akumulirana vrijednost kapitala u trenutku t dana funkcijom $A(t)$. Tad je kamata nakon $\frac{1}{m}$ godine na intervalu $[t, t + \frac{1}{m}]$ dana sa

$$I(t) = A\left(t + \frac{1}{m}\right) - A(t),$$

dok je efektivna kamatna stopa za taj period dana sa

$$i = \frac{1}{A(t)}\left[A\left(t + \frac{1}{m}\right) - A(t)\right].$$

Ako koristimo nominalnu kamatnu stopu onda je efektivna kamatna stopa za period duljine $\frac{1}{m}$ dana s $\frac{i_m}{m}$ pa dobivamo

$$i_m = \frac{m}{A(t)}\left[A\left(t + \frac{1}{m}\right) - A(t)\right].$$

Ako $m \to \infty$, vremenske intervale infinitezimalno ćemo smanjiti te će

$$i_\infty = \lim_{m\to\infty} i_m = \lim_{m\to\infty}\left(m\,\frac{A\left(t + \frac{1}{m}\right) - A(t)}{A(t)}\right),$$

ako takav limes postoji, predstavljati nominalnu kamatnu stopu kod ukamaćivanja beskonačno mnogo puta odnosno neprekidnog ukamaćivanja.

Primjer 2.2. *Pokažimo da vrijedi* $i_\infty = \frac{A'(t)}{A(t)}$.

Označimo $h := \frac{1}{m}$. *Tada ako* $m \to \infty$ *vrijedi* $h \to 0$ *pa dobivamo*

$$i_\infty = \frac{1}{A(t)} \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \frac{1}{A(t)} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{A'(t)}{A(t)}.$$

Primjetimo da je i_∞ *relativna brzina akumulacije kapitala u trenutku* t.

Definicija 2.3. *Neka je* $D \subseteq \mathbb{R}_0^+$, $A \in C^1(D)$ *funkcija akumulacije. Funkcija*

$$\delta(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} \tag{1}$$

naziva se intenzitet kamate u trenutku t.

Promotrimo sada kako izgleda $\delta(t)$ pri jednostavnom i složenom ukamaćivanju. Kod jednostavnog ukamaćivanja vrijedi

$$A(t) = A(0)(1+it),$$

iz čega slijedi

$$\delta(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{i}{1+it}.$$

Kod složenog je ukamaćivanja

$$A(t) = A(0)(1+i)^t$$

pa je

$$\delta(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} = \ln(1+i).$$

Iz jednadžbe (1) sada slijedi

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[A(t)].$$

Integriramo li tu jednakost po $t = 0$ do $t = n$, dobivamo

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[A(t)]\mathrm{d}t = \ln[A(n)] - \ln[A(0)] = \ln\frac{A(n)}{A(0)}.$$

Sada direktno dobivamo izraz za akumulaciju kapitala u trenutku n

$$A(n) = A(0)e^{\int_0^n \delta(t)\mathrm{d}t}.$$

Pokazali smo da je intenzitet δ konstantan i vrijedi $\delta = \ln(1+i)$, to jest

$$e^\delta = 1 + i = a(1).$$

Znamo da vrijedi

$$A(n) = A(0)a(n),$$
$$e^{\delta n} = (1+i)^n = a(n),$$

pa slijedi

$$A(n) = A(0)e^{\delta n}.$$

2.3 Inflacija

Indeks potrošačkih cijena (CPI - consumer price index) je trošak fiksne košare potrošačkih proizvoda. CPI se mjeri u jedinici vremena za koju najčešće uzimamo godinu. Stopa inflacije definira se kao

$$r = \frac{CPI(1) - CPI(0)}{CPI(0)}$$

i predstavlja relativnu promjenu razine cijena u proteklој godini. Inflacija je pad vrijednosti novca zbog čega podrazumijeva porast kamatnih stopa kako bi investitori osigurali realan povrat na investiciju. Kamata stopa prilagođena inflaciji naziva se realna kamatna stopa.

Definicija 2.4. *Realna kamatna stopa definira se kao*

$$i_{realna} = \frac{i - r}{1 + r},$$

gdje je i godišnja kamatna stopa, a r godišnja stopa inflacije.

Općenito, jedinični kapital će za godinu dana uz godišnju stopu inflacije r narasti na $1 + i$. Da bi zadržali kupovnu moć koju smo imali pri investiciji jediničnog kapitala od tih $1 + i$ potrebno je oduzeti $1 + r$, a broj

$$1 + i - (1 + r) = i - r$$

nazivamo **realni porast kapitala**.

Primjer 2.3. ***Hiperinflacija U Jugoslaviji 1990.-1994.***
Inflacija u SFRJ nastala je kao posljedica rata i jedna je od najvećih inflacija ikada. Cijene su se udvostručavale svakih 16 sati. 1 dinar prije inflacije vrijedio je kao $1.2 \cdot 10^{27}$ dinara iz 1994. godine.

3. Rente

3.1 Sadašnja vrijednost i akumulacije renti

Serija n jednakih uplata ili isplata u jednakim vremenskim razmacima naziva se renta. Da bi mogli računati akumulirane vrijednosti rente potrebno se prisjetiti izraza za sumu prvih n članova geometrijskog niza

$$1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Pretpostavimo da svaka uplata iznosi 1, te da je dana kamatna stopa i. Akumulirana vrijednost rente je vrijednost rente nakon svih n uplata i iznosi

$$s_n = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Nakon izvršenih svih n uplata renta se može nastaviti akumulirati. Tako će k vremenskih jedinica nakon posljednje uplate akumulirana vrijednost rente za interval $[n, n+k]$ iznositi $s_n(1+i)^k$ što znači da će ukupna vrijednost rente iznositi

$$s_{n+k} = s_n(1+i)^k + s_k.$$

Ukoliko nas zanima iznos rente prije neke od uplata, govorimo o **sadašnjoj vrijednosti rente**. Sadašnju vrijednost rente označavat ćemo a_n i računati

$$a_n = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n},$$

što uz oznaku $v = \frac{1}{1+i}$ pišemo

$$a_n = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{1-v^n}{i}.$$

Navedeni izraz vrijedi za niz uplata iznosa 1, pa slijedi da za iznos uplata C sadašnja vrijednost rente iznosi Ca_n.

Teorem 3.1. *Neka je dana akumulirana vrijednost rente s_n te sadašnja vrijednost a_n uz kamatnu stopu i. Tada vrijedi*

$$s_n = (1+i)^n a_n.$$

Napomena 3.1. *Prethodnu jednakost možemo pisati i u obliku $a_n = v^n s_n$.*

Dokaz: Vrijedi

$$v^n \cdot s_n = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1-v^n}{i} = a_n.$$

□

Primjer 3.1. *Dužnik treba vratiti 3200 kn u 6 jednakih uplata plativih po završetku razdoblja uz efektivnu kamatnu stopu 12%. Odredite iznos svake uplate.*
Neka je a tražena uplata. Jednadžba sadašnje vrijednosti rente dana je s

$$3200 = a\left(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6\right) = aa_6.$$

Kako je

$$v = \frac{1}{1+i} = 0.8929,$$

slijedi da je

$$a_6 = 4.1114,$$

pa dobivamo

$$a = \frac{3200}{a_6} = 778.32kn.$$

Do sada smo bez naglašavanja govorili o takozvanim postnumerando rentama, to jest o rentama plativim unatrag. Također, postoje i prenumerando rente, odnosno rente plative unaprijed. Kod postnumerando rente vrijeme uplate poprima vrijednosti $t = 1, 2, \ldots, n$, dok kod prenumerando rente poprima vrijednosti $t = 0, 1, \ldots, n-1$. U smislu sadašnje vrijednosti rente, prenumerando rente podrazumijevaju izračun rente u trenutku neke uplate, uključujući i tu uplatu. Tako je sadašnja vrijednost prenumerando rente dana sa

$$\ddot{a}_n = 1 + v + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d},$$

dok je akumulirana vrijednost prenumerando rente

$$\ddot{s}_n = (1+i)^n \ddot{a}_n = \frac{(1+i)^n - 1}{d},$$

pri čemu je $d = 1 - v$.

Primjer 3.2. *Riješite prethodni primjer ako je renta prenumerando.*

Iz jednadžbe sadašnje vrijednosti

$$3200 = a\left(1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5\right) = a\ddot{a}_6$$

jednostavno dobivamo

$$v = 0.8929,$$

iz čega slijedi

$$\ddot{a}_6 = 4.6048.$$

Dakle, vrijednost svake uplate je

$$a = \frac{3200}{\ddot{a}_6} = 694.9270kn.$$

Rente kod kojih broj uplata $n \to \infty$ zovemo vječne rente. Kod vječnih renti sadašnju vrijednost računamo

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i} \qquad (prenumerando)$$

$$\ddot{a}_\infty = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{d} = \frac{1}{d} \qquad (postnumerando).$$

3.2 Neprekidne rente

Do sada smo rente opisivali na diskretnom vremenskom prostoru, no često se rente definiraju na neprekidnom vremenskom prostoru u svrhu modeliranja složenijih problema. Objasnimo prvo rente plative m puta godišnje. Neka je i efektivna kamatna stopa te neka je dana serija uplata iznosa $\frac{1}{m}$ svakih $\frac{1}{m}$ godine. Sadašnja vrijednost postnumerando rente plative m puta godišnje iznosi

$$
\begin{aligned}
a_n^{(m)} &= \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{\frac{nm}{m}}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}}\left(1 + \cdots + \left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{nm-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{1 - (v^{\frac{1}{m}})^{nm}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \\
&= \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} - 1} \\
&= \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} \\
&= \frac{1 - v^n}{i_m},
\end{aligned}
$$

a kako vrijedi $1 - v^n = a_n i$, slijedi

$$a_n^{(m)} = a_n \frac{i}{i_m}.$$

Akumulaciju rente plative m puta godišnje lako dobivamo pomoću jednakosti iz Teorema 3.1.

$$s_n^{(m)} = (1+i)^n a_n^{(m)} = (1+i)^n \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i_m} = \frac{(1+i)^n - 1}{i_m} = s_n \frac{i}{i_m}.$$

Ako $m \to \infty$ vremenski intervali se infinitezimalno smanjuju i dobivamo nešto što zovemo **neprekidna renta**. Akumulirana vrijednost neprekidne postnumerando rente dana je izrazom

$$\bar{s}_n = \int_0^n (1+i)^t \mathrm{d}t = \left.\frac{(1+i)^t}{\ln(1+i)}\right|_0^n = \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta} = s_n \frac{i}{\delta}.$$

Napomena 3.2. *Akumulirana vrijednost neprekidne postnumerando rente može se definirati i kao*

$$\bar{s}_n = \lim_{m \to \infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i_m} = \lim_{m \to \infty} s_n^{(m)}.$$

Znamo da vrijedi $e^{\delta} = 1 + i$, što drukčije zapisujemo kao $e^{-\delta} = v$. Sadašnju vrijednost neprekidne postnumerando rente opisuje izraz

$$\bar{a}_n = \int_0^n v^t \mathrm{d}t = \left.\frac{-e^{-\delta t}}{\delta}\right|_0^n = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta} = a_n \frac{i}{\delta}.$$

3.3 Otplata zajma

Zajam je nešto što se daje, odnosno uzima uz obvezu vraćanja. Kredit je određeni iznos novca koji vjerovnik daje dužniku uz obvezu vraćanja i plaćanja određene naknade, odnosno kamate. Očito, svaki kredit je zajam, ali ne i obratno.

Neka je L iznos zajma uz kamatnu stopu i te obvezu vraćanja u n isplata u iznosima redom $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Amortizacija kredita je postupak otplate kredita koji se provodi na sljedeći način

$$L = K_1 v + K_2 v^2 + \cdots + K_n v^n, \quad v = \frac{1}{1+i}.$$

U praksi se najčešće koristi slučaj kada je $K_1 = K_2 = \cdots = K_n = a$. Iznos a naziva se **anuitet**, a takav način otplate naziva se **otplata zajma jednakim anuitetima**. Trenutno stanje zajma u trenutku k je ostatak duga nakon plaćenog k-tog anuiteta, to jest:

$$L_k = L(1+i)^k - a\frac{(1+i)^k - 1}{i}.$$

Takav način izačunavanja trenutnog stanja zajma naziva se **retrospektivna metoda**. Korištenjem retrospektivne metode za trenutno stanje zajma nakon posljednje uplate dobivamo:

$$L(1+i)^n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} = as_n,$$

pa slijedi da je anuitet dan izrazom:

$$a = \frac{L(1+i)^n}{s_n} = \frac{L(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}.$$

Trenutno stanje zajma može se shvatiti i kao sadašnja vrijednosti svih neplaćenih anuiteta. Dakle, anuitet računamo na sljedeći način:

$$a = \frac{L}{a_n}.$$

Takva metoda naziva se **prospektivna metoda**.

Propozicija 3.1. *Iznos anuiteta dobiven prospektivnom metodom algebarski je jednak iznosu dobivenom retrospektivnom metodom.*

Dokaz:

$$a = \frac{L}{a_n} = \frac{L}{\frac{1-v^n}{i}} = \frac{L(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}.$$

□

Plan otplate zajma bilježi se u tablicu otplate zajma. Da bi mogli napraviti tablicu otplate zajma potrebno je uvesti oznake i veze između njih.

- $L_k \to$ ostatak zajma na kraju k-tog razdoblja
  $L_k = L_{k-1} - R_k$
- $I_k \to$ iznos kamata plaćenih u anuitetu u k-tom razdoblju
  $I_k = L_{k-1} \cdot i$
- $R_k \to$ otplatna kvota, dio anuiteta kojim se otplaćuje zajam
  $R_k = a - I_k$.

U izradi tablice otplate zajma koristit ćemo sljedeći algoritam

Algoritam (Plan amortizacije)
ulaz: iznos zajma L, kamatna stopa i
1. $a = \frac{L(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$
2. $L_0 = L$
3. for $k = 1, 2, \ldots, n$ do:
4. $\quad I_k = L_{k-1} \cdot i$
5. $\quad R_k = a - I_k$
6. $\quad L_k = L_{k-1} - R_k$
7. end for

Uspješnom primjenom ovog algoritma dobivamo sljedeću tablicu

Vrijeme	Anuitet	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak duga
0	-	-	-	L
1	a	I_1	R_1	L_1
2	a	I_2	R_2	L_2
3	a	I_3	R_3	L_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a	I_n	R_n	0

Tablica 1: Plan otplate zajma

Primjer 3.3. *Zajam od 10000kn će biti vraćen u 12 jednaki mjesečnih uplata uz efektivnu kamatnu stopu 13% Izračunajte anuitet i izradite otplatnu tablicu.*
Da bi odredili anuitet potrebno je odrediti mjesečnu kamatnu stopu.
Iz

$$(1 + i_{mj})^{12} = 1 + i$$

slijedi

$$i_{mj} = \sqrt[12]{1 + i} - 1 = 0.01.$$

Odredimo sada anuitet

$$a = \frac{L(1 + i_{mj})^n i_{mj}}{(1 + i_{mj})^n - 1} = \frac{10000 \cdot 1.01^{12} \cdot 0.01}{1.01^{12} - 1} = 888.49kn.$$

Jedino što preostaje je popuniti tablicu.

t	a	I_k	R_k	L_k
0	-	-	-	10000
1	888.49	100	788.49	9211.52
2	888.49	92.12	796.37	8415.14
3	888.49	84.15	804.34	7610.8
4	888.49	76.11	812.38	6798.42
5	888.49	67.98	820.51	5977.91
6	888.49	59.78	828.71	5149.2
7	888.49	51.49	837	4312.2
8	888.49	43.12	845.37	3466.83
9	888.49	34.67	853.82	2613.01
10	888.49	26.13	862.36	1750.65
11	888.49	17.51	870.98	879.67
12	888.49	8.80	879.69	-0.02

Tablica 2

Kao što vidimo u tablici, posljednje stanje zajma kao posljedica greške u zaokruživanju pokazuje kako smo dug pretplatili za 0.02 kn. Taj dio se u praksi nadoknadi u zadnjem anuitetu. Takav anuitet nazivamo ***krnji anuitet****. Krnji anuitet računa se*

$$a' = L_{n-1}(1 + i_{mj}),$$

pa je on u ovom slučaju $a' = 888.47$*. Naravno, potrebno je prilagoditi i* R_{12}

$$R_{12} = a' - I_{12} = 879.67.$$

Uz prepravke tablica izgleda

t	a	I_k	R_k	L_k
0	-	-	-	10000
1	888.49	100	788.49	9211.52
2	888.49	92.12	796.37	8415.14
3	888.49	84.15	804.34	7610.8
4	888.49	76.11	812.38	6798.42
5	888.49	67.98	820.51	5977.91
6	888.49	59.78	828.71	5149.2
7	888.49	51.49	837	4312.2
8	888.49	43.12	845.37	3466.83
9	888.49	34.67	853.82	2613.01
10	888.49	26.13	862.36	1750.65
11	888.49	17.51	870.98	879.67
12	888.47	8.80	879.67	0

Tablica 3

Primjer 3.4. *Pogledajmo kako izgleda stvarna otplatna lista nenamjenskog kredita u kunama uz fiksnu kamatnu stopu. Za izradu liste korišten je online PBZ kalkulator kredita*[7]*, a sve vrijednosti u tablici dobivaju se korištenjem prethodno uvedenih formula uz korištenje mjesečne kamatne stope* $i_{mj} = \frac{i_{12}}{12}$*, gdje je* i_{12} *godišnja kamatna stopa u danoj tablici.*

PRIVREDNA BANKA ZAGREB

Nenamjenski krediti u HRK uz fiksnu kamatnu stopu - standardni plan otplate

Ispisano: 19.3.2019.

Osnovni podaci

Iznos prvog mjesečnog obroka (HRK)	4.255,23
Naknada za obradu kreditnog zahtjeva (HRK)	0,00
Godišnja kamatna stopa (fiksna)	6,98%
Efektivna kamatna stopa (EKS)	7,20%

U izračun EKS-a uključene su stavke navedene u Osnovnim podacima. Police osiguranja, kao instrumenti osiguranja kod pojedinih modela kredita, nisu uključene u izračun EKS-a.

Otplatni plan

RB	Datum	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
1.	19.04.2019	3.004,65	1.250,58	4.255,23	211.995,35
2.	19.05.2019	3.022,12	1.233,11	4.255,23	208.973,23
3.	19.06.2019	3.039,70	1.215,53	4.255,23	205.933,53
4.	19.07.2019	3.057,38	1.197,85	4.255,23	202.876,15
5.	19.08.2019	3.075,17	1.180,06	4.255,23	199.800,98
6.	19.09.2019	3.093,05	1.162,18	4.255,23	196.707,93
7.	19.10.2019	3.111,05	1.144,18	4.255,23	193.596,88
8.	19.11.2019	3.129,14	1.126,09	4.255,23	190.467,74
9.	19.12.2019	3.147,34	1.107,89	4.255,23	187.320,40
10.	19.01.2020	3.165,65	1.089,58	4.255,23	184.154,75
11.	19.02.2020	3.184,06	1.071,17	4.255,23	180.970,69
12.	19.03.2020	3.202,58	1.052,65	4.255,23	177.768,11
13.	19.04.2020	3.221,21	1.034,02	4.255,23	174.546,90
14.	19.05.2020	3.239,95	1.015,28	4.255,23	171.306,95
15.	19.06.2020	3.258,79	996,44	4.255,23	168.048,16
16.	19.07.2020	3.277,75	977,48	4.255,23	164.770,41
17.	19.08.2020	3.296,82	958,41	4.255,23	161.473,59
18.	19.09.2020	3.315,99	939,24	4.255,23	158.157,60
19.	19.10.2020	3.335,28	919,95	4.255,23	154.822,32
20.	19.11.2020	3.354,68	900,55	4.255,23	151.467,64

PRIVREDNA BANKA ZAGREB

RB	Datum	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
21.	19.12.2020	3.374,19	881,04	4.255,23	148.093,45
22.	19.01.2021	3.393,82	861,41	4.255,23	144.699,63
23.	19.02.2021	3.413,56	841,67	4.255,23	141.286,07
24.	19.03.2021	3.433,42	821,81	4.255,23	137.852,65
25.	19.04.2021	3.453,39	801,84	4.255,23	134.399,26
26.	19.05.2021	3.473,47	781,76	4.255,23	130.925,79
27.	19.06.2021	3.493,68	761,55	4.255,23	127.432,11
28.	19.07.2021	3.514,00	741,23	4.255,23	123.918,11
29.	19.08.2021	3.534,44	720,79	4.255,23	120.383,67
30.	19.09.2021	3.555,00	700,23	4.255,23	116.828,67
31.	19.10.2021	3.575,68	679,55	4.255,23	113.252,99
32.	19.11.2021	3.596,48	658,75	4.255,23	109.656,51
33.	19.12.2021	3.617,39	637,84	4.255,23	106.039,12
34.	19.01.2022	3.638,44	616,79	4.255,23	102.400,68
35.	19.02.2022	3.659,60	595,63	4.255,23	98.741,08
36.	19.03.2022	3.680,89	574,34	4.255,23	95.060,19
37.	19.04.2022	3.702,30	552,93	4.255,23	91.357,89
38.	19.05.2022	3.723,83	531,40	4.255,23	87.634,06
39.	19.06.2022	3.745,49	509,74	4.255,23	83.888,57
40.	19.07.2022	3.767,28	487,95	4.255,23	80.121,29
41.	19.08.2022	3.789,19	466,04	4.255,23	76.332,10
42.	19.09.2022	3.811,23	444,00	4.255,23	72.520,87
43.	19.10.2022	3.833,40	421,83	4.255,23	68.687,47
44.	19.11.2022	3.855,70	399,53	4.255,23	64.831,77
45.	19.12.2022	3.878,13	377,10	4.255,23	60.953,64
46.	19.01.2023	3.900,68	354,55	4.255,23	57.052,96
47.	19.02.2023	3.923,37	331,86	4.255,23	53.129,59
48.	19.03.2023	3.946,19	309,04	4.255,23	49.183,40
49.	19.04.2023	3.969,15	286,08	4.255,23	45.214,25
50.	19.05.2023	3.992,23	263,00	4.255,23	41.222,02
51.	19.06.2023	4.015,46	239,77	4.255,23	37.206,56
52.	19.07.2023	4.038,81	216,42	4.255,23	33.167,75
53.	19.08.2023	4.062,30	192,93	4.255,23	29.105,45

RB	Datum	Glavnica	Kamata	Mjesečni obrok	Nedospjela glavnica
54.	19.09.2023	4.085,93	169,30	4.255,23	25.019,52
55.	19.10.2023	4.109,70	145,53	4.255,23	20.909,82
56.	19.11.2023	4.133,60	121,63	4.255,23	16.776,22
57.	19.12.2023	4.157,65	97,58	4.255,23	12.618,57
58.	19.01.2024	4.181,83	73,40	4.255,23	8.436,74
59.	19.02.2024	4.206,16	49,07	4.255,23	4.230,58
60.	19.03.2024	4.230,58	24,61	4.255,19	0,00
		215.000,00	**40.313,76**	**255.313,76**	

4. Vrijednosni papiri

4.1 Dionice

Poznato je da trgovačka društva istovremeno troše i zarađuju puno novca. No, što se događa kad nemaju dovoljno prihoda za pokriti svoje buduće troškove? Postoji nekoliko načina kako djeluju. Jedan je da prodaju svoje dionice.

Definicija 4.1. *Dionica je vlasnički vrijednosni papir koji služi kao dokaz vlasništva nekog dijela određene tvrtke.*

Dionice podrazumijevaju unaprijed ugovorena prava i obveze, po čemu razlikujemo **redovne** i **povlaštene** dionice. Vlasnik redovne dionice ima pravo glasa u odlučivanju na dioničarskoj skupštini. Također, vlasnik ima pravo na isplatu dividende (dio dobiti), te pravo na isplatu dijela ostatka kapitala nakon proglašenog stečaja, odnosno likvidacije. Kako bi mogli predvidjeti "ponašanje " dionica, vlasnici imaju pravo na ograničen pristup poslovnim knjigama tvrtke. Vlasnik ima i pravo na prvokup u slučaju buduće prodaje dionica. Povlaštene dionice vlasniku osiguravaju još neka dodatna prava.
Kod računanja vrijednosti dionica pretpostavlja se da je vrijednost najviše onoliko koliko će vratiti investitorima budućim dividendama. Neka je $D_1, D_2, \ldots$ niz očekivanih budućih dividendi za dionicu. Diskontna stopa je kamatna stopa koju središnja banka koristi u odobravanju kredita bankama i otkupu vrijednosnih papira i označava se r. Sadašnju vrijednost dionice možemo shvatiti kao sadašnju vrijednost beskonačne rente, pri čemu umjesto iznosa uplata uzimamo dividende i koristimo diskontnu kamatnu stopu. Dakle, ako sadašnju vrijednost dionice označimo C te s D označimo sumu očekivanih dividendi, vrijedi

$$C = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} D_i}{r} = \frac{D}{r}.$$

Ovakav način računanja podrazumijeva da vrijednost neće rasti, što u praksi većinom nije točno. Ako pretpostavimo da će vrijednost dionice rasti konstantnom stopom g, podrazumijevamo i konstantan rast iznosa dividendi istom stopom. Ukoliko s D označimo iznos ovogodišnje dividende, niz budućih dividendi je oblika

$$D(1+g), D(1+g)^2, D(1+g)^3, \ldots,$$

pa sadašnju vrijednost dionice računamo

$$C = \frac{D(1+g)}{(1+r)} + \frac{D(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{D(1+g)^3}{(1+r)^3} + \cdots = \frac{D(1+g)}{r-g}.$$

Primjer 4.1. *Dioničar je uočio da se povoljno prodaju dionice neke tvrtke po cijeni od* $C_1 = 82.30$ *kn po dionici, pa je kupio 1000 dionica. Ako je iznos ovogodišnje dividende na svaku dionicu* 6 *kn, te je dioničar procjenio faktor rasta na* 1.8%, *kolika iznosi sadašnja vrijednost dionice? Koliko će dioničar zaraditi ukoliko proda sve dionice po pretpostavljenoj maksimalnoj cijeni? Za diskontnu kamatnu stopu koristite* 8%.
Uz dane podatke lako računamo sadašnju vrijednost dionice

$$C = \frac{D(1+g)}{r-g} = \frac{6(1+0.018)}{0.08-0.018} = 98.52kn,$$

a ukoliko proda sve dionice po pretpostavljenoj maksimalnoj cijeni, dioničar će zaraditi

$$1000\Delta C = 1000(C - C_1) = 16220kn.$$

Procjena vrijednosti dionice je veoma složen posao jer uvelike ovisi o tome koliko dobro je procijenjen faktor rasta g. Iz tog razloga, kupci se često umjesto dionica odlučuju za obveznice.

4.2 Obveznice

Drugi način kako trgovačka društva osiguravaju kapital za buduće troškove je izdavanjem obveznica.

Definicija 4.2. *Obveznica je vrijednosni papir koji služi kao dokaz duga tvrtke koja je obveznicu izdala.*

Obveznica obvezuje prodavača u ugovorenom vremenu vratiti "posuđeni" novac vlasniku obveznice uz unaprijed dogovorenu kamatnu stopu, što kod dionica nije slučaj. Kamate na dug isplaćuju se periodički (najčešće svakih 6 mjeseci) ili rijeđe po povratku uloženog novca, u obliku kupona. Dakle, obveznice će vlasniku donijeti manju zaradu u usporedbi s dionicama, ali su pouzdanije.
Neka je F iznos posuđenog novca i r kuponska kamatna stopa. Tad će u prvih $n-1$ kupona vlasnik dionice dobiti iznos Fr, a u zadnjem kuponu iznos $Fr+F$. Pri prodaji obveznica drugom vlasniku, na osnovu trenutnog stanja tržišta, određuje se stopa prirasta j. Zbog toga, cijenu obveznica C trenutak nakon isplate $n-tog$ kupona možemo shvatiti kao sadašnju vrijednost niza n uplata od kojih su prvih $n-1$ iznosa Fr, a n-ti $Fr+F$ uz kamatnu stopu j, to jest uz oznaku $v=\frac{1}{1+j}$ vrijedi

$$C_n = Fr\left(\frac{1}{1+j}+\frac{1}{(1+j)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+j)^n}\right)+F\frac{1}{(1+j)^n} = Fra_n + Fv^n.$$

Kako vrijedi $a_n j = 1 - v^n$, prethodnu jednakost možemo pisati u obliku

$$C_n = \frac{r}{j}(F - Fv^n) + Fv^n,$$

što uz oznaku $L := Fv^n$ pišemo

$$C_n = \frac{r}{j}(F-L)+L.$$

Takav oblik jednadžbe vrijednosti obveznice naziva se Makehamova formula. Očito je da su C i F direktno povezani s kuponskom kamatnom stopom r i stopom prirasta j, a kako su povezani govori nam sljedeći teorem.

Teorem 4.1. *Neka je F iznos posuđenog novca, C_n sadašnja vrijednost obveznice, r kuponska kamatna stopa i j stopa prirasta. Tada vrijedi:*
1) $C_n > F$ ako i samo ako je $r > j$,
2) $C_n = F$ ako i samo ako je $r = j$,
3) $C_n < F$ ako i samo ako je $r < j$.

Definicija 4.3. *Neka je F iznos posuđenog novca, C_n sadašnja vrijednost obveznice, r kuponska kamatna stopa te j stopa prirasta. Kažemo da je obveznica kupljena*
1) uz premiju ukoliko ako je $C_n > F$,
2) po nominalnoj vrijednosti ako je $C_n = F$,
3) uz diskont ako je $C_n < F$.

U praksi se obveznice prodaju svakodnevno, a ne samo nakon isplate nekog kupona pa se postavlja pitanje kako odrediti cijenu obveznice u bilo kojem trenutku. Neka je $t \in [0,1]$, $t = \frac{m}{n}$, gdje je n broj dana koliko je dug vremenski razmak između isplate susjednih kupona, te m broj proteklih dana od isplate posljednjeg kupona. Tada jednadžbu sadašnje vrijednosti obveznice u trenutku t možemo pisati u obliku

$$C(t) = C(0)(1+j)^t.$$

Primjer 4.2. *Ako 170 dana nakon isplate posljednjeg kupona želimo kupiti obveznicu čija je sadašnja vrijednost u trenutku isplate posljednjeg kupona iznosila $C(0) = 10000$ kn, uz kuponski period od 180 dana, kolika će biti cijena obveznice? Kolika bi cijena obveznice bila da smo ju htjeli kupiti 10 dana nakon posljednje isplate? Stopa prirasta je $j = 9\%$.*
Uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo

$$C\left(\frac{170}{180}\right) = 10000\left(1+\frac{9}{100}\right)^{\frac{170}{180}} = 10847.94kn.$$

Promotrimo sada što bi se dogodilo da smo obveznicu odlučili kupiti 10 dana nakon isplate posljednjeg kupona.

$$C\left(\frac{10}{180}\right) = 10000\left(1+\frac{9}{100}\right)^{\frac{10}{180}} = 10047.99kn.$$

Tu vrijednost nazivamo **kupovna cijena** (purchase price) obveznice. Financijske novine neće objaviti kupovnu, već **tržišnu cijenu** (market price) koju računamo

$$C_m(t) = C(0)(1+j)^t - Frt = C(t) - Frt.$$

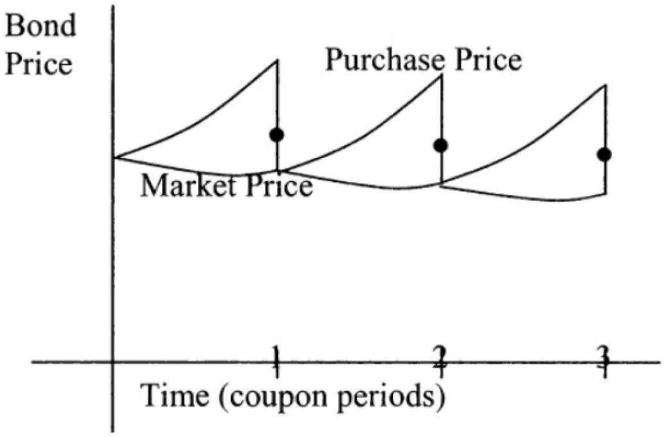
Primjer 4.3. *Uz podatke iz prošlog primjera izračunajte tržišnu cijenu obveznice u oba slučaja ako je iznos na koji je izdana obveznica $F = 9000$ kn, a kuponska kamatna stopa iznosi $r = 2.6\%$.*
Tržišna cijena 170 dana nakon isplate kupona je

$$C_m\left(\frac{170}{180}\right) = 10847.94 - 9000\cdot\frac{2.6}{100}\cdot\frac{170}{180} = 10626.94kn,$$

dok 10 dana nakon isplate iznosi

$$C_m\left(\frac{10}{180}\right) = 10847.94 - 9000\cdot\frac{2.6}{100}\cdot\frac{10}{180} = 10034.99kn.$$

Na Slici 4. vidimo kako izgleda graf cijene obveznice u trenutku $t = \frac{m}{n}$, uz pojašnjenje odnosa kupovne i tržišne cijene.



Slika 4: Graf cijene obveznice u trenutku $t = \frac{m}{n}$ [2]

Da bi smo zaključili ovo poglavlje, a i rad, preostaje još pronaći dobru aproksimaciju stope prirasta. Neka je F cijena po kojoj je obveznica izdana, r kuponska kamatna stopa, te pretpostavimo da je do dospijeća ostalo još n kupona. Ukoliko je obveznica kupljena po kupovnoj cijeni C u nekom trenutku prije dospijeća sljedećeg kupona, tada je stopa prirasta j rješenje jednadžbe

$$C = (Fv^n + Fra_n)\,(1 + j)^t.$$

Primjer 4.4. *Neka je obveznica izdana na $F = 12000$ kn, uz godišnju kuponsku stopu $r = 2,6\%$. Ako do dospijeća preostaje još 13 kupona i obveznicu kupujemo u trenutku $t = \frac{70}{180}$ po cijeni $C = 12900$ kn, stopa prirasta je rješenje jednadžbe*

$$12900 = (12000v^{13} - 12000 \cdot 0.026a_{13})1.026^t.$$

Obzirom da rješavanje ovakve jednadžbe nije baš praktično, korištenjem financijskiskog kalkulatora dobivamo da je stopa prirasta $j = 2.42\%$.

Literatura

[1] D. Bakić, D. Francišković, *Financijska i aktuarska matematika*, Osijek, 2013. (skripta)

[2] S. Broverman, *Mathematics of Investment and Credit*, ACTEX Publications, Inc. Winsted, Connecticut, 5h Edition, 2010.

[3] B. Šego, Z. Lukač, *Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Zagreb, 2014.

[4] *Fiba*,
URL: `http://www.fiba.hr/clanci5.htm`

[5] *Hanfa*,
URL:`https://www.hanfa.hr/`

[6] *Investopedia*,
URL: `https://www.investopedia.com/articles/fundamental/04/041404.asp`

[7] *PBZ kreditni kalkulator*,
URL: `https://kalkulator.pbz.hr/kreditni$\_$kalkulator/`