Matematika u sportskom klađenju

Kalkan, Domagoj

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Domagoj Kalkan

Matematika u sportskom klađenju

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Domagoj Kalkan

Matematika u sportskom klađenju

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Mirta Benšić

Osijek, 2019.

Sažetak

U ovome radu navodimo osnovne pojmove iz vjerojatnosti i način kako ih upotrijebiti u sportskom klađenju. Vidjet ćemo kako kladionice postavljaju koeficijente za klađenje i kojim načinom dođu do njih. Navest ćemo kroz puno različitih primjera kako bismo što bolje prikazali kako kladionice funkcioniraju i na koji se način ljudi klade. Osim toga, uvjerit ćemo se zašto je broj kladionica rekordan i kako su uvijek u dobitku.

Ključne riječi: vjerojatnost, koeficijent za klađenje, naknada, dobit

Abstract

In this paper, the basic concepts of probability and how to use them in sports betting are listed. We will see how bookmakers place betting coefficients and how they get them. We will announce many different examples to better illustrate how betting systems work and the way people are betting. In addition, we will see why the bookmaker's availability is both record-breaking and profitable.

Key words: probability, betting odds, fee, profit

Sadržaj

1 Uvod

Razvojem tehnologije i pojavljivanjem pametnih telefona raste i broj ovisnika o klađenju. Tome u prilog ide i sve veći broj kladionica, ali i internetsko klađenje. Pomoću mobitela može se u par koraka uplatiti listić i time je klađenje olakšano. Prema podacima FINA-e u 2016. godini ostvareno je nešto manje od 2,7 milijarde kuna ukupnog prihoda u djelatnosti kockanja i klađenja, što je 4 puta više nego u 2001. godini. Poseban problem je kod mladih jer klađenjem preko interneta nemaju osjećaj o svoti koju uplaćuju. Većina se njih krene kladiti iz zabave i da si skrate vrijeme uplačujući po desetak kuna, ali kod nekih klađenje postane ovisnost i ubrzo su ulozi puno veći. Treba napomenuti kako je ovaj rad motiviran radom: T. Milun, K. Rivier - Što o sportskom klađenju kaže matematika [2]. Za objašnjenje uloge matematike u klađenju koristit ćemo literatutu [1].

Definiramo osnovne matematičke pojmove vezane uz vjerojatnost koje ćemo koristiti u ovom radu.

Prostor elementarnih događaja je skup koji kao elemente sadrži sve što se može realizirati kad izvedemo pokus.

Definicija 1.1. *Neka je dan neprazan skup* Ω *. Familija* $\mathcal{F}$ *podskupova skupa* Ω *jest* σ ***- algebra skupova na*** Ω *ako vrijedi:*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) ako je $A \in \mathcal{F}$*, onda je i* $A^c \in \mathcal{F}$

iii) ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$*, onda* $\mathcal{F}$ *sadrži i njihovu uniju, tj.*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ nepraznog skupa i σ-algebre na njemu osnovni je objekt za definiciju vjerojatnosti. Elemente σ-algebre $\mathcal{F}$ zovemo **događajima**.

Definicija 1.2. *Neka je Ω neprazan prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra skupova na njemu. Funkciju*

$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

zovemo ***vjerojatnost*** *na Ω ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

A1. ***nenegativnost vjerojatnosti*** *: $P(A) \geq 0$, za sve $A \in \mathcal{F}$,*

A2. ***normiranost vjerojatnosti*** *: $P(\Omega) = 1$,*

A3. ***σ-aditivnost vjerojatnosti*** *: ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, tada vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Zahtjeve A1.-A3. nazivamo ***aksiomima vjerojatnosti.***

Aksiomi vjerojatnosti imaju nekoliko posljedica. Mi navodimo samo one koje ćemo koristiti prilikom matematičkog objašnjenja u ovom radu:

P1. Za događaj A vrijedi $P(A^c) = 1 - P(A)$

P2. Za svaka dva događaja A i B vrijedi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

P3. Ako su događaji A i B nezavisni tada vrijedi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dokaze navedenih svojstava možemo pronaći u [1].

2 Pojam i korištenje koeficijenata

Koeficijent je broj koji nam govori koliko ćemo puta uvećati uloženi novac u slučaju da točno predvidimo ishod neke utakmice. Pokazat ćemo na jednostavnom primjeru teniskog meča u kojem igraju igrač A i igrač B, a mogući su ishodi: pobjeda igrača A ili pobjeda igrača B. Ponuda kladionice izgleda ovako:

A:B	**Pobjeda A**	**Pobjeda B**
koeficijent	1,65	3,50

Tablica 1: Tablica koja prikazuje koeficijente na pobjedu

Ako mislimo da će igrač A pobijediti i uložimo 15 kuna na njegovu pobjedu postoje dvije mogućnosti:

a) ako igrač A pobijedi kladionica isplaćuje:

sljedovanje = **ulog** $\cdot$ **koeficijent** $= 15 \cdot 1,65 = 24,75kn$ iz čega slijedi da je **dobit** = **sljedovanje - ulog** $= 24,75 - 15 = 9,75kn$.

b) ako igrač A ne pobijedi ne dobivamo ništa – izgubili smo 15 kn.

Ako pak uložimo 15 kn na pobjedu igrača B opet postoje dvije mogućnosti:

a) ako igrač B pobijedi na isti način računamo:

sljedovanje = **ulog** $\cdot$ **koeficijent** $= 15 \cdot 3,50 = 52,5kn$, iz čega ostvarujemo **dobit** = **sljedovanje - ulog** $= 52,5 - 15 = 37,5kn$

b) ako igrač B ne pobijedi, izgubili smo 15 kn.

2.1 Izračun koeficijenta

Sad kad smo razjasnili značenje koeficijenata možemo objasniti i postupak njihovog izračuna.

1. KORAK – **procjena ishoda utakmica**

Svaka kladionica određuje koeficijente sama za sebe, ali su najčešće približno jednaki u svim kladionicama. Kladionice imaju zaposlene razne eksperte za klađenje koji potom određuju koeficijente na temelju procjene vjerojatnosti rezultata. Prilikom procjena vjerojatnosti rezultata uzimaju se u obzir: kvaliteta momčadi ili igrača, trenutna forma, omjeri međusobnih rezultata igrača ili momčadi, moguće ozljede, motivacija, prednost domaćeg terena i svi ostali faktori koji bi mogli utjecati na rezultat.

2. KORAK – **izračun koeficijenata**

Neka je procijenjena vjerojatnost rezultata p. Koeficijenti se računaju na sljedeći način:

$$\text{koeficijent} = \frac{1}{\text{p}}$$

Ishodi meča koji imaju veću vjerojatnost pobjede imat će niži koeficijent, a manje vjerojatni ishodi imaju veći koeficijent.

Primjer 2.1. *TENIS*

Tenis je jedan od rijetkih sportova u kojem postoje samo 2 ishoda : pobjeda tenisača ili poraz. Procjenu koeficijenata objsanit ćemo u susretu Jareda Donaldsona protiv Benoita Pairea.

1.korak*-procjena vjerojatnosti*

Statističari u kladionicama u obzir uzimaju mnoštvo činjenica o tenisačima. Obojica su plasirana oko 60. mjesta na ATP ljestvici[1] *u kolovozu 2018. Niti jedan od tenisača nije u dobroj formi pa bi meč vrlo lako mogao otići na jednu ili drugu stranu. Kladionice procjenjuju da nema favorita, odnosno da su šanse za pobjedu jednake (50%).*

2.korak*-postavljanje koeficijenata*

Koeficijenti za obojicu tenisača trebali bi iznositi:

$$koeficijent = \frac{1}{vjerojatnost} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Teoretski koeficijenti za oba tenisača iznose 2, ali smanjivši koeficijente kladionice sebi povećavaju zaradu. Tako bi, primjerice, kladionice u ovakvom slučaju postavile koeficijente na 1,80.

Primjer 2.2. *NOGOMET*

Nogomet je sport u kojem su moguća tri ishoda: pobjeda ili jedne ili druge momčadi ili neriješeno. Igra se utakmica PSG - Toulouse. Procjene eksperata za klađenje su da PSG ima veće izglede za pobjedu. U tablici su prikazane procijenjene vjerojatnosti mogućih ishoda, teoretski koeficijenti kakvi bi trebali biti da nema uračunate naknade kladionicama i stvarni koeficijenti koji su objavljeni na web-stranici jedne kladionice:

[1] ATP lista je popis tenisača koji sastavlja Udruženje teniskih profesionalaca (ATP) na osnovi rezultata tenisača na ATP i ITF turnirima.

ishod	pobjeda PSG-a(1)	neriješeno(X)	pobjeda Toulousea(2)
vjerojatnost	75%	17%	8%
teoretski koeficijenti	1,33	5,88	12,50
stvarni koeficijenti	1,25	5,30	12

Tablica 2: Tablica koeficijenata

Da bi sebi osigurala dobit, kladionica smanjuje sve koeficijente. U slučaju da igrač koji se kladi pogodi ishod meča, dobit će manji iznos od onog izračunatog prema procijenjenoj vjerojatnosti. Pri tom kladionice primjenjuju pravilo o "povratu novca". Povrat novca je iznos koji će prosječni korisnik usluga kladionice dobiti nazad i uglavnom iznosi manje od 90%. Ako korisnik igra samo jedan par i pogodi ga, dobit će nešto manje od 90% osnovne isplate na koju još nisu uračunate naknade. Što više parova kombiniramo povrat novca je sve manji.

2.2 Matematičko objašnjenje

Za izračun koeficijenta koristi se izraz: koeficijent $= \frac{1}{\text{vjerojatnost}}$.

To znači da vrijedi i izraz: vjerojatnost $= \frac{1}{\text{koeficijent}}$.

Ako analiziramo primjer – meč između Jareda Donaldsona i Benoita Pairea iz postavljenih koeficijenata 1,80 za pobjedu jednog ili drugog igrača možemo izračunati vjerojatnosti:

$$\text{vjerojatnost} = \frac{1}{1,80} = 0,55.$$

Kladionice ostvaruju zaradu tako da zapravo ne poštuju osnovna pravila vjerojatnosti. Kao posljedica aksioma P1: $P(A^c) = 1 - P(A)$ slijedi $P(A) + P(A^c) = 1$. Ako je događaj A pobjeda Donaldsona, tada je događaj A^c suprotan događaj, odnosno pobjeda Pairea. Tada bi prema zakonima vjerojatnosti zbroj tih dviju vjerojatnosti trebao biti 1, a prema kladionicama iznosi 1.11, kao da se radi o međusobno nepovezanim događajima. Budući da kladionice ne uvažavaju zakonitosti teorije vjerojatnosti možemo zaključiti da se zapravo radi o 'kvazivjerojatnosti'.

3 Uplata, ulog i dobitak

3.1 Naknada na uplatu

U Republici Hrvatskoj postoji naknada koja pripada državi - tzv. 'manipulativne troškove' u iznosu od 5%, koju na svaku uplatu kladionica prosljeđuje državi. To znači da uplaćenih 20 kn obuhvaćaju stvarnu neto-uplatu plus 5% naknade državi. Iz izraza

$$x + \frac{5}{100}x = 20kn$$

dobijemo iznos neto-uplate

$$x = \frac{20}{1,05} = 19,04kn$$

Posljedica je da ulog i uplata ne predstavljaju isti iznos.

$$\text{ulog} = \frac{\text{uplata}}{1.05}$$

Stoga izraz sljedovanje = uplata · koeficijent možemo u RH prikazati pomoću iznosa uplate na način

$$\text{sljedovanje} = \frac{\text{uplata}}{1,05} \cdot \text{koeficijent}. \tag{1}$$

3.2 Porez na dobitak

Osim naknade država je uvela i porez na dobitak koji će dobitnik morati platiti:

dobitak(x)	**porezna stopa**
$x \leq$ 10.000,00	10%
10.000,00 $\leq$ x $\leq$ 30.000,00	15%
30.000,00 $\leq$ x $\leq$ 500.000,00	20%
500.000,00 $\leq$ x	30%

Tablica 3: Tablica porezne stope u odnosu na dobitak

Ilustrirajmo to na primjeru teniskog meča (Primjer 2.1.) :

Kada pogledamo ponude kladionica za mečeve tenisača s podjednakim vjerojatnostima pobjede, vidimo da koeficijenti nisu po 2,00 nego niži: ako kladionica želi sebi osigurati veću dobit koeficijente će postaviti na iznos 1,70, a za manju dobit 1,80. Pretpostavimo da će kladionica staviti koeficijente na obojicu igrača po 1,80. Ako uplatimo 20 kn na pobjedu Donaldsona, nakon plaćanja naknade državi 5% naš ulog iznosi $19,04kn$. Ako Donaldson pobijedi, sljedovanje bi iznosilo $19,04 \cdot 1,80 = 34,27kn$. Nakon što iznosu sljedovanja oduzmemo porez od 10%, dobijemo isplatu. Isplata iznosi $30,84kn$. Jednaka je računica u slučaju da smo se uspješno kladili na pobjedu Pairea. Dakle, iako je vjerojatnost pobjede $1/2$, zarada nije 20 kn, već samo $10,84kn$. Za izračun "povrata novca", odnosno stvarnog dobitka u odnosu na teoretski dobitak, zamislit ćemo najjednostavniji model: da se u određenoj kladionici klade samo dvije osobe: budući da je vjerojatnost za pobjedu oba tenisača podjednaka možemo očekivati i takve uplate, pa će jedan kladitelj uplatiti 20 kn na pobjedu Donaldsona, a drugi jednak iznos na Pairea. Bez obzira na ishod meča za kladionicu je obračun isti: ukupno je uplaćeno 40 kn, a kladitelji su ostvarili ukupnu isplatu od $30,84kn$ (jedan od njih je pogodio ishod meča, a drugi promašio). Kladionici je ostalo $9,16kn$. Povrat novca kladiteljima izražen u postotcima iznosi

$$\text{povrat} = \frac{\text{isplaćeno}}{\text{uplaćeno}} \cdot 100\% = \frac{30,84}{40} \cdot 100\% = 77,1\%.$$

Da je kladionica postavila koeficijente za pobjedu igrača na 1,70, isplata osobe koja bi uplatila 20 kn na pobjednika iznosila bi

$$\text{sljedovanje} = 19,04kn \cdot 1,70 = 32,37$$

$$\Rightarrow \text{isplata} = 32,37 - 32,37 \cdot 0,1 = 29,13kn.$$

Slijedi da bi povrat novca iznosio

$$\text{povrat} = \frac{\text{isplaćeno}}{\text{uplaćeno}} \cdot 100\% = \frac{29,13}{40} \cdot 100\% = 72,83\%.$$

Vidimo kako su kladionice uvijek u dobitku jer dobitniku isplaćuju samo 70-ak posto teoretskog dobitka.

4 Strategije i kombinacije klađenja

Primjer 4.1. *Većina kladitelja se kladi na više utakmica istovremeno pa ćemo analizirati jedan takav primjer. Oznake u tablici znače:*

utakmica	1	X	2	1X	X2	12
Newcastle-Tottenham	3,60	3,30	2,05	1,72	1,26	1,31
Fulham-Crystal Palace	2,40	3,20	2,90	1,37	1,52	1,31
Huddersfield-Chelsea	6,00	3,60	1,60	2,25	1,11	1,26

Tablica 4: Tablica utakmica s pripadajućim koeficijentima

1 – pobjeda domaćina (u je prvom paru to Newcastle)
X – neriješeno (bez pobjednika)
2 – pobjeda gosta (u prvom je paru to Tottenham)
1X – pobjeda domaćina ili neriješeno
X2 – neriješeno ili pobjeda gosta
12 – pobjeda ili domaćina ili gosta

Ako se kladimo na sljedeću kombinaciju: Tottenham će ili pobijediti ili odigrati neriješeno protiv Newcastlea (k=1,26), Fulham će pobijediti Crystal Palace (k=2,40), a Huddersfield i Chelsea će odigrati neriješeno (k=3,60). Složeni koeficijent se računa kao umnožak svih koeficijenata k = 1,26 · 2,40 · 3,60=10,88. U slučaju da zaista pogodimo sva 3 ishoda na uplaćenih 20 kn,

$$sljedovanje = \frac{uplata}{1,05} \cdot koeficijent = \frac{20}{1,05} \cdot 10,88 = 207,24$$

$$\Rightarrow isplata = 207,24 - 207,24 \cdot 0,1 = 186,52kn$$

što predstavlja dobit od $166,52kn$. *Ako samo jedan par ne pogodimo nema nikakvog dobitka.*

Primjer 4.2. *U teniskom meču između 1. na svjetskoj ljestvici Rafaela Nadala i 151. Stanislasa Wawrinke*[2] *procijenjena pobjeda Nadala je* 82% *,a Wawrinke* 18%. *Idealni bi koeficijenti bili 1,22 na pobjedu Nadala te 5,55 na pobjedu Wawrinke. Zbog naknade kladionice obojici tenisača su smanjeni koeficijenti, ali ne po jednakom pravilu. Naime, ako u meču postoje izraziti favoriti, kladitelji se mnogo više klade na njegovu pobjedu nego što je stvarna vjerojatnost pobjede. Stoga omjer uplata ne odgovara omjeru vjerojatnosti pobjeda, već je realnija situacija prikazana u tablici:*

[2] ATP ljestvica 19. kolovoza 2018.

	Nadal	**Wawrinka**
Vjerojatnosti pobjeda	82%	18%
Raspodjela uplata	95%	5%

Tablica 5: Tablica raspodjele uplata

To znači da se kladionicama isplati smanjiti koeficijent na pobjedu Nadala, a time povećati koeficijent na pobjedu Wawrinke. U prošlosti, kada kladionice nisu imale dovoljno podataka o nekom meču, odnosno kada nisu znali u kakvoj su formi igrači, kakva je teniska podloga (trava, beton, ...), kakvi će biti uvjeti za igranje, kladionice su znale pogrešno postaviti koeficijente. Tu su pogrešku ispravljali uvidjevši da je porast klađenja na jednog igrača veći u odnosu na drugog. Ovu ćemo metodu pokazati primjerom:

	Nadal	**Wawrinka**
Početni koeficijenti	1,12	5,30

Tablica 6: Tablica koeficijenata meča

Par sati nakon objave ovog para za klađenje, kladionica je primijetila da je na pobjedu Wawrinke zaprimljeno 85% *ukupnog broja uplata. Kladitelji očito imaju neke informacije koje kladionica ne zna pa mijenja koeficijente: 1,54 na pobjedu Nadala te 2,90 na pobjedu Wawrinke. Ukoliko se nakon promjene koeficijenata situacija ne mijenja, nerijetko kladionica onemogući uplate na ovaj susret.*

Do sada smo navodili primjere u kojima kladitelj prihvaća ponuđene koeficijente i u slučaju dobitka ostvaruje određenu dobit. Pojedini kladitelji imaju i drugačije pristupe. Dio njih želi igrati na unaprijed određenu dobit. Jedan od takvih pristupa objasnit ćemo u sljedećem primjeru.

Primjer 4.3. *Promotrimo sljedeću utakmicu:*

	1	X	2	1X	X2	12
Sevilla-Žalgiris	1,05	11,00	32,00	-	8,19	1,02

Tablica 7: Tablica s koeficijentima nogometne utakmice

Kada bi uplatili 10 kn na pobjedu domaćina, bilo bi prema (1) *i prema Tablica 3:*

$$sljedovanje = \frac{10}{1,05} \cdot 1,05 = 10$$

$$\Rightarrow isplata = 10 - 10 \cdot 0,1 = 9kn$$

Isplata je 9 kn te dobiti nema, na gubitku smo. U ovom primjeru je domaćin Sevilla veliki favorit pa se ne isplati kladiti na "klasičnu" pobjedu Seville. Zbog toga kladionice u svoju ponudu uvrštavaju dodatne opcije za klađenje:

Sevilla-Žalgiris	1	X	2	1X	X2	12
hendikep 0:1	1,15	6,00	-	-	4,10	-
hendikep 0:2	**1,50**	4,50	-	-	2,25	-
hendikep 0:5	6,50	6,50	-	-	1,05	-

Tablica 8: Tablica promjene koeficijenata ovisno o hendikepu

- *hendikep je rezultat kojim se "kreće" u utakmicu, a postavi ga kladionica, npr. na ovom primjeru odigramo hendikep 0:2 -**1** (pobjeda domaćina), to znači da ćemo pogoditi ishod utakmice ako Sevilla pobijedi s minimalno 3 pogotka razlike: ako Sevilla pobijedi s 3:0, a krenuli smo zbog hendikepa s 0:2, onda je rezultat 3:2 (pobjeda domaćina) i ishod je pogođen.*

Primjer 4.4. *Kako osigurati dobit nakon par pogodaka?*
Primjer kladioničarskog listića:
LISTIĆ 1

	vrijeme	1	X	2	1X	X2	12
Trenčin-Feyenoord	čet 19:00	3,50	3,50	2,00	1,75	***1,27***	1,27
Vitesse-Basel	čet 20:00	2,70	3,30	2,50	***1,48***	1,42	1,30
Club Brugge-Kortrijk	pet 20:30	***1,25***	5,80	10,00	1,03	3,67	1,11
Marseille-Toulouse	pet 20:45	***1,40***	4,20	8,30	1,05	2,79	1,20
RB Salzburg-Austria Beč	sub 17:00	***1,40***	4,50	7,30	1,07	2,78	1,17
Watford-Brighton	sub 16:00	2,25	3,20	3,20	***1,32***	1,60	1,32
Swansea-Preston	sub 16:00	2,20	3,20	3,30	***1,30***	1,62	1,32
Kopenhagen-Brondby	ned 16:00	2,40	3,20	2,90	***1,37***	1,52	1,31
Arsenal-Manchester City	ned 17:00	3,60	3,40	2,00	1,75	***1,26***	1,29

Tablica 9: Tablica jednog kladioničarskog listića

-posebno su označeni ishodi koje kladioničar predviđa

Ukupni koeficijent je
$k = 1,27 \cdot 1,48 \cdot 1,25 \cdot 1,40 \cdot 1,40 \cdot 1,32 \cdot 1,30 \cdot 1,37 \cdot 1,26 = 13,64$
Recimo, uplata je 10 kn:

$$sljedovanje = \frac{10}{1,05} * 13,64 = 129,90kn$$

$$\Rightarrow isplata = 129,90 - 129,90 \cdot 0,1 = 116,91kn$$

Ako nakon subotnjeg dana imamo sve pogotke, a ne želimo riskirati da ostanemo bez svega, na utakmice nedjeljnog dana odigramo suprotno:
LISTIĆ 2

	vrijeme	1	X	2	1X	X2	12
Kopenhagen-Brondby	ned 16:00	2,40	3,20	***2,90***	1,37	1,52	1,31
Arsenal-Manchester City	ned 17:00	***3,60***	3,40	2,00	1,75	1,26	1,29

Tablica 10: Tablica alternativnog listića

Ukupni koeficijent je $k = 2,90 \cdot 3,60 = 10,44.$
Uplatimo 10 kn:

$$sljedovanje = \frac{10}{1,05} \cdot 10,44 = 99,43kn$$

$$\Rightarrow isplata = 99,43 - 99,43 \cdot 0,1 = 89,49kn$$

Ako nije pogođen listić 1, a pogođen je listić 2:
dobit $= 69,49$ *(2 puta smo uplatili po 10kn)*
Ako smo pogodili listić 1, listić 2 je promašen:
dobit $= 96,91$ *(2 puta smo uplatili po 10kn)*

Primjer 4.5. *Obradit ćemo primjer u kojem želimo zaraditi 20 kn. Princip je da ulažemo u serijama povećavajući ulog, sve dok ne dobijemo željenih 20 kn. Radi jednostavnosti, obradit ćemo primjer u kojem nema naknada. Uložimo 20 kn na rezultat utakmice s koeficijentom 2. To je oklada s* 50% *vjerojatnosti pogotka, što znači da bi nam kladionica u slučaju pogotka isplatila 40 kn (ulog 20 kn · koeficijent 2) i time bismo došli do zarade od 20 kn. U slučaju pogrešnog klađenja izgubili bismo uloženih 20 kn pa bismo nastavili klađenje s povećanim ulogom od 40 kn opet uz koeficijent 2. U slučaju pogotka dobivamo 80 kn (40 uloženih i 40 dobiti), s tim što smo u prvom klađenju iz serije izgubili 20 kn pa imamo ukupnu dobit 20 kn. Ako opet pogriješimo moramo* *udvostručiti ulog na 80 kn uz isti koeficijent 2, da bismo u slučaju pogotka povratili prethodno pogrešno uloženih 60 kn i ostvarili zaradu 20 kn. Tako nastavljamo seriju udvostručujući ulog dok ne ostvarimo pogodak i zaradu od željenih 20 kn. Kada je serija uspješno završena upuštamo se u novu seriju s početnim ulogom od 20 kn. Kolike su stvarne vjerojatnosti dobitka?*

Na prvi pogled može se učiniti da uz koeficijent 2, odnosno vjerojatnost pogotka 1/2 vrlo lako možemo doći do sigurne zarade. No, je li to baš tako?

U sljedećoj tablici možemo vidjeti procjene uloga u jednoj seriji i vjerojatnosti pogotka.

redni broj klađenja u jednoj seriji	ulog	vjerojatnost da se u tom klađenju prvi put dogodi uspjeh
1	20	1/2
2	40	1/4
3	80	1/8
4	160	1/16
5	320	1/32
6	640	1/64
7	1280	1/128
8	2560	1/256
9	5120	1/512
10	10240	1/1024

Tablica 11: Tablica uloga i ovisnost o vjerojatnosti uspjeha

Objasnit ćemo podatke u 3. stupcu – vjerojatnosti do prvog uspjeha nakon određenog broja uzastopnih klađenja. Ako je vjerojatnost uspjeha i neuspjeha u jednom klađenju podjednaka, pretpostavit ćemo da vjerojatnost uspjeha u prvom klađenju iznosi 1/2. Prema izrazu za nezavisne događaje, vjerojatnost da ćemo biti uspješni u dva klađenja zaredom iznosi

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Analogno se dobiju i preostale vjerojatnosti u 3. stupcu.

Primjer ćemo dodatno pojasniti geometrijskom distribucijom koja se koristi za opisivanje broja ponavljanja pokusa do prvog uspjeha. Označimo s X slučajnu varijablu:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Vjerojatnost uspjeha nakon i uzastopnih pokušaja je dana:

$$p_i = (1-p)^{i-1}p$$

Vjerojatnost uspjeha jednog nezavisnog pokušaja je:

$$p = \frac{1}{2}$$

Slijedi,

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Nakon što smo izračunali vjerojatnost uspjeha nakon i uzastopnih pokušaja, analizirajmo uloge. Ulog u i-toj igri iznosi:

$$U(i) = 20 \cdot 2^{i-1}$$

Dobit u i-toj igri je dana formulom:

$$D(i) = 20 \cdot 2^{i-1} \cdot 2 - \sum_{k=0}^{i-1} 20 \cdot 2^k =$$

$$= 20 \cdot 2^i - 20 \cdot \frac{2^i - 1}{2-1} = 20.$$

Primijetimo kako je dobit uvijek 20 kn.

Definirajmo novu slučajnu varijablu koja opisuje uloge potrebne da se odigra i-ta igra po ovoj strategiji:

$$\mathcal{U} \sim \begin{pmatrix} 20 & 20 \cdot 2^1 & 20 \cdot 2^2 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Tada se slučajna varijabla $\mathcal{U}$ *može prikazati u ovisnosti o slučajnoj varijabli X iznosi:*

$$\mathcal{U}(X) = 20 \cdot 2^{X-1}$$

Teoretski, kako je postotak uspjeha u jednoj igri 50%, očekujemo da će biti dovoljno dvije igre za ostvariti dobit od 20 kn. Očekivanje broja ponavljanja igre do prvog pogotka je formulirano kao:

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$$

Konačno, možemo izračunati koliko bi iznosio očekivani ulog do pogotka:

$$E\mathcal{U} = 20 \cdot E(2^{X-1}) =$$

$$= 20 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{20}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 1 \to \infty$$

Slijedi, kako dobivena suma ne konvergira, očekivani je ulog po ovoj strategiji beskonačan.

Došli smo do zaključka da ovakva dugoročna strategija nije mudra obzirom da nemamo konačan očekivani ulog, a ukupno možemo ostvariti samo 20 kn nakon cijelog niza klađenja.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak - Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[2] T.Milun, K.Rivier - Što o sportskom klađenju kaže matematika