Metrički i topološki prostori

Veseličić, Valentina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Valentina Veseličić

Metrički i topološki prostori

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Valentina Veseličić
Metrički i topološki prostori

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Dragan Jukić

Osijek, 2019.

Metric and topological spaces

Sažetak

Cilj ovog rada je proučiti osnovna svojstva i rezultate koji se odnose na metričke i topološke prostore. U prvom dijelu rada objašnjava se euklidski prostor te osnovne definicije i svojstva koji su potrebni za daljnju analizu prostora. U radu se obrađuju otvoreni i zatvoreni skupovi u metričkom i topološkom prostoru, nizovi u metričkom prostoru, neprekidna preslikavanja u metričkom i topološkom prostoru te povezani prostori.

Ključne riječi

Euklidski prostor, metrički prostor, topološki prostor, otvoren skup, zatvoren skup, otvorena kugla, Cauchyev niz, potpun prostor, povezan prostor

Abstract

The aim of this bachelor's thesis is to consider fundamental properties and results concerning of metric and topological spaces. It will be defined the Euclidean space, fundamental definitions and properties which are required for further analysis of the space. Also, in this bachelor's thesis the open and closed sets in metric and topological space, sequences in metric space, continuous functions in metric and topological space and connceted spaces it will be presented.

Keywords

Euclidean space, metric space, topological space, open set, closed set, open ball, Cauchy sequence, complete space, connected space

Sadržaj

1 Euklidski prostor

Sa $\mathbb{R}^n$ se označava skup svih uređenih n-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ realnih brojeva. Neka su x,$y \in \mathbb{R}^n$ takvi da je

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ i } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada su definirane sljedeće operacije:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \\ (x|y) &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n \\ \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}$$

Skalarno množenje $(x|y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:

1. $(x|y) \geq 0$ (pozitivna semidefinitnost)
2. $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivna definitnost)
3. $(x|y) = (y|x)$ (simetričnost)
4. $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$ (aditivnost u odnosu na prvu varijablu)
5. $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ (homogenost u odnosu na prvu varijablu)

Vektorski prostor $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ zajedno sa skalarnim množenjem $(x|y)$ zove se n-dimenzionalni Euklidski prostor.
Norma $\|x\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana pomoću skalarnog produkta $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ ima sljedeća svojstva:

1. $\|x\| \geq 0$ (pozitivna semidefinitnost)
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivna definitnost)
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogenost)
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trokuta)

Prva tri svojstva se mogu jednostavno dokazati koristeći definiciju norme, a dokazat ćemo nejednakost trokuta. Za dokaz toga, potrebna nam je Buniakowsky-Cauchy-Schwarz (skraćeno BCS) nejednakost, koja glasi:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Krenemo od kvadrata norme vektora $x + y$ i raspisujemo jednakost uz primjenu svojstva apsolutne vrijednosti i BCS nejednakosti:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) \\ &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\ &\leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y|y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi nejednakost $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Euklidska udaljenost dviju točaka x i y iz $\mathbb{R}^n$ se definira kao Euklidska norma $d(x, y) := \|x - y\|$ vektora $x - y$ i ima sljedeća svojstva:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ova navedena svojstva euklidske udaljenosti se koriste za definiciju pojma metričkog prostora o kojem govori sljedeće poglavlje.

2 Metrički prostor

Definicija 2.1 *Neka je $X \neq \emptyset$ i $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Kažemo da je d funkcija udaljenosti, odnosno ***metrika*** *na skupu X. Tada se uređeni par (X, d) naziva* ***metrički prostor****.*

Skup $\mathbb{R}$ je metrički prostor s funkcijom udaljenosti d koja je definirana s $d(x, y) = \|x-y\|$, za svaki $x, y \in \mathbb{R}$. Slično, skup $\mathbb{C}$ je metrički prostor s funkcijom udaljenosti d koja je definirana s $d(z, w) = \|z - w\|$, za svaki $z, w \in \mathbb{C}$. Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je metrički prostor s Euklidskom funkcijom udaljenosti d koja je definirana s

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.1 Otvoreni skupovi

Definicija 2.2 *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i r realan nenegativan broj. Skup $K(x_0, r) \equiv \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ je* ***otvorena kugla*** *sa središtem u x_0 radijusa r.*

Primjer 2.1 *Primjeri otvorenih kugla u različitim dimenzijama:*

a) $X = \mathbb{R}$
$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$$

b) $X = \mathbb{R}^2$
$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\},$$
što predstavlja krug sa središtem u točki $x_0 \in \mathbb{R}^2$ radijusa r.

Definicija 2.3 *Skup $V \subseteq X$ u metričkom prostoru (X, d) je* ***otvoren*** *ako se oko svake njegove točke može opisati otvorena kugla koja je cijela sadržana u skupu V, tj. ako $(\forall x_0 \in V)(\exists r > 0)K(x_0, r) \subseteq V$.*

Napomena 2.1 *Prazan skup je po definiciji otvoren skup.*

Lema 2.1 *Otvorena kugla $K(x_0, r)$ iz metričkog prostora (X, d) je otvoren skup.*

Dokaz: Neka je $y_0 \in K(x_0, r)$. Treba pokazati kako postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $K(y_0, \delta) \subseteq K(x_0, r)$. Prema odabiru točke y_0 vrijedi da je $d(y_0, x_0) < r$ i definira se $\delta := r - d(y_0, x_0)$. Za $x \in K(y_0, \delta)$ vrijedi:

$$d(x, x_0) \leq d(x, y_0) + d(y_0, x_0) < \delta + d(y_0, x_0) = r - d(y_0, x_0) + d(y_0, x_0) = r$$

Iz toga slijedi da je $x \in K(x_0, r)$, tj. $K(y_0, \delta) \subseteq K(x_0, r)$, što znači da je $K(x_0, r)$ otvoren skup.

■

Propozicija 2.1 *Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova iz metričkog postora (X, d). Tada vrijedi sljedeće:*

1. *Unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$*
2. *Presjek konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$*
3. *$\emptyset$ i X su iz $\mathcal{U}$*

Dokaz:

1. Treba pokazati da će unija otvorenih skupova biti otvoren skup.
   Neka je V unija svih otvorenih skupova iz $\mathcal{U}$ i neka je $x \in V$. Tada je x element nekog otvorenog skupa W iz $\mathcal{U}$. Nadalje, postoji $\delta > 0$ takav da je $K(x, \delta) \subseteq W$, a $W \subseteq V$ pa je $K(x, \delta) \subseteq V$. Iz toga slijedi da je V otvoren skup.

2. Neka je $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k, k \in \mathbb{N}$ i $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathcal{U}$ i $x \in V$. Tada je $x \in V_j$ i postoje pozitivni realni brojevi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ takvi da $K(x, \delta_j) \subseteq V_j$ za $j = 1, \ldots, k$. Neka je $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$. Tada je $\delta > 0$. Zbog toga je $K(x, \delta) \subseteq K(x, \delta_j) \subseteq V$ za svaki j. Iz $K(x, \delta) \subseteq V$ slijedi da je V otvoren skup.

3. Prema napomeni 2.1 prazan skup $\emptyset$ je otvoren skup.
   Skup X je otvoren jer je svaka otvorena kugla oko točke $x \in X$ sadržana u X.

■

Primjer 2.2 *a) Skup $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 > 9 \wedge z > 1\}$ je otvoren skup jer je dobiven presjekom otvorene kugle radijusa 3 oko točke $(1, 2, 0)$ i otvorenog skupa $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1\}$.*

b) Skup $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 > 4 \vee z > 1\}$ je otvoren skup jer je dobiven unijom otvorene kugle radijusa 2 oko točke $(-2, 1, 0)$ i otvorenog skupa $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1\}$.

Definicija 2.4 *Neka je (X, d) metrički prostor i $x \in X$. Skup $N \subseteq X$ je* ***okolina točke*** *x u X ako postoji $\delta > 0$ takav da je $K(x, \delta) \subset N$.*

Direktno iz te definicije slijedi da je skup $V \subseteq X$ otvoren ako i samo ako je V okolina svake točke $v \in V$.

Definicija 2.5 *Neka je $A \subseteq X$. Točka $x \in A$ je **unutarnja točka** skupa A ako postoji otvorena okolina N točke x sadržana u A.*

Definicija 2.6 ***Interior (nutrina) skupa*** *A je skup svih unutarnjih točaka, tj.*

$$\mathrm{Int}A = \{x \in X : \exists N \subseteq X, N \ \textit{otvoren}, x \in N \subseteq A\}$$

Neka je (X, d) metrički prostor i $A, B \subseteq X$. Interior skupa ima sljedeća svojstva:

1. $\mathrm{Int}A \subseteq A$
2. $\mathrm{Int}X = X$
3. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}A \subseteq \mathrm{Int}B$
4. Skup A je otvoren ako i samo ako je $\mathrm{Int}A = A$.
5. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}A$
6. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$

2.2 Zatvoreni skupovi

Definicija 2.7 *Neka je (X,d) metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ je* ***zatvoren*** *ako je $X \backslash A$ otvoren skup.*

Primjer 2.3 *Primjeri zatvorenih skupova:*

a) U (X,d) svaki jednočlani skup $F = \{x_0\}$ je zatvoren.
Treba pokazati da je $F^c = X \backslash F = X \backslash \{x_0\}$ otvoren. Neka je $y_0 \in X \backslash \{x_0\}$ proizvoljna točka. Definira se

$$r := \frac{1}{2} d(x_0, y_0)$$

i vrijedi da je $r > 0$. Treba provjeriti vrijedi li $K(y_0, r) \subseteq X \backslash \{x_0\}$.
Za proizvoljnu točku $z \in K(y_0, r)$ vrijedi: $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0)$
Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} d(x_0, z) &\geq d(x_0, y_0) - d(y_0, z) > d(x_0, y_0) - r \\ &= d(x_0, y_0) - \frac{1}{2} d(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z \neq x_0, \forall z \in K(y_0, r) \Rightarrow K(y_0, r) \subseteq X \backslash \{x_0\}$
Skup $X \backslash \{x_0\}$ je otvoren, tj. $F = \{x_0\}$ je zatvoren.

b) Segment $[a,b] \subseteq R$ je zatvoren.

c) $\bar{K}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$ je zatvoren. Taj skup se naziva ***zatvorena kugla*** *sa središtem u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ radijusa r.*

Propozicija 2.2 *Neka je $\mathcal{U}$ familija svih zatvorenih skupova iz metričkog postora (X,d). Tada vrijedi sljedeće:*

1. *Unija konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$*
2. *Presjek svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$*
3. *$\emptyset$ i X su iz $\mathcal{U}$*

Dokaz ove tvrdnje slijedi iz propozicije 2.1, De'Morganovih zakona i definicije zatvorenog skupa.

Definicija 2.8 *Neka je (X,d) metrički prostor i $F \subseteq X$.* ***Zatvarač*** *$\bar{F}$ od F je presjek svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže skup F.*

Zatvarač još označavamo s $\mathrm{Cl}F$.

Iz propozicije 2.2 slijedi da je zatvarač $\bar{F}$ od F također zatvoren skup u X. Nadalje, neka je F bilo koji zatvoren skup u X i $A \subseteq F$, onda je i $\bar{A} \subseteq F$.
Zatvarač $\bar{F}$ od F je najmanji zatvoren podskup od X koji sadrži F.

Neka je (X, d) metrički prostor i $F, H \subseteq X$. Zatvarač skupa ima sljedeća svojstva:

1. $F \subseteq \mathrm{Cl}F$
2. $\mathrm{Cl}X = X$
3. $F \subseteq H \Rightarrow \mathrm{Cl}F \subseteq \mathrm{Cl}H$
4. Skup F je zatvoren ako i samo ako je $\mathrm{Cl}F = F$.
5. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}F) = \mathrm{Cl}F$
6. $\mathrm{Cl}(F \cup H) = \mathrm{Cl}F \cup \mathrm{Cl}H$

Definicija 2.9 *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Skup A je* ***omeđen/ograničen*** *ako postoji točka $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r)$.*

2.3 Nizovi u metričkom prostoru

Niz u skupu $X \neq \emptyset$ je svaka funkcija $x : \mathbb{N} \to X$. Vrijednost $x(k), k \in \mathbb{N}$, naziva se **opći član niza** i označava se s x_k. Niz $x : \mathbb{N} \to X$ se označava s (x_k).

Definicija 2.10 *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Niz (x_k) **konvergira** prema točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$. Točka x_0 se zove **limes** ili **granična vrijednost** niza (x_k) i označava se s $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.*

Limes ako postoji, onda je on jedinstven, a to upravo dokazuje sljedeći teorem:

Teorem 2.1 *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako on konvergira, limes je jednistven.*

Dokaz: Neka je $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Treba pokazati kako niti jedna druga točka $\hat{x_0} \in X\backslash\{x_0\}$ ne može biti limes. Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x_0, \hat{x_0})$. Prvo treba pokazati da se otvorene kugle $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\hat{x_0}, \varepsilon)$ ne sijeku. Neka je $x \in K(x_0, \varepsilon)$. Tada je $d(x, x_0) < \varepsilon$. Zbog nejednakosti trokuta slijedi da je

$$d(x, \hat{x_0}) \geq d(x_0, \hat{x_0}) - d(x_0, x) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

$\Rightarrow K(x_0, \varepsilon) \cap K(\hat{x_0}, \varepsilon) = \emptyset$.
Prema definiciji limesa postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K(x_0, \varepsilon)$, za svaki $k \geq k_0$. Iz toga slijedi da $x_k \notin K(\hat{x_0}, \varepsilon)$, što znači da $\hat{x_0}$ nije limes.

■

Teorem 2.2 *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako za svaki niz (x_k) iz F koji konvergira u X ima limes u F.*

Dokaz: Neka je F zatvoren skup i neka je (x_k) niz u F koji konvergira prema točki $x_0 \in X$. Treba pokazati da je $x_0 \in F$. Pretpostavimo da x_0 nije iz F, tj. da je $x_0 \in X\backslash F$. Skup $X\backslash F$ je otvoren pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq X\backslash F$. Kako niz (x_k) konvergira prema x_0, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq X\backslash F$ za svaki $k \geq k_0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je (x_k) niz u F.

Obratno, pretpostavimo da $F \subseteq X$ sadrži limese svih konvergentnih nizova iz F i da F nije zatvoren skup, tj. da $X\backslash F$ nije otvoren. Tada postoji točka $x_0 \in X\backslash F$ takva da $\forall r > 0$ vrijedi da $K(x_0, r) \cap F \neq \emptyset$. Zamjenjujući r redom s $\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, dolazimo do točaka $x_k \in K(x_0, r) \cap F$. Niz (x_k) je niz u F. Vrijedi da je $d(x_0, x_k) < \frac{1}{k}$, tj. $x_k \to x_0 \in X\backslash F$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da F sadrži limese svih svojih konvergentnih redova pa je F zatvoren skup.

■

Definicija 2.11 *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Niz je **omeđen** ako postoji $x_0 \in X$ i $r > 0$ takav da je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, r)$.*

Definicija 2.12 *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i (x_k) niz u X. Točka x_0 je **točka gomilanja** ili **gomilište** niza (x_k) ako svaka otvorena okolina točke x_0 sadrži beskonačno mnogo članova tog niza.*

Napomena 2.2 *Za gomilište niza vrijedi:*

a) Gomilište podniza je i gomilište niza.

b) Konvergentni niz u metričkom prostoru ima samo jedno gomilište i to je njegov limes.

2.3.1 Potpuni metrički prostori

Definicija 2.13 *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Niz (x_k) je* ***Cauchyev niz*** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_m) < \varepsilon$, za sve $k, m \geq k_0$.*

Radi jednostavnosti, Cauchyev niz se skraćeno označava C-niz.

Primjer 2.4 *Neka je $(x_k) = \frac{1}{k^2}, k \in \mathbb{N}$ niz u $X = \mathbb{R}$. Pokažimo da je C-niz. Neka su $k, m \in \mathbb{N}$. Bez smanjenja općenitosti neka je $m > k$. Tada vrijedi:*

$$|x_k - x_m| = \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{m^2} \right| = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{m^2} < \frac{1}{k^2}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Odabire se $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Tada za sve $k, m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $|x_k - x_m| < \varepsilon$. Niz $(x_k) = \frac{1}{k^2}$ je C-niz.

Teorem 2.3 *U metričkom prostoru (X, d) vrijedi:*

1. *Svaki konvergentan niz je C-niz.*
2. *Svaki C-niz je omeđen.*

Dokaz:

1. Neka je $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0$. Po definiciji limesa tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $k \geq k_0$. Zato za sve $k, m \geq k_0$, koristeći nejednakost trokuta se dobije:
$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Slijedi da je niz (x_k) C-niz.

2. Neka je (x_k) C-niz. Specijalno za $\varepsilon = 1$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d(x_k, x_{k_0}) < 1$ za sve $k \geq k_0$. Neka je
$$M := max\{1, d(x_1, x_{k_0}), d(x_2, x_{k_0}), \ldots, d(x_{k_0 - 1}, x_{k_0})\} + 1$$
Tada su svi članovi niza (x_k) sadržani u otvorenoj kugli $K(x_{k_0}, M)$, što znači da je niz omeđen.

$\blacksquare$

Definicija 2.14 *Metrički prostor (X, d) je* **potpun** *ako svaki Cauchyjev niz iz X konvergira prema nekoj točki iz X.*

Potpun normiran vektorski prostor zove se **Banachov prostor**, a potpun unitaran vektorski prostor **Hilbertov prostor**.

Teorem 2.4 *Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako je (F, d) također potpun metrički prostor.*

Dokaz: Neka je $F \subseteq X$ zatvoren skup. Treba pokazati da proizvoljan C-niz (x_k) iz F konvergira prema nekoj točki iz F.
Kako je $F \subseteq X$, niz (x_k) je C-niz i u X, a zbog potpunosti prostora (X, d), postoji točka $x_0 \in X$ prema kojoj niz (x_k) konvergira. Zbog zatvorenosti skupa F, prema teoremu 2.2 je $x_0 \in F$. C-niz (x_k) konvergira u (F, d) pa je (F, d) potpun metrički prostor.

Obratno, neka je (F, d) potpun metrički prostor. Zbog teorema 2.2 dovoljno je pokazati da svaki niz (x_k) iz F koji konvergira ima limes u F.
Neka niz (x_k) iz F konvergira prema $x_0 \in X$. Tada prema teoremu 2.3 (x_k) je C-niz i zbog potpunosti prostora (F, d), postoji točka $\hat{x_0} \in F$ prema kojoj on kovergira. Zbog jedinstvenosti limesa $\hat{x_0} = x_0$. Skup F je zatvoren skup.

■

Primjer 2.5 *Primjeri potpunih metričkih prostora:*

a) *Segment $[a, b]$ je potpun metrički prostor prema prethodnom teoremu.*

b) *Euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ je potpun. (vidi [4, str. 43])*

2.4 Neprekidna preslikavanja

Definicija 2.15 *Preslikavanje $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* ***neprekidno u točki*** *$x_0 \in D$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ za svaki $x \in \langle x_0 + \delta, x_0 - \delta \rangle \cap D$, tj.:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Pomoću Euklidske metrike d na $\mathbb{R}$ proširuje se pojam neprekidnosti na preslikavanje metričkih prostora:

Definicija 2.16 *Neka su (X, d_x) i (Y, d_y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je* ***neprekidno u točki*** *$x_0 \in D$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $d_x(x, x_0) < \delta$, tj.:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Uočimo da je preslikavanje $f : D \subseteq X \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $f(K_x(x_0, \delta) \cap D) \subseteq K_y(f(x_0), \varepsilon)$. Zbog toga vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.5 *Neka su (X, d_x) i (Y, d_y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno u točki $x_0 \in D$ ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ postoji otvorena okolina U točke x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$.*

Dokaz: Neka je f neprekidno u točki $x_0 \in D$, a V otvorena okolina točke $f(x_0)$. Kako je skup V otvoren, prema definiciji postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K_y(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji $\delta > 0$ takav da je $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $d_x(x, x_0) < \delta$. Iz toga slijedi: $f(D \cap K_x(x_0, \delta)) \subseteq K_y(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$.
Ako je skup $U := K_x(x_0, \delta)$, slijedi da je $f(U \cap D) \subseteq V$.

Obratno, neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $V := K_y(f(x_0), \varepsilon)$ otvorena okolina točke $f(x_0)$ u V, prema pretpostavci teorema slijedi da postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U \cap V) \subseteq V$. Zbog otvorenosti skupa U, postoji $\delta > 0$ takav da je $K_x(x_0, \delta) \subseteq U$. Zato je $f(K_x(x_0, \delta) \cap U) \subseteq V$, odnosno $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji vrijedi da je $d_x(x, x_0) < \delta$.

■

Napomena 2.3 *Ako je $f : D \to Y$ neprekidna funkcija, tada je neprekidna i svaka njezina restrikcija $f_{|A} : A \to Y$, $A \subseteq D$.*

Neprekidnost preslikavanja metričkih prostora može se opisati pomoću konvergentnih nizova. O tome govori sljedeći teorem: **Heineova karakterizacija neprekidnosti**.

Teorem 2.6 *Neka su (X, d_x) i (Y, d_y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno u točki $x_0 \in D$ ako i samo ako za svaki niz (x_k) u D koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_k))$ konvergira prema $f(x_0)$.*

Dokaz: Neka je f neprekidno preslikavanje u točki $x_0 \in D$, a (x_k) bilo koji niz u D koji konvergira prema x_0. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K_x(x_0, \delta) \cap D) \subseteq K_y(f(x_0), \varepsilon). \tag{1}$$

Kako je $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$x_k \in K_x(x_0, \delta) \cap D, \forall k \geq k_0 \tag{2}$$

Iz (2) i (1) slijedi da je $f(x_k) \in K_y(f(x_0), \forall k \geq k_0$, što znači da niz $(f(x_k))$ konvergira prema $f(x_0)$.

Obratno, neka je $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ za svaki niz (x_k) iz D koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da je f neprekidna u točki x_0 i taj dokaz će se provesti kontradikcijom, tj. pretpostavimo da f nije neprekidna. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji točka $x_\delta \in D$ takva da je $d_x(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d_y(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Specijalno, za $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, dolazimo do niza (x_k) takvog da je $d_x(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ i $d_y(f(x_k), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Zbog $\lim_{k\to\infty} d_x(x_k, x_0) = 0$, dobiveni niz (x_k) konvergira prema x_0, ali niz $(f(x_k))$ ne konvergira prema $f(x_0)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Preslikavanje f je neprekidno u točki x_0.

■

Primjer 2.6 *Funkcija* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadana formulom:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nije neprekidna u $(0,0)$.

a) Koristeći definiciju treba pokazati da:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists (x_\delta, y_\delta) \in K((0,0),\delta)) \wedge d(f(x_\delta, y_\delta), f(0,0)) \geq \varepsilon$$

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{3}$. *Za svaki* $\delta > 0$ *uzmimo da je* $(x_\delta, y_\delta) = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$. *Tada je:*

$$d((x_\delta, y_\delta), (0,0)) = \left|\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) - (0,0)\right| = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

i

$$d(f(x_\delta, y_\delta), f(0,0)) = \left|f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) - f(0,0)\right| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon$$

b) Pomoću Heineove karakterizacije neprekidnosti:
Niz $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), k \in \mathbb{N}$, *konvergira prema* $(0,0)$. *Kako je* $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$, *znači da* $f(x_k, y_k)$ *ne konvergira prema* $f(0,0) = 0$.

3 Topološki prostor

Svojstva otvorenih skupova iz propozicije 2.1 se koriste za definiciju pojma topologije:

Definicija 3.1 *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{U}$ podskupova od X sa svojstvima:*

1. *Unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$*
2. *Presjek konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$*
3. *$\emptyset$ i X su iz $\mathcal{U}$*

zove se ***topološka struktura*** *ili* ***topologija*** *na X.*
Pri tome se uređeni par $(X,\mathcal{U})$ zove ***topološki prostor****, a članovi familije $\mathcal{U}$* ***otvoreni skupovi****.*

Bilo koji metrički prostor može se smatrati topološkim prostorom. Zaista, neka je X metrički prostor s funkcijom udaljenosti d. Prisjetimo se da je $V \subseteq X$ otvoren skup ako i samo ako za bilo koju točku $v \in V$ postoji $\delta > 0$ takav da $\{x \in X : d(x, v) < \delta\} \subseteq V$. Prazan skup $\emptyset$ i cijeli skup X su otvoreni skupovi. Također, bilo koja unija otvoreni skupova i konačan presjek otvorenih skupova u metričkom prostoru je otvoren skup. Na taj način, skup svih otvorenih skupova u metričkom prostoru zadovoljava aksiome topološkog prostora. Takav skup otvorenih skupova zovemo *topologija generirana funkcijom udaljenosti d na X.*

Primjer 3.1 *Topologija se može definirati na bilo kojem skupu X na način da je svaki podskup od X otvoren skup. Takva topologija se naziva* ***diskretna topologija.***

Definicija 3.2 *Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Skup $F \subseteq X$ je* ***zatvoren*** *ako je $X \backslash A$ otvoren skup.*

3.1 Hausdorffov prostor

Definicija 3.3 *Topološki prostor X je* ***Hausdorffov prostor*** *ako zadovoljava sljedeći Hausdorffov aksiom:*

- *ako su x i y dvije različite točke u X, onda postoje otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$*

Lema 3.1 *Svaki metrički prostor je Hausdorffov prostor.*

Dokaz: Neka je X metrički prostor s funkcijom udaljenosti d, te neka su x i y dvije različite točke iz X. Neka je $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x, y)$. Tada su otvorene kugle $K(x, \varepsilon)$ i $K(y, \varepsilon)$ otvoreni skupovi.

Ako je $K(x, \varepsilon) \cap K(y, \varepsilon) \neq \emptyset$, tada postoji točka $z \in X$ koja zadovoljava $d(x, z) < \varepsilon$ i $d(y, z) < \varepsilon$. Ali to je nemoguće, jer bi onda prema nejednakosti trokuta vrijedilo $d(x, y) < 2\varepsilon$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Slijedi da za $x \in K(x, \varepsilon)$ i $y \in K(y, \varepsilon)$ vrijedi $K(x, \varepsilon) \cap K(y, \varepsilon) = \emptyset$. Metrički prostor X je Hausdorffov prostor.

$\blacksquare$

3.2 Okolina, interior i zatvarač skupa

Definicija 3.4 *Neka je X topološki prostor i $x \in X$. Neka skup $N \subseteq X$ sadrži točku x. Skup N je* ***okolina točke*** *x ako postoji otvoren skup V koji sadrži točku x i podskup je od skupa N.*

Definicija 3.5 *Neka je X topološki prostor te neka je $A \subseteq X$.* ***Interior (nutrina) skupa*** *A definira se kao najveći otvoreni skup koji je sadržan u A.*

Skraćeno se označava: $\mathrm{Int}A$.

Napomena 3.1 *Interior skupa je jednak uniji svih otvorenih skupova sadržanih u tom skupu.*

Prema tome, definicija okoline točke $x \in X$ može se promatrati na sljedeći način: svaki skup N čiji interior sadrži točku x, tj. $x \in \mathrm{Int}N$, je okolina točke x.

Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$. Interior skupa ima sljedeća svojstva:

1. $\mathrm{Int}A \subseteq A$
2. $\mathrm{Int}X = X$
3. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}A \subseteq \mathrm{Int}B$
4. Skup A je otvoren ako i samo ako je $\mathrm{Int}A = A$.
5. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}A$
6. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$

Sljedećim primjerom je pokazano kako vrijedi: $\mathrm{Int}(A \cup B) \neq \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$:

Primjer 3.2 *Neka je $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ i $B = [1, 3]$.*

$$A \cup B = [0, 3] \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cup B) = \langle 0, 3\rangle$$

$$\mathrm{Int}A = \langle 0, 1\rangle, \mathrm{Int}B = \langle 1, 3\rangle \Rightarrow \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$$

Očito je da: $\langle 0, 3\rangle \neq \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$, tj. $\mathrm{Int}(A \cup B) \neq \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$.

Definicija 3.6 *Neka je X topološki prostor te neka je $A \subseteq X$.* ***Zatvarač skupa*** *A je najmanji zatvoren skup koji sadrži cijeli skup A.*

Skraćeno se označava: $\mathrm{Cl}A$ ili $\bar{A}$.

Napomena 3.2 *Zatvarač skupa je jednak presjeku svih zatvorenih skupova koji sadrže taj skup.*

Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$. Zatvarač skupa ima sljedeća svojstva:

1. $A \subseteq \mathrm{Cl}A$
2. $\mathrm{Cl}X = X$
3. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Cl}A \subseteq \mathrm{Cl}B$
4. Skup A je zatvoren ako i samo ako je $\mathrm{Cl}A = A$.
5. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}A$
6. $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$

Kod zatvarača skupa ne vrijedi jednakost presjeka, tj. $\mathrm{Cl}(A \cap B) \neq \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$, što je pokazano sljedećim primjerom:

Primjer 3.3 *Neka je $X = \mathbb{R}$, $A = \langle 0, 1\rangle$ i $B = \langle 1, 3\rangle$.*

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}(A \cap B) = \emptyset$$

$$\mathrm{Cl}A = [0, 1], \mathrm{Cl}B = [1, 3] \Rightarrow \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B = \{1\}$$

Očito je da: $\emptyset \neq \{1\}$, tj. $\mathrm{Cl}(A \cap B) \neq \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$.

Teorem 3.1 *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Točka x_0 je iz zatvarača skupa A, $x_0 \in \mathrm{Cl}A$, ako i samo ako je $A \cap N \neq \emptyset$ gdje je N proizvoljna okolina točke x_0.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in \mathrm{Cl}A$ i N bilo koja okolina točke x_0 te $A \cap N = \emptyset$. Zbog $\mathrm{Int}N \subseteq N$, onda je i $A \cap \mathrm{Int}N = \emptyset$. Iz toga slijedi da je $A \subseteq X \backslash \mathrm{Int}N$. Kako je $\mathrm{Int}N$ otvoren skup, onda je $X \backslash \mathrm{Int}N$ zatvoren skup, pa prema svojstvima zatvarača skupa vrijedi

$$\mathrm{Cl}A \subseteq \mathrm{Cl}(X \backslash \mathrm{Int}N) = X \backslash \mathrm{Int}N.$$

Slijedi da je $\mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Int}N = \emptyset$, a to je kontradikcija jer je $x_0 \in \mathrm{Cl}A$ i $x_0 \in \mathrm{Int}N$.

Obratno, neka vrijedi $A \cap N \neq \emptyset$ gdje je N okolina točke x_0. Treba pokazati da je tada $x_0 \in \mathrm{Cl}A$. U suprotnom bi $x_0 \in X \backslash \mathrm{Cl}A$, pa bi skup $X \backslash \mathrm{Cl}A$ bio otvorena okolina točke x_0. To je kontradikcija jer je

$$X \backslash \mathrm{Cl}A \cap A \subseteq X \backslash \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}A = \emptyset.$$

Dakle $x_0 \in \mathrm{Cl}A$.

■

Definicija 3.7 *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$.* ***Rub (granica) skupa*** *A je skup $\partial A = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A)$.*

Iz definicije je vidljivo da vrijedi: $\partial A = \partial(X \backslash A)$.

Primjer 3.4 *Neka je $X = \mathbb{R}$, a $A = \langle 2, 5\rangle$.*

$$\partial A = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A) = [2, 5] \cap \Big(\langle -\infty, 2] \cup [5, +\infty\rangle\Big) = \{2, 5\}$$

3.3 Neprekidna preslikavanja

Definicija 3.8 *Neka su X i Y dva topološka prostor. Preslikavanje $f : D \subseteq X \to Y$ je* ***neprekidno u točki*** *$x_0 \in D$ ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je*

$$f(U \cap D) \subseteq V.$$

Teorem 3.2 *Neka su X i Y dva topološka prostora. Preslikavanje $f : D \subseteq X \to Y$ je neprekidno preslikavanje ako je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X za svaki otvoren skup V u Y, gdje je:*

$$f^{-1}(V) \equiv \{x \in X : f(x) \in V\}.$$

Primjer 3.5 *Identiteta $f : X \to X$, $f(x) = x$, je neprekidno preslikavanje.*
Neka je $x_0 \in X$ i V bilo koja otvorena okolina od $f(x_0)$. Treba pronaći otvorenu okolinu U od točke x_0 za koju vrijedi $f(X \cap U) \subseteq V$.
Otvorena okolina koja se traži je upravo skup V, tj. $U \equiv V$.

Lema 3.2 *Neka su X, Y i Z topološki prostori te $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija preslikavanja f i g, $g \circ f : X \to Z$, također neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je V otvoren skup u Z. Tada je $g^{-1}(V)$ otvoren skup jer je g neprekidno preslikavanje. Stoga je $f^{-1}(g^{-1}(V))$ otvoren skup u X jer je f neprekidno preslikavanje. Kako je

$$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V),$$

kompozicija preslikavanja $g \circ f$ je neprekidno preslikavanje.

■

Lema 3.3 *Neka su X i Y topološki prostori te $f : X \to Y$ preslikavanje. f je neprekidno preslikavanje ako i samo ako $f^{-1}(V)$ zatvoren skup u X za svaki zatvoren skup V u Y.*

Dokaz: Ako je V bilo koji podskup od Y, onda vrijedi:

$$X \backslash f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \backslash V),$$

tj. komplement praslike od V je praslika komplementa od V. Direktnom primjenom definicija neprekidnosti preslikavanja i zatvorenih skupova slijedi dokaz leme.

■

Teorem 3.3 *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Za svaki skup $A \subseteq X$ je $f(\mathrm{Cl}A) \subseteq \mathrm{Cl}(f(A))$ ako je f neprekidno.*

Dokaz: Neka je V otvorena okolina točke $f(x_0)$ u Y. Treba pokazati da postoji otvorena okolina U točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$.
Neka je $A = f^{-1}(Y \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$. Treba pokazati da $x_0 \notin \mathrm{Cl}A$. U suprotnom bi vrijedilo:

$$f(x_0) \in f(\mathrm{Cl}A) \subseteq \mathrm{Cl}f(A) = \mathrm{Cl}f(f^{-1}(Y \backslash V)) \subseteq \mathrm{Cl}(Y \backslash V),$$

odakle bi slijedilo da $f(x_0) \notin Y \backslash \mathrm{Cl}(Y \backslash V) = \mathrm{Int}V = V$, što je kontradikcija. Nadalje:

$$x_0 \in X \backslash \mathrm{Cl}A = X \backslash \mathrm{Cl}(X \backslash f^{-1}(V)) = \mathrm{Int}f^{-1}(V),$$

tj. skup $U = \mathrm{Int}f^{-1}(V)$ je otvorena okolina točke x_0. Očito je $f(U) \subseteq V$.

■

3.4 Povezani prostori

Definicija 3.9 *Topološki prostor X je* **povezan** *ako su $\emptyset$ i X jedini skupovi koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.*

Preciznije:

Definicija 3.10 *Topološki prostor X je* **povezan** *ako se ne može prikazati kao disjunktna unija dvaju nepraznih otvorenih podskupova, tj. ako ne postoje neprazni otvoreni podskupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ takvi da je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*
Prostor X je **nepovezan** *ako nije povezan.*

Teorem 3.4 *Neka je X topološki prostor. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *X je povezan.*
2. *X se ne može prikazati kao unija dvaju nepraznih i međusobno disjunktnih zatvorenih skupova.*
3. *Svako neprekidno preslikavanje $f : X \to \{0,1\}$ je konstanta, tj. ne postoji neprekidna surjekcija $f : X \to \{0,1\}$.*

Dokaz:

1. $\Rightarrow$ 2. Pretpostavimo da postoje neprazni, disjunktni i zatvoreni skupovi $F_1, F_2 \subseteq X$ takvi da $X = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Prema tome bi skupovi F_1 i F_2 bili ujedno i otvoreni skupovi, pa bi X bio nepovezan.

2. $\Rightarrow$ 3. Kada bi postojala neprekidna surjekcija $f : X \to \{0,1\}$, onda bi skupovi $F_1 = f^{-1}(0)$ i $F_2 = f^{-1}(1)$ bili neprazni i zatovreni pa bi vrijedilo $X = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da ne postoje takvi skupovi.

3. $\Rightarrow$ 1. Kada X ne bi bio povezan, postojali bi neprazni otvoreni skupovi U_1 i U_2 takvi da je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Tada bi funkcija $f : X \to \{0,1\}$ definirana formulom:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in U_1 \\ 1 & , x \in U_2 \end{cases}$$

bila neprekidna surjekcija, što je kontradikcija.

■

Sljedeći teorem je ujedno i primjer povezanog prostora:

Teorem 3.5 *Segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je povezan.*

Dokaz: Neka segment $[a,b]$ nije povezan. Tada bi postojali neprazni otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subseteq [a,b]$ takvi da je $[a,b] = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Bez smanjenja općenitosti neka je $a \in U_1$ i neka je $c = \inf U_2$. Treba pokazati kako je onda $c \in U_1$ ili $c \in U_2$.

Kako je $a \in U_1$ i U_1 otvoren u $[a,b]$, postoji $r > 0$ takav da je $[a, a+r\rangle \subseteq U_1 = [a,b] \backslash U_2$. pa je zato $c = \inf U_2 \neq a$. Očito je $c \neq b$, jer bi inače bilo $U_2 = \{b\}$ što nije otvoren skup u $[a,b]$.

Kada bi $c \in U_2$, onda bi postojao $r > 0$ takav da je $\langle c - r, c + r \rangle \subseteq U_2$ pa bi infimum skupa U_2 bio manji od c. Dakle, mora vrijediti $c \in U_1$. No tada bi postojao $r > 0$ takav da je $\langle c - r, c + r \rangle \subseteq U_1$, pa c ne bi mogao biti infimum skupa U_2.

S tim se dobije kontradikcija s pretpostavkom, što znači da je segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ povezan.

■

Teorem 3.6 *Neka je $(A_i, i \in I)$ familija nepraznih podskupova A_i iz topološkog prostora X takva da je $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Ako je svaki od skupova $A_i, i \in I$, povezan, onda je i skup $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ povezan.*

Dokaz: Neka je $f : A \to \{0, 1\}$ neprekidno preslikavanje. Treba pokazati da je f konstanta. Neka je $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Za svaki $i \in I$ restrikcija $f_{|A_i} : A_i \to \{0, 1\}$ je neprekidno i konstantno preslikavanje jer je A_i povezan skup. Zbog toga je $f_{|A_i}(x) = f(x_0)$ za svaki $x \in A_i$, pa je $f(A) = f(x_0)$.

■

Teorem 3.7 *Neka je X povezan topološki prostor i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika $f(X) \subseteq Y$ povezan skup.*

Dokaz: Kada bi postojala neprekidna surjekcija $g : f(X) \to \{0, 1\}$, onda bi i kompozicija $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ bila neprekidna surjekcija pa X ne bi bio povezan.

■

Definicija 3.11 *Neka su X i Y topološki prostori. Neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ je* ***homeomorfizam*** *ako je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidno preslikavanje.*
Prostori X i Y su ***homeomorfni*** *ako postoji barem jedan homeomorfizam između njih.*

Primjetimo da je *"biti homeomorfizam"* relacija ekvivalencije:

a) **Refleksivnost**: Treba pronaći neprekidnu bijekciju $f : X \to X$ čiji je inverz također neprekidan. To je upravo identiteta, tj. $f(x) = x$. $\Rightarrow X \sim X$

b) **Simetričnost:** Neka je $X \sim Y$, tj. $f : X \to Y$ je neprekidna bijekcija i $f^{-1} : Y \to X$ je neprekidna. Tada je i f^{-1} neprekidna bijekcija kojoj je inverz $(f^{-1})^{-1} = f$ neprekidno preslikavanje. $\Rightarrow Y \sim X$

c) **Tranzitivnost:** Neka su $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, tj. $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidne bijekcije. Tada je i $g \circ f : X \to Z$ neprekidna bijekcija te je $(g \circ f)^{-1} : Z \to X$ neprekidno preslikavanje. $\Rightarrow X \sim Z$

Klase ove relacije ekvivalencije se sastoje od međusobno homeomorfnih prostora. Svako svojstvo prostora koje imaju svi prostori iz iste klase zove se **topološko svojstvo** ili **topološka invarijanta**.

3.4.1 Povezanost putevima

Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. **Put** u skupu A je svako neprekidno preslikavanje $\omega : [a, b] \to X$ tako da je $\omega([a, b]) \subseteq A$.
Točka $x_0 := \omega(a)$ zove se *početak puta*, a $x_1 := \omega(b)$ *kraj puta.*
Ako je $x_0 = x_1$, put je **petlja**.

Definicija 3.12 *Skup A iz X je **povezan putevima** ako između bilo koje dvije točke $x_0, x_1 \in A$ postoji put u A.*

Teorem 3.8 *Svaki putevima povezan skup je povezan.*

Dokaz: Neka je x_0 točka iz A. Za svaku točku $x \in A$ postoji put $\omega : [a, b] \to A$ koji povezuje x_0 sa x. Kako je svaki segment $[a, b]$ povezan, tada je prema teoremu 3.7 povezan i skup $\omega([a, b])$. Kako je $x_0 \in \omega([a, b])$ za svaki $x \in A$, tada je prema teoremu 3.6 i skup $A = \bigcup_{x \in A} \omega([a, b])$ povezan.

■

U normiranom vektorskom prostoru X za svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ definira se **pravocrtni put** $\omega : [0, 1] \to X$:

$$\omega(t) \equiv x_0 + t(x_1 - x_0), t \in [0, 1].$$

Skup

$$\omega([0, 1]) = \{x_0 + t(x_1 - x_0) : t \in [0, 1]\} =: [x_0, x_1]$$

zovemo **segment** u X. Uniju segmenata oblika $\Gamma \equiv [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{k-1}, x_k]$ zovemo **poligonalna crta** od x_0 do x_k, $k \in \mathbb{N}$.

Teorem 3.9 *Svaka poligonalna crta Γ je put.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti neka je $\Gamma = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2]$. Funkcija $\omega : [0, 2] \to X$ definirana formulom

$$\omega(t) = \begin{cases} x_0 + t(x_1 - x_0) & , 0 \leq t \leq 1 \\ x_1 + (t - 1)(x_2 - x_1) & , 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

je put u X i pri tome je $\omega([0, 2]) = \Gamma$.

■

Definicija 3.13 *Skup A iz normiranog vektorskog prostora X je **konveksan** ako ima svojstvo da za svake dvije točke $x_0, x_1 \in A$ sadrži i segment $[x_0, x_1]$.*

Primjer 3.6 *Otvorena kugla $K(y_0, r)$ je konveksan skup.*

Neka je X normirani vektorski prostor i $K(y_0, r) \subseteq X$. Neka su $x_0, x_1 \in K(y_0, r)$. Tada je $\|x_0 - y_0\| < r$ i $\|x_1 - y_0\| < r$. Za svaku točku $x \in [x_0, x_1]$ postoji $t \in [0, 1]$ takav da je $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ pa je zato

$$\begin{aligned} \|x - y_0\| &= \|x_0 + t(x_1 - x_0) - y_0\| = \|(1 - t)(x_0 - y_0) + t(x_1 - y_0)\| \\ &\leq \|(1 - t)(x_0 - y_0)\| + \|t(x_1 - y_0)\| = (1 - t)\|x_0 - y_0\| + t\|x_1 - y_0\| \\ &< (1 - t)r + tr = r \end{aligned}$$

Slijedi da je $x \in K(y_0, r)$, tj. otvorena kugla je konveksan skup.

Korolar 3.1 *Neka je X normirani vektorski prostor. Svaki konveksan skup $K \subseteq X$ je povezan. Specijalno, X je konveksan.*

Dokaz: Zbog konveksnosti skupa K slijedi da za svake dvije točke $x_0, x_1 \in K$ vrijedi $[x_0, x_1] \subseteq K$, pa je skup K putevima povezan, a prema teoremu 3.8 K je povezan.

■

Korolar 3.2 *Skup $K \subseteq \mathbb{R}$ je povezan ako i samo ako je K konveksan.*

Dokaz: Neka je K povezan skup. Treba pokazati da je K konveksan.
Neka su $x_0, x_1 \in K$ i neka je $x_0 < x_1$. Treba pokazati da svaka točka $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ pripada skupu K. U suprotnom bi postojala točka $x \in \langle x_0, x_1 \rangle \backslash K$ pa bi skupovi $V_1 := K \cap \langle -\infty, x \rangle$ i $V_2 := K \cap \langle x, +\infty \rangle$ bili neprazni, disjunktni i otvoreni u K takvi da je $K = V_1 \cup V_2$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je K povezan.

Obratno, ako je K konveksan onda je on prema korolaru 3.1 i povezan.

■

Literatura

[1] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika 1, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 2, Funkcije jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[3] S. Mardešić, Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru 1, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[4] Š. Ungar, Matematička analiza 3, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovni-matematički fakultet, Zagreb, 2002.

[5] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill Education, New York, New York, SAD, 1976.