Teorem o četiri boje i vektorski produkt

Kolembus, Darija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Darija Kolembus

Teorem o četiri boje i vektorski produkt

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Darija Kolembus

Teorem o četiri boje i vektorski produkt

Završni rad

Mentor rada:
doc. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2018.

Sadržaj

Sažetak

Problem četiri boje postavio je matematičar F. Guthrie davne 1852. godine. Nakon toga su brojni vrsni matematičari, ali i amateri, pokušavali pronaći rješenje, a to je trajalo više od 150 godina. Tijekom tog razdoblja napravljeno je mnogo krivih dokaza, ali je također dobiveno mnogo djelomičnih rezultata, od kojih će neki biti sastavni dio ovog rada. Objasnit ćemo važne zaključke do kojih je došao A. Cayley (kubne karte, najmanji uljezi), zatim ćemo objasniti poznatu *Eulerovu poliedarsku formulu*, a onda predstaviti važne teoreme *Teorem o "Samo pet susjeda"* i *Teorem o šest boja.* Bavit ćemo se i Kempeovim dokazom teorema o četiri boje koji koristi tzv. *metodu Kempeovih lanaca.* To je ujedno i najpoznatiji pogrešan dokaz, a njegovu netočnost ustanovio je Heawood te dokazao *Teorem o pet boja.* Konačno, objasnit ćemo dokaz teorema o četiri boje kojeg su predstavili K. Appel i W. Haken, a koji koristi računala te ga je zato teško proučavati. Postoje razni teoremi koji su ekvivalentni teoremu o četiri boje, a mi ćemo istaknuti kombinatorni problem vektorskog produkta u trodimenzionalnom prostoru.

Ključne riječi: *problem četiri boje, karta, graf, bojanje grafa, bojanje karte, vektorski produkt*

Abstract

The Four Color Theorem was first conjectured in the 1852. by matematician F. Guthrie. For more than 150 years great matematicians, as well as amateurs have tried to find the proof. There were many wrong proofs, but also a lot of partial results. Some of them are going to be mentioned in this thesis. We will present some conclusions obtained by A. Cayley (cubic maps, the smallest outsider), explain Euler's famous *Euler's polyhedron formula* and then show *Five neighbors only theorem* and *Six colour theorem.* We will also present Kempe's proof of the theorem using so-called *Kempe's chain method.* This is the most famous wrong proof of the four color theorem. Its incorrectness was discovered by Heawood who managed to prove *Five colour theorem.* Finally, we will mention the proof whch was given by K. Appel and W. Haken. Since it requires the use of a computer, it is not easy for studying. There are many theorems which are equivalent to the Four Color Theorem. We will mention a combinatorial problem related to the vector cross product algebra in three-dimensional space.

Key words: *four colour problem, map, graph, map colouring, graph colouring, vector cross product*

1 Uvod

Teorem o četiri boje je problem koji je naizgled vrlo jasan i jednostavan, ali je godinama zadavao muke mnogim vrsnim matematičarima, ali i amaterima. Nastao je sasvim slučajno 1852. godine kada je matematičar F. Guthrie bojao regionalnu kartu Engleske prilikom čega je uočio da su mu dovoljne četiri boje uz pravilo da susjedne regije ne smiju biti obojene istom bojom. Dugi niz godina pojavljivale su se razne varijante krivih dokaza, ali i onih djelomičnih iza kojih su ostale neke nepobitne činjenice i teoremi. U drugom poglavlju ovog rada (*Povijest problema četiri boje*) navodimo neke od njih. Primjerice, A. Cayley nije uspio dokazati teorem, ali 1879. g. dolazi do nekih važnih zaključaka, počinje promatrati kubne karte i najmanje uljeze. Tu se pojavljuje i L. Euler i njegova poznata Eulerova poliedarska formula, zahvaljujući kojoj je došlo do nekog napretka u traženju dokaza. Tako su predstavljeni važni teoremi, *Teorem "Samo pet susjeda"* i *Teorem o šest boja. Metoda Kempeovih lanaca* trebala je biti ključan alat za dokaz teorema o četiri boje. Smislio ju je A. B. Kempe 1879. g. Spomenimo da se to smatra najpoznatinijim pogrešnim dokazom teorema o četiri boje. U trećem poglavlju ćemo formalno iskazati problem četiri boje i to pomoću grane matematike pod nazivom *teorija grafova.* Uz definicije osnovnih pojmova, teorem o četiri boje, teorem o pet boja i druge, spomenut ćemo i dokaz W. Hakena i K. Appela provedenog uz pomoć računala. Četvrto poglavlje posvećeno je novoj, ekvivalentnoj formulaciji teorema o četiri boje. Pokazat ćemo da je ekvivalentan kombinatornom problemu vektorskog produkta vektora u trodimenzionalnom prostoru i dokazati tvrdnje.

2 Povijest problema četiri boje

Zamislimo da pred sobom imamo zemljopisnu kartu određene države koja je podijeljena na regije, na države nekog kontineta ili pak možemo zamisliti kartu cijeloga svijeta. Radi lakšeg raspoznavanja određenih područja prirodno je da su susjedna područja (države ili regije) obojena različitim bojama. Bez obzira na to kako ta karta izgleda, da li je prikazana u ravnini ili na sferi, od koliko država ili regija se sastoji ili kakvog su one oblika, svega četiri različite boje su dovoljne kako bi obojali kartu, a da pritom niti jedan par susjednih država ili regija nije obojen istom bojom.
Sve je počelo davne 1852. godine kada je matematičar Francis Guthrie bojio regionalnu kartu Engleske za vrijeme boravka na postdiplomskom studiju u Londonu. Uočio je kako mu nije potrebno više od četiri boje, ali nije bio siguran vrijedi li tvrdnja općenito. Uz pomoć njegovog brata Fredericka poblem je došao do Augustusa De Morgana, profesora na Sveučilištu u Londonu, koji se jako zainteresirao za njega. Budući da postavljenu tvrdnju nije sam mogao dokazati, obratio se pismom svom kolegi i prijatelju sir Williamu R. Hamiltonu u Dublin. U pismu je naveo tvrdnju te dao primjer iz kojeg je bilo očito da su četiri boje nužne. Ostalo je pitanje jesu li četiri boje uvijek dovoljne za bojenje karte na željeni način. Trebalo je pronaći ili kontraprimjer kojim bi se pobila tvrdnja ili ju dokazati za bilo koji

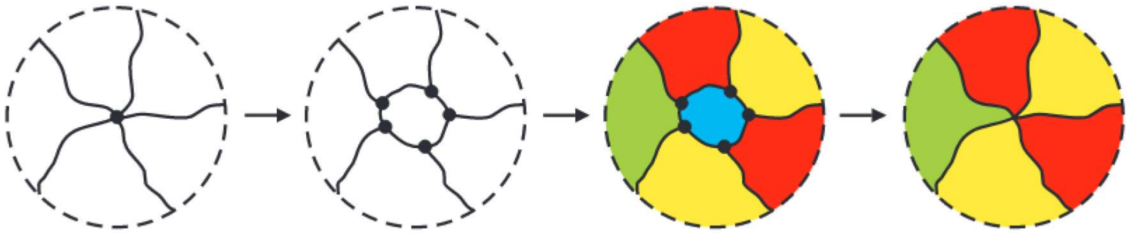
kartu, stvarnu ili izmišljenu. Sir William R. Hamilton nije bio zainteresiran za ovaj problem pa se De Morgan obratio drugim kolegama. Konačno, u travnju 1860. godine objavio je problem u časopisu *Athenaeum* te su tako za njega saznali matematičari diljem svijeta.

2.1 Pokušaji dokazivanja teorema o četiri boje

Postoje navodi da je američki matematičar, filozof i logičar Charles Sanders Pierce dokazao tvrdnju, ali dokaz nikada nije objavljen.
Nakon De Morganove smrti na problem se s vremenom zaboravilo, sve dok ga na sastanku Londonskog matematičkog društva, 1878. godine, nije ponovno postavio Arthur Cayley. Iste godine Cayley je objavio članak u kojem navodi da tvrdnju nije uspio dokazati, ali da je došao do tri važna zaključka.

Zaključak 2.1. *Ako je proizvoljna karta, koja se sastoji od n država, već obojena s četiri boje i ako toj karti dodamo jednu državu, tada se i nova karta od $n + 1$ država može obojiti s četiri boje.*

Zaključak 2.2. *Dovoljno je promatrati samo karte kod kojih se u svakom čvoru dodiruju točno tri države, tzv.* ***kubne karte****. Naime, ako se u nekom čvoru susreće više od triju država, tada se na taj čvor postavi mala kružna "zakrpa", oboji se tako dobivena kubna karta, a zatim se zakrpa jednostavno ukloni (Slika 1).*



Slika 1: Dodavanje i izbacivanje zakrpe

Izvor: [4, str. 28]

Zaključak 2.3. *Ako je teorem o četiri boje istinit, tada se bojenje karte može izvesti tako da se sve države koje leže uz rub karte mogu obojiti s najviše tri boje.*

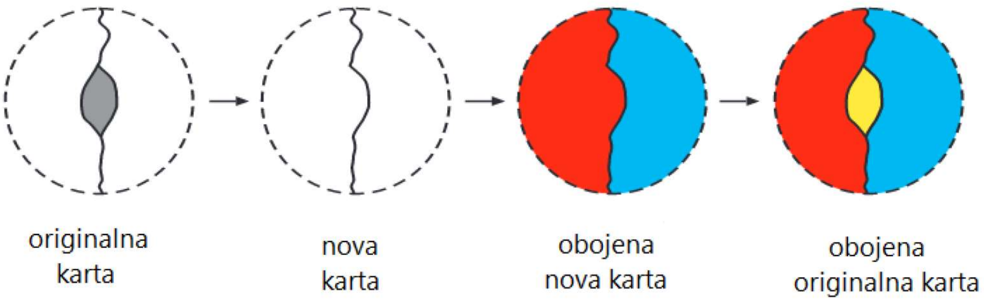
Nakon što nije uspio dokazati teorem metodom matematičke indukcije, jer je bilo vrlo teško pronaći metodu za proširenje karte s n na $n + 1$ država koja bi vrijedila općenito, pokušao je isto učiniti metodom kontradikcije.
Zamislimo da je tvrdnja netočna i da postoje karte koje se ne mogu obojiti sa samo četiri

boje. Među svim takvima kartama za koje je potrebno pet ili više boja, izaberimo onu s najmanjim brojem država. Tu kartu ćemo nazvati *najmanjim uljezom.* Vrijedi sljedeće: *Najmanji uljez* se ne može obojiti sa četiri boje, ali svaka karta s manjim brojem država može. Sada se dokazivanje *problema o četiri boje* svodi na dokaz tvrdnje da najmanji uljezi ne postoje. Prije nego nastavimo sa detaljnijim opisom pokušaja ovog dokaza, moramo spomenuti švicarskog matematičara, fizičara i astronoma, Leonharda Eulera, koji je značajno doprinio dokazivanju ovog problema. Naime, Eulerov doprinos matematici je izuzetno velik, a ovdje ćemo spomenuti jedan rezultat njegovog proučavanja poliedara, *Eulerovu poliedarsku formulu.* Ta formula je vezana za područje matematičke topologije pod imenom *teorija grafova.* Teorija grafova bavi se problemima koji se mogu analizirati pomoću određenog broja točaka (vrhova) i spojnica među njima (bridova).

Teorem 2.1 (Eulerova poliedarska formula)**.** *Za svaki konveksan poliedar u kojem je V broj vrhova, B broj bridova i S broj strana vrijedi:*

$$V - B + S = 2. \tag{1}$$

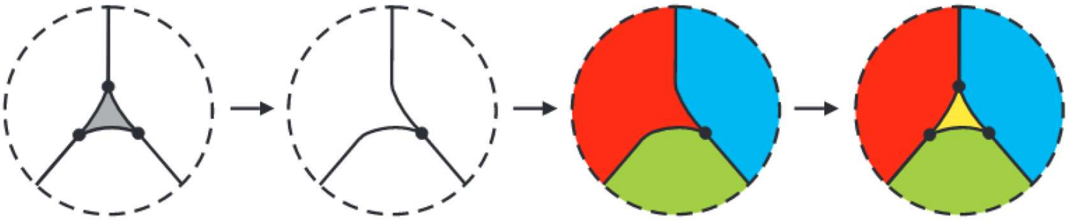
Dokaz teorema nalazi se u članku [1, str. 179-182].
Prema gornjoj formuli vrijedi da svaka kubna karta mora sadržavati barem jednu od ovakvih država: *dvokut, trokut, četverokut* ili *peterokut.* Lako se dokaže da najmanji uljez ne sadrži dvokut, odnosno državu koja ima samo dva susjeda. Naime, ako takvoj državi uklonimo jedan brid, dobit ćemo kartu s jednom državom manje, koja se može obojiti s najviše četiri boje. Vratimo li ponovno uklonjeni brid, boju za državu s dvama susjedima je lako odrediti jer su nam na raspolaganju čak dvije od četiri boje (slika 2).



Slika 2: Dvokut

Izvor: [4, str. 29]

Slično se pokaže da najmanji uljez ne može sadržavati trokut. Naime, pretpostavimo suprotno. Tada uklonimo jedan brid i od četiri dobijemo tri države. Takvu kartu možemo obojiti s četiri boje na način da za tri države potrošimo tri boje, a kada vratimo uklonjeni brid, četvrtu državu obojamo preostalom, četvrtom bojom (slika 3).



Slika 3: Trokut

Izvor: [4, str. 29]

Međutim, taj postupak se ne može primjeniti na državama s $4, 5$ ili više bridova (slika 4). Ovdje posebnu ulogu ima navedena *Eulerova poliedarska formula* (teorem 2.1).
Naime, ukoliko neki poliedar projiciramo iz jedne točke na ravninu, dobit ćemo njegovu ravninsku projekciju na kojoj i dalje vrijedi Eulerova poliedarska formula. Ako zamislimo da strane poliedra predstavljaju države, bridovi poliedra granice, a vrhovi poliedra čvorove, i ako još ubrojimo i vanjštinu projekcije kao jednu državu, tada Eulerova formula vrijedi i za tako dobivene karte, a glasi ovako:

$$\text{broj država} - \text{broj bridova} + \text{broj čvorova} = 2\ .$$

Vrijedi i obrat. Svaku kubnu kartu možemo nacrtati na sferi i zamisliti da predstavlja neki poliedar. Tada problem bojenja sferne karte postaje problem bojenja karte na ravnini, svejedno ubrojimo li i vanjštinu karte kao još jednu regiju koju treba obojiti ili ne.
Direktna posljedica Eulerove formule je tzv. *formula prebrajanja.* Pretpostavimo li da karta ima d_2 država koje imaju točno dva susjeda, d_3 država koje imaju točno tri susjeda, d_4 država s točno četiri susjeda, itd., tada je ukupan broj država na toj karti (računajući i vanjštinu karte)

$$D = d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + \dots$$

Zatim prebrajamo bridove. Budući da svaki brid pripada točno dvjema državama, slijedi:

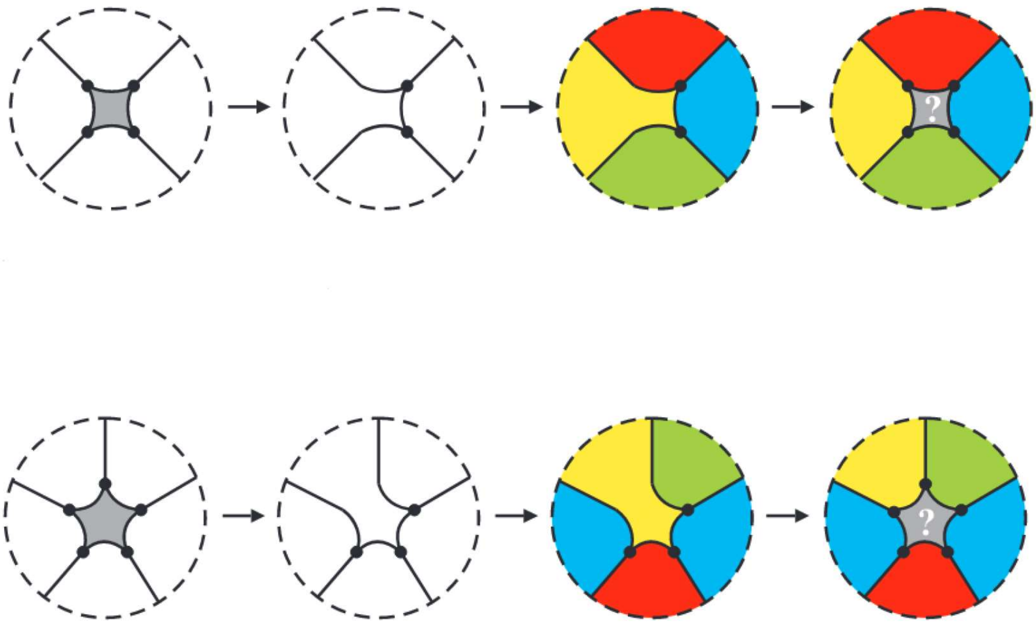
$$2B = 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + 6d_6 + \dots$$

odnosno

$$V = \tfrac{2}{3}d_2 + d_3 + \tfrac{4}{3}d_4 + \tfrac{5}{3}d_5 + 2d_6 + \dots$$

Uvrstimo li gornje izraze u Eulerovu poliedarsku formulu, dobivamo *formulu prebrajanja* za kubne karte:

$$4d_2 + 3d_3 + 2d_4 + d_5 - d_7 - d_8 - 3d_9 - \dots = 12$$



Slika 4: Četverokut i peterokut

Izvor: [4, str. 29]

Jasno je da za kubnu kartu barem jedan od brojeva d_2, d_3, d_4 i d_5 mora biti veći od nule. Stoga smo pokazali da vrijedi sljedeći teorem.

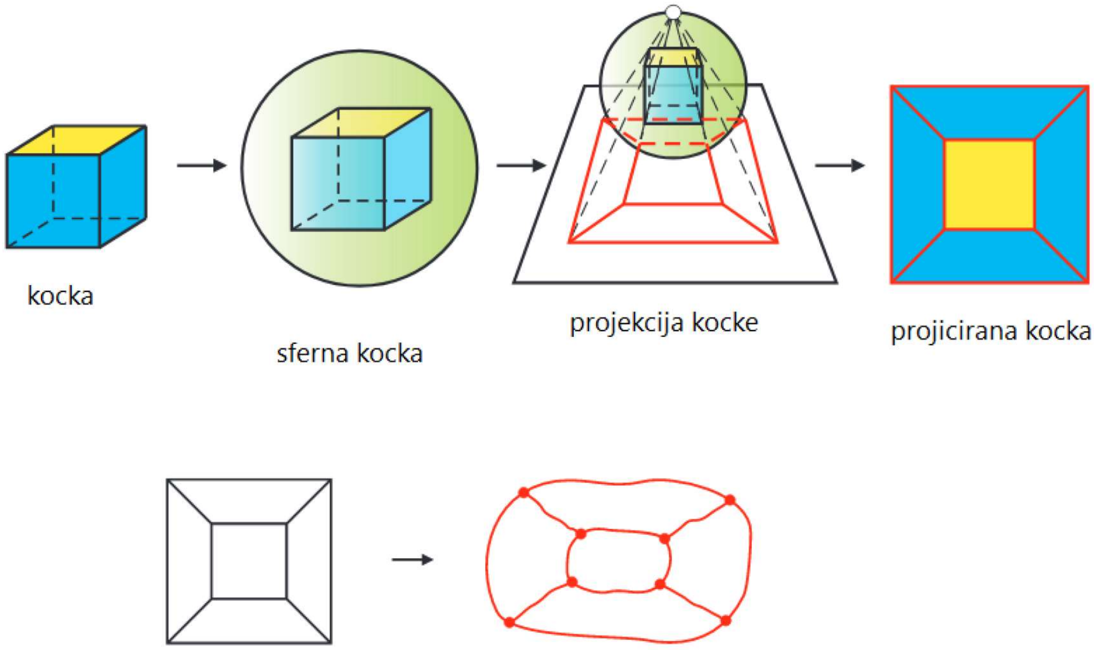
Teorem 2.2 (Samo pet susjeda). *Svaka kubna karta ima barem jednu državu s pet ili manje susjeda.*

Nadalje, ako karta ne sadrži niti jedan dvokut, trokut ni kvadrat, tada mora sadržavati barem 12 peterokuta. Analogno se može zaključiti da ako se kubna karta sastoji isključivo od peterokuta i šesterokuta, tada ona mora imati točno 12 peterokuta.
Cayley, dakle, nije uspio dokazati da najmanji uljezi ne postoje, ali se njegova tvrdnja pokazala korisnom u dokazivanju nešto slabije tvrdnje, teorema o šest boja.

Teorem 2.3 (Teorem o šest boja). *Svaka karta može se obojiti sa šest boja tako da susjedne države nisu obojene istom bojom.*

Dokaz teorema nalazi se u [13].

Londonski odvjetnik i matematičar amater Alfred Bray Kempe čuo je za problem četiri boje 1878. godine dok je prisustvovao na sastanku Londonskog matematičkog društva kada je Arthur Cayley govorio o istome. Nakon godinu dana ponudio je rješenje. Dokaz je objavio u časopisu *American Journal of Mathematics.* Kempeova metoda bojenja bilo koje karte može se opisati u šest koraka:



Slika 5: Projekcija poliedra (kocke) na ravninu

Izvor: [4, str. 29]

1. Pronaći na karti državu koja ima pet ili manje susjeda (po teoremu 2.2, ona svakako postoji).
2. Pokriti tu državu komadićem praznog papira sličnog oblika, samo malo većeg.
3. Produljiti sve granice koje dodiruju "zakrpu" tako da se sastanu u jednoj točki na papiriću, kao da se odabrana država smanjila u jednu točku. Time se broj država na karti smanjio za jedan.
4. Ponavljati prethodna tri koraka sve dok se početna karta ne smanji do karte s točno jednom državom.
5. Obojiti tu jednu državu bilo kojom od četiri dane boje.
6. Obrnuti gornji proces, odnosno skidati "zakrpe" unatrag sve dok se ne dobije početna karta i pritom svaku vraćenu državu obojiti tako da se razlikuje od susjeda.

Kempe je također imao problem kao i Arthur Cayley, a to je kada država koju treba obojiti ima četiri ili pet susjeda, odnosno ako je kvadrat ili peterokut. Riješio ga je metodom koja je danas poznata kao *Metoda Kempeovih lanaca.*

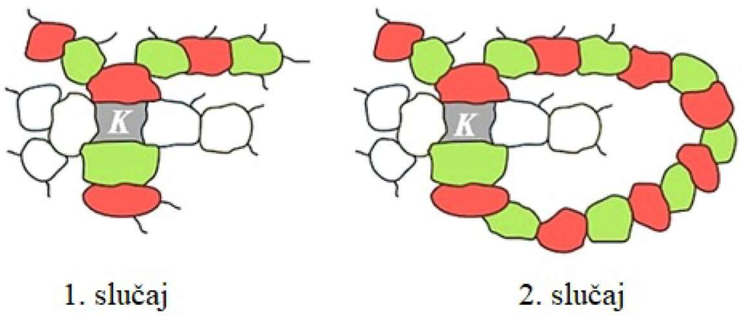
2.2 Metoda Kempeovih lanaca

Metoda Kempeovih lanaca je dosta zanimljiva i sasvim lijepo dokazuje da su četiri boje dovoljne za bojenje bilo kakve karte, osim što **nije točna**.

Ovaj dokaz je postao najpoznatiji pogrešan dokaz u povijesti matematike. Zavarao je većinu matematičara tog vremena. Čak jedanaest godina kasnije pogrešku je uočio profesor matematike iz Durhama, Percy John Heawood.
Vratimo se najprije na samu metodu. Prvo pretpostavimo da je država za koju treba odrediti boju kvadratnog oblika, odnosno ima četiri susjedne države. Tada se od te četiri susjedne države odaberu one dvije koje se međusobno ne dodiruju. Neka su to na primjer crveni i zeleni susjedi države K. Sada svaka od tih dviju država započinje jednu ili više crveno-zelenih grana, odnosno dijelova karte koji se sastoje od niza država obojenih crveno ili zeleno.
Ovdje se sada javljaju dva moguća slučaja (slika 6):

1. Slučaj kada niti jedna grana koja počinje crvenim susjedom od K nije povezana s donjom zelenom državom. Tada se crveni susjed države K može obojiti u zeleno i sve države u crveno-zelenim granama mogu zamijeniti boje. Tada nam za bojenje države K ostaje na raspolaganju crvena boja (slika 7).

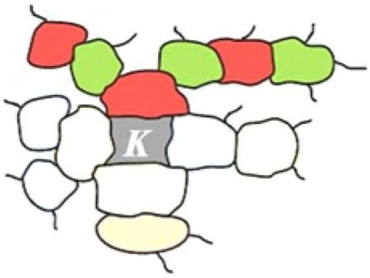
2. U slučaju kada jedna od grana koje započinju s crvenim susjedom države K završava sa zelenim susjedom države K, zamjenom boja ne dobivamo ništa. Najprije uočimo da lanac čini zatvorenu petlju, odnosno počinje i završava u K. Sada promotrimo druga dva susjeda: plavog i žutog. Uočimo da se niti jedan lanac jednog od ta dva susjeda ne može nadovezati na neki od lanaca drugog susjeda jer ih prekida ranije uočena petlja. Sada opet imamo situaciju kao u prvom slučaju. Obojimo li plavog susjeda u žuto i cijeloj plavo-žutoj grani zamijenimo boje, za državu K nam preostaje plava boja (slika 8).



Slika 6: Dva slučaja u metodi Kempeovih lanaca.

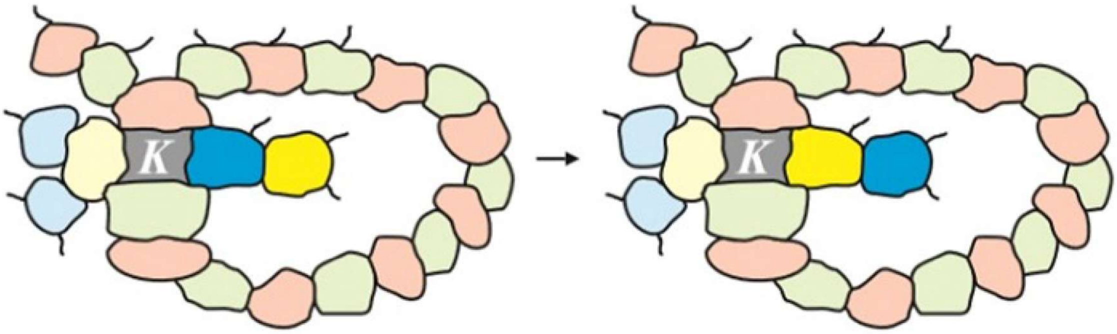
Izvor: [4, str. 31]

Na taj način je završeno bojanje države koja ima četiri susjeda, a na koju je postavljena pa uklonjena "zakrpa". Ovime smo zapravo dokazali da niti jedan najmanji uljez ne sadrži kvadrat.
Kempe se zatim usredotočio na slučaj kad je "vraćena" država peterokut P. Peterokut okružuje pet država već obojenih sa četiri boje. Opet, odaberu se dva susjeda od P koji se ne dodiruju. Neka su to žuti i crveni susjed iznad i ispod P. Ako gornje žuto - crvene grane



Slika 7: Zamjena boja u prvom slučaju u metodi Kempeovih lanaca.

Izvor: [4, str. 31]



Slika 8: Zamjena boja u drugom slučaju u metodi Kempeovih lanaca.

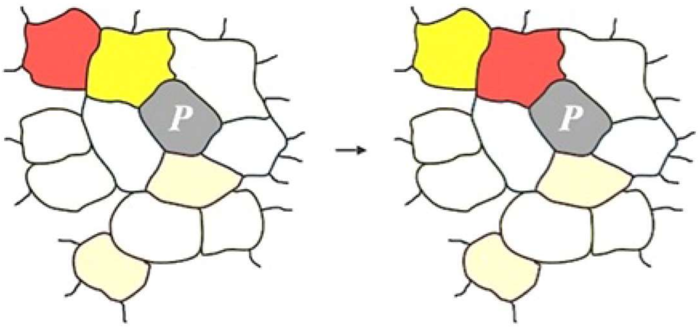
Izvor: [4, str. 31]

nisu povezane s donjim, tada im se boje mogu zamijeniti. Žuti susjed od P može postati crven, te tako žuta boja ostaje na raspolaganju za bojenje peterokuta P (slika 9).

Međutim, ako je žuto - crveni lanac s gornje strane povezan s crveno - žutim lancem s donje strane peterokuta P, tada on uočava zelenog susjeda i promatra crveno - zelene i zeleno - crvene grane (slika 10). Ako gornji zeleno - crveni niz nije povezan s donjim crveno - zelenim, zeleni susjed od P može postati crveni i cijeli gornji niz može promijeniti boje u crveno-zelene. Tada ostaje zelena boja za obojiti peterokut P (slika 11).

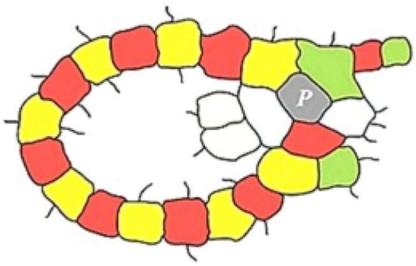
Ako su lanci opet povezani, tada, uključujući prethodno navedeno, imamo dvije petlje i situaciju kao na slici 13. Vidimo da plavo - žuti niz s lijeve strane države (peterokuta) P nije povezan s plavo - žutim nizom desno od njega pa smijemo izmijeniti boje u nizu s desne strane. Također, plavo - zeleni lanac s lijeve strane odvojen je od plavo-zelenog lanca s desne strane, pa lancu s lijeve strane smijemo izmijeniti boje. Ukoliko napravimo istovremeno obje izmjene boja, država P imat će susjede žute, crvene i zelene boje, pa ostaje plava za njeno bojenje.

Na ovaj način završeno je i bojenje države koja ima pet susjeda, odnosno dokazali smo da najmanji uljez ne sadrži peterokut. Međutim, to je u kontradikciji s *Teoremom "Samo pet susjeda" 2.2* po kojem svaka kubna karta sadrži barem jednu državu s pet ili manje susjeda.



Slika 9: Bojanje peterokuta P

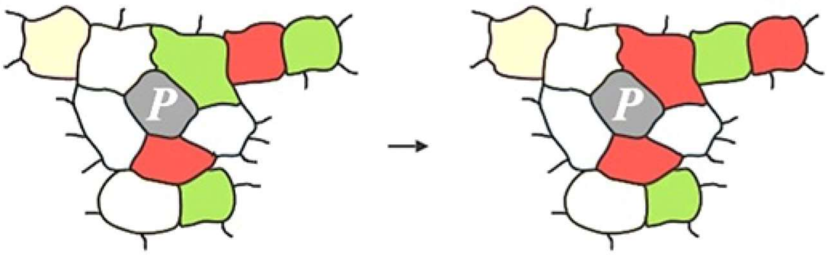
Izvor: [4, str. 32]



Slika 10: Žuto - crveni lanac s gornje strane povezan s crveno - žutim lancem s donje strane peterokuta P te uočavanje zelenog susjeda.

Izvor: [4, str. 32]

Dakle, *teorem o četiri boje* je dokazan.

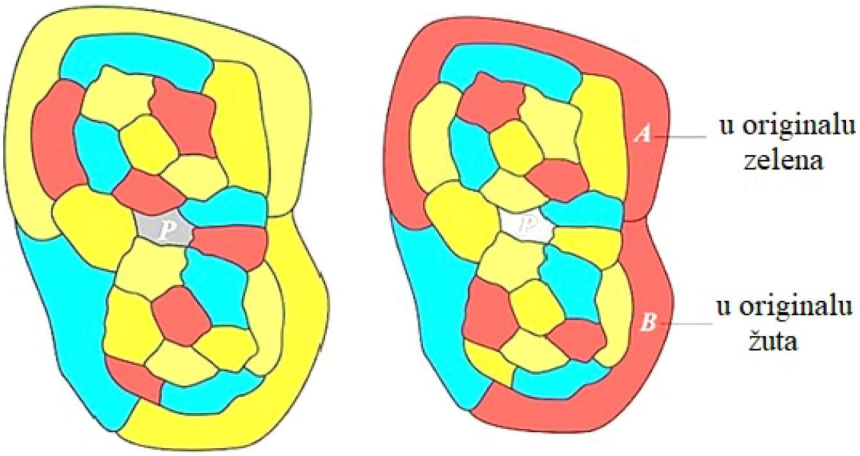


Slika 11: Zamjena boja gornjeg niza i zelenog susjeda u crveni.

Izvor: [4, str. 32]

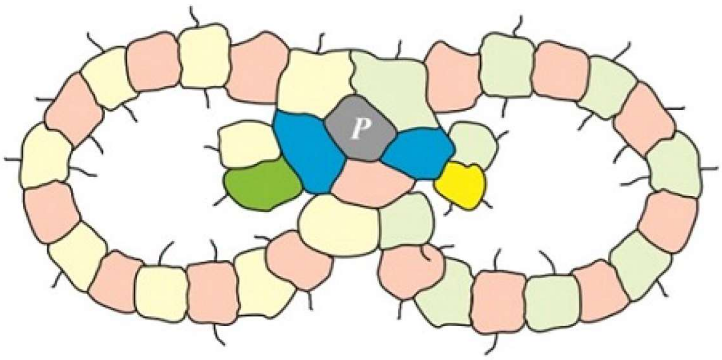
Vratimo se sada na početak poglavlja gdje smo rekli kako je ovo najpoznatiji pogrešan dokaz u matematici, te kako je grešku u istom uočio Percy John Heawood. Heawood je 1890. godine objavio članak u časopisu *Quaterly Journal of Mathematics* u kojem opovrgava Kempeov dokaz. Pogreška se nalazi pri samom kraju kada se određuje boje za peterokut P. Točnije, u dijelu koji kaže: "Napravimo li *istovremeno* obje izmjene boja, država P imat će susjede žute, crvene i zelene boje, pa se ona može obojiti u plavo." Heawood je primijetio da postoje karte kod kojih istovremena izmjena boja, u dva različita lanca, nije moguća. Promotrimo primjer (slika 12).

Na gornjoj karti je svaka od dvadeset i pet država obojena crvenom, plavom, žutom i/ili zelenom bojom osim peterokuta P u sredini. Ova karta se sigurno može obojiti sa samo četiri boje, ali pokazuje da je Kempeova metoda dokazivanja pogrešna. Ukoliko slijedimo Kempeove korake u određivanju boje za peterokut P, izmijenit ćemo boje dviju susjednih država od P. Svaka od tih dviju promjena je dozvoljena samo ako se izvodi sama za sebe. Naime, ako ih pokušamo izvesti istovremeno, dvije susjedne države (jedna, označena slovom A, koja je bila zelena, i druga, označena slovom B, koja je bila žuta) postaju crvene, što se ne smije dogoditi!
Kempe se javno složio sa Heawoodom i priznao pogrešku, međutim niti jedan od njih dvojice nije znao kako popraviti dokaz.



Slika 12: Primjer karte koju je dao Heawood i prikaz pogreške pri istovremenoj izmjeni boja

Izvor: [4, str. 33]



Slika 13: Povezani lanci

Izvor: [4, str. 32]

3 Teorem o četiri boje

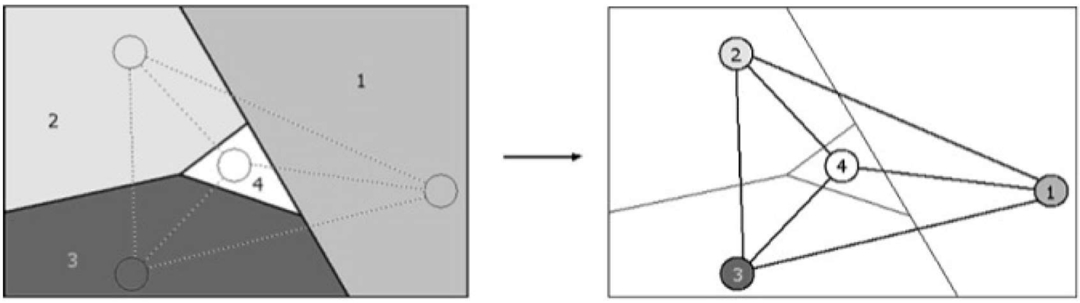
3.1 Formalni iskaz teorema

Za formalni iskaz teorema koristimo se granom matematika koja se naziva *teorija grafova.* Za početak potrebno je definirati neke pojmove.

Definicija 3.1. *Graf G je uređena trojka nepraznog skupa V, skupa E i funkcije Φ_G, pri čemu je V skup vrhova grafa, E skup bridova, a Φ_G je funkcija incidencije koja svakom bridu iz G pridružuje neuređen par vrhova od G.*
Pišemo $G = (V(G), E(G), \Phi_G)$ ili kraće $G = (V, E)$.

Definicija 3.2. *Kažemo da je graf* **planaran**, *odnosno smjestiv u ravnini $\mathbb{R}^2$, ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takva realizacija zove se ravninsko smještenje grafa. Također, graf koji je tako smješten u ravnini naziva se ravninski graf.*

Od svake karte moguće je konstruirati planaran graf na način da vrhovi predstavljaju pojedine regije, a dva vrha su spojena bridom ukoliko su regije, koje odgovaraju vrhovima, susjedne. Regije su susjedne ako se dodiruju nekom dužinom, a ne samo u jednoj točki (slika 14). Na ovaj način se problem bojenja regija svodi na problem bojenja vrhova planarnog grafa tako da nikoja dva susjedna vrha nisu iste boje.



Slika 14: Karta kao planaran graf

Izvor: [5, str. 24]

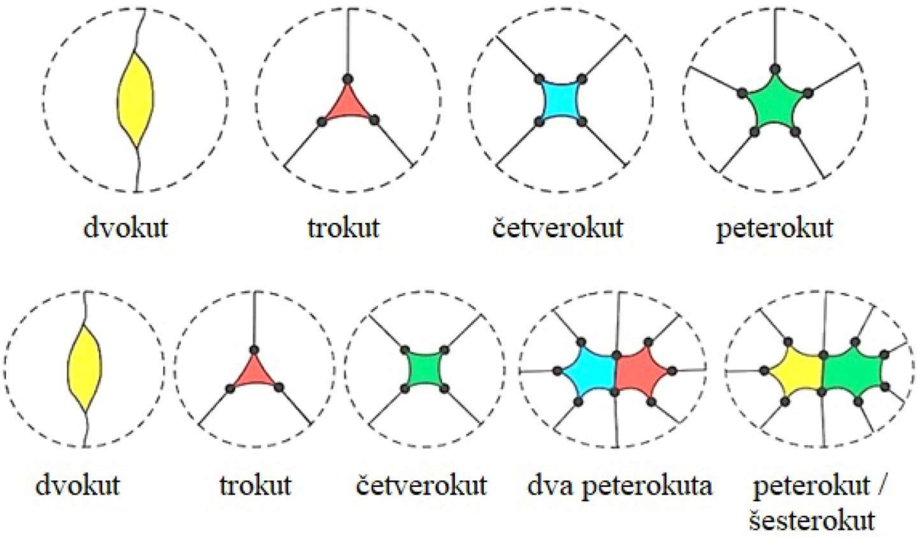
Teorem 3.1 (Teorem o četiri boje)**.** *Svaki planaran graf je moguće obojiti s najviše četiri boje tako da su susjedni vrhovi obojeni različitim bojama.*

Više o bojenju grafova može se pročitati u [6]. Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, bilo je mnogo neuspjelih pokušaja za dokazati teorem o četiri boje (3.1). Opisno ćemo prikazati rješenje koje su ponudili Wolfgang Haken i Kenneth Appel. Međutim, prije toga navest ćemo teorem koji je dokazao Heawood, koristeći se Kempeovim idejama za dokaz *Teorema o četiri boje.* Ovaj teorem će se pokazati ključnim u dokazivanju početnog problema.

3.2 Teorem o pet boja

Teorem 3.2 (Teorem o pet boja). *Svaka karta može se obojiti s najviše pet boja tako da su susjedne države obojene različitim bojama.*

Dokaz teorema nalazi se u [3, str. 11-12].
Problem određivanja boja pojedinih država ovdje se svodi na proučavanje veza i teoriju grafova, način na koji će problem četiriju boja na kraju i biti riješen, i to uz pomoć računala. U prethodnom poglavlju je dokazano da svaka kubna karta mora sadržavati barem jednu od država oblika: *dvokut, trokut, četverokut ili peterokut* (slika 15). Skup takvih država naziva se *neizbježan skup*. Na slici 15 je također prikazan još jedan takav skup.



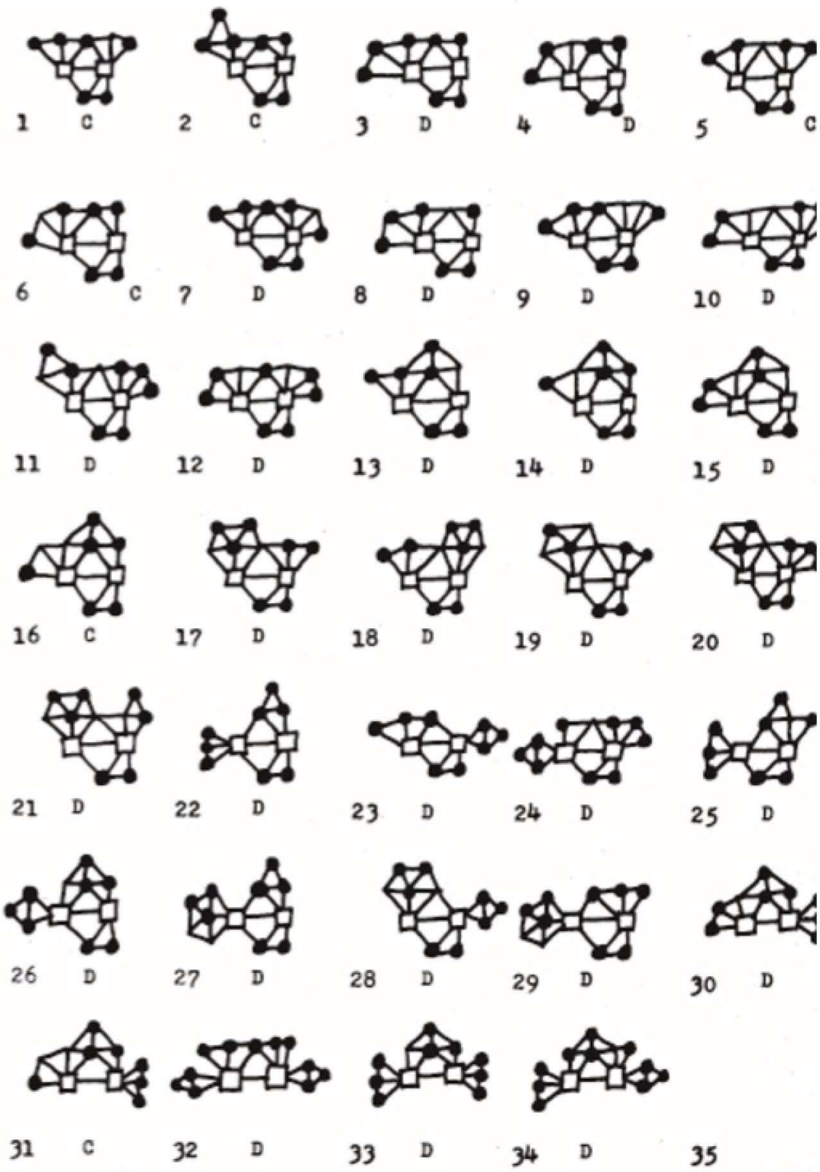
Slika 15: Neizbježan skup

Izvor: [4, str. 33-34]

Dakle, ako kubna karta ne sadrži *dvokut, trokut* ni *kvadrat*, tada mora sadržavati *peterokut*. Ali ne samo to, mora sadržavati ili dva spojena *peterokuta* ili spojene *peterokut* i *šesterokut*.

Drugi smjer je išao preko proučavanja najmanjih uljeza. Zaključak je da najmanji uljez ima barem 13 država i da one ne mogu imati manje od pet susjeda, odnosno *dvokut, trokut* i *kvadrat* nisu u najmanjem uljezu. Skup država koje se ne mogu pojaviti u najmanjem uljezu naziva se **reducibilna konfiguracija**. Kempe bi uspio dokazati teorem o četiri boje da je uspio dokazati reducibilnost *peterokuta*.
Američki matematičar George David Birkhoff objavio je 1913. godine, u časopisu *American Journal of Mathematics*, članak *Reducibilnost karata.* On je u najmanjim uljezima proučavao čitave prstenove država i dokazivao da su reducibilni. Još šezdesetih godina 20. stoljeća pokušaji pronalaženja neizbježnih skupova i reducibilnih konfiguracija odvijali su se odvojeno i bili su međusobno neovisni. Tada njemački matematičar Heinrich Heesch (1906. – 1995.)

dolazi na ideju da treba pronaći *neizbježan skup reducibilnih konfiguracija.* To bi konačno dokazalo početni problem iz razloga što je skup neizbježan, svaka karta mora sadržavati barem jednu od konfiguracija iz tog skupa, a kako je svaka konfiguracija reducibilna, ona se ne može nalaziti u minimalnom uljezu. To pak znači da minimalni uljezi ne postoje.



Slika 16: Neke reducibilne konfiguracije - H. Heesch

Izvor: [4, str. 34]

Izrazimo ovaj teorem u formalnom obliku uz pomoć teorije grafova. Za dokaz su nam potrebni još neki rezultati koje ćemo navesti bez dokaza. Dokazi se mogu pogledati u [13].

Teorem 3.3. *U planarnom grafu postoji barem jedan vrh stupnja manjeg od šest (susjedan je s najviše pet drugih vrhova).*

Teorem 3.4. *Graf je planaran, ako i samo ako u sebi ne sadrži potpuni graf* K_5 *(graf s pet vrhova koji su svaki sa svakim susjedni) ili* $K_{3,3}$ *(graf sa šest vrhova koji su grupirani u dvije* *skupine od po tri vrha, tako da u istoj skupini nikoja dva nisu susjedna, a susjedni su sa svakim iz druge skupine)*

Teorem 3.5. *Svaki planarni graf je moguće obojiti s najviše pet boja pri čemu susjedni vrhovi nisu obojeni istom bojom.*

Dokaz: *Za grafove s malim brojem vrhova provjeri se direktno. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za grafove s manje od n vrhova i promatrajmo planaran graf G s n vrhova. Na osnovu teorema 3.3 graf sadrži najmanje jedan vrh stupnja ne većeg od pet. Neka je to vrh* x*. Ako je vrh* x *stupnja manjeg od pet, postupamo na sljedeći način. Vrh* x *udaljimo iz grafa G sa svojim bridovima. Dobiveni graf je na osnovu induktivne pretpostavke obojiv s najviše pet boja. Vratimo sad vrh* x *nazad u graf. Za bojenje vrhova susjednih vrhu* x *treba najviše četiri boje, te* x *možemo obojiti jednom od preostalih boja. Promotrimo sada slučaj kad je* x *vrh stupnja pet. Neka su* a, b, c, d, e *vrhovi susjedni vrhu* x*. Na osnovu teorema 3.4 vrhovi* a, b, c, d, e *ne tvore* K_5 *u G. Dakle, bar jedan par vrhova nije povezan bridom. Neka su to na primjer vrhovi a i c. Udaljimo iz grafa G bridove* $(x, b), (x, d)$ *i* (x, e)*. Sada udaljimo i bridove* (x, a) *i* (x, c)*, a sve bridove koje dolaze do vrhova a i c produžimo do vrha* x *kojeg ćemo označiti s* x^**. Time smo izbacili vrhove a i c iz grafa. Tako dobiveni graf se može po induktivnoj pretpostavci obojiti s pet boja. Bojenje novonastalog grafa određuje i bojenje grafa G. Budući da vrhovi a i c nisu susjedni, dobivaju boju vrha* x^**. Za bojenje vrhova* b, d, e *potrebne su najviše tri boje (određene su bojenjem grafa kojeg smo dobili izbacivanjem vrhova a i c). Sada za bojenje vrha* x *treba još jedna boja. Time je teorem dokazan.* □

3.3 W. Haken i K. Apel - dokaz teorema o četiri boje

Heinrich Heesch i Karl Dure 1965. godine prvi put koriste računalo u testiranju reducibilnosti raznih konfiguracija. Godine 1970. Heesch surađuje s Wolfgangom Hakenom koji je, još kao student matematike, fizike i filozofije i Heeschov učenik, čuo za problem i posvetio se njegovu rješavanju. Haken razrađuje Heeschove ideje, odvaja se od njega i počinje surađivati s programerom i matematičarom Kennethom Appelom, 1972. godine na izradi računalnog programa. Dvije godine kasnije pridružuje im se John Koch, također programer i matematičar. Njih trojica su uspješno sastavili program za traženje neizbježnih skupova reducibilnih konfiguracija.

Godine 1976. Haken i Appel objavljuju dokaz problema temeljen na konstrukciji neizbježnog skupa od 1936 reducibilnih konfiguracija, a 1977. godine sva trojica objavljuju dokaz u časopisu *Illinois Journal of Mathematics* u kojem dolaze do neizbježnog skupa od 1482 reducibilne konfiguracije. Dokaz je objavljen u dva dijela, a uz tekst je priložen i materijal na mikrofilmu sa 450 stranica raznih dijagrama i detaljnih objašnjenja. Ulrich Schmidt otkriva, 1981. godine, pogrešku u programu koja se vrlo brzo ispravila, ali dokaz nije bio lako prihvaćen. Stalno su ga pratile loše glasine i sumnje. Zato 1986. godine Appel i Haken objavljuju novi članak u kojem detaljno opisuju svoje metode, snažno brane dokaz i odbacuju svaku sumnju u njega, a tri godine kasnije objavljuju i knjigu pod naslovom *Every Planar*

Map is Four Colorable.

4 Veza teorema o četiri boje i vektorskog produkta

4.1 Osnovno o vektorskom produktu

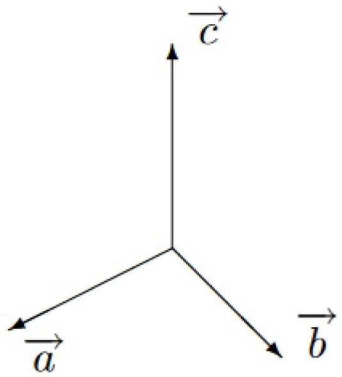
Prisjetimo se definicije ortonormirane baze trodimenzionalnog vektorskog prostora.

Definicija 4.1. *Neka je* $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ *baza vektorskog prostora* V^3 *sa svojstvom da su vektori baze jedinični i međusobno okomiti (ortogonalni), odnosno neka vrijedi*

$$|\overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{k}| = 1,\ \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0,\ \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0,\ \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0.$$

Takvu bazu nazivamo ***ortonormiranom****.*

Vektorski produkt dva vektora definiran je samo u vektorskom prostoru V^3. Rezultat vektorskog produkta je opet vektor, a znamo da je svaki vektor određen *iznosom, smjerom* i *orijentacijom.* Za definiranje orijentacije uvodimo pojam *desno orijentirane baze* prostora V^3. Za bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ prostora V^3 kažemo da je *desno orijentirana*, ili desna, ako promatrajući s vrha vektor $\overrightarrow{c}$ uočavamo obilazak od vektora $\overrightarrow{a}$ do $\overrightarrow{b}$ kraćim putem kao obilazak u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. U suprotnom je to *lijevo orijentirana* baza. Na slici 17 vidimo tipičan primjer desne baze.



Slika 17: Tipičan primjer desno orijentirane baze

Pravilom desne ruke možemo odrediti da li je neka baza desna ili lijeva. Ispruženi palac predstavlja prvi vektor, ispruženi kažiprst drugi, a savinuti srednji prst treći vektor.

Vektorsko množenje definira se na sljedeći način:

Definicija 4.2. ***Vektorsko množenje*** *je operacija* $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$ *koja paru vektora* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ *pridružuje vektor* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *definiran na sljedeći način:*

1. *ako su* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *kolinearni, tada je* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$*;*

2. *ako su* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *nekolinearni, tada je :*

(a) *duljina* $|\overrightarrow{c}|$ *jednaka je* $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$,

(b) *smjer od* $\overrightarrow{c}$ *je smjer okomit na smjer od* $\overrightarrow{a}$ *i na smjer od* $\overrightarrow{b}$,

(c) *orijentacija od* $\overrightarrow{c}$ *je takva da je uređena trojka* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ *desna baza od* V^3.

Vektor $\overrightarrow{c}$ *nazivamo* ***vektorskim produktom*** *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$.

Znamo da vrijedi $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni. Također, za svaki vektor $\overrightarrow{a} \in V^3$ vrijedi $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Nadalje, za svake $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ (antikomutativnost), zatim $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ (kvaziasocijativnost), te $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ (distributivnost prema zbrajanju).

Vektorski produkt lako se računa koristeći determinantu. Neka je $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ desna ortonormirana baza vektorskog prostora V^3 i neka su $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ koordinatni prikazi vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ u toj bazi. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Tablica vektorskog množenja za elemente baze izgleda ovako:

$\times$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{k}$	$-\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$

Nama će najzanimljive biti svojstvo ne asocijativnosti vektorskog množenja. Za primjer možemo uzeti ortonormiranu bazu u trodimenzionalnom vektorskom prostoru:

$$(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{i} \times (\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}.$$

Uobičajena oznaka za vektorski produkt dvaju vektora v i w je $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$, no mi ćemo radi jednostavnosti pisati $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}$. Isto tako, vektore ćemo označavati s malim pisanim slovima, $i, j, k, x, v, \ldots$ umjesto uobičajenih oznaka $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, \ldots$

Upravo zbog ne asocijativnosti zanimljivo je baviti se problemom pronalaženja onih vektora za koje asocijativnost vrijedi. Primjerice, jednakost $x(yz) = (xy)z$ vrijedi za $x = i, y = k, z = i$:

$$i(ki) = ij = k = -(-k) = -ji = (ik)i.$$

4.2 Vektori i teorem o četiri boje

U ovom odjeljku pokazat ćemo da je teorem o četiri boje ekvivalentan kombinatornom problemu vektorskog produkta u trodimenzionalnom vektorskom prostoru.

Definicija 4.3. *Za dani skup varijabli $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ neka su L i R dvije asocijacije umnoška $X_1X_2X_3 \cdots X_n$. Za L i R kažemo da su **lijeva**, odnosno **desna** asocijacija problema. Za rješenje jednadžbe $L = R$ kažemo da je **oštro**, u smislu vektorskog umnoška, ako su obje strane različite od nul-vektora i vrijednosti varijabli pripadaju skupu elemenata i, j, k.*

Slijedi glavni teorem.

Teorem 4.1. *Neka je n neki prirodan broj i L i R bilo koje dvije asocijacije umnoška $X_1X_2X_n \cdots X_n$. Tada je teorem o četiri boje ekvivalentan postojanju **oštrog** rješenja jednadžbe (definicija 4.3) $L = R$ za bilo koji broj n i za sve L i R.*

Kako bi uopće mogli razmatrati dokaz ovog teorema, posvetit ćemo se konstrukcijama namijenjenima bojenju rubova karte. Najprije, objasnimo algoritam za pronalaženje oštrih rješenja.
Oštro rješenje jednadžbe $L = R$ pronaći ćemo bojenjem karte

$$M(L, R) = T(L)\#T(R^*),$$

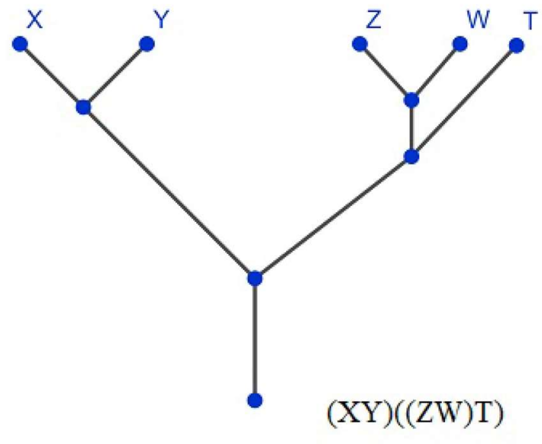
gdje su $T(L)$ i $T(R^*)$ dva ravninska stabla međusobno povezana (znak # predstavlja povezivanje) svojim granama i korijenima kako je opisano u nastavku.
Prvo konstruiramo stablo: $T(L)$ je stablo poistovjećeno sa strukturom formalnog produkta L kojemu su pridružene određene zagrade (kao što je prikazano na slici 18).

Grane stabla $T(L)$ završavaju u varijablama od L. Stablo $T(L)$ ima jedan korijen, a struktura umnoška u L je ubačena u $T(L)$ na način da svaki pojedini umnožak unutar L ima grafički prikaz kao na slici 19.

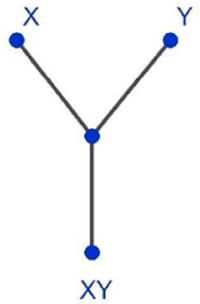
Dakle, ako označimo bridove stabla $T(L)$ s parcijalnim umnošcima, tada korijen daje konačan umnožak varijabli. S R^* označavamo zrcalnu sliku izraza za R, dobivenu pisanjem produkta zdesna na lijevo. Evo primjera:

$$[(x(y(zw)))t]^* = t(((wz)y)x).$$

Na slici 20 je prikazano kako možemo načiniti ravninsku kartu $T(L)\#T(R^*)$ spajanjem dvaju stabala. Primijetimo da su linije koje završavaju u istim varijablama međusobno povezane.



Slika 18: Stablo koje odgovara zadanom produktu L.



Slika 19: Prikaz pojedinačnog umnoška unutar L.

Sada zanemarimo znakove i promotrimo komutativni i asocijativni algebarski sustav s elementima E, I, J, K (poznat kao *Kleinova 4-grupa*) za koji vrijedi:

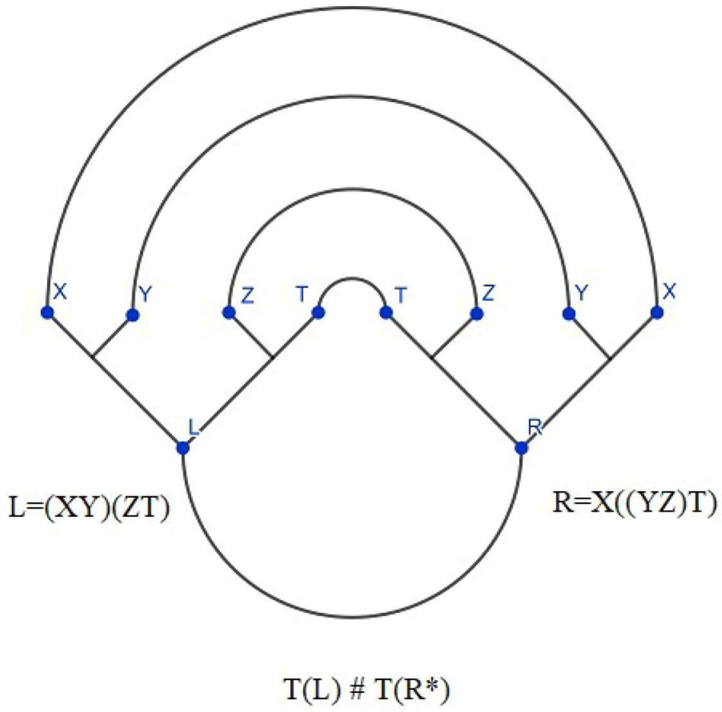
$$EE = E,$$

$$EI = I,\ EJ = J,\ EK = K,$$

$$II = JJ = KK = E,$$

$$IJ = K.$$

Obojimo dijelove karte $M = M(L, R)$ bojama E, I, J, K tako da su susjedni dijelovi, odnosno strane obojene različitim bojama. Zatim obojimo rubove od M povezivajući sa svakim rubom produkt u Kleinovoj grupi boja dvaju susjednih strana. Kao rezultat dobit ćemo bojenje rubova od M na način da su tri različite boje incidentne svakom vrhu. Dakle, bojenje strana s četiri boje je ekvivalentno bojenju rubova-bridova s tri boje (slika 21).



Slika 20: $M(L,R) = T(L)\#T(R^*)$.

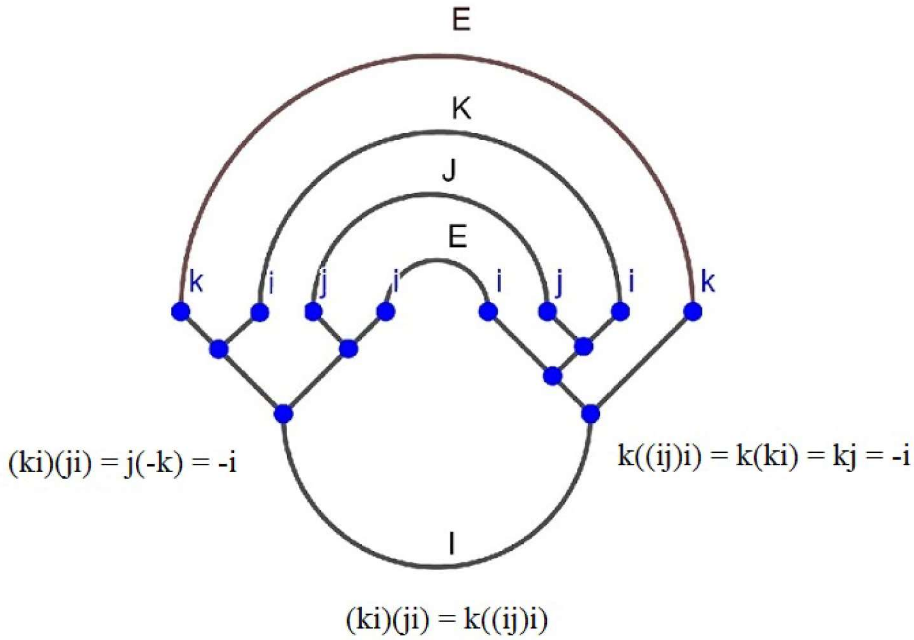
Svakom velikom slovu I, J, K koje označava rub u M pridružimo odgovarajuće malo slovo i, j, k koji sudjeluju u vektorskom umnošku. Dakle, svakoj varijabli X dodijelimo element i, j ili k koji označava njegov brid u $M(L,R)$.
Ovo dodjeljivanje vrijednosti daje oštro rješenje jednadžbe $L = R$. Očito je da navedena metoda daje ili ne nulto rješenje za jednadžbu $L = +R$ ili, pak za jednadžbu $L = -R$. Zapravo se radi o rješenje jednadžbe $L = +R$ (pogledati u [7]). Primijetimo da se ova metoda može upotrijebiti za prebrojavanje svih oštrih rješenja danog problema budući da su ona u bijekciji s bojenjima rubova karte $M(L,R)$. U primjeru na slici 21 vidimo da postoji šest rješenja. Ona odgovaraju permutacijama od i, j, k u gore navedenom slučaju.

Napomena 4.1. *Za dokaz teorema 4.1 također nam je potreban teorem H. Whitneya i napomene koje ga slijede [11, str. 379], kao i komentari [11, str. 389] u istom radu, iz čega slijedi da je dovoljno dokazati teorem o četiri boje za klasu karti od kojih svaka ima oblik $M(L,R)$, odnosno sastoji se od dva povezana stabla.*

Napomena 4.2. *U terminima klasične vektorske algebre vrijedi formula:*

$$(ab)c - a(bc) = (a \cdot b)c - a(b \cdot c), \tag{2}$$

gdje xy označava vektorski umnožak, a $x \cdot y$ skalarni umnožak vektora x i y. Ova se jednakost može koristiti više puta zaredom i tako dati još jedan načina za proučavanje jednadžbe $L - R = 0$.



Slika 21: Bojenje rubova s 3 boje

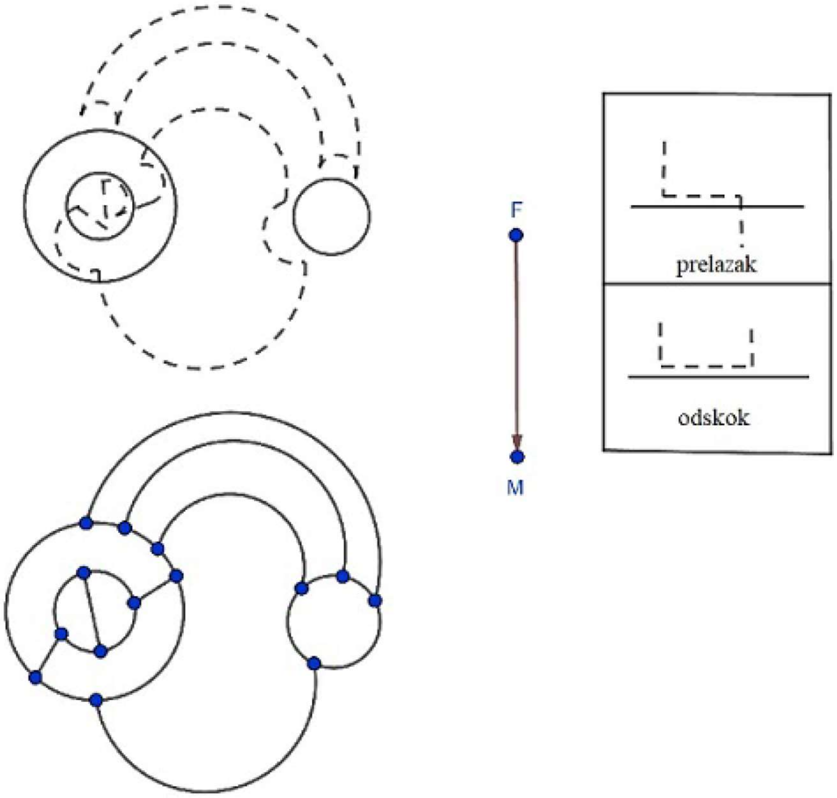
Definicija 4.4. *Formacija F je struktura jednostavnih zatvorenih krivulja u ravnini sa sljedećim svojstvima:*

1. *F je unija dvaju odvojenih skupova krivulja. Odnosno, $F = R \cup B$, gdje su R i B odvojeni skupovi jednostavnih zatvorenih krivulja u ravnini.*

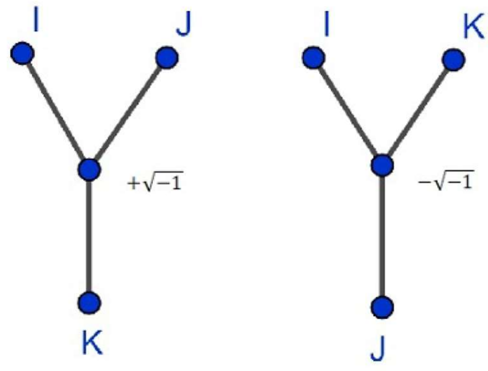
2. *R se naziva skupom* ***crvenih****, a B skupom* ***plavih*** *krivulja. Krivulje različitih boja se međusobno ne presijecaju. Krivulje različitih boja mogu dijeliti segment i u tom slučaju jedna krivulja može presijecati drugu (prelazak ili presjek) ili se jednostavno mogu dodirivati bez prijelaza (odskok.)*

Na slici 22 prikazana je formacija F zajedno s dopuštenim interakcijama između krivulja različitih boja. Primjerice, crvena boja označena je običnom, a plava isprekidanom crtom. Formacija F za kartu M daje bojenje bridova od M s tri različite boje na svakom vrhu (crvena, plava, ljubičasta = crvena $\times$ plava, a označena je s dvije crte, običnom i isprekidanom). Obratno, bilo koje bojenje bridova s tri različite boje na svakom vrhu daje formaciju. Upravo gore navedeni primjer pokazuje da je teorem o četiri boje ekvivalentan postojanju formacije za ravninske kubne karte.

U raspravi o formacijama uobičajeno je koristiti oznake za boje *r - crvena, b - plava, p - ljubičasta,* ali je ovdje prirodnije koristiti oznake I, J, K zbog rada u terminima vektorskog produkta. Stoga ćemo poistovjetiti I sa r, J sa b i K sa p.
Nadalje, označimo svaki vrh ili s $+\sqrt{-1}$ (ako ciklički poredak u vrhu ima oblik IJK) ili s $-\sqrt{-1}$ (ako poredak ima oblik IKJ) (slika 23).



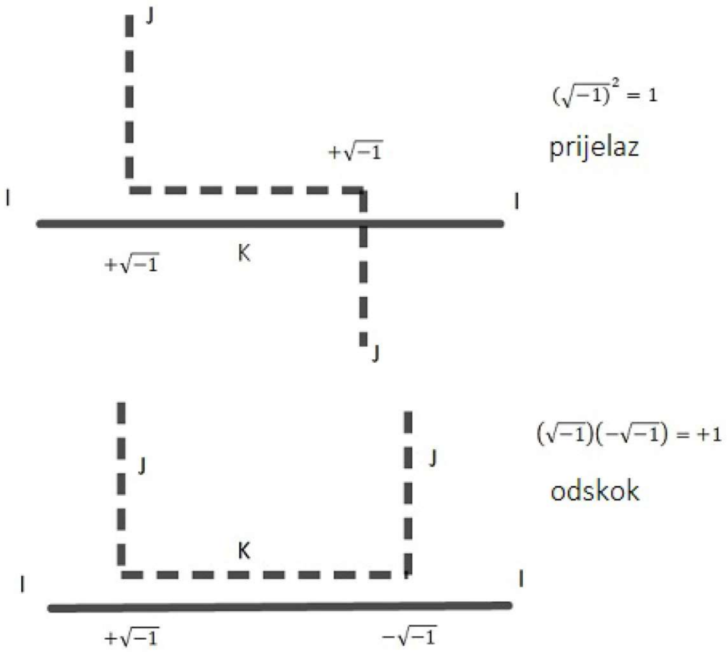
Slika 22: Primjer formacije F s tri crvene i dvije plave krivulje te dopuštene interakcije među njima.



Slika 23: Bojenje C grafa G

Teorem 4.2. *Ako C predstavlja bojenje rubova kubnog ravninskog grafa G, tada je umnožak $P(C)$ imaginarnih vrijednosti pridruženih vrhovima od G jednak 1, odnosno $P(C) = 1$.*

Dokaz: *Neka je F formacija pridružena bojenju rubova C. Primijetimo da su u formaciji krivulje različitih boja međusobno u interakciji preko prelazaka i odskoka. Svaka ta interakcija koristi dva vrha. Kao što je prikazano na slici 24, svaki odskok doprinosi $+1$, a svaki* *prijelaz -1. Formacija se sastoji od skupova jednostavnih zatvorenih krivulja u ravnini, a prema Jordanovom teoremu o krivuljama, postoji paran broj presijecanja između tih kivulja. Zato $P(C)$ ima vrijednost $(-1)^2$, čime je dokaz završen.* $\square$



Slika 24: Doprinosi odskoka i prijelaza u formaciji

Sada konačno možemo dokazati da jednadžba $L = R$ može biti riješena, uključujući predznak.

Teorem 4.3. *Neka L i R predstavljaju dvije asocijacije umnoška konačnog broja različitih varijabli. Tada postoji oštro rješenje jednadžbe $L = R$, uz podrazumijevanje teorema 3.1 o četiri boje.*

Dokaz: *Neka M označava kartu $M = T(L)\#T(R^*)$. Pretpostavimo da $T(L)$ ima n vrhova tako da i $T(R)$ (kao i $T(R^*)$) također ima n vrhova. Pretpostavimo da su rubovi od M obojeni pomoću tri boje i da je to bojenje izraženo u terminima i, j, k. Označimo vrhove od M s $+\sqrt{-1}$ ili s $-\sqrt{-1}$ (kako je već usvojeno u ovom poglavlju). Prema teoremu 4.2, produkt svih imaginarnih vrijednosti je jednak jedan. Tada možemo pisati:*

$$Z\overline{W} = 1,$$

gdje je Z umnožak koji odgovara stablu $T(L)$, a W je umnožak koji odgovara stablu $T(R)$. Ključna i očita činjenica je ta da su imaginarne vrijednosti, pridružene zrcalnoj slici stabla, konjugirane vrijednosti onima koje su pridružene stablu. Zaključujemo da vrijedi $Z = W$. Neka e predstavlja predznak $+1$, odnosno -1 dobiven množenjem vrijednosti od i, j i k u bojenju rubova karte M za L. Neka je e' odgovarajući predznak za R. Vrijedi:

$$Z = ((\sqrt{-1})^n)e$$
$$W = ((\sqrt{-1})^n)e^{'}.$$

Dakle, $e = e^{'}$ *budući da je* $Z = W$. $\square$

Literatura

[1] M. Bombardelli, *Eulerova formula*, Matematika i škola 19, 2003, 179-182.

[2] A. S. Calude, *The Journey of the Four Colour Theorem Through Time*, The New Zealand Mathematics Magazine, 2001, 38:3:27-35.

[3] J. D. Chesler, *The Four - Colour Theorem*, Department of Mathematics, The University of Arizona, 2006.

[4] S. Gračan, *Četiri su dovoljne*, Matematika i škola 41, 26-35, 2007.

[5] I. Gregurić, A. Klobučar, *Problem četiri boje*, Osječki matematički list 10, 2010, 21-29.

[6] I. Gregurić, *Bojenje grafova*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Diplomski rad, Osijek, 2011.

[7] L.H. Kauffman, *Map coloring and the vector cross product*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 48, 1990.

[8] L. Rogers, *The Four Colour Theorem*, NRICH, 11, 2011.

[9] R. Thomas, *An update on the Four - Color Theorem*, Notices Amer. Math. Soc 45, 7, 1998.

[10] R. Wilson, *Four Colours Suffice*, Penguin Books, 2002.

[11] H. Whitney, *A theorem on graphs*, Ann. of Math. 32, 1931, 378-390.

[12] C. Hanusa, *The Six Colour Theorem*, http://people.qc.cuny.edu/faculty/christopher.hanusa/courses/634sp11/Documents/634ch8-2.pdf

[13] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.