

# Funkcije operatora

---

**Bosanac, Maja**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:417845>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-08**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
ODJEL ZA MATEMATIKU  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Bosanac

# **Funkcije operatora**

Završni rad

Osijek, 2019.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

Maja Bosanac

# **Funkcije operatora**

Završni rad

Mentor:  
doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2019.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cijela funkcija operatora</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Funkcije operatora u Jordanovoj bazi</b>	<b>7</b>
3.1	Osnovna svojstva . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Operator <math>f(A)</math> kao polinom od <math>A</math></b>	<b>12</b>
	<b>Literatura</b>	<b>18</b>

## Sažetak

U ovom radu se proučavaju funkcije  $f$  za koje se može definirati operator  $f(A)$ , pri čemu je  $A$  linearni operator na nekom vektorskom prostoru  $V$ . U uvodnom dijelu će biti definirani osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje rada. Zatim će biti definiran  $f(A)$  za cijelu funkciju, te prikaz  $f(A)$  u Jordanovoj i kanonskoj bazi. Zadnje poglavlje rada govori o  $f(A)$  kao polinomu.

**Ključne riječi:** linearni operator, cijela funkcija, analitička funkcija, Jordanova baza

## Abstract

In this paper we will consider functions  $f$  for which we can define operator  $f(A)$ , where  $A$  is a linear operator on the vector space  $V$ . In the introduction we will define the basic concepts that we need for understanding the paper. After that,  $f(A)$  will be defined for the entire function and the representation of  $f(A)$  in Jordan and canonical base. The paper will be concluded with the chapter about  $f(A)$  as a polynomial.

**Key words:** linear operator, entire function, analytic function, Jordan basis

# 1 Uvod

Za početak definirajmo nekoliko osnovnih pojmova.

**Definicija 1.1.** *Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori. Svako preslikavanje  $A : V \rightarrow W$  naziva se operator.*

**Definicija 1.2.** *Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori definirani nad istim poljem  $K$  te  $A : V \rightarrow W$  operator. Kažemo da je operator  $A$  :*

- aditivan ako  $\forall v, w \in V$  vrijedi  $A(v + w) = A(v) + A(w)$  ,
- homogen ako  $\forall v \in V, \forall \alpha \in K$  vrijedi  $A(\alpha v) = \alpha A(v)$ .

*Operator  $A$  je linearan ako je aditivan i homogen.*

**Napomena 1.1.** *Za vektorske prostore  $V$  i  $W$  nad istim poljem  $K$  sa  $L(V, W)$  ćemo označavati skup svih linearnih operatora  $A : V \rightarrow W$ .*

**Definicija 1.3.** *Neka je  $V$  vektorski prostor i  $A \in L(V)$  linearan operator.  $A$  je nilpotentan operator ako za neki prirodan broj  $k$  vrijedi  $A^k = 0$ . Tada je  $A^m = 0, \forall m \geq k$ . Najmanji prirodan broj  $p$  takav da je  $A^p = 0$  naziva se indeks nilpotentnosti operatora  $A$ ; kažemo još da je operator  $A$  nilpotentan indeksa  $p$ . Naravno, vrijedi  $A^{p-1} \neq 0$ .*

**Propozicija 1.1.** *Neka je  $A \in L(V)$  nilpotentan operator indeksa  $p$  i neka je  $v \in V$  takav da je  $A^{p-1}v \neq 0$ . Tada su vektori  $v, Av, A^2v, \dots, A^{p-1}v$  linearno nezavisni.*

Prema prethodnoj propoziciji, ukoliko je operator  $A$  nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti  $n = \dim(V)$ , skup  $\{v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v\}$  je linearno nezavisan skup vektora koji čini bazu za prostor  $V$ . Ta baza se naziva ciklička baza nilpotentnog operatora  $A$  (ili ciklička baza prostora  $V$ ) i piše se:

$$\{A^{n-1}v, A^{n-2}v, \dots, Av, v\} =: e.$$

Zapis operatora  $A$  u toj bazi:

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta se matrica naziva elementarna Jordanova kljetka reda  $n$  i označava  $J_n$ .

**Definicija 1.4.** Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $K$  i  $A \in L(V)$ . Potprostor  $W \leq V$  zove se  $A$ -invarijantan (ili potprostor invarijantan s obzirom na operator  $A$ ) ako vrijedi

$$\forall w \in W \Rightarrow Aw \in W,$$

odnosno ako je  $AW \subseteq W$ .

**Teorem 1.1** (O Jordanovoj formi). Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem  $K$  i neka je  $A \in L(V)$ . Neka je

$$\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}, \quad \alpha_j \neq \alpha_k \quad \text{za } j \neq k.$$

Dakle, minimalni polinom operatora  $A$  je

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1} (\lambda - \alpha_2)^{p_2} \dots (\lambda - \alpha_s)^{p_s}, \quad p_1, p_2, \dots, p_s \in \mathbb{N}.$$

Definiramo li s

$$V_i = \text{Ker} \mu_i(A) = \text{Ker}(A_i - \alpha_i I_i)^{p_i}, \quad A_i = A|_{V_i}, \quad B_i = A_i - \alpha_i I_i.$$

( $I_i$  je jedinični operator na prostoru  $V_i$ ). Tada je  $B_i$  nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti  $p_i$ . Postoji baza  $e$  prostora  $V$ ,  $e = e^{(1)} \cup e^{(2)} \cup \dots \cup e^{(s)}$ , gdje je  $e^{(i)}$  baza za  $V_i$ , u kojoj cijeli operator  $A$  ima blok-dijagonalnu matricu (Jordanova forma matrice operatora  $A$ ) čiji su blokovi  $\alpha_i I_i(e^{(i)}) + B_i(e^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Svaka matrica  $B_i(e^{(i)})$  je blok-dijagonalna i blokovi su joj elementarne Jordanove klijetke od kojih je najveća reda  $p_i \times p_i$ .

U idućem primjeru pokazat ćemo postupak određivanja Jordanove forme operatora  $A$ .

**Primjer 1.1.** Odrediti Jordanovu formu i Jordanovu bazu operatora  $A \in L(\mathbb{C}^4)$  čiji je matrični zapis u kanonskoj bazi prostora  $\mathbb{C}^4$ :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

Karakteristični polinom operatora :  $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ . Odredimo potprostore  $V_1 = \text{Ker}(A^2)$ ,  $V_2 = \text{Ker}(A - I)$  i  $V_3 = \text{Ker}(A + I)$ .



- $\text{Ker}(A^2)$  :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4,$$

$$A^2x = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C},$$

što znači da je  $V_1 = \text{Ker}(A^2) = [\{f_1, f_2\}]$ , gdje su  $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$  i  $f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

Sličnim postupkom dobijemo da je  $V_2 = \text{Ker}(A - I) = [\{f_3\}]$  i  $V_3 = \text{Ker}(A + I) = [\{f_4\}]$ ,

gdje su  $f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  i  $f_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Ovim postupkom smo dobili novu bazu  $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  prostora  $\mathbb{C}^4$  u kojoj operator  $A$  ima zapis:

$$A(f) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [1], \quad A_3 = [-1].$$

Promotrimo sada nilpotentan operator  $B_1 = A_1 - \lambda_1 I$  i tražimo bazu u kojoj  $B_1$  ima oblik elementarne Jordanove klijetke. Kako je  $B_1$  nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti 2 slijedi da je:  $\mathbb{C}^2 = (\text{Ker}(B_1^2) \dot{-} \text{Ker}(B_1)) \dot{+} \text{Ker}(B_1)$ .

Lako se pokaže da je  $\text{Ker}(B_1^2) = [\{e_1, e_2\}]$ , gdje su  $e_1, e_2$  vektori kanonske baze za  $\mathbb{C}^2$  nad  $\mathbb{C}$ , a  $\text{Ker}(B_1) = [\{v_1\}]$  pri čemu je  $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Dakle, možemo uzeti da je  $\text{Ker}(B_1^2) \dot{-} \text{Ker}(B_1) =$

$[\{e_1\}]$  pa je  $B_1 e_1 \in \text{Ker}(B_1)$  i  $\{B_1 e_1, e_1\}$  je baza u kojoj je  $B_1 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Iz svega slijedi,

$$A(f') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$



gdje je  $f' = \{f_1, -2f_1 - f_2, f_3, f_4\}$  Jordanova baza prostora  $\mathbb{C}^4$ . Minimalni polinom operatora  $A$  je  $\mu_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ . Time smo riješili primjer.

Nadalje, u ostatku rada  $V$  će predstavljati konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{C}$ . Kako je za polinom  $P(\lambda)$  i operator  $A \in L(V)$  dobro definiran operator  $P(A)$ , postavlja se pitanje za koje još funkcije  $f$  se može definirati operator  $f(A)$ . Funkcije najbližnije polinomima su redovi potencija:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ako gornji red konvergira za svaki  $\lambda \in \mathbb{C}$  onda se funkcija  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  koju taj red definira naziva **cijela funkcija**.

**Definicija 1.5.** *Neka je  $D$  područje u  $\mathbb{C}$  i  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija. Ako  $f$  ima neprekidnu derivaciju na  $D$ , onda se funkcija  $f$  naziva analitička funkcija.*

**Definicija 1.6.** *Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem  $\mathbb{C}$ . Za niz  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  u  $L(V, W)$  i za  $A \in L(V, W)$  kaže se da niz operatora  $(A_k)$  konvergira prema operatoru  $A$  i piše se*

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k,$$

ako postoje baza  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  prostora  $V$  i baza  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  prostora  $W$  takve da za matrice

$$A_k(f, e) = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \dots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A(f, e) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Za red operatora  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  kaže se da konvergira, ako konvergira niz parcijalnih suma  $(S_k)$ , gdje je

$$S_k = \sum_{j=0}^k A_j.$$

Limes niza parcijalnih suma se tada naziva suma toga reda.

## 2 Cijela funkcija operatora

U ovom poglavlju najprije navodimo propoziciju iz koje dobivamo cijelu funkciju operatora, a zatim neka svojstva tih funkcija.

**Propozicija 2.1.** *Neka je  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cijela funkcija:*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad a_k, \lambda \in \mathbb{C}$$

*i neka je  $A \in L(V)$ . Tada red operatora*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

*konvergira.*

*Dokaz.* Vidi [3, str. 89.] □

Za cijelu funkciju  $f$  iz prethodne propozicije i za operator  $A \in L(V)$  stavljamo

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

Operator  $f(A)$  naziva se **cijela funkcija operatora  $A$** .

**Propozicija 2.2.** *Neka su  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cijele funkcije,  $\alpha \in \mathbb{C}$  i  $A \in L(V)$ . Tada je*

1.  $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$ ,
2.  $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$ ,
3.  $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$ .

*Dokaz.* Neka je

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k \quad i \quad g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k.$$

Tada je

$$(\alpha f)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k \lambda^k \quad i \quad (f + g)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \lambda^k.$$

Stoga slijedi:

1.

$$\begin{aligned} (\alpha f)(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha \alpha_k A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k = \\ &= \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k = \alpha f(A) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (f + g)(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (\alpha_k + \beta_k) A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k + \sum_{k=0}^m \beta_k A^k \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \beta_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k A^k = f(A) + g(A). \end{aligned}$$

3. Neka je  $e$  baza prostora  $V$ . Za bilo koji operator  $B \in L(V)$  sa  $B(e)_{ij}$  ćemo označiti element matrice  $B(e)$  na presjeku  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca. Prema Propoziciji 2.1. redovi matricnih elemenata apsolutno su konvergentni, stoga se u njihovom produktu može mijenjati redosljed članova i grupirati, pa slijedi

$$\begin{aligned} [f(A)g(A)](e)_{ij} &= \sum_{l=1}^n f(A)_{il} g(A)(e)_{lj} = \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_{il}^{(k)} \right] \cdot \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \alpha_{lj}^{(s)} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_k \beta_s \sum_{l=1}^n \alpha_{il}^{(k)} \alpha_{lj}^{(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(k+s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \alpha_r \beta_{m-r} \right) \alpha_{ij}^{(m)}. \end{aligned}$$

S druge strane,

$$(f \cdot g)(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \alpha_r \beta_{m-r} \right) A^m,$$

pa slijedi

$$[(f \cdot g)(A)](e)_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \alpha_r \beta_{m-r} \right) \alpha_{ij}^{(m)}.$$

Dakle, vrijedi  $[f(A)g(A)](e)_{ij} = [(f \cdot g)(A)](e)_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , odnosno

$$(f \cdot g)(A) = f(A)g(A).$$

□

### 3 Funkcije operatora u Jordanovoj bazi

Neka je  $A \in L(V)$  i neka je  $e$  Jordanova baza prostora  $V$  u kojoj je

$$A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 + J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_s I_s + J_s \end{bmatrix},$$

gdje su  $I_j$  jedinične matrice reda  $j \times j$ ,  $J_j$  elementarne Jordanove klijetke reda  $j \times j$  te  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ , pri tome svojstvene vrijednosti ne moraju biti nužno različite. Kako je  $A(e)$  blok-dijagonalna matrica tada je njezina  $k$ -ta potencija ponovo blok-dijagonalna matrica čiji su blokovi  $k$ -te potencije odgovarajućih blokova matrice  $A(e)$ , tj.

$$A^k(e) = \begin{bmatrix} (\lambda_1 I_1 + J_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_2 + J_2)^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda_s I_s + J_s)^k \end{bmatrix}.$$

Za cijelu funkciju

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

vrijedi:

$$[f(A)](e) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1 I_1 + J_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 I_2 + J_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_s I_s + J_s) \end{bmatrix}.$$

U nastavku ćemo promatrati jedan blok matrice operatora  $A$  i problem definicije

$$f(\lambda_0 I + J),$$

pri čemu je  $I$  jedinična matrica reda  $n \times n$ ,  $J$  elementarna Jordanova klijetka istog reda, a  $\lambda_0$  svojstvena vrijednost.

**Lema 3.1.** *Neka je  $f : K(\lambda_1, r) \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija koja je definirana i analitička na krugu*

$$K(\lambda_1, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_1| < r\}$$

*i neka je*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\lambda - \lambda_1)^k$$

njen Taylorov red oko točke  $\lambda_1$  koji konvergira apsolutno za svaki  $\lambda \in K(\lambda_1, r)$ . Za svaku točku  $\lambda_0 \in K(\lambda_1, r)$  red matrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k ((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k$$

konvergira i suma mu je jednaka

$$f(\lambda_0)I + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}J + \frac{f''(\lambda_0)}{2!}J^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}J^{n-1}.$$

*Dokaz.* Označimo za bilo koji  $p \in \mathbb{N}$

$$S_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k ((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k \quad i \quad f_p(\lambda) = \sum_{k=0}^p \alpha_k (\lambda - \lambda_1)^k.$$

Primjenom binomnog poučka za svaki  $k$  dobivamo:

$$((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = (\lambda_0 - \lambda_1)^k I + \binom{k}{1} (\lambda_0 - \lambda_1)^{k-1} J + \dots + \binom{k}{k-1} (\lambda_0 - \lambda_1) J^{k-1} + J^k.$$

S druge strane,

$$\binom{k}{j} (\lambda_0 - \lambda_1)^{k-j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} (\lambda_0 - \lambda_1)^{k-j} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0},$$

pa slijedi:

$$((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = [(\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\lambda - \lambda_1)^k J + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda - \lambda_1)^k J^k] \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (1)$$

Za  $k \geq n$  je  $J^n = \dots = J^k = 0$  stoga u gornjem izrazu ne treba pisati sve članove, samo do člana

$$\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^{n-1}.$$

Za  $k < n - 1$  imamo

$$\frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda - \lambda_1)^k = 0 \quad za \quad j = k + 1, \dots, n - 1,$$

pa u izrazu (1) s desne strane možemo dopisati sumande

$$\frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^k + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^{n-1}.$$



Dakle, za svaki  $k \geq 0$  vrijedi:

$$((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = [(\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\lambda - \lambda_1)^k J + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k J^{n-1}] \Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Ako sada pomnožimo gornju jednakost s  $\alpha_k$  i zbrojimo po  $k$  od 0 do  $p$ , s lijeve strane jednakosti se dobije upravo ranije definirana matrica  $S_p$ :

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=0}^p \alpha_k [(\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\lambda - \lambda_1)^k J + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k J^{n-1}] \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= f_p(\lambda_0)I + \frac{1}{1!} f'_p(\lambda_0)J + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f_p^{(n-1)}(\lambda_0)J^{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Budući da je

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\lambda_0) = f(\lambda_0) \quad i \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f_p^{(k)}(\lambda_0) = f^{(j)}(\lambda_0) \quad za \quad j = 1, \dots, n-1,$$

iz jednakosti (2) slijedi tvrdnja leme. □

**Definicija 3.1.** *Neka je  $A \in L(V)$  i  $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ , pri čemu su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$  i  $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$ . S  $\mathcal{F}(A)$  ćemo označiti skup svih funkcija  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sa svojstvima:*

1. *Domena funkcije  $f$  sadrži  $\sigma(A)$ ,*
2. *Ako je  $p_j > 0$  tada domena funkcije  $f, D(f)$ , sadrži krug  $K(\lambda_j, r_j)$  i na tom krugu je funkcija  $f$  analitička.*

Tada zapis operatora  $f(A)$  u Jordanovoj bazi  $e$  prostora  $V$ , za svaku funkciju  $f \in \mathcal{F}(A)$ , izgleda:

$$f(A)(e) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1 I_1 + J_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 I_2 + J_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_s I_s + J_s) \end{bmatrix},$$

pri čemu je za svaki  $j \in \{1, \dots, s\}$

$$f(\lambda_j I_j + J_j) = \begin{bmatrix} f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & \dots & \frac{f^{(p_j-1)}(\lambda_j)}{(p_j-1)!} \\ 0 & f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \dots & \frac{f^{(p_j-2)}(\lambda_j)}{(p_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_j) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_j) \end{bmatrix}.$$

**Primjer 3.1.** Neka je dan operator  $A : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  i njegov matricni zapis u kanonskoj bazi prostora  $\mathbb{C}^4$  :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora  $\sin(A)$  u Jordanovoj bazi.

*Rješenje:*

U Primjeru 1.1. smo odrediti Jordanovu formu operatora  $A$ , tj. zapis operatora  $A$  u Jordanovoj bazi prostora  $\mathbb{C}^4$  :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prema prethodnoj definiciji slijedi da je:

$$\begin{aligned} \sin(A) &= \begin{bmatrix} \sin(0) & \sin'(0) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(0) & \cos(0) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.1 Osnovna svojstva

U idućem teoremu ćemo navesti neka osnovna svojstva funkcija iz skupa  $\mathcal{F}(A)$ , te neka od njih i dokazati.

**Teorem 3.1.** Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$ ,  $A \in L(V)$ ,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$  pri čemu su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  međusobno različiti i neka je

$$\mu_A = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}.$$

Tada vrijedi:

1. Ako je  $f(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$  onda je  $f \in \mathcal{F}(A)$  i  $f(A) = I$ .



2. Ako je  $f(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$  onda je  $f \in \mathcal{F}(A)$  i  $f(A) = A$ .

3. Neka su  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Definiramo funkciju  $h$  tako da je  $D(h) = D(f) \cap D(g)$  i  $h(\lambda) = \alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)$ . Tada je

$$h \in \mathcal{F}(A) \quad i \quad h(A) = \alpha f(A) + \beta g(A).$$

4. Neka su  $f, g \in \mathcal{F}(A)$ . Definiramo funkciju  $h$  tako da je  $D(h) = D(f) \cap D(g)$  i  $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ . Tada je

$$h \in \mathcal{F}(A) \quad i \quad h(A) = f(A)g(A).$$

5. Pretpostavimo da su  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  takve da je  $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$  za  $0 \leq k \leq p_j - 1$  i za  $1 \leq j \leq t$ . Tada je  $f(A) = g(A)$ .

6. Neka je  $f \in \mathcal{F}(A)$  i neka je  $(f_k)$  niz u  $\mathcal{F}(A)$ . Pretpostavimo da vrijedi

$$f^{(i)}(\lambda_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(i)}(\lambda_j) \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, p_j - 1 \quad i \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, t.$$

Tada je

$$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(A).$$

7. Za  $f \in \mathcal{F}(A)$  vrijedi  $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_t)\}$ .

*Dokaz.* Tvrdnje 1., 2., 3. i 5. su očigledne, stoga ćemo dokazati preostale dvije. Dokažimo najprije tvrdnju 4.:

Stavimo  $V_j = \text{Ker}((A - \lambda_j I)^{p_j})$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Tada znamo da su svi potprostori  $V_j$   $A$ -invarijantni i da je  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_t$ . Imamo redom

$$\begin{aligned} f(A)g(A)|_{V_j} &= (f(A)|_{V_j}) \cdot (g(A)|_{V_j}) = f(A|_{V_j})g(A|_{V_j}) = \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p_j-1} \frac{f^{(i)}(\lambda_j)}{i!} J^i \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{p_j-1} \frac{g^{(k)}(\lambda_j)}{k!} J^k \right) = \sum_{l=0}^{p_j-1} \left( \sum_{k=0}^l \frac{f^{(l-k)}(\lambda_j)}{(l-k)!} \cdot \frac{g^{(k)}(\lambda_j)}{k!} \right) J^l = \\ &= \sum_{l=0}^{p_j-1} \left( \left( \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f^{(l-k)}(\lambda_j) g^{(k)}(\lambda_j) \right) \right) J^l = \sum_{l=0}^{p_j-1} \frac{h^{(l)}(\lambda_j)}{l!} J^l = h(A|_{V_j}) = h(A)|_{V_j}. \end{aligned}$$

Kako ovo vrijedi za sve  $j = 1, 2, \dots, t$  i kako je  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_t$ , slijdi  $f(A)g(A) = h(A)$ . Preostaje još dokazati tvrdnju 7. Imamo redom ekvivalencije:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \in \sigma(f(A)) &\iff \det(\lambda_0 I(e) - [f(A)](e)) = 0 \iff \\ \iff (\lambda_0 - f(\lambda_1)^{n_1}) \lambda_0 - f(\lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda_0 - f(\lambda_t))^{n_t} &= 0, \quad n_j = \dim(V_j) \iff \end{aligned}$$

$$\iff \lambda_0 \in \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_t)\}.$$

□

## 4 Operator $f(A)$ kao polinom od $A$

Iz Definicije 3.1. vidimo da je skup  $\mathcal{F}(A)$  ovisan samo o spektru operatora  $A$  i minimalnom polinomu tog operatora, odnosno funkcije iz  $\mathcal{F}(A)$  su trebale djelovati u okolini spektra operatora  $A$ . Zbog toga će različite funkcije  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  definirati isti operator,  $f(A) = g(A)$ . Točnost ovoga slijedi iz činjenice da se svi operatori  $f(A)$  mogu dobiti ako za  $f$  uzmemo samo polinome.

**Teorem 4.1.** *Neka je  $m$  stupanj minimalnog polinoma  $\mu_A$  operatora  $A \in L(V)$  i  $f \in \mathcal{F}(A)$ . Postoji jedinstveni polinom  $P$  stupnja manjeg od  $m$  takav da je  $P(A) = f(A)$ .*

*Dokaz. Jedinstvenost:*

Neka su  $P_1(\lambda)$  i  $P_2(\lambda)$  dva polinoma kojima je stupanj manji od  $m$ . Ako je  $P_1(A) = P_2(A)$  tada je  $(P_1 - P_2)(A) = 0$ , iz čega slijedi da je  $P_1(\lambda) - P_2(\lambda)$  djeljivo sa  $\mu_A$ . Kako je stupanj polinoma  $P_1 - P_2$  manji od  $m = \deg(\mu_A)$ ,  $P_1 - P_2$  iščezava pa slijedi da postoji najviše jedan polinom  $P$  stupnja manjeg od  $m$  za kojega je  $P(A) = f(A)$ .

*Egzistencija:* Pretpostavimo da postoji polinom  $P$  s traženim svojstvima. Neka je

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}, \quad p_1 + \dots + p_t = m \quad (3)$$

minimalni polinom operatora  $A$ , pri čemu su  $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$ . Rastavimo razlomak  $\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}$  na parcijalne razlomke

$$\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} = \sum_{k=1}^t \left[ \frac{\alpha_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \dots + \frac{\alpha_{kp_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{p_k}} \right]. \quad (4)$$

Sa  $\Gamma_k$  ćemo označiti malu kružnicu sa središtem u  $\lambda_k$  koja osim  $\lambda_k$  ne sadrži niti jednu drugu točku iz  $\sigma(A)$ . Iz (4) slijedi

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} (\lambda - \lambda_k)^{j-1} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} d\lambda; \quad j = 1, \dots, p_k; \quad k = 1, \dots, t. \quad (5)$$

Neka je  $k = 1$  :

$$\mu_1 = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}} = \mu_1(\lambda_1) + \frac{\mu_1'(\lambda_1)}{1!} (\lambda - \lambda_1) + \dots$$

Iz

$$(\lambda - \lambda_1)^{j-1} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{p_1-j+1}} \mu_1(\lambda) = \dots + \frac{1}{(p_j - j)!} \mu_1^{(p_1-j)}(\lambda_1) \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \dots$$

i (5) dobivamo

$$\alpha_{1j} = \frac{1}{(p_1 - j)!} \mu_1^{(p_1-j)}(\lambda_1) = \frac{1}{(p_1 - j)!} \left[ (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_1}^{(p_1-j)}.$$

Analogno,

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(p_k - j)!} \left[ (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(p_k-j)}; \quad j = 1, \dots, p_k; \quad k = 1, \dots, t. \quad (6)$$

Ovime su koeficijenti proizvoljnog polinoma  $P$  stupnja manjeg od  $m$  izraženi pomoću elemenata skupa  $\sigma(A)$  i polinoma  $\mu_A$ .

Za konstrukciju traženog polinoma ćemo pomoću funkcije  $f$  definirati sustav brojeva  $\alpha_{kj}$  na način:

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(p_k - j)!} \left[ (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \frac{f(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(p_k-j)}; \quad j = 1, \dots, p_k; \quad k = 1, \dots, t \quad (7)$$

i pomoću ovako definiranih brojeva  $\alpha_{kj}$  ćemo definirati polinom

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{\alpha_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \dots + \frac{\alpha_{kp_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{p_k}} \right] \mu_A(\lambda) \quad (8)$$

stupnja manjeg od  $m$ . Iz (8) slijedi da su brojevi  $\alpha_{kj}$  iz te relacije sa  $P$  povezani relacijom (6). Dakle,

$$\left[ (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(q)} = \left[ (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \frac{f(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(q)}, \quad q = p_k - j = 0, 1, \dots, p_k - 1$$

Gornja jednakost je moguća samo za  $P^{(q)}(\lambda_k) = f^{(q)}(\lambda_k)$ ,  $q = 0, 1, \dots, p_k - 1$ . Na taj način je pokazano da polinom (8) s koeficijentima (7) ima iste elemente kao i  $f$  na  $\sigma(A)$ , ali tada je  $P(A) = f(A)$ .  $\square$

Iz prethodnog dokaza slijedi teorem:

**Teorem 4.2** (Lagrange–Sylvester). *Neka su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C}$  međusobno različiti i neka su  $p_1, p_2, \dots, p_t \in \mathbb{N}$ . Nadalje, neka su zadani  $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$  za  $i = 0, \dots, p_j - 1$  i za  $j = 1, \dots, t$ . Tada postoji jedinstveni polinom  $P(\lambda)$  stupnja manjeg od  $p_1 + p_2 + \dots + p_t$  takav da vrijedi*

$$P^{(i)}(\lambda_j) = \beta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq t.$$

*Taj polinom se naziva Lagrange–Sylvesterov interpolacijski polinom.*

*Dokaz.* Pomoću brojeva  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  i  $p_1, p_2, \dots, p_t$  definirat ćemo polinom  $\mu$  kao u dokazu



prethodnog teorema, odnosno

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}, \quad p_1 + \dots + p_t = m.$$

Ukoliko raspišemo relaciju (7) iz prethodnog dokaza te u rezultatu zamijenimo  $f^{(q-1)}(\lambda_j)$  s  $\beta_{qj}$ , pomoću brojeva  $\beta_{qj}$  i poznatog polinoma  $\mu$  možemo izračunati  $\alpha_{ij}$ . Koristeći te  $\alpha_{ij}$  može se konstruirati polinom  $P(\lambda)$  kao u relaciji (8) u prethodnom dokazu. Za taj polinom također vrijedi relacija (6). Osim toga, slijedi da je  $\beta_{qj} = P^{(q-1)}(\lambda_j)$ , prema tome postoji barem jedan polinom stupnja manjeg od  $m$  za koji vrijedi  $P^{(i)}(\lambda_j) = \beta_{ij}$ . S druge strane, kako smo elemente polinoma  $P$  stupnja manjeg od  $m$  tražili kao u prethodnom dokazu, to znači da su ti koeficijenti jednoznačno određeni. Dakle, polinom  $P$  sa traženim svojstvima je jedinstven.  $\square$

U slučaju za  $p_1 = \dots = p_t = 1$  polinom iz prethodnog teorema naziva se Lagrangeov interpolacijski polinom i ima oblik:

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^t \frac{(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda - \lambda_t)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_t)} f(\lambda_k).$$

Lagrange–Sylvesterov teorem omogućuje efikasno izračunavanje funkcija operatora. Naime, za svaki par indeksa  $k \in \{0, 1, \dots, p_l - 1\}$  i  $l \in \{1, 2, \dots, t\}$  prema tom teoremu postoji jedinstven polinom  $G_{kl}(\lambda)$  stupnja manjeg od  $m$  takav da vrijedi

$$G_{kl}^i(\lambda_j) = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Ako stavimo  $P_{kl} = G_{kl}(A)$ , tada se iz formule za funkciju operatora lako vidi da je za svaku funkciju  $f \in \mathcal{F}(A)$

$$f(A) = \sum_{k=1}^t \sum_{l=0}^{p_k-1} f^{(l)}(\lambda_k) \cdot P_{kl}. \quad (9)$$

Da bismo odredili operatore  $P_{kl}$ , čije poznavanje znači lako izračunavanje operatora  $f(A)$  za svaku funkciju  $f \in \mathcal{F}(A)$ , nije nam potrebno pronalaziti polinome  $G_{kl}(\lambda)$ . Dovoljno je gornju jednakost napisati za funkcije  $f_s(\lambda) = \lambda^s$ ,  $s = 0, \dots, m - 1$ . Tada dobivamo sustav od  $m$  jednadžbi s  $p_1 + p_2 + \dots + p_t = m$  nepoznanica  $P_{kl}$ :

$$A^s = \sum_{k=1}^t \left( \sum_{l=0}^{p_k-1} \frac{s!}{(s-l)!} \lambda_k^{s-l} \cdot P_{kl} \right), \quad 0 \leq s \leq m - 1.$$

Eksplicitnim rješavanjem tih jednadžbi dolazimo do operatora  $P_{kl}$ .

**Propozicija 4.1.** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalni kompleksan vektorski prostor,  $A \in L(V)$  i neka su operatori  $P_{kl}$  definirani na prethodno opisani način. Tada je  $\{P_{kl}; 0 \leq l \leq p_k - 1, 1 \leq k \leq t\}$  baza vektorskog prostora  $\mathcal{L}(A)$ , pri čemu sa  $\mathcal{L}(A)$  označavamo*

potprostor od  $L(V)$  razapet svim potencijama operatora  $A$ , tj.  $\mathcal{L}(A) = [\{I, A, A^2, \dots\}] = [\{A^k; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}] = \{P(A); P(A) \text{ polinom}\}$ .

*Dokaz.* Svi operatori  $P_{kl}$  su polinomi operatora  $A$ , dakle,  $P_{kl} \in \mathcal{L}(A)$ . Broj tih operatora je  $p_1 + \dots + p_t$ , dakle, jednak je stupnju  $m$  minimalnog polinoma  $\mu_A$  operatora  $A$ , odnosno, dimenziji vektorskog prostora  $\mathcal{L}(A)$ . Nadalje, prema gornjim jednakostima potencije  $I, A, A^2, \dots, A^{m-1}$  su linearne kombinacije operatora  $P_{kl}$ . Budući da je  $\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$  baza od  $\mathcal{L}(A)$ , slijedi da operatori  $P_{kl}$  razapinju prostor  $\mathcal{L}(A)$ . Dakle, operatori  $P_{kl}$  tvore bazu od  $\mathcal{L}(A)$ .  $\square$

Pogledajmo primjenu prethodnih teorema na idućem primjeru.

**Primjer 4.1.** *Odrediti općenito  $f(A)$  za bilo koji  $f \in \mathcal{F}(A)$  ako je operator  $A \in L(\mathbb{C}^2)$  dan matricom u kanonskoj bazi prostora  $\mathbb{C}^2$ :*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

*Zatim još odrediti  $f(A) = A^2 - A$  također u kanonskoj bazi prostora  $\mathbb{C}^2$ .*

*Rješenje:*

Najprije odredimo karakteristični polinom operatora  $A$ :

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(7 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9).$$

Slijedi da je minimalni polinom operatora  $A$  jednak:

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 9).$$

Prema tome svojstvene vrijednosti operatora  $A$  su  $\lambda_1 = 4$  i  $\lambda_2 = 9$ . Uvrstimo li to u formulu (9) za  $t = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 1$  dobivamo:

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{p_k-1} f^{(l)}(\lambda_k) \cdot P_{kl} = \sum_{l=0}^{p_1-1} f^{(l)}(\lambda_1) \cdot P_{1l} + \sum_{l=0}^{p_2-1} f^{(l)}(\lambda_2) \cdot P_{2l} = \\ &= f^{(0)}(\lambda_1)P_{10} + f^{(0)}(\lambda_2)P_{20} = f(\lambda_1)P_{10} + f(\lambda_2)P_{20}. \end{aligned}$$

Sada je potrebno odrediti  $P_{10}$  i  $P_{20}$ , pa gornju jednakost raspišemo za  $f_s = \lambda^s$  gdje je  $s = 0, 1$  i dobivamo:

$$I = 1 \cdot P_{10} + 1 \cdot P_{20} \quad \Rightarrow \quad P_{10} = I - P_{20}$$

i

$$A = f(4)P_{10} + f(9)P_{20} = 4 \cdot P_{10} + 9 \cdot P_{20}.$$

Rješavanjem ovog sustava dobijamo  $P_{10}$  i  $P_{20}$ :

$$P_{10} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad P_{20} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Tražena funkcija je oblika:

$$f(A) = f(\lambda_1) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + f(\lambda_2) \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Još preostaje izračunati  $f(A) = A^2 - A$  primjenom dobivene formule.

$$\begin{aligned} f(A) &= (\lambda_1^2 - \lambda_1) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + (\lambda_2^2 - \lambda_2) \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \\ &= 12 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + 72 \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 24 \\ 36 & 48 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zaključimo rad još jednim zadatkom.

**Zadatak 1.** Za operator  $A \in L(\mathbb{C}^3)$  odrediti  $\sqrt{A}$  u Jordanovoj i kanonskoj bazi, ako je  $A$  dan matricom u kanonskoj bazi prostora  $\mathbb{C}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Rješenje:*

Najprije je potrebno odrediti Jordanovu formu operatora  $A$ , koju možemo izračunati postupkom kao u Primjeru 1.1. pa dobivamo:

$$A(e') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je  $e' = \{-e_1 - e_3, e_3, e_2 + e_3\}$  Jordanova baza prostora  $\mathbb{C}^3$ . Iz zapisa operatora  $A$  u bazi  $e'$  lako iščitavamo minimalni polinom operatora  $A$ :  $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ .

Dakle, tražena funkcija operatora u Jordanovoj bazi prostora  $\mathbb{C}^3$  je:

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Preostaje još odrediti funkciju  $\sqrt{A}$  u kanonskoj bazi, a to ćemo napraviti kao u prethodnom primjeru. Iz minimalnog polinoma vidimo da je  $t = 1$  i  $p_1 = 2$ . Uvrštavamo sve u formulu (9):

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=1}^1 \sum_{l=0}^{p_1-1} f^{(l)}(\lambda_k) \cdot P_{kl} = \sum_{l=0}^{2-1} f^{(l)}(\lambda_1) \cdot P_{1l} = \\ &= f^{(0)}(\lambda_1)P_{10} + f^{(1)}(\lambda_1)P_{11} = f(\lambda_1)P_{10} + f^{(1)}(\lambda_1)P_{11}. \end{aligned}$$

Potrebno je odrediti  $P_{10}$  i  $P_{11}$ . Raspisivanjem gornje jednakosti za  $f_s = \lambda^s$  za  $s = 0, 1$  iščitavamo sustav:

$$I = 1 \cdot P_{10} + 0 \cdot P_{11} \quad \Rightarrow \quad P_{10} = I$$

$$A = 2 \cdot P_{10} + 1 \cdot P_{11} \quad \Rightarrow \quad P_{11} = A - 2P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tražena funkcija je oblika:

$$f(A) = f(\lambda_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + f'(\lambda_1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Preostaje izračunati  $f(A) = \sqrt{A}$  u kanonskoj bazi prostora  $\mathbb{C}^3$ , pa je:

$$\sqrt{A} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ovime smo riješili zadatak i zaključujemo da se  $f(A)$  u kanonskoj bazi razlikuje od  $f(A)$  u Jordanovoj bazi.



## Literatura

- [1] D.Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [2] S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.
- [3] H.Kraljević, Vektorski prostori, Predavanja na Odjelu za matematiku, Osijek, 2008.