Hermitski adjungirani operator

Žagar, Ivana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Žagar

Hermitski adjungirani operator

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Žagar

Hermitski adjungirani operator

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2019.

Sažetak

U ovom radu biti će riječ o hermitski adjungiranom operatoru. Kako bismo ga opisali, prvo ćemo definirati operatore općenito i reći kada su oni linearni te navesti njihova svojstva. Također, definirat ćemo unitarni prostor te nakon toga navesti i dokazati teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala. Zatim ćemo pozornost posvetiti hermitski adjungiranom operatoru. Navest ćemo što više svojstava vezanih uz njega te ćemo prikazati njegov matrični zapis, a na samom kraju ćemo nešto reći o hermitskom operatoru.

Ključne riječi

operator, unitarni prostor, ortonormirana baza, matrica operatora, hermitski adjungiran operator

Abstract

In this paper we will consider the hermitian adjoint operator. In order to describe it, first, we will define operators in general, explain when they are linear and list their properties. Also, we will define unitary space and after that we will give and prove theorem about linear functional representation. Moreover, we will reference the hermitian adjoint operator. We will list as many of its properties as possible and present its matrix form. At the end we will consider the hermitian operator.

Keywords

operator, unitary vector space, orthonormal base, operator matrix, hermitian adjoint operator

Sadržaj

1 Uvod

Glavna tema ovog rada biti će hermitski adjungirani operator, no kako bismo ga opisali i dokazali tvrdnje vezane uz njega, prvo ćemo definirati operatore općenito. Upravo o tome će govoriti poglavlje 1.1. U njemu ćemo definirati operator i linearan operator te navesti svojstva operatora općenito. Zatim ćemo opisati linearan operator zadan nekom bazom i dati njegov matrični zapis. Nakon operatora, u poglavlju 1.3 pažnju ćemo posvetiti unitarnom prostoru na kojem je hermitski adjungirani operator definiran. Definirat ćemo skalarni produkt i uvesti pojam unitarnog prostora. Kako ćemo kod hermitski adjungiranog operatora koristiti izraze kao što su ortogonalnost, ortonormiranost i ortonormirana baza, definirat ćemo sve te izraze, a zatim ćemo se u drugom poglavlju posvetiti našoj temi. Definirat ćemo hermitski adjungirani operator i dokazati tvrdnje vezane uz njega. Također ćemo ga zapisati pomoću njegove matrice i dati neke primjere, a za kraj ćemo spomenuti hermitski operator i njegovu matricu.

1.1 Linearni operatori i njihova svojstva

U ovom ćemo se poglavlju upoznati sa linearnim operatorom i njegovim svojstvima te ćemo navesti nekoliko teorema kako bismo ga bolje opisali.

Definicija 1.1. Neka su X i Y vektorski prostori. Preslikavanje $A : X \to Y$ nazivamo **operator**.

Definicija 1.2. Neka su X i Y vektorski prostori. Operator $A : X \to Y$ je **aditivan** ukoliko vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \forall x, y \in X.$$

Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem K. Operator $A : X \to Y$ je **homogen** ukoliko vrijedi

$$A(\alpha x) = \alpha A(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in X.$$

Definicija 1.3. Za operator $A : X \to Y$ kažemo da je **linearan** ukoliko je on aditivan i homogen, tj. ukoliko vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X.$$

Definicija 1.4. Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Definiramo potprostore
$R(A) = ImA = \{Ax : x \in X\} \leq Y$ i $N(A) = KerA = \{x \in X : Ax = 0\} \leq X$.
$R(A)$ nazivamo **područje vrijednosti** ili **slika** operatora A, a $N(A)$ **jezgra** ili **nul-prostor** operatora A.
Ako je potprostor $R(A)$ konačno dimenzionalan, broj $r(A)$=dim$R(A)$ nazivamo **rang operatora A** i označavamo s $r(A)$, a ako je potprostor $N(A)$ konačno dimenzionalan, onda broj $d(A)$ =dim$N(A)$ nazivamo **defekt operatora A** i označavamo s $d(A)$.

Nakon što smo definirali operator i linearan operator, navest ćemo neka njegova svojstva.

Označimo sa $L(X, Y)$ skup svih linearnih operatora definiranih na X sa vrijednostima u Y, pri čemu su X i Y vektorski prostori dani nad istim poljem K. Skup $L(X, Y)$ je vektorski prostor uz standardne operacije **zbrajanja** i **množenja sa skalarom** definiranih izrazom:

- $(A+B)(x) = Ax + Bx, \forall x \in X, \forall A, B \in L(X,Y)$;
- $(\alpha A)(x) = \alpha Ax, \forall x \in X, \forall \alpha \in K, \forall A \in L(X,Y)$.

Analogno, za $A, B, C \in L(X,Y)$ i $\alpha, \beta \in K$ vrijede sljedeća svojstva:

- $A + B = B + A$;
- $(A+B)+C = A+(B+C)$;
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Neka su X, Y i Z vektorski prostori te neka je $A \in L(X,Y)$ i $B \in L(Y,Z)$. Tada je izrazom $(BA)(v) = B(Av)$ definiran **produkt operatora** B i A, $BA : X \to Z$.

Sljedeći teorem govori o egzistenciji mnoštva linearnih funkcionala u slučaju konačno dimenzionalnog vektorskog prostora.

Teorem 1.1. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem K te neka je X konačno dimenzionalan. Nadalje, neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza za X. Tada za proizvoljne vektore $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ postoji jedinstveni operator $A \in L(X,Y)$ takav da vrijedi $Ax_i = y_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz. Vidi [1].

Teorem 1.2. Neka su X i Y konačno dimenzionalni vektorski prostori. Tada je i prostor $L(X,Y)$ također konačno dimenzionalan i vrijedi $\dim(L(X,Y))=\dim(X)\cdot\dim(Y)$.

Dokaz. Vidi [1].

1.2 Matrica linearnog operatora

Neka su X i Y konačno dimenzionalni vektorski prostori nad poljem K te neka je $A \in L(X,Y)$. Nadalje, neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza za X, a $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza za Y. Vektori $Ae_j, j = 1, 2, \ldots, n$ mogu se zapisati kao linearna kombinacija vektora baze za Y, tj. postoje skalari $\alpha_{ij} \in K, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ takvi da vrijedi sljedeće:

$$\begin{cases} Ae_1 = \alpha_{11}f_1 + \alpha_{21}f_2 + \cdots + \alpha_{m1}f_m \\ Ae_2 = \alpha_{12}f_1 + \alpha_{22}f_2 + \cdots + \alpha_{m2}f_m \\ \qquad\vdots \\ Ae_n = \alpha_{1n}f_1 + \alpha_{2n}f_2 + \cdots + \alpha_{mn}f_m \end{cases} \tag{1}$$

Matricu s m redaka i n stupaca, koju dobijemo tako da koeficijente u prikazu vektora Ae_j stavimo kao j-ti stupac, nazivamo **matrica operatora** A **u paru baza** (f, e), a ona ima sljedeći oblik

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

1.3 Definicija unitarnog prostora

Kako bismo definirali hermitski adjungirani operator u ovom ćemo poglavlju objasniti pojam unitarnog prostora na kojem je on definiran te ćemo definirati nekoliko izraza koje ćemo kod njega koristiti.

Definicija 1.5. Preslikavanje $(\cdot|\cdot) : X \times X \to K$ sa svojstvima:

1. (**pozitivnost**) $(x|x) \geq 0, \forall x \in X$;
2. (**definitnost**) $(x|x) = 0 \iff x = 0$;
3. (**linearnost u prvoj varijabli**) $(\alpha x_1 + \beta x_2|x_3) = \alpha(x_1|x_3) + \beta(x_2|x_3)$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in X, \forall \alpha, \beta \in K$;
4. (**hermitska simetrija**) $(x_1|x_2) = \overline{(x_2|x_1)}, \forall x_1, x_2 \in X$;

nazivamo **skalarni produkt** na vektorskom prostoru X.

Definicija 1.6. Vektorski prostor X na kojem je zadan skalarni produkt nazivamo **unitarni prostor**.

Iz svojstva 3. i 4. Definicije 1.5. slijedi da je skalarni produkt *antilinearan u drugoj varijabli*, odnosno vrijedi sljedeće

$$(x_1|\alpha x_2 + \beta x_3) = \overline{(\alpha x_2 + \beta x_3|x_1)} = \overline{\alpha(x_2|x_1) + \beta(x_3|x_1)} = \overline{\alpha}(x_1|x_2) + \overline{\beta}(x_1|x_3).$$

Definicija 1.7. Neka je X unitarni prostor te neka je nenegativan broj $x \in X$ dan izrazom $x = \sqrt{(x|x)}$. Tada funkciju $x \to \| x \|$ sa X u $\mathbb{R}^+$ koja ima sljedeća svojstva:

1. za $x \in X$ vrijedi $\| x \| = 0 \iff x = 0$;
2. za $x \in X$ i za $\alpha \in K$ vrijedi $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$;
3. za $x_1, x_2 \in X$ vrijedi *nejednakost trokuta*, tj. $\| x_1 + x_2 \| \leq \| x_1 \| + \| x_2 \|$;

nazivamo **normom** na vektorskom prostoru X s vrijednostima u $\mathbb{R}^+$, a prostor X nazivamo **normirani prostor**.

Objasnimo dodatno kada su vektori i skupovi ortogonalni te što je to ortonormirana baza. Kako nam svi ti izrazi trebaju da bismo što bolje objasnili hermitski adjungirani operator ovdje ćemo ih navesti kao gotove tvrdnje bez dokaza i dodatnih objašnjenja.

Definicija 1.8. Neka je X unitarni prostor. Za vektore $x, y \in X$ kažemo da su međusobno **ortogonalni** ako je $(x|y) = 0$.
Neka je X unitarni prostor. Za vektor $x \in X$ kažemo da je **ortogonalan na podskup** $Y \subseteq X$ ako vrijedi $(x|y) = 0, \forall y \in Y$.
Neka je X unitarni prostor. Za skupove $Y, Z \subseteq X$ kažemo da su međusobno **ortogonalni** ako je $(y|z) = 0, \forall y \in Y, \forall z \in Z$.
Neka je X unitarni prostor. Podskup Y je **ortogonalan** ako je $(y_1|y_2) = 0, \forall y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$.
Neka je X unitarni prostor. Podskup Y je **ortonormiran** ako je ortogonalan i za svaki $y \in Y$ vrijedi $\| y \| = 1$.
Ortonormiran skup koji je baza za vektorski prostor X nazivamo **ortonormirana baza**.

Od posebne nam je važnosti teorem koji govori o postojanju hermitski adjungiranog operatora. Kako bismo što bolje razumjeli dokaz tog teorema i svojstva hermitski adjungiranog operatora, prvo ćemo definirati antilinearno preslikavanje koje smo ranije spomenuli kod skalarnog produkta, a koji je jedan od primjera takvog preslikavanja.

Definicija 1.9. Preslikavanje $B : X \to Y$ sa svojstvom

$$B(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} B(x) + \overline{\beta} B(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in K$$

nazivamo **antilinearno preslikavanje**.

Razlika između antilinearnog i linearnog preslikavanja su konjugirani skalari pa vidimo da u slučaju kada je $K = \mathbb{R}$ svojstva preslikavanja su ista, no kada je $K = \mathbb{C}$ općenito neće vrijediti $\alpha = \overline{\alpha}$.

Neka je X vektorski prostor nad poljem K. Uočimo i da je polje K također vektorski prostor nad K čija je dimenzija jednaka 1. Linearni operatori s prostora X u prostor K dobro su definirani i skup svih takvih operatora čini vektorski prostor.

Definicija 1.10. Vektorski prostor $L(X, K)$ nazivamo **dualni prostor** i označavamo s X'. Obzirom da je K jednodimenzionalan vektorski prostor nad K, vidimo da vrijedi:

$$dimX' = dimL(X, K) = dimX \cdot dimK = dimX \cdot 1 = dimX.$$

Vektore prostora X' nazivamo **linearni funkconali** i pišemo $f : X \to K$.

Sljedeći teorem nam je važan, jer ćemo pomoću njega u idućem poglavlju dokazati postojanje hermitski adjungiranog operatora.

Teorem 1.3 (O reprezentaciji linearnog funkcionala). Neka je X konačno dimenzionalan unitarni prostor te neka je $x \in X$. Tada postoji jedinstveni $y \in X$ takav da za svaki $f \in X'$ vrijedi:

$$f(x) = (x|y).$$

Nadalje, neka je $y = \varphi(f)$. Preslikavanje φ na X' s vrijednostima u X ima sljedeća svojstva:

1. φ je bijekcija,
2. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\varphi(f) + \overline{\beta}\varphi(g), \forall f, g \in X', \forall \alpha, \beta \in K.$

Dokaz. Neka je $f \in X'$. Ako je $f = 0$, očito za $y = 0$ vrijedi:

$$f(x) = (x|y), \forall x \in X.$$

Neka je $f \neq 0$. Jezgra $N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ funkcionala f je potprostor od X i $f : X \to K \Longrightarrow X = N(f) \dotplus N(f)^{\perp}$. Rang funkcionala f jednak je 1, jer zbog $f \neq 0$ imamo $R(f) = K$. Po Teoremu o rangu i defektu slijedi da je defekt $d(f)$ =dim$N(f)$ =dim$X - 1$. Kako je $X = N(f) \dotplus N(f)^{\perp}$, zaključujemo da je potprostor $N(f)^{\perp}$ jednodimenzionalan. Neka je e jedinični vektor u $N(f)^{\perp}$ te neka je x bilo koji vektor iz X. Stavimo $y = \overline{f(e)}e$. Kako je $X = N(f) \dotplus N(f)^{\perp}$, postoje skalari $\alpha \in \mathbb{C}$ i vektor $z \in N(f)$ takvi da je $x = \alpha e + z$. Sada je

$$f(x) = f(\alpha e + z) = \alpha f(e) + f(z) = \alpha f(e),$$

jer je $z \in N(f)$. Nadalje,

$$(x|y) = (\alpha e + z|\overline{f(e)}e) = \alpha f(e)(e|e) + f(e)(z|e) = \alpha f(e),$$

jer je vektor e jedinični i okomit na $N(f)$. Dakle, vektor y zadovoljava

$$f(x) = (x|y), \forall x \in X.$$

Dokažimo sada da je takav vektor y jedinstven. Pretpostavimo da i y' ima svojstvo $f(x) = (x|y'), \forall x \in X$. Tada je $(x|y - y') = 0, \forall x \in X$, pa slijedi $y - y' = 0$, tj. $y = y'$. Dakle, preslikavanje $\varphi : X' \to X$ iz iskaza teorema je dobro definirano. Iz definicije je jasno da je φ injekcija. To je i surjekcija, jer je za bilo koji $y \in X$ sa $f(x) = (x|y)$ zadan linearan funkcional f na prostoru X i $\varphi(f) = y$. Nadalje, ako su $\alpha, \beta \in K$ i $f, g \in X'$, za svaki $x \in X$ imamo:

$$(x|\overline{\alpha}\varphi(f)+\overline{\beta}\varphi(g)) = \alpha(x|\varphi(f))+\beta(x|\varphi(g)) = \alpha f(x)+\beta g(x) = (\alpha f+\beta g)(x) = (x|\varphi(\alpha f+\beta g)).$$

Dakle, $\varphi(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\varphi(f) + \overline{\beta}\varphi(g)$.

Q.E.D.

Primjer 1.1. Neka je zadan linearan funkcional $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiran s $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$. Treba pronaći jedinstveni vektor $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ takav da vrijedi:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Koristeći oznake iz dokaza Teorema 1.3 u našem primjeru imamo:

$$(y_1, y_2, y_3) = \overline{\varphi(e_1)}e_1 + \overline{\varphi(e_2)}e_2 + \overline{\varphi(e_3)}e_3.$$

Uzmimo standardnu ortonormiranu bazu za prostor $\mathbb{R}^3$, tj. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ i pogledajmo kako zadan funkcional φ djeluje na nju:

$$\begin{aligned}
\varphi(1,0,0) &= 2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 6\cdot 0 = 2\\
\varphi(0,1,0) &= 2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 6\cdot 0 = 4\\
\varphi(0,0,1) &= 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 6\cdot 1 = 6
\end{aligned}$$

Tada naš vektor (y_1, y_2, y_3) ima sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
(y_1, y_2, y_3) &= 2\cdot(1,0,0) + 4\cdot(0,1,0) + 6\cdot(0,0,1)\\
&= (2,4,6)
\end{aligned}$$

i vrijedi:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2, x_3)|(2,4,6)), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

što se lako može provjeriti direktnim računanjem standardnog skalarnog produkta na prostoru $\mathbb{R}^3$.

2 Hermitski adjungirani operator

U ovom poglavlju definirat ćemo hermitski adjungirani operator te istaknuti neka njegova osnovna svojstva. Osim toga, prikazat ćemo matrični zapis ovakvih operatora što ćemo napraviti i u nekoliko primjera.

Neka je X unitarni vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)_X$ i neka je Y unitarni vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)_Y$. Nadalje, neka je $A \in L(X,Y)$. Tada za svaki $y \in Y$ i $x \in X$ preslikavanje zadano s $x \mapsto (Ax|y)_Y$ je linearan funkcional sa X u K. Dakle, prema Teoremu 1.3, postoji jedinstveni vektor iz X, koji ćemo označiti sa $A^*y \in X$, a za koji vrijedi:

$$(Ax|y)_Y = (x|A^*y)_X, \forall x \in X, y \in Y. \tag{2}$$

Na taj smo način definirali preslikavanje

$$A^* : Y \to X, A^*(y) = A^*y$$

koje zadovoljava relaciju (2) i ono ima poseban naziv.

Lema 2.1. Operator $A^* : Y \to X$ je linearan operator i nazivamo ga **hermitski adjungirani operator operatora** A. Nadalje, A^* jedinstveno je određen s (2).

Dokaz. Pokažimo prvo je da operator A^* linearan. Neka su $x \in X, y_1, y_2 \in Y$ i $\alpha, \beta \in K$. Iz jednakosti (2) dobivamo:

$$\begin{aligned}
(x|A^*(\alpha y_1 + \beta y_2))_X &= (Ax|\alpha y_1 + \beta y_2)_Y \\
&= \overline{\alpha}(Ax|y_1)_Y + \overline{\beta}(Ax|y_2)_Y \\
&= \overline{\alpha}(x|A^*y_1)_X + \overline{\beta}(x|A^*y_2)_X \\
&= (x|\alpha A^*y_1)_X + (x|\beta A^*y_2)_X \\
&= (x|\alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2)_X.
\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki $x \in X$ imamo

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2.$$

Dakle, vrijedi linearnost. Preostaje nam još pokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji neki operator $B \in L(Y, X)$ za koji vrijedi:

$$(Ax|y)_Y = (x|A^*y)_X = (x|By)_X, \forall x \in X, y \in Y.$$

Iz toga dobivamo

$$0 = (x|A^*y)_X - (x|By)_X = (x|A^*y - By)_X, \forall x \in X, y \in Y.$$

Posebno, ako stavimo $v = x = A^*y - By$, imamo

$$(v|v)_X = 0 \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow A^*y = By, \forall y \in Y,$$

iz čega slijedi jedinstvenost.

Q.E.D.

Teorem 2.1. Neka su X i Y unitarni prostori. Tada je preslikavanje $A \mapsto A^*$ antilinearna involucija $L(X, Y) \to L(Y, X)$, tj.

1. (**involutivnost**) $(A^*)^* = A, \forall A \in L(X, Y)$,
2. (**antilinearnost**) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*, \forall A, B \in L(X, Y), \forall \alpha, \beta \in K$.

Posebno, $A \mapsto A^*$ je antilinearan izomorfizam $L(X, Y) \to L(Y, X)$.

Dokaz. Koristeći jednakost (2) imamo

$$(Ax|y)_Y = (x|A^*y)_X.$$

Konjugiranjem te relacije dobivamo

$$\overline{(Ax|y)}_Y = \overline{(x|A^*y)}_X \Longrightarrow (y|Ax)_Y = (A^*y|x)_X. \tag{3}$$

Raspišimo sada $(A^*)^*$ prema jednakosti (2):

$$(A^*y|x)_X = (y|(A^*)^*x)_Y. \tag{4}$$

Dakle, iz (3) i (4) slijedi

$$(y|Ax)_Y = (y|(A^*)^*x)_Y.$$

Prema Lemi 2.1 operator s tim svojstvom je jedinstven, čime je dokazana tvrdnja 1., odnosno vrijedi $(A^*)^* = A$.
Za dokaz tvrdnje 2. raspisat ćemo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}(x|(\alpha A + \beta B)^*y)_X &= ((\alpha A + \beta B)x|y)_Y \\ &= \alpha(Ax|y)_Y + \beta(Bx|y)_Y \\ &= \alpha(x|A^*y)_X + \beta(x|B^*y)_X \\ &= (x|\overline{\alpha}A^*y + \overline{\beta}B^*y)_X.\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za sve $x \in X, y \in Y, \alpha, \beta \in K$ i $A, B \in L(X,Y)$, zaključujemo:

$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*.$$

Posljednja tvrdnja teorema je posljedica činjenice da je $A \mapsto A^*$ involucija, odnosno vrijedi:
injektivnost: pretpostavimo da za neke $A_1, A_2 \in L(X,Y)$ vrijedi ${A_1}^* = {A_2}^*$. Iskoristimo tvrdnju 2. i imamo $({A_1}^*)^* = ({A_2}^*)^* \Longrightarrow A_1 = A_2$.
surjektivnost: neka je $B \in L(Y,X)$, treba pronaći operator iz $L(X,Y)$ koji se u njega preslika. Označimo $A = B^* \in L(X,Y)$ i slijedi da je $A^* = B$.
Dakle, preslikavanje $A \mapsto A^*$ je izomorfizam.

Q.E.D.

Teorem 2.2. Neka su X, Y, Z unitarni prostori te neka su $A \in L(X,Y)$ i $B \in L(Y,Z)$. Tada vrijedi:

$$(BA)^* = A^*B^*.$$

Dokaz. Najprije treba pokazati da je tako zadana kompozicija dobro definirana. Zbog $A \in L(X,Y)$ i $B \in L(Y,Z)$ kompozicija je $BA \in L(X,Z)$ iz čega vidimo da je $(BA)^* \in L(Z,X)$. Isto tako imamo da su $A^* \in L(Y,X)$ i $B^* \in L(Z,Y)$ pa je njihova kompozicija $A^*B^* \in L(Z,X)$. Preostaje nam pokazati da vrijedi:

$$(BA)^*z = A^*B^*z, \forall z \in Z.$$

Koristeći jednakost (2) imamo

$$(x|(BA)^*z)_X = (BAx|z)_Z = (Ax|B^*z)_Y = (x|A^*B^*z)_X, \forall x \in X, z \in Z.$$

Iz čega slijedi tražena jednakost.

Q.E.D.

Propozicija 2.1. Neka su X i Y konačno dimenzionalan unitarni prostori te neka je $A \in L(X,Y)$. Tada vrijedi:

- $N(A) = R(A^*)^{\perp}$,
- $R(A) = N(A^*)^{\perp}$,
- $N(A^*) = R(A)^{\perp}$,
- $R(A^*) = N(A)^{\perp}$.

Dokaz. Kako je $A^{**} = A$ zamjenom uloga A i A^* vidimo da su međusobno ekvivalentne prva i treća jednakost te druga i četvrta jednakost. Nadalje, kako je $R(A)^{\perp\perp} = R(A)$, druga i treća jednakost su također međusobno ekvivalentne. Dakle, sve četiri jednakosti su međusobno ekvivalentne pa je dovoljno pokazati jednu od njih.
Pokažimo prvu jednakost. Za $x \in X$ imamo redom:

$$x \in N(A) \iff Ax = 0 \iff (Ax|y) = 0, \forall y \in Y \iff (x|A^*y) = 0, \forall y \in Y \iff x \perp R(A^*).$$

Dakle, $N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

Q.E.D.

Teoremi 2.1. i 2.2. govore o slučaju kada operator A preslikava vektore iz jednog vektorskog prostora na drugi. Također, tvrdnje vrijede i kada se radi o istim vektorskim prostorima. To je sadržaj sljedećeg teorema.

Teorem 2.3. Neka je X unitarni prostor. Tada preslikavanje $A \mapsto A^*$ zadovoljava

1. (**involutivnost**) $(A^*)^* = A, \forall A \in L(X)$,
2. (**antiautomorfizam množenja**) $(AB)^* = B^*A^*, \forall A, B \in L(X)$,
3. (**antilinearnost**) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*, \forall A, B \in L(X), \forall \alpha, \beta \in K$,
4. $I^* = I$, gdje je I jedinični operator.

Dokaz. Dokaz 1. i 3. tvrdnje slijedi iz Teorema 2.1., a dokaz tvrdnje 2. iz Teorema 2.2. Prema tome, preostaje nam pokazati tvrdnju 4. Koristeći jednakost iz definicije hermitski adjungiranog operatora sa oznakama $A = I$ i $X = Y$ imamo sljedeće:

$$(Ix|y) = (x|y) = (x|Iy)$$

$$(Ix|y) = (x|I^*y)$$

Iz čega slijedi $I = I^*$.

Q.E.D.

2.1 Matrica hermitski adjungiranog operatora

Neka je $A = \alpha_{ij} \in M_{m\times n}(K)$ bilo koja matrica.
Za matricu $B = \beta_{ij} \in M_{m\times n}(K)$ za koju vrijedi $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ij}}$ kažemo da je **konjugirano kompleksna matrici** A.
Za matricu $B = \beta_{ij} \in M_{n\times m}(K)$ za koju vrijedi $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ kažemo da je **transponirana matrici** A i pišemo $B = A^{\intercal}$.
I konačno, za matricu $B = \beta_{ij} \in M_{n\times m}(K)$ za koju vrijedi $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ kažemo da je **hermitski adjungirana matrici** A i označavamo s A^*. Tada imamo $A^* = (\overline{A})^{\intercal} = \overline{(A)^{\intercal}}$.

Primjer 2.1. Ako je matrica A dana s $A = \begin{bmatrix} 3 & 5+i \\ 2-i & 1-3i \\ 6+9i & -i \end{bmatrix}$. Odredimo A^*.

Koristeći gore navedena svojstva slijedi:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5+i \\ 2-i & 1-3i \\ 6+9i & -i \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5-i \\ 2+i & 1+3i \\ 6-9i & i \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} 3 & 2+i & 6-9i \\ 5-i & 1+3i & i \end{bmatrix}.$$

Neka su kao i ranije X i Y unitarni vektorski prostori sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)_X$, odnosno $(\cdot|\cdot)_Y$ te neka su $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ redom ortonormirane baze za njih. U poglavlju 1.2 smo pokazali da svakom linearnom operatoru $A \in L(X, Y)$ možemo pridružiti matrica u paru baza f i e. Kako je $A^* \in L(Y, X)$, slično kao tada, imamo matrični zapis operatora A^* u paru baza e i f.
Možemo pisati:

$$\begin{cases} A^*f_1 = \beta_{11}e_1 + \beta_{21}e_2 + \cdots + \beta_{n1}e_n \\ A^*f_2 = \beta_{12}e_1 + \beta_{22}e_2 + \cdots + \beta_{n2}e_n \\ \vdots \\ A^*f_m = \beta_{1m}e_1 + \beta_{2m}e_2 + \cdots + \beta_{nm}e_n \end{cases}$$

te na taj način operatoru A^* pridružujemo matricu

$$A^*(e, f) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nm} \end{bmatrix}.$$

Kako su e i f ortonormirane baze, za α_{ij} iz matričnog zapisa linearnog operatora A u paru baza (f, e) vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ij}(f_i|f_i)_Y = (\alpha_{ij}f_i|f_i)_Y \\ &= (\alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \cdots + \alpha_{mj}f_m|f_i)_Y \\ &= (Ae_j|f_i)_Y, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

Analogno, za β_{ij} imamo

$$\beta_{ij} = (A^*f_j|e_i)_X, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$$

Iz (2) nalazimo

$$\beta_{ij} = (A^*f_j|e_i)_X = (f_j|Ae_i)_Y = \overline{(Ae_i|f_j)}_X = \overline{\alpha_{ji}}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$$

Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.2. U paru ortonormiranih baza e i f, matrica $A^*(e,f)$ operatora A^* je hermistki adjungirana matrici $A(f,e)$, tj. vrijedi

$$A^*(e,f) = (A(f,e))^*.$$

Teorem 2.4.

1. Neka je $A \in L(X)$ linearan operator te neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u X i $A(e)$ je matrica operatora A u bazi e. Tada je matrica operatora A^* u toj bazi, odnosno matrica $A^*(e)$ jednaka matrici $[A(e)]^*$.
2. Pridruživanje $A \to A^*$ je neprekidno.
3. Ako je λ svojstvena vrijednost operatora A, onda je $\overline{\lambda}$ svojstvena vrijednost operatora A^*.

Dokaz. Dokaz tvrdnje 1. slijedi iz ranije navedenoga raspisa matrice hermitski adjungiranog operatora, a kako tvrdnja 2. neposredno slijedi iz tvrdnje 1., preostaje nam dokazati samo tvrdnju 3.
Označimo sa X_0 nul-potprostor operatora $A - \lambda I$. Kako je λ svojstvena vrijednost operatora A slijedi da je $\dim X_0 > 1$. Ako je x bilo koji vektor iz X i x_0 neki proizvoljan vektor iz X_0, onda relacija

$$(x_0|(A - \lambda I)^* x) = ((A - \lambda I)x_0|x) = 0$$

pokazuje da je područje vrijednosti $R(A^* - \overline{\lambda} I)$ operatora $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$ okomito na potprostor X_0. No tada je $\dim R(A^* - \overline{\lambda} I) <\dim X$ pa je operator $A^* - \overline{\lambda} I$ singularan. Dakle, postoji $y \in X, y \neq 0$ takav da je $(A^* - \overline{\lambda} I)y = 0$.

Q.E.D.

Primjer 2.2. Pronađimo kako izgleda hermitski adjungirani operator operatora
$A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ zadanog s

$$A(x, y, z) = (x - iy + 2z, ix + 3z, 4y),$$

gdje je $\mathbb{C}^3$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.
Kako je $\mathbb{C}^3$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, onda je ortonormirana baza našeg polaznog i dolaznog prostora jednaka $e = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Pogledajmo djelovanje operatora A na tu bazu:

$$\begin{aligned}
A(1,0,0) &= (1, i, 0) = 1(1,0,0) + i(0,1,0) \\
A(0,1,0) &= (-i, 0, 4) = -i(1,0,0) + 4(0,0,1) \\
A(0,0,1) &= (2, 3, 0) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0).
\end{aligned}$$

Sada operator A prikažemo matricom: $A(e,e) = \begin{bmatrix} 1 & -i & 2 \\ i & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Adjungiranjem matrice $A(e,e)$ dobijemo: $A^*(e,e) = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Kako bismo pronašli hermitski adjungirani operator operatora A preostaje nam još jedino pronaći kako je definiran operator A^*. Iz njegovog matričnog zapisa očitamo djelovanje operatora A^* na bazu od $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned}A^*(1,0,0) &= (1,i,2)\\ A^*(0,1,0) &= (-i,0,3)\\ A^*(0,0,1) &= (0,4,0).\end{aligned}$$

Zatim, uzmemo neki proizvoljan vektor $u = \alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1) \in \mathbb{C}^3, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ i pogledajmo kako operator A^* djeluje na njega:

$$\begin{aligned}A^*(u) &= A^*(\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1))\\ &= \alpha A^*(1,0,0)+\beta A^*(0,1,0)+\gamma A^*(0,0,1)\\ &= \alpha(1,i,2)+\beta(-i,0,3)+\gamma(0,4,0)\\ &= (\alpha-\beta i, \alpha i+4\gamma, 2\alpha+3\beta).\end{aligned}$$

Dobili smo hermitski adjungirani operator operatora A i on je definiran s

$$A^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, A^*(x,y,z) = (x-iy, ix-4z, 2x+3y).$$

Za kraj, kažimo još nešto o hermitskim operatorima.

Definicija 2.1. Neka je X konačno dimenzionalan unitarni prostor. Ukoliko za operator $A \in L(X)$ vrijedi $A^* = A$, onda kažemo da je on **hermitski operator**.

Navedena definicija hermitskog operatora ekvivalentna je tvrdnji da je A hermitski operator ukoliko vrijedi

$$(Ax|y) = (x|Ay), \forall x,y \in X.$$

Neki od primjera hermitskog operatora su jedinični operator i nul-operator.

Propozicija 2.3. Neka je X konačno dimenzionalan unitarni prostor te neka je $A \in L(X)$. Ukoliko je A hermitski operator i $(Ax|x) = 0, \forall x \in X$, onda je $A = 0$.

Dokaz. Neka je A hermitski, tj. $A^* = A$ te neka je $(Ax|x) = 0$.
$\forall x,y \in X$ je $x+y \in X$, pa je onda $(A(x+y)|(x+y)) = 0$.
Sada raspisivanjem toga dobivamo:

$$\begin{aligned}0 &= (Ax+Ay|x+y) = (Ax|x)+(Ax|y)+(Ay|x)+(Ay|y) =\\ &= 0+(Ax|y)+(Ay|x)+0 = (Ax|y)+(y|A^*x) = (Ax|y)+(y|Ax)\\ &= (Ax|y)+\overline{(Ax|y)}.\end{aligned}$$

Ako stavimo $(Ax|y) = a+ib \Longrightarrow 2a = 0 \Longrightarrow a = 0$. Iz čega slijedi $2Re(Ax|y) = 0$.
Pitamo se je li $b = Im(Ax|y) = 0$?
$Im(Ax|y) = Re(-i(Ax|y)) = Re(Ax|iy) \Longrightarrow Im(Ax|y) = 0$.
Posebno, ako za y uzmemo Ax, tada slijedi

$$(Ax|y) = (Ax|Ax) = 0 \Longleftrightarrow Ax = 0, \forall x \Longleftrightarrow A = 0.$$

Q.E.D.

Teorem 2.5. Neka je $A \in L(X)$ hermitski operator. Tada postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ takva da za realne brojeve $\lambda_k, k = 1, 2, \ldots, n$, vrijedi $Ae_k = \lambda_k e_k$. Pridruženu matricu reda $n \times n$ operatora A tada nazivamo **hermitska matrica**, koja na glavnoj dijagonali ima skalare λ_k, odnosno oblika je $A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Dokaz. Vidi [3].

Primjer 2.3. Pokažimo da je spektar hermitskog operatora A realan.
Neka je $A = A^*$ te neka je $\lambda \in \sigma(A)$, onda postoji $x \neq 0$ takav da vrijedi $Ax = \lambda x$.
Imamo

$$(Ax|x) = (\lambda x|x) = \lambda(x|x) = \lambda \parallel x \parallel^2,$$

s druge strane imamo

$$(Ax|x) = (x|A^*x) = (x|Ax) = (x|\lambda x) = \overline{\lambda}(x|x) = \overline{\lambda} \parallel x \parallel^2 .$$

Izjednačimo te dvije relacije i imamo

$$\lambda \parallel x \parallel^2 = \overline{\lambda} \parallel x \parallel^2$$
$$(\lambda - \overline{\lambda}) \parallel x \parallel^2 = 0.$$

Kako je norma pozitivna vrijednost i različita je od 0, jer je po pretpostavci $x \neq 0$ slijedi

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \overline{\lambda},$$

pa zaključujemo da je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Literatura

[1] H. Kraljević, Vektorski prostori, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2005.

[2] S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[3] G. Muić i M.Primc, Vektorski prostori, https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/vp.pdf