Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivan Hrenek

Separacija i reprezentacija konveksnih skupova

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivan Hrenek

Separacija i reprezentacija konveksnih skupova

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2019.

Sadržaj

Sažetak

U ovom završnom radu bavit ćemo se konveksnim skupovima, njihovom separacijom i reprezentacijom. Prvo ćemo navesti neke osnovne matematičke tvrdnje i pojmove koji vrijede za skupove općenito, a onda ćemo ih povezati sa konveksnim skupovima. Zatim ćemo pomoću toga pokazati kako i uz koje uvjete možemo separirati konveksne skupove i primjeniti separaciju na primjeru linearnog programiranja. Na kraju ćemo navesti drugi način za prikaz konveksnih skupova.

Ključne riječi

konveksni skupovi, afini skupovi, separacija, ekstremalne točke, ekstremalne stranice, izložene stranice

Abstract

In this bachelor thesis we will deal with convex sets, their separation and representation. First we will give some basic mathematical statements and terms that are usually applied to sets in general and then we will relate them with convex sets. Then, we will use that to show how and under what conditions can we separate convex sets and apply that on the example of linear programming. Finally, we will state another way to represent convex sets.

Keywords

convex sets, affine sets, separation, extreme points, extreme faces, exposed faces

1 Uvod

U ovom završnom radu proučavat ćemo teoreme o separaciji konveksnih skupova te ćemo spomenuti Farkasevu lemu. Također, bavit ćemo se reprezentacijom konveksnih skupova. Prije nego iskažemo neke od glavnih teorema u radu valjalo bi nešto reći o konveksnim skupovima te najprije navodimo njihovu definiciju.

Definicija 1. *Kažemo da je skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan ako vrijedi*

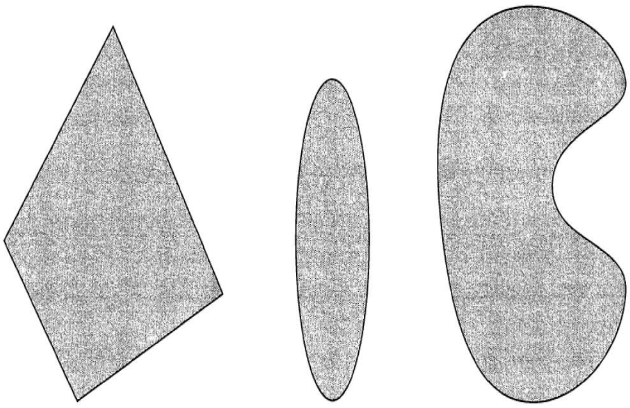
$$(\forall x, y \in K) \quad [x, y] \subseteq K,$$

gdje je

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

konveksna kombinacija elemenata x i y iz K.

Ovu definiciju možemo geometrijski interpretirati na sljedeći način: ako u konveksnom skupu između bilo koja dva elementa povučemo dužinu ta dužina će se i dalje cijela nalaziti u tom skupu (pogledati Sliku 1).



Slika 1: Primjer dva konveksna skupa (s lijeva na desno) i jednog skupa koji nije konveksan

2 Osnovni pojmovi i pomoćne tvrdnje

Prije samih teorema o separaciji i reprezentaciji konveksnih skupova trebat će nam još neki pojmovi i definicije koje ćemo koristiti u pomnijem proučavanju i dokazivanju. Kako ćemo u ovome radu konveksne skupove promatrati na metričkim i topološkim prostorima, pogledajmo najprije neke bitne tvrdnje vezane uz njih.

2.1 Metrički prostor i topologija

Najprije ćemo navesti neke osnovne pojmove vezane uz omeđenost skupova poznate od prije.

Definicija 2. *Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Svaki broj M s navedenim svojstvom nazivamo majoranta ili gornja međa skupa S.*
Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj m takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in S$. Svaki broj m s navedenim svojstvom nazivamo minoranta ili donja međa skupa S.
Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo.

Definicija 3. *Najmanju majorantu skupa S nazivamo supremum skupa S i označavamo $supS$.*
Najveću minorantu skupa S nazivamo infimum skupa S i označavamo $infS$.

Primjedba 1. *Primijetimo:*

- *M je supremum skupa S onda i samo onda ako je M majoranta od S i ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \epsilon < x_0 \leq M$,*
- *m je infimum skupa S onda i samo onda ako je m minoranta od S i ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \epsilon > x_0 \geq m$.*

U nastavku ćemo definirati skalarni produkt što će nam biti od pomoći, pogotovo u definiciji metrike te hiperravnine.

Definicija 4. *Skalarni produkt je funkcija $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

sa sljedećim svojstvima:

(S1) $(x, x) \geq 0$

(S2) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(S3) $(x, y) = (y, x)$

(S4) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y), \lambda \in \mathbb{R}$

(S5) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Definicija 5. *Neka je X neprazan skup. Metrika na X je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Uređeni par (X, d) zovemo metrički prostor.

Sada kada znamo što je to metrički prostor možemo definirati otvorenost skupova te prijeći na topologiju.

Definicija 6. *Skup $K \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) je otvoren ako za svaku točku $x_0 \in K$ postoji $r > 0$ takav da je otvorena kugla $K(x_0, r) \subseteq K$.*

Definicija 7. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako mu je komplement otvoren.*

Prazan skup smatramo i otvorenim i zatvorenim.

Valjalo bi prije nego što pređemo na topologiju spomenuti neke bitne činjenice vezane za konvergenciju nizova u metričkom prostoru, koje će nam biti potrebne.

Definicija 8. *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da niz (x_k) konvergira prema točki $x_0 \in X$ i označavamo $x_k \to x_0$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \epsilon$.*

Teorem 1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ je zatvoren onda i samo onda ako svaki niz (x_k) iz K koji konvergira u X ima limes u K.*

Dokaz. Vidi [2, str. 19, Teorem 2.11.].

■

Propozicija 2. *Neka je* (x_k) *niz u metričkom prostoru* (X, d). *Ako niz* (x_k) *konvergira prema točki* $x_0 \in X$, *onda i svaki njegov podniz konvergira prema* $x_0 \in X$.

Dokaz. Vidi [2, str. 20, Propozicija 2.14.].

$\blacksquare$

Definicija 9. *Za skup* K *u metričkom prostoru* (X, d) *kažemo da je kompaktan ako svaki niz u* K *ima konvergentan podniz čiji je limes u* K.

Korolar 3. *Skup* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktan onda i samo onda ako je on omeđen i zatvoren.*

Dokaz. Vidi [2, str. 27, Korolar 2.40.].

$\blacksquare$

Propozicija 4. *Neka je* $\mathcal{U}$ *familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru* (X, d). *Familija* $\mathcal{U}$ *ima sljedeća svojstva:*

(T1) unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ *je član iz* $\mathcal{U}$,

(T2) presjek konačno članova iz $\mathcal{U}$ *je član iz* $\mathcal{U}$,

(T3) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

Dokaz. Vidi [2, str. 7, Propozicija 1.18.].

$\blacksquare$

Definicija 10. *Neka je* X *neprazan skup. Familija* $\mathcal{U}$ *podskupova od* X *sa svojstvima (T1)-(T3) se zove topološka struktura ili topologija na X. Uređeni par* $(X,\mathcal{U})$ *se zove topološki prostor. Članove familije* $\mathcal{U}$ *zovemo otvoreni skupovi.*

U daljnjem razmatranju jako bitni pojmovi će nam biti interior i zatvarač skupa te stoga navodimo njihovu definiciju.

Definicija 11. *Neka je* $(X,\mathcal{U})$ *topološki prostor i* $A \subseteq X$. *Najveći otvoreni skup iz* X *koji je sadržan u* A *zovemo interior ili nutrina skupa* A *i označavamo s* $\mathrm{Int}A$.

Definicija 12. *Neka je* $A \subseteq X$, *gdje je* $(X,\mathcal{U})$ *topološki prostor. Najmanji zatvoreni skup iz* X *koji sadrži* A *zovemo zatvarač ili zatvorenje (clausura) skupa* A *i označavamo s* $\mathrm{Cl}A$.

Definicija 13. *Neka je $A \subseteq X$, gdje je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Skup* $\mathrm{Bd}A = \mathrm{Cl}A \backslash \mathrm{Int}A$ *zovemo granica (rub) skupa A.*

Ponekad skupove ne moramo promatrati na cijelom topološkom prostoru nego na nekom manjem potprostoru pa zato uvodimo pojam relativne topologije.

Definicija 14. *Neka je X topološki prostor s topologijom $\mathcal{T}$. Ako je Y podskup od X, familija $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ je topologija na Y koju zovemo relativna topologija, a Y s tom topologijom zovemo potprostor od X.*

Relativni interior i granica se definiraju analogno kao i na topološkom prostoru o čemu će više biti rečeno u sljedećem poglavlju.

2.2 Konveksni i afini skupovi

Prije nego vidimo što su afini skupovi i koja je njihova veza sa konveksnim skupovima, navedimo još dvije bitne tvrdnje vezane uz konveksne skupove.

Definicija 15. *Konveksna kombinacija vektora $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ je svaki vektor x oblika*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$ takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Skup svih konveksnih kombinacija točaka iz skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se konveksna ljuska skupa S i označava s $\mathrm{conv}S$.

Lema 5. *Razlika konveksnih skupova je konveksan skup.*

Dokaz. Ovu tvrdnju je lako dokazati jer slijedi direktno iz definicije.

■

Sada ćemo se upoznati s pojmom afinog skupa.

Definicija 16. *Za skup $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je afin ako za sve $x, y \in M$ vrijedi*

$$\{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq M.$$

Definicija 17. *Afina kombinacija vektora $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ je svaki vektor x oblika*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gdje su λ_i realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Skup svih afinih kombinacija točaka iz skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se afina ljuska skupa S i označava s $\mathrm{aff}S$.

Definicija 18. *Neka je M afin skup. Pod dimenzijom skupa M podrazumijevamo dimenziju vektorskog potprostora $L := M - x_0$, gdje je $x_0 \in M$ proizvoljna točka. Dakle,*

$$\dim M := \dim L.$$

Osim toga kažemo da je afin skup paralelan s potprostorom L.

Primijetimo da je zbog definicije konveksnog skupa svaki konveksni skup također i afin, ali obrat ne mora vrijediti. U svrhu boljeg razumijevanja tvrdnji koje slijede potrebno je pobliže se upoznati s pojmom otvorene kugle u relativnoj topologiji na $\text{aff}K$ te pojmova relativnog interiora, zatvarača i granice na istoj topologiji.
Naime, lako je uvidjeti da se prilikom promatranja topoloških svojstava skupova iz $\mathbb{R}^n$ koji su konveksni no nisu pune dimenzije ponekad korisnije bazirati na relativnu topologiju na $\text{aff}K$ umjesto na topologiju od $\mathbb{R}^n$.
Kao što smo već spomenuli u Definiciji 14, otvoreni skupovi u relativnoj topologiji na $\text{aff}K$ (gdje je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup koji nije pune dimenzije) su oblika $\mathcal{U} \cap K$, gdje je $\mathcal{U}$ otvoren u $\mathbb{R}^n$.
Na isti način možemo promatrati interior skupa K u relativnoj topologiji na $\text{aff}K$, odnosno **relativni interior** (u oznaci $\text{RelInt}K$), **relativni zatvarač** (u oznaci $\text{RelCl}K$, no može se pokazati da općenito vrijedi $\text{RelCl}K = \text{Cl}K$ [1]) te granicu u relativnoj topologiji, tj. **relativnu granicu** $\text{RelBd}K = \text{Cl}K \backslash \text{RelInt}K$.
Uz ove pojmove vežu se i sljedeće bitne tvrdnje.

Korolar 6. *Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup onda su konveksni i njegova relativna nutrina* $\text{RelInt}K$ *i zatvorenje* $\text{Cl}K$.

Dokaz. Vidi [1, str. 26, Korolar 2.20.].

■

Korolar 7. *Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup onda je*

$$\text{Cl}K = \text{Cl}(\text{RelInt}K)$$
$$\text{RelInt}K = \text{RelInt}(\text{Cl}K).$$

¸

Dokaz. Vidi [1, str. 26, Korolar 2.21.].

■

Propozicija 8. *Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, onda je*

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}K &= \{x \in \mathrm{aff}K : \exists y \in K, [y, x) \subseteq K\}, \\ \mathrm{RelInt}K &= \{x \in \mathrm{aff}K : \forall y \in \mathrm{aff}K \backslash \{x\}, \exists z \in (x, y), [x, z] \subseteq K\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Vidi [1, str. 25, Propozicija 2.19.].

■

U nastavku će nam biti potreban još jedan konveksan skup koji nazivamo konus te ga stoga idemo definirati.

Definicija 19. *Skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konus s vrhom u nuli ako za svaki $x \in C$ i za svako $\lambda \geq 0$ vrijedi $\lambda x \in C$.*
Ako je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konus s vrhom u nuli, onda skup

$$C_{x_0} := x_0 + C = \{x_0 + x : x \in C\}$$

zovemo konus s vrhom u x_0.

Više o konusima čitatelj može pronaći u [1].

2.3 Hiperravnina

Važnu ulogu u separaciji konveksnih skupova imaju hiperravnine te ćemo ih definirati i navesti neke tvrdnje vezane za njih koje će nam poslije biti ključne u dokazivanju.

Definicija 20. *Neka je zadan vektor $a \in \mathbb{R}^n$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Skup*

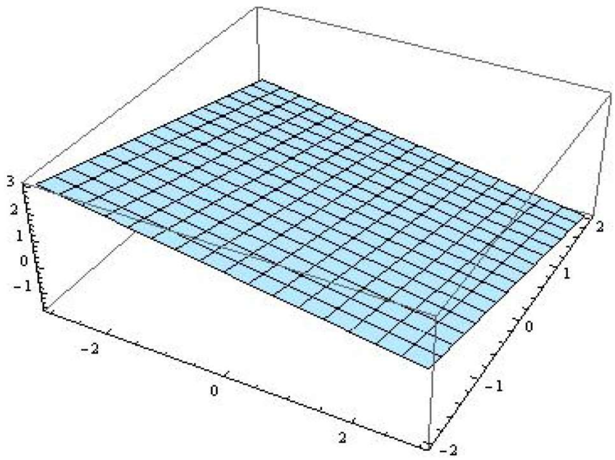
$$H_{a,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = \beta\}$$

nazivamo hiperravnina, a skupovi

$$\begin{aligned} H^-_{a,\beta} &= \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) \leq \beta\} \\ H^+_{a,\beta} &= \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) \geq \beta\} \end{aligned}$$

se nazivaju zatvoreni poluprostori određeni hiperravninom $H_{a,\beta}$. Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ nazivamo vektor normale na hiperravninu $H_{a,\beta}$.

Ako je poznato o kojem vektoru a i kojem skalaru β se radi, hiperravninu i odgovarajuće poluprostore označavat ćemo samo s H, H^+ i H^- (pogledati Sliku 2).
Promotrimo kada je hiperravnina potporna na neki skup.



Slika 2: Hiperravnina H u $\mathbb{R}^3$: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$, tj.
$a = (1, 2, 3), x = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = 2$

Definicija 21. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in K$. Za hiperravninu H kažemo da je potporna hiperravnina na skup K u točki $y_0 \in K$ ako je $y_0 \in H$ i ako K leži s jedne strane hiperravnine H, tj. ako je $K \subseteq H^-$ ili $K \subseteq H^+$. Pri tome za odgovarajući poluprostor koji sadrži skup K također kažemo da je* ***potporni poluprostor****.*

Definicija 22. *Za potpornu hiperravninu $H_{a,\beta}$ skupa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je netrivijalna ako ona ne sadrži cijeli skup K.*

Lema 9. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup, $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$ i $y_x := P_K(x)$, gdje je $P_K(x)$ projekcija od x na K. Tada je $x - y_x \neq 0$ i hiperravnina*

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : (x - y_x, y - y_x) = 0\}$$

podupire skup K u točki y_x. Pri tome je $K \subseteq H^-, x \in H^+ \backslash H$. Osim toga vrijedi

$$\sup_{y \in K}(x - y_x, y) < (x - y_x, x).$$

Dokaz. Vidi [1, str. 46, Lema 3.20.].

$\blacksquare$

Povežimo sada potporne hiperravnine s topološkim strukurama (interiorom i granicom).

Propozicija 10. *Neka je* $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ *neprazan skup pune dimenzije* ($dimS = n$). *Ako je*

$$H_{a,\beta} = \{y \in \mathbb{R}^n : (a, y) = \beta\}, \quad \beta = (a, y_0)$$

potporna hiperravnina skupa S *u točki* $y_0 \in S$, *onda vrijedi:*

(i) $H_{a,\beta} \cap \mathrm{Int}S = \emptyset$,

(ii) $y_0 \in \mathrm{Bd}S$,

(iii) skup S *nije sadržan u* $H_{a,\beta}$, *tj.* $H_{a,\beta}$ *je netrivijalna potporna hiperravnina.*

Dokaz. Vidi [1, str. 47, Propozicija 3.23.].

$\blacksquare$

Propozicija 11. *Neka je* $S \subset \mathbb{R}^n$ *neprazan skup dimenzije* $dimS < n$, *a*

$$H_{a,\beta} = \{y \in \mathbb{R}^n : (a, y) = \beta\}$$

potporna hiperravnina skupa S *u točki* $y_0 \in S$. *Nadalje, neka je* $L = \mathrm{aff}S - y_0$ *linearni potprostor paralelan s* $\mathrm{aff}S$ *te prikažimo vektor* a *na jedinstven način kao*

$$a = a_L + a_{L^\perp},$$

gdje je $a_L \in L$, $a_{L^\perp} \in L^\perp$ ($L^\perp$ *predstavlja ortogonalni komplement potprostora* L). *Tada vrijedi:*

(i) Potporna hiperravnina $H_{a,\beta}$ *je netrivijalna ako i samo ako je* $a_L \neq 0$, *tj. ako* $a \notin L^\perp$.

(ii) Ako je $H_{a,\beta}$ *netrivijalna potporna hiperravnina, onda je* $H_{a,\beta} \cap \mathrm{RelInt}S = \emptyset$ *i zato je* $y_0 \in \mathrm{RelBd}S$. *Osim toga*

$$dim(H_{a,\beta} \cap \mathrm{aff}S) = dimS - 1.$$

Dokaz. Vidi [1, str. 49, Propozicija 3.25.].

$\blacksquare$

Propozicija 12. *Zatvoren i konveksan skup* $K \subsetneq \mathbb{R}^n$ *ima netrivijalnu potpornu hiperravninu u svakoj točki svoje relativne granice. Pri tome, ako je* $dimK = n$, *pod relativnom granicom* $\mathrm{RelBd}K$ *podrazumjevamo pravu granicu* $\mathrm{Bd}K$.

Dokaz. Vidi [1, str. 51, Propozicija 3.26.].

$\blacksquare$

3 Separacija konveksnih skupova

U ovom poglavlju pobliže ćemo se upoznati sa pojmom separacije konveksnih skupova. Teoremi o separaciji konveksnih skupova imaju značajnu ulogu u konveksnoj analizi i optimizaciji.

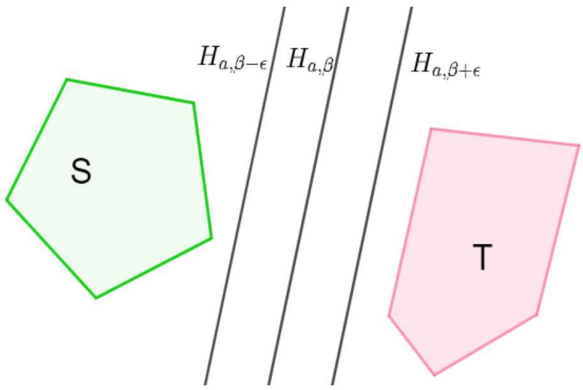
Definicija 23. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ proizvoljni skupovi i $H_{a,\beta}$ afina hiperravnina. Kažemo da skup S* ***leži*** *s jedne strane hiperravnine $H_{a,\beta}$ ako je $S \subseteq H^+_{a,\beta}$ ili $S \subseteq H^-_{a,\beta}$.*

Ako je $S \subseteq H^-_{a,\beta} \backslash H_{a,\beta} = \mathrm{Int} \mathrm{H}^-_{\mathrm{a},\beta}$ ili $S \subseteq H^+_{a,\beta} \backslash H_{a,\beta} = \mathrm{Int} \mathrm{H}^+_{\mathrm{a},\beta}$ kažemo da skup S ***strogo leži*** *s jedne strane hiperravnine $H_{a,\beta}$.*

Kažemo da hiperravnina $H_{a,\beta}$ ***separira*** *ili* ***slabo separira*** *skupove S i T ako oni leže s različitih strana te hiperravnine. Za tu separaciju kažemo da je* ***prava*** *ili* ***netrivijalna*** *ako $S \cup T$ nije sadržano u $H_{a,\beta}$.*

Hiperravnina $H_{a,\beta}$ ***strogo separira*** *skupove S i T ako oni strogo leže s različitih strana te hiperravnine.*

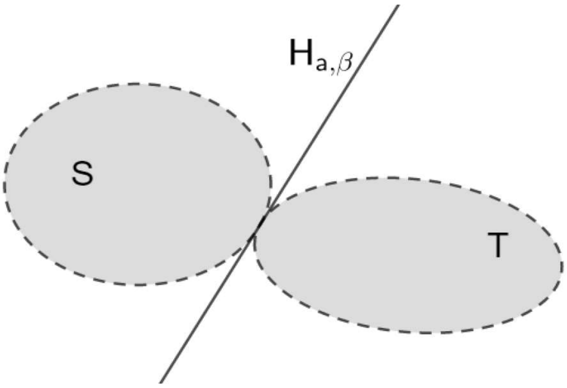
Hiperravnina $H_{a,\beta}$ ***jako separira*** *skupove S i T ako postoji $\epsilon > 0$ takav da hiperravnine $H_{a,\beta-\epsilon}$ i $H_{a,\beta+\epsilon}$ separiraju skupove S i T.*



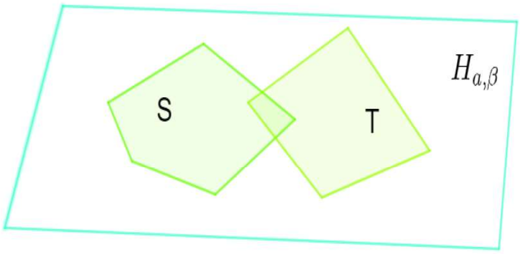
Slika 3: Jaka separacija skupova S i T

Napomena 1. *Bitno je uočiti da vrijede sljedeće implikacije:*

$$\textit{jaka separacija} \Rightarrow \textit{stroga separacija} \Rightarrow \textit{prava separacija} \Rightarrow \textit{slaba separacija}$$



Slika 4: Stroga separacija skupova S i T



Slika 5: Slaba separacija skupova S i T

Prethodna napomena nam govori da ako primjerice možemo jako separirati dva skupa možemo ih i na pravi način separirati. Važno je primjetiti da obratni smjer ne vrijedi.

Primjedba 2. *Navedeni tipovi separacije mogu se iskazati na sljedeći ekvivalentan način (vidi [1]):*

- *Slaba separacija: Postoji* $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *takav da je*

$$\sup_{s \in S}(a, s) \leq \inf_{t \in T}(a, t).$$

- *Prava separacija: Postoji* $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *takav da je*

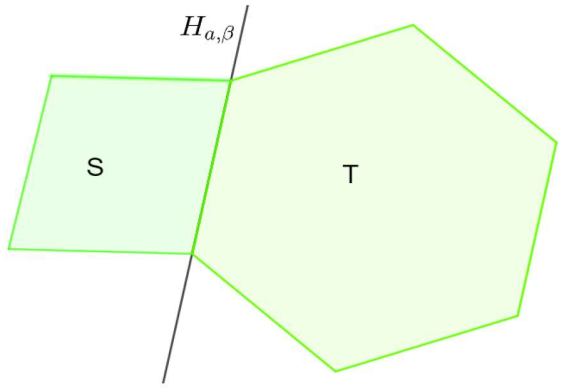
$$\sup_{s \in S}(a, s) \leq \inf_{t \in T}(a, t) \quad \& \quad \inf_{s \in S}(a, s) < \sup_{t \in T}(a, t).$$

- *Stroga separacija: Postoje* $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *i* $\beta \in \mathbb{R}$ *takvi da je*

$$(a, s) < \beta < (a, t) \quad za \quad sve \quad s \in S \quad i \quad t \in T.$$

- *Jaka separacija: Postoji $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ takav da je*

$$\sup_{s \in S}(a, s) < \inf_{t \in T}(a, t).$$



Slika 6: Prava separacija skupova S i T

U sljedećem teoremu ćemo vidjeti kako možemo separirati konveksan skup i točku koja ne pripada tom skupu.

Teorem 13. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup, a $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Tada vrijedi:*

(i) Postoji hiperravnina koja na pravi način separira skup K i točku x.

(ii) Ako je skup K zatvoren, onda se K i točka x mogu jako separirati.

Dokaz. Dokaz tvrdnje (ii) direktno slijedi iz Leme 9, stoga preostaje dokazati prvu tvrdnju.
Promotrimo slijedeća dva slučaja. Prvo ćemo pretpostaviti da se x ne nalazi u $\mathrm{Cl}K$, a zatim da se tamo nalazi.
Ako $x \notin \mathrm{Cl}K$ onda prema (ii) postoji hiperravnina koja jako separira $\mathrm{Cl}K$ i točku x, a iz jake separacije (po Napomeni 1) slijedi prava separacija.

Ako je $x \in \mathrm{Cl}K$, onda je $x \in \mathrm{RelBd}K = \mathrm{Cl}K \backslash \mathrm{RelInt}K$, a po Propoziciji 12 to znači da K ima netrivijalnu potpornu hiperravninu u x iz čega slijedi prava separacija x i K.

$\blacksquare$

Sada ćemo pomoću sljedeće leme vidjeti da se problem separacije dva skupa može svesti na problem separacije skupa i točke. Lemu dokazujemo za jaku separaciju, ali kao što slijedi iz Napomene 1 ona će vrijediti i za ostale tipove separacija.

Lema 14. *Neprazne skupove S i T iz $\mathbb{R}^n$ možemo separirati [jako separirati] onda i samo onda ako možemo separirati [jako separirati] skupove $\{0\}$ i $S-T$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Kako skupove S i T možemo jako separirati znamo da po Primjedbi 2 postoji $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ takav da vrijedi:

$$\sup_{s \in S}(a, s) < \inf_{t \in T}(a, t).$$

Također je

$$(a, s) \leq \sup_{s \in S}(a, s) \quad \& \quad (a, t) \geq \inf_{t \in T}(a, t).$$

Uzmimo sada $x \in S-T$, odnosno x je oblika $x = s-t$, gdje su $s \in S$ i $t \in T$. Po svojstvu skalarnog produkta i pretpostavci slijedi da je

$$(a, x) = (a, s-t) = (a, s) - (a, t) \leq \sup_{s \in S}(a, s) - \inf_{t \in T}(a, t) < 0,$$

što nam daje

$$(a, x) < 0 = (a, 0).$$

Sada kada znamo da prethodna nejednakost vrijedi za proizvoljan x iz $S-T$, također vrijedi da je $\sup\limits_{x \in S-T}(a, x) < 0$, a to znači (opet prema Primjedbi 2) da skupove $S-T$ i $\{0\}$ možemo jako separirati.
$\Leftarrow$ Kako skupove $S-T$ i $\{0\}$ možemo jako separirati, prema Primjedbi 2 postoji $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ takav da vrijedi

$$\sup_{x \in S-T}(a, x) < 0.$$

Opet uzmimo $x \in S-T$ oblika $x = s-t$. Kako znamo da vrijedi $(a, x) = (a, s-t) \leq \sup\limits_{x \in S-T}(a, x) < 0$ tada zbog svojstva skalarnog produkta i pretpostavke, za sve $s \in S$ i $t \in T$ vrijedi

$$(a, s) - (a, t) \leq \sup_{x \in S-T}(a, x) < 0,$$

odakle slijedi $(a, s) < (a, t)$. Kako to vrijedi za svaki s i t, možemo uzeti s takav da (a, s) bude najveći $(\sup_{s \in S}(a, s))$ i t takav da (a, t) bude najmanji $(\inf_{t \in T}(a, t))$ što nam daje

$$\sup_{s \in S}(a, s) < \inf_{t \in T}(a, t),$$

a to znači (opet prema Primjedbi 2) da se skupovi S i T mogu jako separirati.

■

Prethodna lema će nam pomoći u dokazivanju sljedeća dva teorema o separaciji dva neprazna skupa.

Teorem 15 (Minkowski)**.** *Neka su K_1 i K_2 neprazni skupovi u $\mathbb{R}^n$ (ne nužno zatvoreni), takvi da je $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Tada K_1 i K_2 možemo separirati. Nadalje, ako su K_1 i K_2 zatvoreni skupovi te ako je barem jedan od njih omeđen, onda ih možemo jako separirati.*

Dokaz. Prema Lemi 5 razlika konveksnih skupova je konveksan skup te je stoga $K_1 - K_2$ konveksan skup. Lako je provjeriti sljedeću ekvivalenciju:

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset \iff 0 \notin K_1 - K_2.$$

Sada, kada znamo da $0 \notin K_1 - K_2$, zbog Teorema 13 postoji hiperravnina koja na pravi način separira skupove $K_1 - K_2$ i $\{0\}$. Zbog Leme 14 onda vrijedi i prava separacija skupova K_1 i K_2. Sada ćemo pokazati da postoji i jaka separacija. Primijetimo da nam je dovoljno dokazati da je $K_1 - K_2$ zatvoren skup jer onda opet, koristeći Teorem 13 i Lemu 14, dolazimo do navedene tvrdnje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je K_1 zatvoren, a K_2 zatvoren i omeđen. Prema Korolaru 3 znamo da ako je neki skup u $\mathbb{R}^n$ omeđen i zatvoren onda je i kompaktan, a po Teoremu 1 neki je skup u metričkom prostoru zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Stoga uzmimo konvergentan niz iz skupa $K_1 - K_2$ kao razliku nizova $(\mathrm{a}_k - \mathrm{b}_k)$, gdje je $\mathrm{a}_k \in K_1$, $\mathrm{b}_k \in K_2$ i pokažimo da njegov limes pripada skupu $K_1 - K_2$. Kako je K_2 kompaktan skup, zbog definicije kompaktnosti skupa, niz (b_k) ima konvergentan podniz (b_{uk}) koji konvergira prema nekoj točki $b_0 \in K_2$. Uzmimo sada podniz (a_{uk}) kao zbroj konvergentnih podnizova $(\mathrm{a}_{uk} - \mathrm{b}_{uk})$ i (b_{uk}). Kako znamo da je zbroj konvergentnih nizova opet konvergentan niz, slijedi da je (a_{uk}) konvergentan te zbog toga $\mathrm{a}_{uk} \to \mathrm{a}_0$ koji se nalazi u K_1 (zbog zatvorenosti skupa K_1).

Sada vidimo da $\mathrm{a}_{uk} - \mathrm{b}_{uk} \to \mathrm{a}_0 - \mathrm{b}_0 \in K_1 - K_2$. Kako općenito svaki podniz konvergentnog niza konvergira prema istoj točki kao i niz onda vrijedi i $\mathrm{a}_k - \mathrm{b}_k \to \mathrm{a}_0 - \mathrm{b}_0 \in K_1 - K_2$. Time smo pokazali da je $K_1 - K_2$ zatvoren te možemo završiti dokaz.

■

Konveksne skupove možemo separirati čak i ako nisu disjunktni, pod uvjetima koje nam daje sljedeći teorem.

Teorem 16 (Prava separacija konveksnih skupova). *Neka su $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni konveksni skupovi. Prava separacija skupova K_1 i K_2 postoji ako i samo ako je*

$$\mathrm{RelInt}K_1 \cap \mathrm{RelInt}K_2 = \emptyset.$$

Dokaz. Neka je $\mathrm{RelInt}K_1 \cap \mathrm{RelInt}K_2 = \emptyset$. Kako su K_1 i K_2 konveksni, prema Korolaru 6 slijedi da su skupovi $\mathrm{RelInt}K_1$ i $\mathrm{RelInt}K_2$ također konveksni. Označimo s $L := \mathrm{RelInt}K_1 - \mathrm{RelInt}K_2$. Tada (zbog ekvivalencije navedene u dokazu prethodnog teorema) $0 \notin L$, a prema Lemi 5 L je konveksan skup te po Teoremu 13 postoji prava separacija skupa L i točke 0. Zbog Leme 14 sada slijedi prava separacija skupova $\mathrm{RelInt}K_1$ i $\mathrm{RelInt}K_2$ što znači da postoji hiperravnina $H_{a,\beta}$ takva da vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{RelInt}K_1 &\subseteq H^-_{a,\beta}, \\ \mathrm{RelInt}K_2 &\subseteq H^+_{a,\beta}, \\ \mathrm{RelInt}K_1 \cup \mathrm{RelInt}K_2 &\nsubseteq H_{a,\beta}. \end{aligned}$$

Sada se primjenom Korolara 7 lako pokaže da vrijedi:

$$\begin{aligned} K_1 &\subseteq H^-_{a,\beta}, \\ K_2 &\subseteq H^+_{a,\beta}, \\ K_1 \cup K_2 &\nsubseteq H_{a,\beta}. \end{aligned}$$

Promotrimo obrat, odnosno neka sada hiperravnina $H_{a,\beta}$ separira skupove K_1 i K_2 na pravi način. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $K_1 \subseteq H^-_{a,\beta}$, a $K_2 \subseteq H^+_{a,\beta}$. Pokažimo sada da je $\mathrm{RelInt}K_1 \cap \mathrm{RelInt}K_2 = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki $y_0 \in \mathrm{RelInt}K_1 \cap \mathrm{RelInt}K_2$. Kako je $y_0 \in \mathrm{RelInt}K_1 \cap \mathrm{RelInt}K_2$, y_0 se posebno nalazi i u $\mathrm{RelInt}K_1$, a kako je $\mathrm{RelInt}K_1 \subseteq H^-_{a,\beta}$ y_0 se nalazi i u $H^-_{a,\beta}$. Uz isto razmatranje, promatrajući $\mathrm{RelInt}K_2$ dolazimo do zaključka da se y_0 nalazi i u $H^+_{a,\beta}$. Kako se y_0 nalazi u presjeku ta dva poluprostora određenih hiperravninom $H_{a,\beta}$, y_0 se nalazi upravo na toj hiperravnini pa je stoga $H_{a,\beta}$ potporna hiperravnina (u točki y_0) skupova K_1 i K_2. Hiperravnina $H_{a,\beta}$ na pravi način separira skupove K_1 i K_2 te stoga barem jedan od njih nije cijeli sadržan u $H_{a,\beta}$. Možemo zato pretpostaviti da K_2 nije sadržan u $H_{a,\beta}$ (analogno se pokazuje i za K_1). Tada je $H_{a,\beta}$ netrivijalna potporna hiperravnina na skup K_2 u točki y_0 i zbog toga je $y_0 \in \mathrm{RelBd}K_2 = \mathrm{Cl}K_2 \backslash \mathrm{RelInt}K_2$ (po Propoziciji 10), što je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

■

3.1 Farkaseva lema i linearno programiranje

Zamislimo da imamo postrojenje u nekoj tvornici koje se bavi proizvodnjom određenih proizvoda. Postrojenje je u mogućnosti proizvesti
$1, 2, \ldots, n$ različitih proizvoda. Ti proizvodi su proizvedeni od određenih materijala koje ćemo, radi jednostavnosti, označiti s $1, 2, \ldots, m$. Odluke koje utječu na proizvodnju u vođenju ovog postrojenja su komplicirane i mjenjaju se ovisno o potrebama tržišta. No da bismo opisali poprilično stvaran optimizacijski problem uzeti ćemo u obzir određeni slučaj na tržištu. U ovom slučaju postrojenje ima, za svaki materijal $i = 1, 2, \ldots, m$, poznatu količinu b_i na raspolaganju. Nadalje, poznata nam je tržišna vrijednost svakog materijala. Označimo vrijednost i-tog materijala s ρ_i.
Dodatno, neka je svaki proizvod proizveden od poznate količine različitog materijala. Znači, za proizvodnju jedne jedinice proizvoda j potrebna nam je poznata količina, a_{ij} jedinica, materijala i. Također, konačan proizvod j može se prodati za prevladavajuću cijenu na tržištu od σ_j kuna po jedinici. Postrojenje je relativno malo na tržištu i zbog toga ćemo u obzir uzeti vrlo bitne pretpostavke:

(i) postrojenje ne može utjecati na prevladavajuću cijenu materijala

(ii) postrojenje ne može utjecati na prevladavajuću cijenu proizvoda.

Prvi problem koji ćemo promatrati je problem koji zahvaća voditelja proizvodnje. Radi se o tome kako iskoristiti materijale na raspolaganju. Pretpostavimo da voditelj odluči proizvesti x_j jedinica j-tog proizvoda, $j = 1, 2, \ldots, n$. Prihod od proizvodnje jednog j-tog proizvoda je σ_j, ali tu su također materijali koje trebamo uzeti u obzir. Cijena proizvodnje jedne jedinice j-tog proizvoda je $\sum_{i=1}^{m} \rho_i a_{ij}$. Zbog toga, neto prihod od proizvodnje jednog proizvoda je razlika između prihoda i cijene proizvodnje. Označimo neto prihod s

$$c_j = \sigma_j - \sum_{i=1}^{m} \rho_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Sada je neto prihod koji odgovara proizvodnji x_j jedinica j-tog proizvoda jednostavno $c_j x_j$, a ukupan prihod je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{1}$$

Cilj projektanta proizvodnje je maksimizirati tu količinu, no postoje ograničenja na produkcijskom nivou koje mora dodijeliti. Prvo, svaka produkcija količine x_j mora biti nenegativna te stoga stavimo

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Nadalje, ne može se proizvesti više proizvoda nego što ima materijala. Količina i-tog materijala koji se potroši pri proizvodnji je dana s $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ te zbog toga mora poštovati sljedeće ograničenje

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Da sumiramo, posao voditelja proizvodnje je odrediti vrijednosti proizvodnje x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ tako da maksimizira (1) poštujući ograničenja (2) i (3). Ovaj optimizacijski problem je primjer problema linearnog programiranja koji se često naziva problem **alokacije resursa**, a može se pronaći u [5]. U drugom uredu produkcijskog postrojenja se nalazi kontroler koji ima problem dodavanja vrijednosti materijala na raspolaganju. Te vrijednosti su potrebne za računovodstvene i planske svrhe da bi se odredio trošak zaliha. Postoje pravila kako postaviti te vrijednosti. Najvažnije pravilo je sljedeće:

Firma mora biti voljna prodati materijale javi li se vanjska firma koja ih ponudi otkupiti po cijeni koja odgovara sljedećim vrijednostima:

Neka ω_i označava jediničnu vrijednost i-tog materijala, $i = 1, 2, \ldots, m$, odnosno ovo su brojevi koje kontrolor mora odrediti. Izgubljeni oportunitetni trošak posjedovajući b_i jedinica i-tog materijala na raspolaganju je $b_i \omega_i$ i stoga je totalni izgubljeni oportunitetni trošak dan s:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \omega_i. \tag{4}$$

Kontrolorov cilj je minimizirati izgubljeni oportunitetni trošak, ali naravno postoje ograničenja. Prvo, svaka dodjeljena jedinična vrijednost ω_i ne smije biti manja od tržišne jedinične vrijednosti ρ_i jer kada bi bila manja tada bi vanjska firma mogla otkupiti materijal po cijeni manjoj od ρ_i, što je u kontradikciji s činjenicom da je ρ_i prevladavajuća tržišna cijena. Dakle:

$$\omega_i \geq \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Slično,

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i a_{ij} \geq \sigma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Da bismo vidjeli zašto, pretpostavimo da vrijedi suprotno za neki određeni proizvod j. Tada bi netko izvana mogao kupiti materijale od firme, proizvesti proizvod j i prodati ga po cijeni manjoj od prevladavajuće tržišne cijene. To je kontradiktorno činjenici da je σ_j prevladavajuća tržišna cijena na koju firma koju promatramo ne može utjecati. Minimiziranje (4) poštivajući ograničenja (5) i (6) je također problem linearnog programiranja.

U matematičkom programiranju također se susrećemo s problemom linearnog programiranja (skraćeno LP) u kojem se maksimizira linearna funkcija na skupu zadanom pomoću linearnih jednadžbi i/ili nejednadžbi. Kod standardnog oblika svako moguće rješenje je nenegativno rješenje $x \geq 0$ linearnog sustava nejednadžbi $Ax \leq b$, a u kanonskom obliku (koji se dobije kao poopćenje standardnog oblika) je rješenje svako nenegativno $x \geq 0$ sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$. Sljedeći teorem, tzv. Farkaseva lema daje nam nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju nenegativnog rješenja linearnog sustava jednadžbi tj. nejednadžbi.

Teorem 17. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrica i $b \in \mathbb{R}^n$ vektor. Tada samo jedan od sljedeća dva sustava ima rješenje (za ovu formulaciju teorema pogledati [6, str. 69, Teorem 3.3.1.a.]):*

$$Ax \leq 0, \quad b^T x > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7}$$

$$A^T y = b, \quad y \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Dokaz. Prvo pokažimo da ako (8) ima rješenje (7) nema. Ako (8) ima rješenje $y \geq 0$ takvo da vrijedi $b = A^T y$ tada za svaki x takav da je $Ax \leq 0$ slijedi da je $b^T x = y^T Ax \leq 0$ što je u kontradikciji sa (7).
Pretpostavimo sada da (8) nema rješenje. Neka je $\rho = \{u \in \mathbb{R}^n : u = A^T y, y \geq 0\}$. Očito je ρ konveksan i zatvoren. Budući da (8) nema rješenje $b \notin \rho$. Po Teoremu 13 skup ρ i točku b možemo jako separirati, tj. postoji

$C(\neq 0) \in \mathbb{R}^n$ i skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $C^T u \leq \alpha < C^T b$, za svaki $u \in \rho$. Budući da je $0 = A^T 0$ slijedi da je $\alpha \geq 0$ kada je $C^T b > 0$. Dodatno, $C^T u = C^T A^T y = y^T AC \leq \alpha$ za svaki $y \geq 0$. Budući da je $\alpha \geq 0$ i svaku komponentu od y (≥ 0) možemo uzeti proizvoljno veliku, $y^T AC \leq \alpha$ ako je $AC \leq 0$. Uzimajući to u obzir vidimo da postoji $C(\neq 0)$ takav da $b^T C > 0$ i $AC \leq 0$. Zbog toga (7) ima rješenje.

■

Farkasevu lemu možemo i geometrijski zapisati na sljedeći način:
Neka je $C(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ konus generiran stupcima matrice A, a $b \in \mathbb{R}^n$ vektor. Tada je ili

(a) $b \in C(a_1, \ldots, a_n)$, tj. vektor b se može prikazati kao linearna kombinacija stupaca matrice A s nenegativnim koeficijentima

ili

(b) $b \notin C(a_1, \ldots, a_n)$, tj. postoji hiperravnina H s vektorom normale y koja razdvaja konus $C(a_1, \ldots, a_n)$ i točku b.

Još ćemo navesti dvije ekvivalentne formulacije Farkaseve leme koje nećemo dokazivati (jer se dokazi provode na vrlo sličan način).

Korolar 18. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $b \in \mathbb{R}^m$ vektor. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) Sustav $Ax = b$ ima nenegativno rješenje $x \geq 0$,

(b) $y^T A \geq 0 \Rightarrow y^T b \geq 0$.

Dokaz. Vidi [1, str. 58, Korolar 3.35.].

Korolar 19. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $b \in \mathbb{R}^m$ vektor. Sustav linearnih nejednadžbi $Ax \leq b$ ima rješenje onda i samo onda ako je $y^T b \geq 0$ za svaki vektor $y \geq 0$ za koji je $y^T A = 0$.*

Dokaz. Vidi [1, str. 58, Korolar 3.36.].

4 Reprezentacija konveksnih skupova

U ovom poglavlju ćemo se baviti reprezentacijom konveksnih skupova gdje će nam od velike važnosti biti pojmovi ekstremalnih točaka i stranica konveksnog skupa te ćemo ih stoga u nastavku definirati (za više detalja vidi [7]).

Definicija 24. *Ekstremalna točka konveksnog skupa K, $x_\epsilon \in K$, je točka koja pripada zatvaraču skupa K, tj. skupu $\mathrm{Cl}K$ i ne može se izraziti kao konveksna kombinacija pomoću točaka iz $\mathrm{Cl}K$ različitim od x_ϵ, tj.*

$$\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \neq x_\epsilon, \mu \in [0,1], \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Cl}K \backslash x_\epsilon.$$

Definicija 25.

- *Stranica $\mathcal{F}$ konveksnog skupa K je konveksni podskup, $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Cl}K$ takav da svaki segment $[x_1, x_2]$ u skupu $\mathrm{Cl}K$ koji ima točku u relativnom interioru ($x \in \mathrm{RelInt}[x_1, x_2]$) ima oba kraja u $\mathcal{F}$. 0-dimenzionalne stranice skupa K su njegove ekstremalne točke. Po dogovoru su $\emptyset$ i $\mathrm{Cl}K$ stranice od K.*

- *Svaka stranica $\mathcal{F}$ konveksnog skupa je ekstremalni skup (skup koji sadrži ekstremalne točke) po definiciji.*

- 1*-dimenzionalna stranica konveksnog skupa naziva se brid.*

Pogledajmo sada presjek hiperravnine i ekstremalne stranice.

Definicija 26.

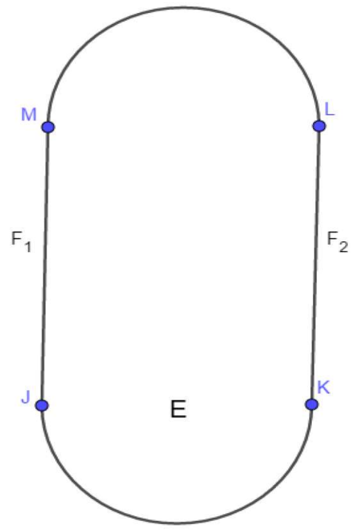
- *$\mathcal{F}$ je izložena stranica n-dimenzionalnog konveksnog skupa K ako i samo ako postoji potporna hiperravnina H takva da vrijedi*

$$\mathcal{F} = \mathrm{Cl}K \cap H.$$

- *Izložena točka (vrh) konveksnog skupa K je* 0*-dimenzionalna izložena stranica.*

Napomena 2. *Svaka izložena točka u konveksnom skupu je ujedno i ekstremalna točka. Svaka izložena stranica u konveksnom skupu je ujedno i ekstremalna stranica. Obrat ne mora vrijediti.*

Sljedeća propozicija nam govori o vezi između ekstremalne stranice nekog skupa koji je podskup konveksnog skupa.



Slika 7: Konveksan skup E u $\mathbb{R}^2$ na kojem su s F_1, F_2 označene ekstremalne stranice, a vrhovi s M, J, K i L

Propozicija 20. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup i $F_1 \subseteq K$ ekstremalna stranica od K te $F_2 \subseteq F_1$ ekstremalna stranica od F_1. Tada je F_2 ekstremalna stranica od K.*

Dokaz. Neka je $F_1 \subseteq K$ ekstremalna stranica od K, tj. za svaki $x_1, x_2 \in K$:

$$[x_1, x_2] \subseteq F_1$$

te $F_2 \subseteq F_1$ ekstremalna stranica od F_1, tj. za svaki $x_1', x_2' \in F_2$:

$$[x_1', x_2'] \subseteq F_2.$$

Kako je $F_2 \subseteq F_1$ i $F_1 \subseteq K$ slijedi da je $[x_1', x_2'] \subseteq K$ tj. F_2 je ekstremalna stranica od K.

■

U sljedećem teoremu ćemo vidjeti i drugi način prikaza ekstremalne stranice nekog konveksnog skupa.

Teorem 21. *Ako je F ekstremalna stranica konveksnog skupa $K \subseteq \mathbb{R}^n$, onda je*

$$F = K \cap \operatorname{aff} F.$$

Dokaz. Kako je $F \subseteq K$ i $F \subseteq \text{aff}F$ lako vidimo da je $F \subseteq K \cap \text{aff}F$ te pretpostavimo da je $x \in K \cap \text{aff}F$ i pokažimo da se on nalazi u F. Zbog $x \in \text{aff}F$ vrijedi da je

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in F.$$

Kako su koeficijenti $\lambda_i \in \mathbb{R}$ znači da mogu biti i negativni i pozitivni. Uzmimo da su svi koeficijenti $\lambda_i \geq 0$, za svaki $i = 1, \ldots, m$. Tada je $x \in \text{conv}F$, a kako je F konveksan x se nalazi i u F te je dokaz gotov. Pretpostavimo sada da među koeficijentima λ_i ima negativnih. Onda možemo pisati

$$y_1 = \frac{x + \alpha y_2}{1 + \alpha} \in (x, y_2)$$

gdje je

$$\alpha := -\sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i > 0,$$
$$y_1 = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i x_i,$$
$$y_2 := -\frac{1}{\alpha} \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i x_i.$$

Vidimo da su $y_1, y_2 \in \text{conv}F = F \subseteq K$. Kako su $x, y_2 \in K$ i $y_1 \in (x, y_2) \cap F$, a F je ekstremalna stranica slijedi da je $[x, y_2] \subseteq F$, a to znači da je x i u F. Time završavamo dokaz.

■

Propozicija 22. *Neka je K konveksan skup, F ekstremalna stranica od K i S bilo koji konveksan podskup od K. Ako je $F \cap \text{RelInt}S \neq \emptyset$, onda je $S \subseteq F$, tj. formalno za svaki $S \subseteq K$ vrijedi sljedeće:*

$$F \cap \text{RelInt}S \neq \emptyset \Longrightarrow S \subseteq F.$$

Dokaz. Uzmimo $x_0 \in F \cap \text{RelInt}S$. Sada odaberimo bilo koju točku $x \in S \backslash \{x_0\}$.
Trebamo pokazati da je $x \in F$, stoga kroz točke x_0 i x povucimo pravac p. Kako su $x_0, x \in S$ jasno se vidi da je $p \subseteq \text{aff}S$. Pogledajmo sada točku $2x - x_0$

koja leži na pravcu p (točka x_0 je između $2x - x_0$ i x). Zbog konveksnosti skupa S i jer je $x_0 \in \mathrm{RelInt} S$ po Propoziciji 8 postoji točka $y \in (2x - x_0, x_0)$ takva da je $[y, x_0] \subseteq S$. Vidimo da je i $x_0 \in (y, x)$. Kako je F ekstremalna stranica od K slijedi da je $[y, x] \subseteq F$, a to znači da je i $x \in F$.

■

Zbog prethodne propozicije definiciju ekstremalne stranice možemo zapisati na sljedeći način:

Definicija 27. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Konveksan podskup F od K je ekstremalna stranica od K ako za svaki konveksan podskup S od K vrijedi*

$$F \cap \mathrm{RelInt} S \neq \emptyset \Longrightarrow S \subseteq F.$$

Sada spomenimo još jedan korolar koji je rezultat prethodne definicije.

Korolar 23. *Neka je K konveksan skup. Vrijedi:*

a) Ako ekstremalna stranica F od K siječe $\mathrm{RelInt} K$, onda se ona podudara s K. Dakle,

$$F \cap \mathrm{RelInt} K \neq \emptyset \Longrightarrow F = K.$$

b) Svaka prava ekstremalna stranica F od K leži na njegovoj relativnoj granici $\mathrm{RelBd} K$, tj. $F \subseteq \mathrm{RelBd} K = \mathrm{Cl} K \backslash \mathrm{RelInt} K$.

c) Svaka prava ekstremalna stranica F od K sadržana je u nekoj pravoj izloženoj stranici E od K.

d) Relativna granica zatvorenog konveksnog skupa K sastoji se od pravih izloženih stranica.

Dokaz.

a) Slijedi direktno iz prethodne definicije.

b) Pokažimo da je $F \cap \mathrm{RelInt} K = \emptyset$. Kada bi bilo $F \cap \mathrm{RelInt} K \neq \emptyset$ prema tvrdnji a) bi imali $K = F$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je F prava ekstremalna stranica.

c) Lako se provjeri da vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) $F \cap \mathrm{RelInt} K = \emptyset$,

(ii) $F = K \cap \mathrm{aff} F$.
Naime, F je prava ekstremalna stranica pa zbog tvrdnje a) mora vrijediti (i), a (ii) dobivamo primjenom Teorema 21. Iz (i) i (ii) sada imamo:

$$\emptyset = F \cap \mathrm{RelInt} K = (K \cap \mathrm{aff} F) \cap \mathrm{RelInt} K = \mathrm{aff} F \cap \mathrm{RelInt} K.$$

Tada po Teoremu 16 postoji hiperravnina H koja na pravi način separira skupove $\mathrm{RelInt} K$ i $\mathrm{aff} F$ pa vrijedi sljedeće:

(iii) $K \subseteq H^-$

(iv) $\mathrm{aff} F \subseteq H^+$ i

(v) barem jedan od skupova $\mathrm{RelInt} K$ i $\mathrm{aff} F$ nije cijeli sadržan u H.

Kako je $F \subset K$ i vrijedi (iii) dobivamo da je $F \subseteq H^-$, a iz $F \subseteq \mathrm{aff} F$ i (iv) dobivamo da je $F \subseteq H^+$. Sada vidimo da je $F \subseteq H$ te kako vrijedi (v) tada je $H \cap K$ prava izložena stranica koja sadrži F.

d) Kako je K zatvoren i konveksan po Propoziciji 12 kroz svaku točku relativne granice možemo postaviti netrivijalnu potpornu hiperravninu H, a zbog tvrdnje a) $H \cap K$ je prava izložena stranica, tj. $H \cap K \neq K$.

■

4.1 Teorem Minkowskog

U ovom poglavlju ćemo se baviti teoremom poznatim kao Teorem Minkowskog koji nam govori kako možemo prikazati kompaktan konveksan skup pomoću ekstremalnih točaka i uz koje uvjete. Prije samog teorema spomenuti ćemo korolar koji je rezultat prethodnih razmatranja. No najprije uvedimo oznaku $\mathrm{ext} K$ kojom ćemo označavati skup svih ekstremalnih točaka skupa K.

Korolar 24. *Neka je H potporna hiperravnina konveksnog skupa $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Svaka ekstremalna točka skupa $K \cap H$ je također ekstremalna točka od K.*

Dokaz. Slijedi direktno iz prethodnog korolara.

■

Sljedeći teorem je poznat u literaturi kao Minkowski ili Krein-Millmanov teorem (vidi [1, str. 68]).

Teorem 25. *Svaki neprazan i kompaktan konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna ljuska svojih ekstremalnih točaka.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po dimenziji m od K. Ako je $m = 0$ ili $m = 1$ tj. kada je K samo jedna točka ili zatvoreni interval tvrdnja je očita. Zato pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za konveksne skupove koji su kompaktni dimnezije $m \leq n - 1$. Uzmimo sada kompaktan konveksan skup K dimenzije $m+1$ i postavimo ga u vektorski potprostor E dimenzije $m+1$. Ako je $z \in \text{RelBd}K$ postoji hiperravnina $H \subset E$ za K koja prolazi točkom z (po Korolaru 23). Skup $K \cap H$ je konveksan i kompaktan i njegova dimenzija je manja ili jednaka m. Po pretpostavci indukcije z je konveksna kombinacija ekstremalnih točaka skupa $K \cap H$, a po prethodnom korolaru svaka ekstremalna točka od $K \cap H$ je također ekstremalna točka od K što znači da se z može prikazati kao konveksna kombinacija ekstremalnih točaka skupa K. Promotrimo slučaj kada je $z \in \text{RelInt}K$. Tada svaka zraka kroz z siječe K u najviše dvije točke x i y koje pripadaju $\text{RelBd}K$. Pri tome z možemo zapisati kao konveksnu kombinacijua točaka x i y, a x i y (po prethodnom djelu dokaza) kao konveksnu kombinaciju ekstremalnih točaka skupa K. Time završavamo dokaz.

$\blacksquare$

Literatura

[1] D. Jukić, Konveksni skupovi, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2015. (nerecenzirani materijali)

[2] D. Jukić, Realna analiza, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek (nerecenzirani materijali)

[3] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[4] J. R. Munkres, Topology, Second edition, Prentice Hall, 2000.

[5] R. J. Vanderbei, Linear Programming, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, USA, 1996.

[6] M. J. Panik, Fundamentals of convex analysis, Department of Economics, University of Hartford, West Hartford, Conneticut, USA, 1993.

[7] J. Dattorro, Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry, $\mathcal{M}\epsilon\beta$o Publishing, USA, 2005.