Stabilne distribucije

Penava, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:769257

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij - Financijska matematika i statistika

Ivana Penava

Stabilne distribucije

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij - Financijska matematika i statistika

Ivana Penava

Stabilne distribucije

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod

Stabilne distribucije su bogata klasa distribucija koja dopušta asimetričnost i teške repove. Kao takve, imaju puno zanimljivih svojstava i korisne su za modeliranje mnogih problema. Smatra se da ih je otkrio Paul Lévy nakon Kolmogorovljevog predavanja 1919., nakon što mu je rečeno da su normalne distribucije jedine stabilne. Istog dana je, navodno, otkrio simetrične stabilne distribucije. Budući da za većinu stabilnih distribucija funkcije gustoće nisu poznate, dugo nisu bile predmet proučavanja.

Jedan od ključnih teorema u teoriji vjerojatnosti je centralni granični teorem koji tvrdi da normalizirana suma nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s konačnim varijancama konvergira prema normalnoj distribuciji. U nastavku neka je nezavisan jednako distribuiran niz označen kao n.j.d. niz. Preciznije:

Teorem 1.1 (Centralni granični teorem). *Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz n.j.d. slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom $\sigma^2 < \infty$. Tada vrijedi:*

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1),\ n \to \infty.$$

Pri tome je $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, a „$\xrightarrow{d}$" označava konvergenciju po distribuciji.

Nameće se pitanje koje sve distribucije su moguće kao asimptotski limesi normaliziranog niza n.j.d. slučajnih varijabli ukoliko varijanca nije konačna.

Generalizirani centralni granični teorem tvrdi da, ukine li se pretpostavka o konačnosti varijanci, kao limes se dobiva cijela klasa distribucija koje se nazivaju stabilne. Štoviše, vrijedi:

Teorem 1.2 (Generalizirani centralni granični teorem). *Slučajna varijabla Z je stabilna ako i samo ako postoji n.j.d. niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots$ i konstante $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi:*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{a_n} - b_n \xrightarrow{d} Z.$$

U prvom dijelu ovog rada definirane su stabilne slučajne varijable na nekoliko načina, iskazani su najpoznatiji primjeri te važna svojstva. Na kraju je prikazana serijska reprezentacija takvih varijabli.

U drugom dijelu opisani su stabilni slučajni vektori i njihove karakteristične funkcije. Obrađena su određena svojstva posebnih slučajeva stabilnih slučajnih vektora, to jest strogo stabilnog, simetričnog stabilnog i subgaussovskog slučajnog vektora. Napravljena je usporedba s Gaussovskim slučajem.

U posljednjem poglavlju obrađene su neke od primjena stabilnih distribucija. Iako su otkrivene tek u prošlom stoljeću, njihova primjena je široka u raznim znanostima. U ovom radu prikazana je njihova primjena u igrama i biologiji. Osim toga, navedeno je na koje još načine se mogu primjeniti stabilne distribucije te gdje se mogu pronaći detaljniji opisi.

2 Stabilna slučajna varijabla

U ovom poglavlju definirane su stabilne slučajne varijable i navedeni su najvažniji primjeri. Budući da njihove funkcije gustoća uglavnom nisu poznate u eksplicitnom obliku, često se koriste njihove karakteristične funkcije. Korištenjem karakterističnih funkcija su u ovom poglavlju dokazana najvažnija svojstva stabilnih slučajnih varijabli. Nakon toga, posebno su obrađena svojstva simetričnih stabilnih slučajnih varijabli te posebnih slučajeva.

2.1 Ekvivalentne definicije stabilne slučajne varijable

U prvom potpoglavlju iskazane su četiri ekvivalentne definicije stabilne slučajne varijable. U sljedećem potpoglavlju pokazane su te ekvivalencije. Prve dvije definicije temelje se na svojstvu stabilnosti.

Definicija 2.1. *Slučajna varijabla X ima* ***stabilnu distribuciju*** *ako za bilo koje pozitivne brojeve a i b, postoje pozitivan broj c i realan broj d takvi da vrijedi*

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \tag{2.1}$$

pri čemu X_1 i X_2 predstavljaju nezavisne kopije slučajne varijable X, a „$\stackrel{d}{=}$" označava jednakost po distribuciji.

Prethodna definicija se može interpretirati na sljedeći način:
Oblik slučajne varijable X je očuvan (uz skaliranje i pomak) prilikom zbrajanja.
(vidi [7, Poglavlje 1.1.])
Ukoliko u jednadžbi (2.1) vrijedi $d = 0$, slučajna varijabla X se naziva **strogo stabilna**. Ako je distribucija stabilne slučajne varijable X simetrična, odnosno ako je $X \stackrel{d}{=} -X$, ona se naziva **simetrična stabilna**.

Sljedeći teorem uvodi pojam **indeks stabilnosti**, odnosno karakteristični eksponent, u oznaci α.

Teorem 2.1. *Za bilo koju slučajnu varijablu X, postoji broj $\alpha \in \langle 0, 2]$ takav da za c iz jednadžbe (2.1) vrijedi*

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha. \tag{2.2}$$

Dokaz prethodne tvrdnje može se pronaći u [3, Poglavlje VI.1.].

Za stabilnu slučajnu varijablu X s indeksom stabilnosti α kaže se da je $\boldsymbol{\alpha}$**-stabilna**.

Definicija 2.2. *Slučajna varijabla X ima* ***stabilnu distribuciju*** *ako za bilo koji $n \geq 2$, postoje pozitivan broj c_n i realan broj d_n takvi da vrijedi*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \tag{2.3}$$

pri čemu su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne kopije slučajne varijable X.

Može se pokazati da za c_n iz prethodne jednadžbe vrijedi

$$c_n = n^{1/\alpha},$$

pri čemu je $\alpha \in \langle 0, 2]$ indeks stabilnosti. Dokaz se može pronaći u [5, Poglavlje 9.] i [3, Poglavlje VI.,Teorem 1.].

I samo ime klase distribucija, stabilne, proizilazi iz činjenice da suma nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli ima istu distribuciju kao linearno transformiran zbroj.

Kako bi se iskazala treća definicija, korisno je definirati domenu atrakcije.

Definicija 2.3. *Slučajna varijabla Y je u* ***domeni atrakcije*** *od X ako postoje konstante $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi*

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{a_n} + b_n \xrightarrow{d} X,$$

pri čemu su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ nezavisne kopije slučajne varijable Y.

Iz teorema 1.2 vidi se da jedino stabilne slučajne varijable imaju domenu atrakcije.

Sljedeća definicija govori da će limes normaliziranih suma n.j.d. slučajnih varijabli biti uvijek stabilna distribucija.

Definicija 2.4. *Slučajna varijabla X ima* ***stabilnu distribuciju*** *ako ima domenu atrakcije, to jest ako postoji niz n.j.d. slučajnih varijabli $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, pozitivnih brojeva a_n i realnih brojeva b_n takvi da vrijedi*

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{a_n} + b_n \xrightarrow{d} X. \tag{2.4}$$

Za a_n iz prethodne jednažbe vrijedi

$$a_n = n^{1/\alpha} f(n),$$

pri čemu je $f(x), x > 0$ sporo varirajuća funkcija, odnosno funkcija za koju vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(ux)}{f(x)} = 1, \ \forall u > 0.$$

Jedan primjer takve funkcije je $f(x) = \ln x$.
Ako je

$$a_n = n^{1/\alpha}$$

kaže se da Y_i pripadaju normalnoj domeni atrakcije od X.

Sljedeća definicija stabilne slučajne varijable ujedno definira i njenu karakterističnu funkciju.

Definicija 2.5. *Slučajna varijabla X ima* ***stabilnu distribuciju*** *ako postoje parametri $\alpha \in \langle 0, 2], \sigma \geq 0, \beta \in [-1, 1]$ i $\mu \in \mathbb{R}$ takvi da karakteristična funkcija ima oblik:*

$$E\left[e^{i\theta X}\right] = \begin{cases} e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta (\operatorname{sign}\theta) \tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\mu\theta} & \alpha \neq 1, \\ e^{-\sigma|\theta|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign}\theta)\ln|\theta|\right) + i\mu\theta} & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pri tome je

$$\operatorname{sign}\theta = \begin{cases} 1 & \textit{za } \theta > 0, \\ 0 & \textit{za } \theta = 0, \\ -1 & \textit{za } \theta < 0. \end{cases}$$

U prethodnoj definiciji, α je indeks stabilnosti, a parametri σ, β i μ su jedinstveni. To su ujedno i četiri parametra koji karakteriziraju jednodimenzionalnu stabilnu distribuciju. Za njih vrijedi:

- σ je parametar skaliranja,
- β je parametar asimetričnosti,
- μ je parametar pomaka.

Smisao naziva parametara vidjet će se iz svojstava stabilnih slučajnih varijabli, koja su obrađena u jednom od idućih poglavlja.

Prema tome, ako slučajna varijabla X ima stabilnu distribuciju uobičajeno je pisati

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$$

Ukoliko vrijedi da je $\beta > 0$, kaže se da je distribucija $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ asimetrična udesno, dok se za $\beta < 0$ kaže da je asimetrična ulijevo. Kaže se da je potpuno asimetrična udesno ako vrijedi $\beta = 1$, odnosno potpuno asimetrična ulijevo za $\beta = -1$.

2.2 Dokazi ekvivalencija definicija

U ovom poglavlju pokazane su neke od ekvivalencija prethodne četiri definicije stabilnih slučajnih varijabli.

Pokažimo da su definicija 2.1 i 2.2 međusobno ekvivalentne.
Za dokaz prvog smjera, odnosno da 2.1 povlači 2.2 pretpostavimo da $\forall a, b > 0$ postoje $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d.$$

Treba pokazati da postoje $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n.$$

Dokaz se provodi indukcijom.
Tvrdnja vrijedi u slučaju $n = 2$ jer je $X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} c_2 X + d_2$ poseban slučaj jednadžbe (2.1) uz $a = b = 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$, to jest vrijedi $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$.
Preostalo je pokazati da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1} &\stackrel{d}{=} (X_1 + X_2 + \cdots + X_n) + X_{n+1} \\ &\stackrel{d}{=} (c_n X + d_n) + X_{n+1} \\ &\stackrel{d}{=} (c_n X + X_{n+1}) + d_n \\ &\stackrel{d}{=} (c_{n+1} X + d) + d_n \\ &\stackrel{d}{=} c_{n+1} X + d_{n+1}. \end{aligned}$$

Drugi smjer, odnosno da definicija 2.2 implicira definiciju 2.1 može se pronaći u [3, Poglavlje VI.1.]

Nadalje, vrijedi pokazati ekvivalenciju definicija 2.2 i 2.4.

Kako bi se pokazalo da definicija 2.2 implicira definiciju 2.4 pretpostavimo da postoje $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n.$$

Treba pokazati da tada postoji niz n.j.d. slučajnih varijabli $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, pozitivnih brojeva a_n i realnih brojeva b_n takvih da vrijedi

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{a_n} + b_n \xrightarrow{d} X.$$

Ukoliko se od obje strane prve jednakosti oduzme d_n i obje strane se podijele s c_n vrijedi

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{c_n} + \frac{d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} X.$$

Neka je $a_n = c_n$ i $b_n = \frac{d_n}{c_n}$ i neka $n \longrightarrow \infty$.

Tada vrijedi

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{a_n} + b_n \xrightarrow{d} X.$$

Dokaz obrnutog smjera, da definicija 2.4 implicira definiciju 2.2 može se pronaći u [4, Poglavlje 7, Potpoglavlje 33.].

U nastavku je dokaz da definicija 2.5 povlači definiciju 2.1.
Pretpostavimo da postoje parametri $\alpha \in \langle 0, 2], \sigma \geq 0, \beta \in [-1, 1]$ i $\mu \in \mathbb{R}$ takvi da karakteristična funkcija ima oblik:

$$E\left[e^{i\theta X}\right] = \begin{cases} e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - \beta (\operatorname{sign}\theta) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\mu\theta} & \alpha \neq 1, \\ e^{-\sigma|\theta| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\operatorname{sign}\theta)\right) + i\mu\theta} & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dokaz ćemo provesti za $\alpha \neq 1$. Dokaz za $\alpha = 1$ provodi se na analogan način.
Treba pokazati da za bilo koje pozitivne brojeve a i b, postoji pozitivan broj c i realan broj d takvi da vrijedi

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d.$$

Korištenjem svojstava karakteristične funkcije i činjenice da su $a, b > 0$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\ln E\left[e^{i\theta(aX_1 + bX_2)}\right] &= \ln\left(E\left[e^{i\theta(aX_1)}\right] E\left[e^{i\theta(bX_2)}\right]\right) \\
&= \ln E\left[e^{i\theta(aX_1)}\right] + \ln E\left[e^{i\theta(bX_2)}\right] \\
&= -\sigma^\alpha |a\theta|^\alpha \left(1 - i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(a\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + ia\mu\theta \\
&\quad - \sigma^\alpha |b\theta|^\alpha \left(1 - i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(b\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + ib\mu\theta \\
&= -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right)(a^\alpha + b^\alpha) + i\mu\theta(a + b).
\end{aligned}$$

S druge strane, primjenom pretpostavke $c > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\ln E\left[e^{i\theta(cX+d)}\right] &= \ln\left(e^{id\theta}E\left[e^{i\theta(cX)}\right]\right) = id\theta + \ln E\left[e^{i\theta(cX)}\right] \\
&= id\theta - \sigma^\alpha|c\theta|^\alpha\left(1 - i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(c\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + ic\mu\theta \\
&= -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1 - i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right)c^\alpha + i\mu\theta\left(c + \frac{d}{\mu}\right).
\end{aligned}$$

Za svaki $a, b > 0$ može se izabrati izabrati $c > 0$ tako da vrijedi

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha,$$

to jest

$$c = \sqrt[\alpha]{a^\alpha + b^\alpha}.$$

Također, može se izabrati i d tako da vrijedi i

$$c + \frac{d}{\mu} = a + b,$$

odnosno

$$d = \mu(a + b - \sqrt[\alpha]{a^\alpha + b^\alpha}).$$

Na taj način dobije se jednakost karakterističnih funkcija, što je ekvivalentno jednakosti distribucija po teoremu koji se može pronaći u [3, Poglavlje 1.,Teorem 1.2.].

Dokaz da definicija 2.2 povlači definiciju 2.5 može se pronaći u [4, Poglavlje 7., Potpoglavlje 34.].

2.3 Primjeri stabilnih slučajnih varijabli

Iako funkcije gustoća stabilnih slučajnih varijabli postoje i neprekidne su, one uglavnom nisu poznate u eksplicitnom obliku. Nekoliko je iznimki, koje su navedene u ovom poglavlju.

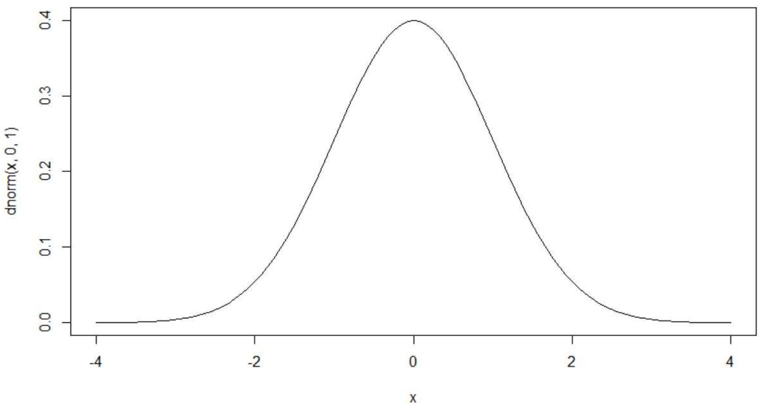
Primjer 2.1. *Konstanta μ s distribucijom $S_\alpha(0, 0, \mu)$, $\forall\alpha \in \langle 0, 2]$.*
To je specijalni slučaj i takve distribucije, generalno, imaju drugačija svojstva od ostalih stabilnih distribucija pa se u nastavku rada rezultati neće nužno odnositi na njih.

Primjer 2.2. *Normalna distribucija* $S_2(\sigma, 0, \mu) = N(\mu, 2\sigma^2)$.
Njena funkcija gustoće je

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2},$$

pri čemu je $-\infty < x < \infty$.

Na sljedećoj slici može se vidjeti graf normalne distribucije s parametrima $\mu = 0$ *i* $\sigma^2 = 1$.



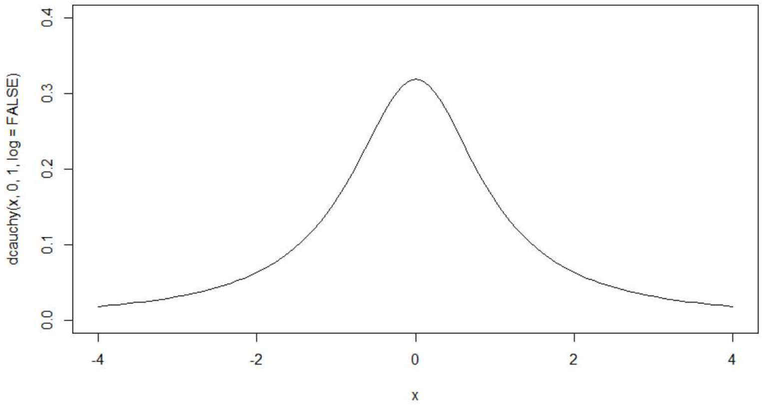
Slika 1: *Normalna distribucija* - $N(0, 1)$

Primjer 2.3. *Cauchyjeva distribucija* $S_1(\sigma, 0, \mu)$.
Njena funkcija gustoće je

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)},$$

pri čemu je $-\infty < x < \infty$.

Na sljedećoj slici može se vidjeti graf Cauchyjeve distribucije s parametrima $a = 0$ *i* $b = 1$, *pri čemu je* a *parametar pomaka i* b *parametar skaliranja.*



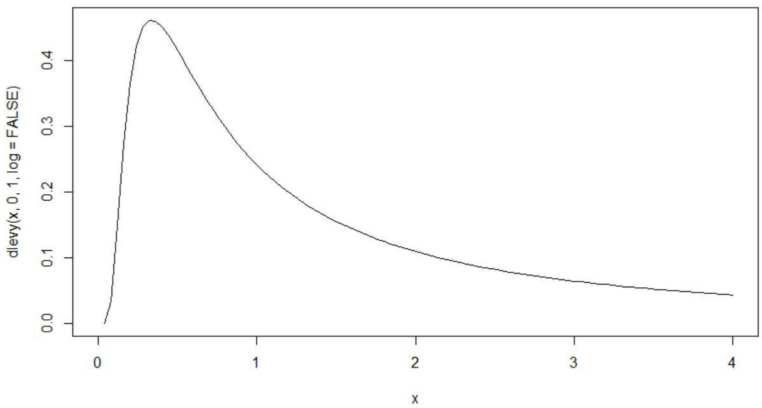
Slika 2: *Cauchyjeva distribucija* - $Ca(0, 1)$

Primjer 2.4. *Lévyjeva distribucija* $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$.
Njena funkcija gustoće je

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}}$$

i koncentrirana je na $\langle \mu, \infty \rangle$.

Na sljedećoj slici može se vidjeti graf Lévyjeve distribucije s parametrima $a = 0$ *i* $b = 1$*, pri čemu je* a *parametar pomaka i* b *parametar skaliranja.*



Slika 3: *Lévyjeva distribucija* - *Lévy*$(0, 1)$

To su jedine distribucije čije funkcije gustoća su poznate u zatvorenoj formi. Osim njih, specijalnim slučajevima se smatraju i neke distribucije čije funkcije gustoće nisu poznate i koje se karakteriziraju pomoću karakterističnih funkcija, kao što je:

Primjer 2.5. *Holtsmarkova distribucija, odnosno gravitacijsko polje zvijezda,* $S_{3/2}(\sigma, 0, \mu)$.
U astrologiji, problem je izračunati komponentu x gravitacijske sile. Početna ideja je da se sunčev sustav pojavljuje kao „nasumična nakupina" točaka s „nasumično varirajućim masama". Dogovor je da se gustoća tretira kao slobodan parametar, a X_ρ predstavlja komponentu x gravitacijske sile s gustoćom ρ. Pretpostavimo da se dvije nezavisne „nasumične nakupine zvijezda" gustoća s i t mogu kombinirati u jednu nakupinu gustoće $s+t$, to jest da vrijedi:

$$X_s + X_t \stackrel{d}{=} X_{s+t}.$$

Ukoliko se gustoća promijeni od 1 do λ, udaljenost se promijeni od 1 do $1/\sqrt[3]{\lambda}$. Budući da gravitacijska sila djeluje obrnuto od korijena udaljenosti, slijedi da X_t mora imati istu distribuciju kao i $t^{\frac{2}{3}}X_1$ te se prema tome distribucija od X_t razlikuje se samo za parametar skaliranja, to jest to je simetrična α-stabilna distribucija s $\alpha = \frac{3}{2}$.
Detaljniji opis ovog problema može se pronaći u [3] i u [11, stranica 41.].

2.4 Svojstva stabilnih slučajnih varijabli

Prvo svojstvo prikazuje kako je distribuiran zbroj dviju stabilnih slučajnih varijabli.

Svojstvo 2.1. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable takve da je $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i), i = 1, 2$. Tada je slučajna varijabla $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, pri čemu je*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Dokaz. Provodi se korištenjem karakteristične funkcije.

Za $\alpha \neq 1$, s obzirom da su X_1 i X_2 nezavisne, vrijedi:

$$\begin{aligned}\ln E\left[e^{i\theta(X_1+X_2)}\right] &= \ln E\left[e^{i\theta X_1}e^{i\theta X_2}\right] \\ &= \ln E\left[e^{i\theta X_1}\right] + \ln E\left[e^{i\theta X_2}\right] \\ &= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha + i|\theta|^\alpha \operatorname{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) + i\theta(\mu_1+\mu_2) \\ &= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha\left(1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}\operatorname{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\theta(\mu_1+\mu_2).\end{aligned}$$

Za $\alpha = 1$ dokaz se provodi analogno. □

Sljedeće svojstvo pokazuje kako dodavanje konstante utječe na distribuciju stabilne slučajne varijable.

Svojstvo 2.2. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i $a \in \mathbb{R}$, konstanta. Tada vrijedi*

$$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a).$$

Dokaz. Za $\alpha \neq 1$, korištenjem karakteristične funkcije, vrijedi:

$$\begin{aligned}\ln E\left[e^{i\theta(X+a)}\right] &= \ln E\left[e^{i\theta X}e^{i\theta a}\right] \\ &= -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1 - \beta\operatorname{sign}(\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\theta(\mu + a).\end{aligned}$$

Za $\alpha = 1$ dokaz se provodi analogno. □

Iz prethodno pokazanog uočava se zašto se μ naziva parametar pomaka.

Množenje konstantom utječe na distribuciju stabilne slučajne varijable na sljedeći način:

Svojstvo 2.3. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i neka je $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$, konstanta. Tada vrijedi*

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma, \operatorname{sign}(a)\beta, a\mu) & \alpha \neq 1, \\ S_1(|a|\sigma, \operatorname{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Dokaz. Za $\alpha \neq 1$, korištenjem karakteristične funkcije, vrijedi:

$$\begin{aligned}\ln E\left[e^{i\theta(aX)}\right] &= -\sigma^\alpha|\theta a|^\alpha\left(1 - \beta\operatorname{sign}(\theta a)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i(\theta a)\mu \\ &= -(\sigma|a|)^\alpha|\theta|^\alpha\left(1 - \beta\operatorname{sign}(a)\operatorname{sign}(\theta)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\theta(a\mu).\end{aligned}$$

Za $\alpha = 1$ dokaz se provodi analogno. □

Iako se σ naziva parametar skaliranja, može se uočiti da za $\alpha = 1$ množenje konstantom utječe na distribuciju slučajne varijable na nelinearan način ukoliko je $\beta \neq 0$.

U sljedećem korolaru prikazano je kako izgleda distribucija zbroja jednakodistribuiranih stabilnih slučajnih varijabli.

Korolar 2.1. *Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ n.j.d., takve da $X_i = S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \forall i = 1, \dots, n$. Tada vrijedi*

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}) & \alpha \neq 1, \\ nX_1 + \frac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln n & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dokaz. Provodi se na analogan način kao i dokaz svojstva 2.1, korištenjem svojstava 2.1, 2.2 i 2.3. □

Parametar μ ima najmanju važnost jer utječe samo na pomak te se često pretpostavlja da je $\mu = 0$, radi jednostavnosti. Kad je $\mu = 0$ vrijedi:

Svojstvo 2.4. *Za svaki $\alpha \in \langle 0, 2\rangle$ vrijedi*

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Longleftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0). \tag{2.7}$$

Dokaz. Provodi se korištenjem karakteristične funkcije i svojstva 2.3, uz konstantu $a = -1$. □

Sljedeća svojstva karakteriziraju strogo stabilne i simetrične α-stabilne slučajne varijable.

Svojstvo 2.5. *Slučajna varijabla $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ je simetrična oko μ ako i samo ako $\beta = 0$. Simetrična je ako i samo ako $\beta = 0$ i $\mu = 0$.*

Dokaz. Kako bi slučajna varijabla bila simetrična, nužan i dovoljan uvjet je da njena karakteristična funkcija bude realna (vidi [5], str. 165).
Iz karakteristične funkcije stabilne slučajne varijable vidi se da je to samo kad vrijedi $\beta = \mu = 0$.
Druga tvrdnja slijedi iz svojstva 2.2. □

Prethodno svojstvo karakterizira β kao parametar asimetričnosti.

Svojstvo 2.6. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, pri čemu je $\alpha \neq 1$. Tada je X strogo stabilna ako i samo ako $\mu = 0$.*

Dokaz. Neka su X_1 i X_2 nezavisne kopije slučajne varijable X i $a, b > 0$, proizvoljne konstante. Iz svojstava 2.1 i 2.3 slijedi:

$$aX_1 + bX_2 \sim S_\alpha(\sigma(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, \mu(a + b)).$$

Definira li se konstanta $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ i izabere d proizvoljno, iz svojstava 2.2 i 2.3 slijedi:

$$cX + d \sim S_\alpha(\sigma(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, \mu(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + d).$$

Dakle, vrijedi

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, d = 0$$

ako i samo ako

$$\mu = 0.$$

□

Iz prethodna dva svojstva vidi se da ukoliko je X simetrična stabilna slučajna varijabla, ujedno je i strogo stabilna, dok obrat ne mora vrijediti.

Korolar 2.2. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, pri čemu je $\alpha \neq 1$. Tada je $X - \mu$ strogo stabilna.*

Dokaz. Provodi se korištenjem svojstava 2.2 i 2.6. □

Svojstvo 2.7. *$X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$ je strogo stabilna ako i samo ako $\beta = 0$.*

Dokaz. Neka su X_1 i X_2 nezavisne kopije slučajne varijable X i $a, b > 0$, proizvoljne konstante. Iz svojstava 2.1 i 2.3 slijedi:

$$aX_1 + bX_2 \sim S_1(\sigma(a + b), \beta, \mu(a + b) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(a \ln a + b \ln b)).$$

Uz to je i

$$(a + b)X \sim S_1(\sigma(a + b), \beta, \mu(a + b) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(a + b)\ln(a + b)).$$

Dakle, vrijedi da je $d = 0$ ako i samo ako

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} (a + b)X,$$

to jest ako i samo ako je

$$\beta(a \ln a + b \ln b) = \beta(a + b)\ln(a + b).$$

Kako bi to vrijedilo, nužno i dovoljno je da je $\beta = 0$. □

Korolar 2.3. *Za* $1-$*stabilnu slučajnu varijablu vrijedi:*

(i) Ukoliko nije strogo stabilna ne može postati strogo stabilna pomicanjem.

(ii) Svaka strogo stabilna može postati simetrična pomicanjem.

Dokaz. Dokazi slijede izravno iz prethodnih svojstava. Neka je X 1-stabilna slučajna varijabla.

Ako X nije strogo stabilna, prema prethodnom svojstvu je $\beta \neq 0$. Budući da se pomicanjem mijenja samo parametar pomaka μ, parametar β ostaje jednak početnoj vrijednosti za svaki μ te stoga X ne može biti strogo stabilna.

Druga tvrdnja slijedi izravno iz svojstva 2.7. $\square$

Karakteristika stabilnih slučajnih varijabli je da nemaju konačnu varijancu, a prema tome ni momente višeg reda. Jedini izuzetak je normalna slučajna varijabla. Upravo to pokazuju iduća dva svojstva.

Svojstvo 2.8. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \alpha \in \langle 0, 2 \rangle$. *Tada vrijedi*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha P\{X > \lambda\} = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha P\{X < -\lambda\} = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha.$$

Pri tome je

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \alpha \neq 1, \\ 2/\pi & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dokaz. Može se pronaći u [3], str. 576. $\square$

Izravno iz prethodnog svojstva slijedi i:

Svojstvo 2.9. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \alpha \in \langle 0, 2 \rangle$. *Tada vrijedi*

$$E|X|^p < \infty, \ \forall p \in \langle 0, \alpha \rangle,$$

$$E|X|^p = \infty, \ \forall p \geq \alpha.$$

Svojstvo 2.10. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, *pri čemu je* $\alpha \in \langle 0, 2 \rangle$ *i u slučaju* $\alpha = 1$ *vrijedi* $\beta = 0$. *Tada postoji konstanta* $c_{\alpha,\beta}(p)$ *takva da vrijedi*

$$(E|X|^p)^{\frac{1}{p}} = c_{\alpha,\beta}(p)\sigma.$$

Pri tome je $c_{\alpha,\beta}(p) = (E|X_0|^p)^{\frac{1}{p}}$, *gdje je* $X_0 \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$.

Dokaz. Dokaz je izravna posljedica činjenice da je $X \stackrel{d}{=} \sigma X_0$. □

Svojstvo 2.11. *Za $\alpha \in \langle 1, 2]$, parametar pomaka μ jednak je očekivanju.*

Dokaz. Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $\alpha \in \langle 1, 2]$.
Iz 2.9 očito je da za $\alpha \in \langle 1, 2\rangle$ X ima konačno očekivanje.
Također, u slučaju $\alpha = 2$, očekivanje je konačno jer je tada X Gaussovska.
Slijedi da X ima konačno očekivanje i prema korolaru 2.2 $X - \mu$ je strogo stabilna.
Ako su X_1 i X_2 nezavisne kopije slučajne varijable X i $a, b > 0$ proizvoljne konstante, vrijedi:

$$a(X_1 - \mu) + b(X_2 - \mu) \stackrel{d}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}(X - \mu).$$

Primjeni li se očekivanje na obje strane jednakosti, vrijedi:

$$a(EX - \mu) + b(EX - \mu) = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}(EX - \mu).$$

Slijedi da je $EX = \mu$. □

2.5 Simetrične stabilne slučajne varijable

Ukoliko je X simetrična α-stabilna slučajna varijabla, koristi se oznaka

$$X \sim S\alpha S.$$

Iz svojstva 2.5 vidi se da je to ekvivalentno tvrdnji da je $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Budući da je karakterizirana samo parametrom σ, naziva se standardnom ukoliko je $\sigma = 1$.

Njena karakteristična funkcija je tada oblika

$$E[e^{i\theta X}] = e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha}.$$

Sljedeća propozicija pokazuje da se, ukoliko vrijedi $\alpha \in \langle 0, \alpha' \rangle$, $S\alpha' S$ slučajna varijabla uvijek može transformirati u $S\alpha S$.

Propozicija 2.1. *Neka je $X \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$, pri čemu je $0 < \alpha < \alpha' \leq 2$ i A $\alpha/\alpha' -$ stabilna slučajna varijabla, nezavisna od X, potpuno asimetrična nadesno s Laplaceovom transformacijom*

$$E\left[e^{-\gamma A}\right] = e^{-\gamma^{\alpha/\alpha'}}, \; \gamma > 0,$$

to jest

$$A \sim S_{\alpha/\alpha'}((\cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^{\alpha'/\alpha}, 1, 0).$$

Tada vrijedi

$$Z = A^{1/\alpha'} X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0).$$

Dokaz. Za $\theta \in \mathbb{R}$, vrijedi:

$$\begin{aligned} E\left[e^{i\theta Z}\right] &= E\left[e^{i\theta A^{1/\alpha'}X}\right] = E\left[E\left[e^{i\theta A^{1/\alpha'}X}|A\right]\right] = E\left[e^{-\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'}A}\right] \\ &= e^{-(\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'})^{\alpha/\alpha'}} = e^{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Ako je $X \sim N(0, \sigma^2)$ i A pozitivna $\alpha/2$-stabilna slučajna varijabla, neovisna o X, vrijedi:

$$Z = A^{1/2}X \sim S\alpha S.$$

Dodatno, ako je $X \sim N(0, \sigma^2)$, tada je $Z = A^{1/2}X \sim N(0, \sigma^2 A)$. Iz toga slijedi da se svaka $S\alpha S$ slučajna varijabla može promatrati kao uvjetno normalna.

Sličan rezultat može se dobiti i za asimetričnu stabilnu slučajnu varijablu. Ako je $X \sim S_{\alpha'}(\sigma', \beta', 0)$, $\alpha' \neq 1$, vrijedi:

$$Z = A^{1/\alpha'}X \sim \begin{cases} S_\alpha(\sigma, \beta, 0), & \alpha \neq 1, \\ S_1(\sigma, 0, \mu), & \alpha = 1. \end{cases}$$

2.6 Svojstva specijalnih slučajeva stabilnih slučajnih varijabli

Zanimljivo je promotriti što se može zaključiti iz prethodnih svojstava za specijalne slučajeve stabilnih slučajnih varijabli, navedene u primjerima u prvom potpoglavlju.
Za normalnu distribuciju vrijedi:

- Iz svojstva 2.5 se može zaključiti da je simetrična oko μ s $\alpha = 2$.
- Prema svojstvu 2.11 parametar pomaka μ jednak je očekivanju.

Za Cauchyjevu distribuciju vrijedi:

- Iz svojstva 2.5 se može zaključiti da je simetrična oko μ s $\alpha = 1$.
- Prema svojstvu 2.7 ona je i strogo stabilna.
- Prema svojstvu 2.9 nema konačne momente, čak ni 1. reda.
- Iz korolara 2.3 vrijedi da može postati simetrična pomicanjem.

- Prema izvodu u prethodnom potpoglavlju slijedi i da može biti uvjetno normalna, ovisno o lokaciji.

Za Lévyjevu distribuciju vrijedi:

- Budući da je $\beta = 1$, ona je potpuno asimetrična udesno, s $\alpha = 1/2$.
- Prema svojstvu 2.9 nema konačne momente, čak ni 1. reda.

Za Holtsmarkovu distribuciju vrijedi:

- Iz svojstva 2.5 zaključuje se da je simetrična oko μ s $\alpha = 3/2$.
- Prema svojstvu 2.9 ima konačan moment 1. reda dok su joj varijanca i viši momenti beskonačni.

2.7 Serijska reprezentacija stabilne slučajne varijable

Neka je proces $\{N(t), t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom λ i $\tau_{i+1} - \tau_i, i \geq 1$ međudolazna vremena koja su nezavisna i eksponencijalno distribuirana s očekivanjem $\frac{1}{\lambda}$. Može se pokazati da se α-stabilna slučajna varijabla X, pri čemu je $\alpha \in \langle 0, 2 \rangle$, može prikazati kao konvergentna suma slučajnih varijabli s dolaznim vremenima Poissonovog procesa.

Sljedeća propozicija pokazuje da se stabilna slučajna varijabla može prikazati kao neprekidan niz. Njen dokaz može se pronaći u [8, Propozicija 1.4.1.].

Propozicija 2.2. *Neka $\{\tau_i\}$ označava dolazna vremena Poissonovog procesa s intenzitetom 1 i $\{R_i\}$ neka su n.j.d. slučajne varijable, nezavisne od niza $\{\tau_i\}$. Ako niz*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{-\frac{1}{\alpha}} R_i$$

konvergira g.s., tada konvergira prema strogo α-stabilnoj slučajnoj varijabli.

Budući da prikazani niz konvergira prema stabilnoj slučajnoj varijabli samo ukoliko konvergira g.s., moguće je dodati određene pretpostavke kako bi se osiguralo da niz konvergira. U tu svrhu, zahtjeva se da je $\alpha \in \langle 0, 2 \rangle$ i da su distribucije od R_i simetrične i imaju konačne momente reda α, kako bi dobivena slučajna varijabla bila $S\alpha S$.
Dakle, uvode se sljedeće pretpostavke:

- $\{\epsilon_i\}, \{W_i\}, \{\Gamma_i\}, i = 1, 2, \dots$ su nezavisni nizovi slučajnih varijabli.
- $\epsilon_i, i = 1, 2, \dots$ su n.j.d. Rademacherove varijable, to jest $\epsilon_i \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- $W_i, i = 1, 2, \dots$ su slučajne varijable s konačnim apsolutnim momentima reda α.
- $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots$ su dolazna vremena Poissonovog procesa oblika $\Gamma_i = \sum_{j=1}^{i} e_j$, pri čemu su e_j n.j.d. eksponencijalne slučajne varijable takve da je $Ee_j = 1$. Prema tome, $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots$ su zavisne i nisu jednako distribuirane. Γ_i ima gamma distribuciju s parametrom i.
- R_i iz prethodne propozicije se zamjenjuje prethodno definiranim slučajnim varijablama na način da je $R_i = \epsilon_i W_i$, pri čemu je $W_i = |R_i|$ i $\epsilon_i = \pm 1$ predstavlja predznak slučajne varijable R_i.
- Γ_i se piše umjesto τ_i zbog gamma distribucije.

Uvodeći navedene pretpostavke, slijedi teorem [8, Poglavlje 1.5.]:

Teorem 2.2. *Neka je $\alpha \in \langle 0, 2 \rangle$. Tada suma $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i$ konvergira g.s. prema slučajnoj varijabli*

$$X \sim S_\alpha \left(\left(C_\alpha^{-1} E|W_1|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0 \right),$$

pri čemu je C_α konstanta definirana u svojstvu 2.8.

Dakle, za svaku simetričnu α-stabilnu slučajnu varijablu vrijedi iduća tvrdnja:

Korolar 2.4 (Serijska reprezentacija)**.** *Svaka slučajna varijabla $S\alpha S, \alpha \in \langle 0, 2 \rangle$, s distribucijom $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ ima serijsku reprezentaciju*[1]

$$\sigma \left(\frac{C_\alpha}{E|W_1|^\alpha} \right)^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i$$

Na ovaj način se mogu generirati $S\alpha S$ slučajne varijable, no to nije dobro rješenje jer je konvergencija prespora.

Sličan rezultat vrijedi i za α-stabilne slučajne varijable koje nisu simetrične. Promatraju li se ponovo nezavisni nizovi slučajnih varijabli $\{W_i\}, i = 1, 2, \dots$ i $\{\Gamma_i\}, i = 1, 2, \dots$ pri čemu su $\{\Gamma_i\}$ definirani kao ranije, a za $\{W_i\}$ vrijedi:

[1] Ako su X i Y dvije slučajne varijable, ne nužno definirane na istom vjerojatnosnom prostoru, kaže se da X ima reprezentaciju Y ako $X \stackrel{d}{=} Y$.

- $E|W_1|^\alpha < \infty$ za $\alpha \in \langle 0,2\rangle, \alpha \neq 1$,
- $E|W_1 ln|W_1|| < \infty$ za $\alpha = 1$,

vrijedi sljedeći teorem o serijskoj reprezentaciji [8, Poglavlje 1.5.]:

Teorem 2.3. *Suma*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i - k_i^{(\alpha)} \right),$$

pri čemu je

$$k_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \alpha \in \langle 0,1\rangle, \\ E\left(W_1 \int_{|W_1|/i}^{|W_1|/i-1} x^{-2} \sin x dx \right) & \alpha = 1, \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(i^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (i-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) EW_1 & \alpha > 1, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots,$ *konvergira g.s. u* $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ *slučajnu varijablu s* $\sigma^\alpha = \dfrac{E|W_1|^\alpha}{C_\alpha}$, *a* C_α *definiran u 2.8 i* $\beta = \dfrac{E|W_1|^\alpha \operatorname{sign} W_1}{E|W_1|^\alpha}$.
U slučaju kad je $\alpha = 1$, *niz*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\Gamma_1^{-1} W_i - EW_1 \int_{1/i}^{1/(i-1)} \frac{\sin x}{x^2} dx \right)$$

konvergira g.s. u $S_1(\sigma, \beta, \mu)$ *slučajnu varijablu, pri čemu su* σ *i* β *definirani kao ranije i* $\mu = -EW_1 \ln |W_1|$.

3 Stabilan slučajan vektor

U ovom poglavlju proširena je definicija stabilne distribucije na višedimenzionalni slučaj. Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, funkcije gustoće uglavnom nisu poznate u eksplicitnom obliku i stoga se koriste karakteristične funkcije. Definirana je karakteristična funkcija stabilnog slučajnog vektora te su korištenjem karakteristične funkcije pokazana osnovna svojstva strogo stabilnog, simetričnog stabilnog i subgaussovskog slučajnog vektora. Naglasak je stavljen na usporedbu sa svojstvima normalnog stabilnog slučajnog vektora.

3.1 Definicija stabilnog slučajnog vektora

Multivarijatna stabilna distribucija definira se jednostavno širenjem definicije stabilne slučajne varijable na prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.1. *Slučajan vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je* ***stabilan slučajan vektor*** *u $\mathbb{R}^n$ ako za bilo koje pozitivne brojeve a i b postoji pozitivan broj c i vektor $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi*

$$a\boldsymbol{X}^{(1)} + b\boldsymbol{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} c\boldsymbol{X} + \boldsymbol{d}, \tag{3.1}$$

pri čemu $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ predstavljaju nezavisne kopije slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$.

Ukoliko u jednadžbi (3.1) vrijedi $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$, $\forall a, b > 0$ slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ se naziva **strogo stabilan**. Ako stabilan slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ zadovoljava relaciju

$$P\{\boldsymbol{X} \in B\} = P\{-\boldsymbol{X} \in B\},$$

za svaki Borelov skup B u $\mathbb{R}^n$, naziva se **simetričan stabilan**.

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, za stabilan slučajan vektor vrijedi:

Korolar 3.1. *Slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ je stabilan ako i samo ako za bilo koji $n \geq 2$ postoje $\alpha \in \langle 0, 2]$ i vektor $\boldsymbol{d}_n$ takvi da vrijedi*

$$\boldsymbol{X}^{(1)} + \boldsymbol{X}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{X}^{(n)} \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{d}_n, \tag{3.2}$$

pri čemu su $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}$ nezavisne kopije slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$.

Definicija 3.2. *Slučajan vektor $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ se naziva α-stabilan ako vrijedi (3.1) uz konstantu c za koju vrijedi $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$, odnosno ako vrijedi (3.2). Koeficijent α je* ***indeks stabilnosti*** *ili karakteristični eksponent vektora $\boldsymbol{X}$.*

Za normalan slučajan vektor vrijedi:
Slučajan vektor je normalan ako i samo ako su sve njegove linearne kombinacije komponenata normalne slučajne varijable.

Nameće se pitanje kakva je veza između distribucije stabilnog slučajnog vektora i njegovih komponenata. Sljedeći teorem pokazuje da ako je $\boldsymbol{X}$ stabilan slučajan vektor, tada su sve linearne kombinacije njegovih komponenata stabilne slučajne varijable. Posebno, i svaka pojedina komponenta je stabilna slučajna varijabla.

Teorem 3.1. *Neka je* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *stabilan (strogo stabilan, simetričan stabilan) slučajan vektor u* $\mathbb{R}^n$*. Tada postoji konstanta* $\alpha \in \langle 0, 2]$, *takva da za* c *iz jednadžbe (3.1) vrijedi*

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha.$$

Dodatno, bilo koja linearna kombinacija komponenata slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ *oblika*

$$Y = \sum_{k=1}^{n} v_k X_k$$

je $\alpha-$*stabilna (strogo* $\alpha-$*stabilna, simetrična* $\alpha-$ *stabilna) slučajna varijabla.*

Dokaz. Neka su $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ nezavisne kopije stabilnog slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor u $\mathbb{R}^n$.
Neka su Y_1 i Y_2 nezavisne kopije slučajne varijable Y, tj:

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{n} v_k X_k^{(1)}$$

i

$$Y_2 = \sum_{k=1}^{n} v_k X_k^{(2)}.$$

Neka su $a, b > 0$, fiksni. Budući da je $\boldsymbol{X}$ stabilna, prema definiciji (3.1) postoje $c > 0$ i $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi

$$a\boldsymbol{X}^{(1)} + b\boldsymbol{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} c\boldsymbol{X} + \boldsymbol{d}.$$

Usporede li se karakteristične funkcije dva vektora, jasno je da ukoliko su oni jednaki po distribuciji, i odgovarajuće linearne kombinacije njihovih komponenata su jednake po distribuciji.

Prema tome, vrijedi

$$\begin{aligned} aY_1 + bY_2 &= \sum_{k=1}^{n} v_k \left(aX_k^{(1)} + bX_k^{(2)} \right) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} v_k \left(cX_k + d_k \right) \\ &= c \sum_{k=1}^{n} v_k X_k + \sum_{k=1}^{n} v_k d_k = cY + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{d}). \end{aligned}$$

Pri tome je $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{d})$ oznaka za skalarni produkt vektora $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{d}$.
Iz definicije 2.1 se vidi da je Y stabilna slučajna varijabla, a prema teoremu 2.1 postoji konstanta $\alpha \in \langle 0, 2]$ takva da vrijedi

$$c^{\alpha} = a^{\alpha} + b^{\alpha}.$$

□

Vrijedi li i obrat te tvrdnje? Sljedeći teorem daje odgovor na pitanje što se može reći o distribuciji slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ ukoliko su sve njegove linearne kombinacije stabilne slučajne varijable.

Teorem 3.2. *Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ slučajan vektor. Tada vrijedi:*

(i) Ako sve linearne kombinacije $Y = \sum_{k=1}^{n} v_k X_k$ imaju strogo stabilne distribucije, $\boldsymbol{X}$ je strogo stabilan slučajan vektor.

(ii) Ako su sve linearne kombinacije $Y = \sum_{k=1}^{n} v_k X_k$ simetrične stabilne, $\boldsymbol{X}$ je simetričan stabilan slučajan vektor.

(iii) Ako su sve linearne kombinacije $Y = \sum_{k=1}^{n} v_k X_k$ stabilne s $\alpha \geq 1$, $\boldsymbol{X}$ je stabilan slučajan vektor.

Dokaz. Može se pronaći u [8, Poglavlje 2.1., Teorem 2.1.5.]. □

Dakle, ukoliko je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, a linearne kombinacije slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ nisu simetrične ni strogo stabilne, $\boldsymbol{X}$ ne mora biti stabilan slučajan vektor. Primjer koji to potvrđuje može se naći u [8, Poglavlje 2.2.].

3.2 Karakteristična funkcija α-stabilnog slučajnog vektora

Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ α-stabilan slučajan vektor u $\mathbb{R}^n$. Za njegovu **karakterističnu funkciju** se uvodi sljedeća oznaka:

$$\Phi_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n) = E\left[e^{i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X})}\right] = E\left[e^{i\sum_{k=1}^n \theta_k X_k}\right],$$

pri čemu $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X})$ označava skalarni produkt.

Za karakterističnu funkciju $\Phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ vrijedi:

Teorem 3.3. *Neka je $\alpha \in \langle 0, 2]$. $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ je α-stabilan slučajan vektor ako i samo ako postoji konačna mjera Γ na jediničnoj sferi $S_n \in \mathbb{R}^n$ i vektor $\boldsymbol{\mu}^0 \in \mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi:*

$$\Phi_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} e^{-\int_{S_n} |(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{s})|^\alpha \left(1 - i\,\mathrm{sign}((\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{s}))\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(ns) + i(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}^0)}, & \alpha \neq 1, \\ e^{-\int_{S_n} |(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{s})|\left(1 + i\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sign}((\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{s}))\ln|(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{s})|\right)\Gamma(ns) + i(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}^0)}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Pri tome je par $(\Gamma, \boldsymbol{\mu}^0)$ jedinstven.

Definicija 3.3. *Za vektor $\boldsymbol{X}$ u teoremu 3.3 se kaže da ima **spektralnu reprezentaciju** $(\Gamma, \boldsymbol{\mu}^0)$. Mjera Γ se naziva **spektralna mjera** α-stabilnog slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$.*

U prethodnom teoremu, vektor $\boldsymbol{\mu}^0$ ima sličnu ulogu kao parametar pomaka μ u jednodimenzionalnom slučaju, dok mjera Γ zamjenjuje i parametar skaliranja σ i parametar asimetričnosti β.

Prema teoremu 3.1 bilo koja linearna kombinacija $Y_v = \sum_{k=1}^n v_k X_k$ α-stabilnog slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ ima α-stabilnu distribuciju $S_\alpha(\sigma_v, \beta_v, \mu_v)$. Kako bi se odredili parametri σ_v, β_v i μ_v, neka je $\gamma \in \mathbb{R}$ proizvoljan i $\boldsymbol{\theta} = \gamma\boldsymbol{v}$ u jednadžbi (3.3). Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} E\left[e^{i(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{X})}\right] &= \begin{cases} e^{-\int_{S_n} |(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha \left(1 - i\,\mathrm{sign}((\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}))\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(ns) + i(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0)}, & \alpha \neq 1, \\ e^{-\int_{S_n} |(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|\left(1 + i\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sign}((\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}))\ln|(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|\right)\Gamma(ns) + i(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0)}, & \alpha = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-|\gamma|^\alpha\left[\int_{S_n} |(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha\Gamma(ns) - i\,\mathrm{sign}\,\gamma\tan\frac{\pi\alpha}{2}\int_{S_n}|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha\,\mathrm{sign}((\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}))\Gamma(ns)\right] + i\gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0)}, & \alpha \neq 1, \\ e^{-|\gamma|\left[\int_{S_n} |(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|\Gamma(ns) + i\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sign}\,\gamma\int_{S_n}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})\ln|(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|\Gamma(ns)\right] + i\gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0)}, & \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Prema tome, parametri za linearnu kombinaciju slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ imaju sljedeći oblik:

$$\sigma_v = \left(\int_{S_n} |(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha\Gamma(ns)\right)^{1/\alpha}, \tag{3.4}$$

$$\beta_v = \frac{\int_{S_n} |(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha \operatorname{sign}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})\Gamma(ns)}{\int_{S_n} |(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha \Gamma(ns)} \tag{3.5}$$

$$\mu_v = \begin{cases} (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0), & \alpha \neq 1, \\ (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0) - \frac{2}{\pi}\int_{S_n} (\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}) \ln|(\gamma\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|\Gamma(ns), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, najlakše je svojstva stabilnog slučajnog vektora proučavati korištenjem karakterističnih funkcija. U sljedeća tri potpoglavlja diskutirana su neka svojstva posebnih vrsta stabilnog slučajnog vektora, to jest strogo stabilnog slučajnog vektora, SαS slučajnog vektora te subgaussovskog slučajnog vektora.

3.3 Strogo stabilni slučajni vektori

U ovom potpoglavlju strogo stabilni slučajni vektori karakterizirani su pomoću karakterističnih funkcija. Potrebno je istražiti koje uvjete moraju zadovoljavati Γ i $\boldsymbol{\mu}^0$ iz jednadžbe (3.3) kako bi $\Phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ bila karakteristična funkcija strogo α-stabilnog slučajnog vektora.

Iz teorema 3.2, nužan i dovoljan uvjet da vektor $\boldsymbol{X}$ bude strogo α-stabilan je da su linearne kombinacije $Y_v = \sum_{k=1}^n v_k X_k$ strogo α-stabilne za bilo koji $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

U slučaju $\alpha \neq 1$ prema svojstvu 2.6 nužno i dovoljno je da vrijedi

$$\mu_v = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}^0) = 0,$$

odnosno $\boldsymbol{\mu}^0 = 0$.

U slučaju $\alpha = 1$ prema svojstvu 2.7 nužno i dovoljno je da vrijedi $\beta_v = 0$, to jest

$$\int_{S_n} |(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})|^\alpha \operatorname{sign}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})\Gamma(ns) = \int_{S_n} (\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})^\alpha \Gamma(ns) = 0.$$

Iz toga slijede teorem i korolar u nastavku.

Teorem 3.4. *Neka je $\alpha \in \langle 0, 2]$. $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ je strogo α-stabilan slučajan vektor ako i samo ako vrijedi:*

(i) $\alpha \neq 1$:

$$\boldsymbol{\mu}^0 = 0,$$

(ii) $\alpha = 1$:

$$\int_{S_n} s_k \Gamma(ns) = 0, \ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

Korolar 3.2. *Neka je* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ α*-stabilan slučajan vektor i* $\alpha \in \langle 0, 2]$. *Tada je* $\boldsymbol{X}$ *strogo stabilan ako i samo ako su sve njegove komponente* $X_k, k = 1, \ldots, n$ *strogo stabilne slučajne varijable.*

3.4 Simetrični stabilni slučajni vektori

Na analogan način kao u prethodnom potpoglavlju, analiziraju se Γ i $\boldsymbol{\mu}^0$ iz jednadžbe (3.3) kako bi $\Phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ bila karakteristična funkcija simetričnog α-stabilnog slučajnog vektora.

Teorem 3.5. *Neka je* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ α*-stabilan slučajan vektor i* $\alpha \in \langle 0, 2]$. *Tada je* $\boldsymbol{X}$ *simetričan stabilan ako i samo ako postoji jedinstvena simetrična konačna mjera*[2] Γ *na jediničnoj sferi* S_n *takva da vrijedi:*

$$E[e^{i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X})}] = e^{-\int_{S_n} |(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{s})|^\alpha \Gamma(ns)}. \tag{3.7}$$

Γ *je spektralna mjera simetričnog* α*-stabilnog slučajnog vektora* $\boldsymbol{X}$.

Dokaz. Nužan i dovoljan uvjet da stabilan slučajan vektor $\boldsymbol{X}$ bude simetričan je da mu je karakteristična funkcija realna, to jest da vrijedi jednakost (3.7).
Nadalje, neka je $\tilde{\Gamma}(B) = \frac{1}{2}(\Gamma(B) + \Gamma(-B))$, $\forall B \in S_n$ Borelov skup. Budući da je $\tilde{\Gamma}(-B) = \tilde{\Gamma}(B)$, $\tilde{\Gamma}$ je simetrična mjera. S obzirom da bi jednakost (3.7) vrijedila i za $\tilde{\Gamma}$, zbog jedinstvenosti je $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ pa je i Γ simetrična. □

Za razliku od strogo stabilnog slučajnog vektora, za simetrične stabilne slučajne vektore ne vrijedi da su simetrični ako i samo ako su im komponente simetrične. No vrijedi da je $\boldsymbol{X}$ simetričan ako i samo ako je $\boldsymbol{\mu}^0 = 0$ i Γ je simetrična.

Primjer jednog asimetričnog α-stabilnog slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ kojemu su sve komponente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ simetrične je:

Primjer 3.1. *Neka su* X_1, X_2, X_3 *n.j.d. slučajne varijable takve da vrijedi* $X_i \sim S_1(1, 1, 0)$, $i = 1, 2, 3$ *i vektor* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ *za koji vrijedi:*

$$Y_1 = X_1 - X_2,$$

[2] Γ je simetrična mjera na S_n ako $\forall B \in S_n$ vrijedi $\Gamma(B) = \Gamma(-B)$.

$$Y_2 = X_2 - X_3.$$

Prema svojstvu 2.4 za $\alpha = 1$ vrijedi:

$$-X_i \sim S_1(1, -1, 0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Stoga, za Y_j, $j = 1, 2$, korištenjem svojstva 2.1 vidi se da vrijedi:

$$Y_j \sim S_1(2, 0, 0)$$

te su Y_1 i Y_2 simetrične 1-stabilne slučajne varijable.
Međutim, vektor $\boldsymbol{Y}$ nije simetričan jer linearna kombinacija

$$\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 = \theta_1(X_1 - X_2) + \theta_2(X_2 - X_3) = \theta_1 X_1 + (\theta_2 - \theta_1)X_2 - \theta_2 X_3$$

nema parametar pomaka $\mu = 0$ osim kad vrijedi $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ ili $\theta_1 = \theta_2$.

3.5 Subgaussovski slučajni vektori

Ukoliko su $Z \sim N(0, \sigma^2)$ i A $\alpha/2$-stabilna slučajna varijabla, nezavisna od Z i potpuno asimetrična udesno, iz propozicije 2.2 znamo da je slučajna varijabla $X = A^{1/2}Z$ SαS. Isti rezultat može se proširiti i na stabilne slučajne vektore.
Neka je

$$A \sim S_{\alpha/2}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}, 1, 0\right), \quad \alpha \in \langle 0, 2 \rangle,$$

tako da je Laplaceova transformacija

$$E\left[e^{-\gamma A}\right] = e^{-\gamma^{\alpha/2}}, \ \gamma > 0.$$

Neka je $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ normalan vektor s očekivanjem 0 u $\mathbb{R}^n$ nezavisan od A. Budući da je za bilo koje realne brojeve $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearna kombinacija

$$\sum_{k=1}^{n} v_k A^{1/2} Z_k = A^{1/2} \sum_{k=1}^{n} v_k Z_k$$

SαS slučajna varijabla, prema teoremu 3.2 slučajan vektor

$$\boldsymbol{X} = (A^{1/2}Z_1, A^{1/2}Z_2, \ldots, A^{1/2}Z_n) \tag{3.8}$$

ima SαS distribuciju u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.4. *Bilo koji vektor* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ *distribuiran kao u jednadžbi (3.8) naziva se* ***subgaussovski SαS slučajan vektor*** *s pripadnim normalnim vektorom* $\boldsymbol{Z}$.

Propozicija 3.1. *Subgaussovski SαS slučajan vektor ima karakterističnu funkciju*

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right] = e^{-\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j R_{ij}\right|^{\alpha/2}} \tag{3.9}$$

pri čemu su $R_{ij} = EZ_iZ_j,\ i,j = 1,\ldots,n$ *kovarijance pripadnog normalnog vektora* $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

Dokaz. Dokaz se provodi korištenjem svojstava uvjetnog očekivanja i jednakosti $Ee^{-\gamma A} = e^{-\gamma^{\alpha/2}},\ \gamma > 0$. Slijedi:

$$\begin{aligned} E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right] &= E\left[E\left[e^{iA^{1/2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k Z_k}|A\right]\right] = E\left[e^{-A\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j R_{ij}}\right] \\ &= e^{-\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j R_{ij}\right|^{\alpha/2}} \end{aligned}$$

□

Sljedeći korolar pokazuje da subgaussovski slučajan vektor nasljeđuje strukturu od pripadnog normalnog vektora.

Korolar 3.3. *Neka je* $\boldsymbol{X}$ *subgaussovski SαS slučajan vektor s pripadnim normalnim vektorom* $\boldsymbol{Z}$. *Tada svaki subgaussovski Sα'S slučajan vektor jednako distribuiran kao* $\boldsymbol{X}$ *ima pripadan normalan vektor jednako distribuiran kao* $\boldsymbol{Z}$.

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{Z}' \in \mathbb{R}^n$ normalan vektor s kovarijancama $R'_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n$.
Pretpostavimo da $\boldsymbol{X}' = A^{1/2}\boldsymbol{Z}'$ ima istu distribuciju kao $\boldsymbol{X} = A^{1/2}\boldsymbol{Z}$. Treba pokazati da tada $\boldsymbol{Z}'$ ima istu distribuciju kao $\boldsymbol{Z}$.
Budući da je $\boldsymbol{X}' \stackrel{d}{=} \boldsymbol{X}$, slijedi da su i karakteristične funkcije jednake, to jest

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X'_k}\right] = E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right].$$

Korištenjem propozicije 3.1 slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j R'_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j R_{ij},$$

za bilo koje realne $\theta_1, \ldots, \theta_n$.
S obzirom da su θ_i-evi jednaki na obje strane jednakosti, vrijedi i:

$$R'_{ij} = R_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n.$$

Prema tome, vrijedi i $\boldsymbol{Z}' \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Z}$. □

Sljedeća propozicija pokazuje da ukoliko je spektralna mjera Γ uniformna (i $\boldsymbol{\mu}^0$=0), SαS slučajan vektor je uvjetno n.j.d.[3] normalan.

Propozicija 3.2. *Neka je* $\boldsymbol{X}$ *SαS,* $\alpha \in \langle 0, 2\rangle$ *, slučajan vektor u* $\mathbb{R}^n$*. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\boldsymbol{X}$ *je subgaussovski slučajan vektor čiji pripadni normalan vektor ima n.j.d.* $N(0, \sigma^2)$ *komponente.*

(ii) Karakteristična funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ *je*

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right] = e^{-2^{-\alpha/2}\sigma^\alpha|\boldsymbol{\theta}|^\alpha}.$$

(iii) Spektralna mjera Γ *slučajnog vektora* $\boldsymbol{X}$ *je uniformna.*

Dokaz. Dokažimo prvo $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ subgaussovski SαS slučajan vektor čiji pripadni normalan vektor $\boldsymbol{Z}$ ima komponente $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ koje su n.j.d. slučajne varijable s distribucijom $N(0, \sigma^2)$.
Prema propoziciji 3.1, karakteristična funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ je

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right] = e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k^2\right)^{\alpha/2}}. \tag{3.10}$$

Pokažimo sada da $(iii) \Rightarrow (ii)$.
Neka je $\boldsymbol{X}$ SαS s uniformnom spektralnom mjerom Γ na S^n. Karakteristična funkcija vektora $\boldsymbol{X}$ je tada

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right] = e^{-\int_{S_n}|\sum_{k=1}^{n}\theta_k s_k|^\alpha \Gamma(ns)}.$$

Označimo

$$\int_{S_n}|\sum_{k=1}^{n}\theta_k s_k|^\alpha \Gamma(ns) = f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n),$$

tako da je

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k}\right] = e^{-f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)}. \tag{3.11}$$

Budući da je Γ uniformna, f ovisi samo o euklidskoj normi $|\boldsymbol{\theta}|$ vektora $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$.
Za bilo koji $c > 0$ vrijedi

$$f(c\theta_1, c\theta_2, \ldots, c\theta_n) = c^\alpha f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n).$$

[3] n.j.d. se odnosi na distribuciju komponenata pripadnog normalnog vektora.

Prema tome, za neki $C > 0$ vrijedi

$$f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = C \left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k^2 \right)^{\alpha/2}.$$

Ako se izabere $C = 2^{-\alpha/2}\sigma^\alpha$ vidi se da su jednadžbe (3.10) i (3.11) jednake. Iz jedinstvenosti spektralne mjere Γ slijedi $(ii) \Rightarrow (iii)$.

□

3.6 Razlike u odnosu na Gaussovski slučaj

Jedan od glavnih alata za proučavanje veze između slučajnih varijabli je kovarijanca. Specijalno, ona se može koristi i za normalne slučajne varijable. Pitanje je može li se ona koristiti i za ostale stabilne distribucije i ako ne, koja je alternativa.

Definicija 3.5. *Neka su X i Y slučajne varijable takve da su $E[X], E[Y]$ i $E[XY]$ konačni. Tada je njihova **kovarijanca** definirana kao*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right].$$

Kovarijanca nije definirana u slučaju $\alpha \in \langle 0, 2\rangle$ te je za $\alpha \in \langle 1, 2\rangle$ uveden pojam kovarijacije koja bi zamijenila kovarijancu, no ona ne posjeduje sva korisna svojstva kovarijance. U ovom poglavlju definirana je kovarijacija te su navedene glavne razlike u odnosu na normalan slučaj.

Definicija 3.6. *Neka je zajednička distribucija od X_1 i X_2 simetrična stabilna s $\alpha \in \langle 1, 2]$ i Γ spektralna mjera slučajnog vektora (X_1, X_2). **Kovarijacija** od X_1 na X_2 je realan broj*

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \Gamma(ns), \tag{3.12}$$

pri čemu je

$$a^{<p>} = |a|^p \operatorname{sign} a = \begin{cases} a^p, & a \geq 0, \\ -|a|^p, & a < 0. \end{cases}$$

za $p \in \mathbb{R}$.

Ako je $\alpha = 2$, karakteristična funkcija od (X_1, X_2) je

$$\begin{aligned} E\left[e^{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)}\right] &= e^{-\int_{S_2} (\theta_1 s_1 + \theta_2 s_2)^2 \Gamma(ns)} \\ &= e^{-\left(\theta_1^2 \int_{S_2} s_1^2 \Gamma(ns) + 2\theta_1\theta_2 [X_1, X_2]_2 + \theta_2^2 \int_{S_2} s_2^2 \Gamma(ns)\right)}. \end{aligned}$$

Također, vrijedi i

$$E\left[e^{i(\theta_1 X_1+\theta_2 X_2)}\right] = e^{-\frac{1}{2}\left(\theta_1^2 \operatorname{Var}(X_1)+2\theta_1\theta_2 \operatorname{Cov}(X_1,X_2)+\theta_2^2 \operatorname{Var}(X_2)\right)}.$$

Ukoliko se postavi prvo $\theta_1 = 0$, a zatim $\theta_2 = 0$ izjednačavanjem gornje dvije jednadžbe dobije se:

$$\int_{S_2} s_j^2 \Gamma(ns) = \frac{1}{2} \operatorname{Var} X_j, \quad j = 1, 2,$$

i prema tome

$$[X_1, X_2]_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Cov}(X_1, X_2).$$

Sljedeća svojstva pokazuju najvažnije razlike između kovarijance i kovarijacije. Navedena su bez dokaza, a dokazi se mogu pronaći u [8, Poglavlje 2.7.].

Korolar 3.4. *Iako je kovarijacija linearna u prvom argumentu, nije nužno linearna u drugom argumentu.*

Korištenjem svojstava matematičkog očekivanja lako se može provjeriti da je kovarijanca linearna u argumentima. Pokažimo to na drugom argumentu.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, aY_1 + bY_2) &= E[X(aY_1 + bY_2)] - E[X]E[aY_1 + bY_2] \\
&= aE[XY_1] + bE[XY_2] - aE[X]E[Y_1] - bE[X]E[Y_2] \\
&= a(E[XY_1] - E[X]E[Y_1]) + b(E[XY_2] - E[X]E[Y_2]) \\
&= a \operatorname{Cov}(X, Y_1) + b \operatorname{Cov}(X, Y_2).
\end{aligned}$$

Korolar 3.5. *Kovarijacija nije, generalno, simetrična u svojim argumentima.*

Pokažimo to na primjeru.

Primjer 3.2. *Neka je $\alpha < 2$, $[X, X] \neq 0$ i $a, b \in \mathbb{R}$ različiti od nule, takvi da vrijedi $a \neq b$. Tada je*

$$[aX, bX]_\alpha = ab^{<\alpha-1>}[X, X]_\alpha \neq a^{<\alpha-1>}b[X, X]_\alpha = [bX, aX]_\alpha.$$

S druge strane, iz same definicije kovarijance primjećuje se da je simetrična.

Svojstvo 3.1. *Ako X i Y imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju i nezavisne su, tada vrijedi*

$$[X, Y]_\alpha = 0.$$

Međutim, ne vrijedi obrat prethodne tvrdnje. Nasuprot tome, za normalnu distribuciju $[X,Y]_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ implicira da su X i Y međusobno nezavisne (vidi [3, 85. str]).

Intuitivno je pitati se što znači $[X,Y]_\alpha = 0$, za $\alpha \in \langle 1, 2\rangle$. U tu svrhu, definiraju se pojmovi kovarijacijska norma i Jamesova ortogonalnost. Više o tome može se pronaći u [8, Poglavlje 2.].

4 Primjena stabilnih distribucija

U ovom poglavlju pokazano je kako se stabilne distribucije mogu primjenjivati na stvarne probleme. Iako većina stabilnih distribucija nema poznatu funkciju gustoće u eksplicitnom obliku, imaju široku primjenu.

Najveći porast interesa za stabilne distribucije dogodio se zbog njihovog pojavljivanja u društveno - ekonomskim modelima.

Kao što se može detaljnije pogledati u članku [2], stabilne distribucije mogu se primjeniti u financijama. Za takvo modeliranje, često se pretpostavlja da promatrane slučajne varijable imaju Gaussovsku distribuciju. Kako često dolazi do odstupanja od te pretpostavke zbog teških repova ili asimetričnosti, stabilne distribucije se pokazuju kao prikladan način modeliranja.

Također, stabilne distribucije mogu se primjenjivati i u modeliranju log - povrata. Jedna takva primjena jako detaljno je opisana u članku [6].

Osim toga, stabilne distribucije primjenjive su i na probleme iz fizike i biologije kao što se može pogledati u [11, Poglavlje 1.]. Neki od problema iz područja fizike koji se mogu modelirati stabilnim distribucijama su gravitacijsko polje zvijezda, distribucija magnetskog polja generirana mrežom elementarnih magneta i distribucija temperature u nuklearnom reaktoru.

U ovom poglavlju obrađena su tri konkretna primjera koji se mogu modelirati stabilnim distribucijama.

4.1 Stabilni zakoni u igrama

U ovom poglavlju pokazano je kako se određeni primjeri koji uključuju igre na sreću mogu modelirati stabilnim distribucijama. Primjeri obrađeni u ovom poglavlju mogu se pronaći u [10, Poglavlje 10.1.].

4.1.1 Saint Petersburg paradoks

U prvom primjeru, promatra se „Saint Petersburg paradoks” (za detaljniji opis paradoksa pogledati [9, Poglavlje 1.7.]). Igra se sastoji od bacanja simetričnog novčića dok se ne pojavi glava. Neka slučajna varijabla N označava bacanje u kojem se glava pojavljuje prvi put. Budući da je novčić simetričan, N ima distribuciju

$$P(N = n) = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ako se glava pojavi u bacanju N, igrač dobiva iznos 2^N. Pitanje je koliki je iznos pošteno tražiti kao igračev početni ulog. Kako bi igra bila poštena, od igrača bi bilo priodno kao početni ulog tražiti iznos očekivanog dobitka. U tu svrhu računa se očekivani dobitak

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Budući da se očekuje beskonačan dobitak za igrača, početni ulog bi trebao biti beskonačan. Iako je ovaj izračun matematički točan, igra na taj način nije bila smislena pa su predlagani drugačiji načini računanja početnog uloga.
Hrvatsko američki matematičar Feller je otkrio kako definirati rizik kako bi igra bila poštena. Ako je n broj igara koje je igrač odigrao, igra se može smatrati poštenom ukoliko omjer dobitka X_n i iznosa koji igrač mora uložiti kako bi igrao R_n konvergira u 1 ako n teži u beskonačnost. Točnije, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X_n/R_n - 1| < \varepsilon) \longrightarrow 1, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Dokazao je da kako bi početni iznos bio konačan treba postaviti $R_n = n \log_2 n$. Takav zaključak proizilazi iz teorije stabilnih zakona jer

$$P(X > x) = P(2^N > x) = P(N > \log_2 x) = \sum_{n \geq \log_2 x} 2^{-n} \approx 2x^{-1}.$$

Prema generaliziranom centralnom graničnom teoremu, slučajna varijabla X pripada domeni atrakcije stabilnog zakona s $\alpha = 1$. Iz ovoga slijedi da bi se početni ulog trebao odrediti s obzirom na to koliko će igara igrač odigrati i taj ulog trebao bi biti reda veličine $n \log_2 n$.

4.1.2 Igra s dva igrača

U drugom primjeru, promatra se igra s dva igrača, pri čemu svaki od njih ima jednaku šansu za pobijediti ili izgubiti partiju. Početni kapital prvog igrača je $C \in \mathbb{N}$, dok je drugi beskonačno bogat. Svaka igra je nezavisna od ishoda prethodnih igara i svaki igrač može pobijediti ili izgubiti s vjerojatnošću $1/2$ te se njegov kapital sukladno s tim povećava ili smanjuje za 1. Pitanje je koliko igara moraju odigrati prije nego što prvi igrač izgubi sve novce.

Neka je $C + C_k$ kapital prvog igrača nakon k igara i $N(C)$ broj koraka do trenutka kad će izgubiti sve novce, to jest

$$N(C) = \min\{k : C + C_k = 0\}, \quad N(0) = 0.$$

Treba pokazati da je $N(C)$ konačan broj, to jest da će prvi igrač u nekom trenutku izgubiti sve novce.
Pretpostavimo da je

$$p(C) = P(N(C) < \infty), \quad p(0) = 1.$$

Neka je za određeno bacanje D_1 događaj „prvi igrač pobjeđuje u igri" i D_2 događaj „prvi igrač gubi u igri". Prema formuli potpune vjerojatnosti (vidi [1, Poglavlje 1., Teorem 1.1.]) vrijedi

$$p(C) = P(N(C) < \infty \mid D_1)P(D_1) + P(N(C) < \infty \mid D_2)P(D_2). \tag{4.1}$$

Jasno je da vrijedi

$$P(D_1) = P(D_2) = \frac{1}{2}.$$

Budući da D_1 znači povećanje kapitala za 1, a D_2 smanjenje, vrijedi i

$$P(N(C) < \infty \mid D_1) = P(N(C+1) < \infty) = p(C+1),$$

$$P(N(C) < \infty \mid D_2) = P(N(C-1) < \infty) = p(C-1).$$

Prema tome, slijedi:

$$p(C) = \frac{1}{2}\left[p(C+1) + p(C-1)\right]. \tag{4.2}$$

Neka je

$$\Delta(C) = p(C+1) - p(C).$$

Iz jednadžbe (4.2) tada slijedi

$$\Delta(C) - \Delta(C-1) = p(C+1) - p(C) - (p(C) - p(C-1)) = 0.$$

Prema tome, $\Delta(C)$ je konstanta i neka je $\Delta(C) = \delta$.
Može se zapisati

$$p(C+1) = p(0) + \sum_{k=1}^{C} \Delta(k) = p(0) + \delta C. \quad \forall C \in \mathbb{N},$$

Budući da prethodna jednadžba mora vrijediti za svaki iznos $C \in \mathbb{N}$, mora biti $\delta = 0$ kako bi vjerojatnost $p(C+1)$ bila dobro definirana.
Dakle,

$$p(C) = 1, \quad \forall C \in \mathbb{N}$$

te prema tome prvi igrač sigurno gubi.

Nadalje, pretpostavimo da je početni kapital 1 i razmotrimo distribuciju slučajne varijable $N = N(1)$. Neka su N_1 i N_2 nezavisne kopije slučajne varijable N. Vrijedi

$$N \sim \begin{pmatrix} 1 & N_1 + N_2 + 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi:

$$P(N(1) > n) = \sum_{k > (x+1)/2} p_{2k-1} \approx \sqrt{2/\pi} n^{-1/2}, \quad x \longrightarrow \infty.$$

Detaljnije opisan postupak dobivanja prethodnog rezultata može se vidjeti u [10, Poglavlje 10.2., stranica 259.]. Dakle, distribucija slučajne varijable $N(1)$ pripada domeni atrakcije stabilnog zakona s parametrima $\alpha = 1/2$ i $\beta = 1$. Prema tome, distribucija prosječnog broja koraka do gubitka svih novaca ukoliko je početni iznos 1 može se opisati Lévyjevom distribucijom.

4.2 Stabilni zakoni u biologiji

Detaljniji opis problema obrađenog u ovom poglavlju može se pronaći u [11, Poglavlje 1.3.].

U ovom problemu promatra se niz životinjskih ili biljnih rodova, poredanih prema broju vrsta koje su zastupljene u njima. Broj rodova koji sadrže samo jednu vrstu označi se s N_1, broj onih koji sadrže dvije vrste s N_2 i tako dalje. Time se dobije niz $N_1, N_2, \ldots$. Tada je $N = N_1 + N_2 + \ldots$ ukupan broj rodova.
Nadalje, formirajmo broj frekvencija

$$p_k = \frac{N_k}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

koje predstavljaju vjerojatnost da slučajno odabrani rod ima točno k vrsta.
Engleski biolog Willis je otkrio da za rodove koji sadrže dovoljan broj vrsta, to jest za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\sum_{k > n} p_k \approx C n^{-1/2},$$

pri čemu je C konstanta.
Drugim riječima, vjerojatnost pronalaska barem n vrsta u rodu smanjuje se stopom $1/\sqrt{n}$ se kako se n povećava.
Teorijska podloga za takav rezultat mogla bi se pronaći u reprodukcijskom procesu čestice.
Na početku procesa, u pitanju je jedna čestica tipa T_1. Tijekom prve jedinice vremena, ova čestica se razdvoji na μ_{10} čestica tipa T_0 i μ_{11} čestica tipa T_1. Čestice tipa T_0 ostaju nepromijenjene, no čestice tipa T_1 mogu se ponovo transformirati. Brojevi μ_{10} i μ_{11} su slučajne varijable. Na ovaj slučajan proces reprodukcije čestice postavljaju se uvjeti:

1. Transformacija svake čestice tipa T_1 je nezavisna od njene povijesti i od drugih čestica.

2. Zajednička distribucija slučajnih varijabli μ_{10} i μ_{11} u trenutku transformacije čestice tipa T_1 ostaje ista za sve čestice tog tipa i ne ovisi o vremenu kad se transformacija dogodila. Također, ukupan broj $\mu_{10} + \mu_{11}$ čestica koje nastanu prilikom jedne transformacije ne može prijeći neki konstantan broj h.

3. Očekivani broj $\delta_0 = E\mu_{10}$ čestica tipa T_0 nastalih u jednoj transformaciji je pozitivan, dok je očekivani broj $\delta_1 = E\mu_{11}$ čestica tipa T_1 jednak 1. Dodatno, vrijedi i $c = \operatorname{Var}\mu_{11} > 0$. Zbog zadnjeg uvjeta čestica tipa T_1 ne može s vjerojatnošću 1 reproducirati samo jednu novu česticu tipa T_1. Stoga, zajedno s uvjetom $E\mu_{11} = 1$, čestica tipa T_1 s vjerojatnošću većom od 0 neće reproducirati nijednu novu česticu tipa T_1. Budući da čestice tipa T_0 ne mogu biti transformirane, proces transformacije prestaje.

Na kraju procesa transformacije, reproduciran je slučajan broj U čestica tipa T_0 koje se nazivaju finalne čestice.
Pretpostavimo da na početku procesa postoji n čestica tipa T_1. Prema tome, na kraju procesa transformacije bit će reproducirano $U_1, \ldots, U_n$ finalnih čestica, pri čemu je svaki U_i, $i = 1, \ldots, n$ reproducirala jedna čestica tipa T_1 i njezini „potomci”.
Prema uvjetima 1 i 2 slučajne varijable U_i, $i = 1, \ldots, n$ su nezavisne i jednako distribuirane.
Normirana suma ovih slučajnih varijabli je tada:

$$V_n = \frac{c(U_1 + \cdots + U_n)}{2\delta n^2}.$$

Može se pokazati da distribucije slučajnih varijabli V_n konvergiraju prema stabilnoj distribuciji s parametrima $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, $\sigma = 0$ i $\mu = 1$. Prema tome, distribucija normiranih suma može se opisati Lévyjevom distribucijom.

Zaključak

U ovom radu obrađene su stabilne distribucije te njihove primjene. Definirani su pojmovi stabilnih slučajnih varijabli i vektora te su korištenjem karakterističnih funkcija iskazana i dokazana neka njihova svojstva. Stabilne distribucije karakterizirane su s četiri parametra. Kroz svojstva stabilnih distribucija pokazano je odakle potječu nazivi za parametre te što oni predstavljaju. Samo tri stabilne distribucije imaju funkciju gustoće poznatu u eksplicitnom obliku. One su navedene te su prikazani njihovi grafovi, kako bi se demonstrirao tipičan izgled stabilnih distribucija. Najpoznatija među njima je normalna distribucija i ona ima nešto drugačija svojstva od ostalih stabilnih distribucija, budući da je jedina koja ima konačnu varijancu. Zbog toga, za neka svojstva stabilnih slučajnih vektora napravljena je usporedba s Gaussovskim slučajem.

Na kraju rada navedeni su radovi u kojima se mogu naći detaljno opisane primjene stabilnih distribucija. Stabilne distribucije prikladne su za modeliranje mnogih problema, ne samo matematičkih, nego i iz drugih znanosti. Njihova primjena je široka iz nekoliko razloga. Prema generaliziranom centralnom graničnom teoremu, jedina moguća granična distribucija za normiranu sumu nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli je stabilna distribucija. Drugi razlog je što se puno problema iz raznih znanosti pokušava modelirati normalnom distribucijom. Budući da je normalna distribucija simetrična, često je moguće pronaći prikladniju distribuciju za modeliranje nekog problema među stabilnim slučajnim distribucijama. Dodatno, zbog teških repova stabilnih distribucija, prikladne su za modeliranje ekstremnih vrijednosti.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku.*, Sveučilište J. J. Strossmayera - Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] S. Borak, W. Hardle, R. Weron, *Stable distributions*, SFB 649, Humboldt Universitat zu Berlin, Berlin, 2005.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, inc., New York, 1971.

[4] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.*, Addison-Wesley, USA, 1968.

[5] A. Gut, *Probability : A Graduate Course*, Springer Science + Bussines Media, New York, 2005.

[6] M. Kateregga, S. Mataramvura, D. Taylor, *Parameter estimation for stable distributions with application to commodity futures log-returns*, Cogent Economics and Finance, Cape Town, 2017.

[7] J. P. Nolan, *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*, Birkhauser, Boston, 2018., u tijeku - 1.poglavlje dostupno na `http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/stable.html`

[8] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, CRC Press LLC, Florida, 2000.

[9] G. J. Székely, *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[10] V. V. Uchaikin, V. M. Zolotarev, *Chance and Stability Stable Distributions and their Applications*, Moscow, 1999.

[11] V. M. Zolotarev, *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1986.

Sažetak

U radu su iskazane ekvivalentne definicije stabilnih distribucija i pokazani su neki dokazi tih ekvivalencija. Navedeni su najpoznatiji primjeri i iskazana i dokazana najvažnija svojstva stabilnih slučajnih varijabli s naglaskom na specijalne slučajeve normalne, Cauchyjeve, Lévyjeve i Holtsmarkove distribucije. Posebno su obrađene simetrične stabilne slučajne varijable.

U nastavku je proširena definicija stabilnih distribucija na multidimenzionalni slučaj. Definirani su stabilni slučajni vektori i njihova karakteristična funkcija. Korištenjem karakteristične funkcije navedena su osnovna svojstva strogo stabilnih slučajnih vektora, simetričnih stabilnih slučajnih vektora te subgaussovskog slučajnog vektora. Napravljena je usporedba sa svojstvima normalnog slučajnog vektora.

Na kraju je diskutirana i pokazana na nekoliko primjera primjena stabilnih distribucija.

Ključne riječi

stabilna distribucija, stabilna slučajna varijabla, stabilan slučajan vektor, stabilni zakoni, domena atrakcije

Summary

This paper contains equivalent definitions of stable distributions and some proofs of those equivalences. It contains the most known examples as well as presentation and proofs of the most important properties of stable random variables with accent on special cases of Gaussian, Cauchy, Lévy and Holtsmark distribution. Symmetric stable random variables are covered separately.

Furthermore, the definition of stable distribution is expanded on a multidimensional case. A stable random vector and its characteristic function are defined. By using the characteristic function, basic properties of strictly stable random vectors, symmetric stable random vectors and subgaussian random vector are expressed. A comparison with the properties of the Gaussian random vector is presented.

In the last chapter, the application of stable distributions is discussed and shown on a couple of examples.

Key words

stable distribution, stable random variable, stable random vector, stable laws, domain of attraction

Životopis

Rođena sam 22. ožujka 1995. godine u Ozimici, u Bosni i Hercegovini. Pohađala sam osnovnu školu „Žepče" od 2001. do 2009. godine te nakon toga upisala opću gimnaziju u Katoličkom školskom centru „Don Bosco" u Žepču. Tijekom srednje škole sudjelovala sam na tri federalna natjecanja iz matematike u Bosni i Hercegovini. Nakon završetka srednje škole, 2013. godine, upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Preddiplomski studij završavam 2016. godine uz završni rad „Pitagorine trojke i njihova generalizacija" i mentorstvo doc. dr. sc. Ivana Solde. Iste godine upisujem diplomski studij na Odjelu za matematiku, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom diplomskog studija obavljala sam stručnu praksu u Zavodu za javno zdravstvo Osječko - baranjske županije. Trenutno sam zaposlena u IT tvrtki SV Group d.o.o u Zagrebu.