Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Matej Petrinović

Primjene diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Matej Petrinović

Primjene diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Ekonomija je društvena znanost koja proučava proizvodnje, distribucije i potrošnje za robu i usluge. Ekonomska analiza može se primijeniti u čitavom društvu, u poslovanju, financijama, zdravstvu i vladi. Ekonomska analiza se također ponekad primjenjuje na različitim temama kao što su kriminal, obrazovanje, u području obitelji, prava, politike, religije, društvenih institucija, rata, znanosti i okoliš. Naravno ekonomija i matematika su jako povezane, jer ekonomija bez matematike ne može. Najčešća primjena matematike u ekonomskim znanostima je primjena teorije vjerojatnosti, statistike, regresijske analize i vremenskih nizova. No, također postoje i primjene matematičke analize. U ovom diplomskom radu vidjet ćemo neke primjene matematičke analize, odnosno primjene diferencijalnog i integralnog računa. Na početku rada opisani su neki osnovni ekonomski pojmovi i uvedeni najčešće korišteni simboli, te su navedena dva primjera ekonomoskih modela. U drugom poglavlju objašnjen je pojam derivacija, "običnih" i parcijalnih, i dane su neke njihove primjene koje su pokazane na primjerima, te je opisana Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje kao jedna specijalna i najčešće korištena proizvodna funkcija u praksi. U istom poglavlju prikazana je i primjena optimizacije u ekonomiji. U trećem i posljednjem poglavlju rada dajemo primjenu integralnog računa na funkcije jedne varijable. Objašnjena je osnovna teorija integralnog računa i dane su neke primjene koje su ilustrirane primjerima.

1 Ekonomski modeli

U ekonomiji teorijski model je skup koji predstavlja ekonomske procese skupom varijabli i odnosa među njima. Ekonomski modeli su često pojednostavljeni, te matematički osmišljeni kako bi opisivali složene procese. Većina ekonomskih modela počiva na pretpostavkama koje nisu u potpunosti realne. Tako svaka analiza ekonomskog modela mjeri u kojoj se ti rezultati mogu primjenjivati obzirom na zadane pretpostavke.
Ako je ekonomski model u obliku matematičkog izraza, on se najčešće izražava u obliku skupa jednadžbi namijenjenih opisivanju toga modela. Nakon postavljanja cjelokupnog modela primjenom određenih metoda nastoji se izvesti zaključak.

1.1 Ekonomski pojmovi

U ovoj točki definirat ćemo neke osnovne pojmove koji se pojavljuju u ekonomskim modelima, te uvesti neke najčešće korištene simbole.

Definicija 1.1 **Varijabla** je nešto čija se vrijednost može mijenjati, to jest nešto što može poprimiti različite vrijednosti.

Najčešće korištene varijable u ekonomiji su:

- Cijena (P)
- Prihod (R)
- Trošak (C)
- Profit (π)
- Nacionalni dohodak ili BDP (Y)
- Količina proizvodnje/broj jedinica proizvoda (q ili Q)
- Štednja (S)
- Investicije (I)

Svaka ta varijabla, korištena u modelu, može poprimiti različite vrijednosti, te se umjesto određenog broja koriste simboli navedeni u zagradama. Time dolazimo do pojmova vezanih za varijablu, endogene i ezgogene koje ćemo u nastavku definirati.

Definicija 1.2 Varijable čije vrijednosti tražimo 'rješavanjem' modela nazivamo **endogenim** varijablama. Suprotno tome, varijable kojima vrijednosti u modelu poznajemo nazivaju se **egzogene**.

Uočimo kako jedna varijabla u nekom modelu može biti endogena, a u nekome drugome egzogena. Tako na primjer, varijabla cijena P, u analizi određivanja cijene je endogena, dok u okviru teorije izdataka za potrošače je egzogena.
Naravno, sve te varijable treba nekako povezati u neki skup jednadžbi ili nejednadžbi. Tako u ekonomskim primjenama postoje tri tipa jednadžbi koje ćemo sada definirati.

Definicija 1.3 Definicijska jednadžba je jednadžba koja postavlja identitet između dva zamjedbena izraza koja imaju isto značenje.

Na primjer, profit π definiramo kao razliku ukupnog prihoda R i ukupnih troškova C, stoga bi definicijska jednadžba za profit glasila

$$\pi = R - C. \tag{1}$$

Definicija 1.4 Jednadžba ponašanja je jednadžba koja opisuje način na koji se varijabla ponaša odgovarajući na promjene drugih varijabli.

Na primjer, jedna jednadžba ponašanja za funkciju troškova je

$$C = 75 + 10Q. \tag{2}$$

Vidimo kako je ovdje trošak funkcija od količine proizvodnje, pa bi u (2) mogli pisati $C(Q) = 75 + 10Q$. Ovdje pretpostavljamo da imamo fiksni trošak od 75 nekih novčanih jedinica, te se za svako jedinično povećanje količine proizvodnje trošak povećava za 10 i to je u ovom slučaju opis ponašanja troška u odnosu na količinu proizvodnje.

Definicija 1.5 Ravnotežni uvjet je jednadžba koja opisuje preduvjet za postignuće ravnoteže.

Najpoznatiji uvjeti ravnoteže u ekonomiji je

$$Q_s = Q_d \tag{3}$$

odnosno riječima, ponuda količina jednaka je potražnji. U literaturi ovo se još može vidjeti pod oznakom $AS = AD$. [vidi 8]

1.2 Analiza ravnoteže

U ekonomiji, ravnoteža je bitan pojam. Cilj svakog modela je naći ravnotežni položaj za određenu varijablu. Tako se može gledati, najčešće se gleda, ravnotežna kamatna stopa, ravnoteža cijena, nacionalni dohodak i slično. Prije svega definirajmo pojam ravnoteže.

Definicija 1.6 Ravnoteža je skup izabranih, uzajamno povezanih i tako među sobom usklađenih varijabli takvih da u modelu koji one tvore ne prevladava bitna težnja ka promjeni.

Analizu ravnoteže promatramo kao problem pronalaska skupa vrijednosti endogenih varijabli koje će zadovoljavati uvjete ravnoteže modela. Promotrimo sada na sljedećem primjeru izgradnju jednoga jednostavnoga modela, za koji ćemo pretpostaviti da je linearan, za jedan tip robe na tržištu.

1.2.1 Primjer - izgradnja modela

Kako smo ranije rekli da ćemo promatrati samo jednu vrstu robe, u model uključujemo tri osnove stvari vezanih za tu robu, a to su

- količina potražnje robe - Q_d
- količina ponude robe - Q_s
- cijena robe - P.

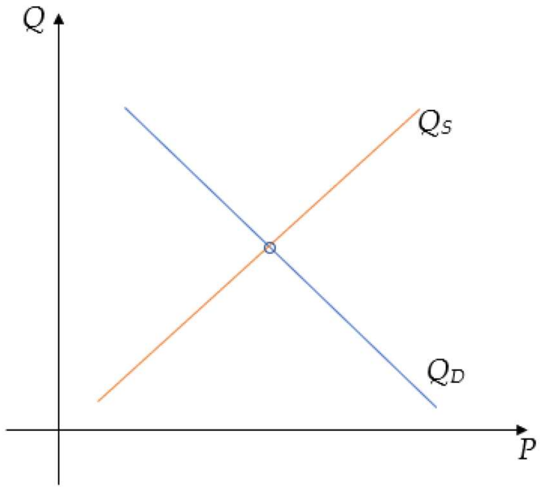
Nakon uvođenja varijabli za model, trebamo određene pretpostavke za izgradnju modela. Najprije krenimo od uvjeta ravnoteže. Kao što smo u (3) imali uvjet da je ponuda jednaka potražnji, to ćemo uključiti i ovdje. Nadalje ćemo pretpostaviti da je Q_d padajuća funkcija cijena, što je zapravo i logično, jer povećanjem cijene nekoga proizvoda potražnja za njime će padati. Isto tako, pretpostavimo da je Q_s rastuća funkcija cijena iz sličnog razloga, većom cijenom proizvoda ljudi će ga manje kupovati i ponuda toga proizvoda na tržištu će biti veća. Na kraju dolazimo da će naš model biti sačinjen od uvjeta ravnoteže i dvije jednadžbe ponašanja. Matematički, model zapisujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} Q_s &= Q_d \\ Q_d &= a - bP \\ Q_s &= -c + dP \end{aligned} \tag{4}$$

Pretpostavimo još da su parametri modela $a, b, c, d > 0$. Sada tako dobiveni model treba riješiti, točnije treba pronaći rješenja za varijable Q_s, Q_d i P koje zadovoljavaju model (4). Rješenja označimo sa $\overline{Q}_s, \overline{Q}_d$ i $\overline{P}$. Kako je $\overline{Q}_s = \overline{Q}_d$ jednostavnije možemo pisati $\overline{Q}$. Stoga, ravnotežno rješenje modela (4) možemo zapisati kao uređeni par $(\overline{P}, \overline{Q})$ i uočimo kako je to rješenje jedinstveno. Kako je ovo sustav linearnih jednadžbi, taj sustav možemo riješiti brojnim metodama. Nakon rješavanja toga sustava dobijamo rješenja za P i Q u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{a+c}{b+d} \\ \overline{Q} &= \frac{ad-bc}{b+d} \end{aligned} \tag{5}$$

Primijetimo kako dobivene vrijednosti za P i Q trebaju biti pozitivne, pa bi za model trebalo staviti dodatnu pretpostavku na parametre, tj. da je $ad > bc$. Grafički model (4) možemo prikazati ovako:



Slika 1: $Q_s - Q_D$ model

Ekonomski modeli ovakvoga tipa mogu sadržavati i više vrsta roba, tj. model će biti sačinjen od više varijabli. Isto tako jednadžbe ponašanja ne moraju biti i općenito nisu linearne, tako da u većini slučajeva rješavanje modela nije jednostavno. Naravno, analiza ravnoteže ne mora biti samo u analizi tržišta. Pogledajmo idući primjer modela za nacionalni dohodak.

1.2.2 Primjer - nacionalni dohodak

Model nacionalnog dohotka još se naziva i Keynesov[1] model i ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= a + bY \end{aligned} \tag{6}$$

gdje su Y i C endogene varijable, a I_0 i G_0 egzogene varijable investicija i vladine potrošnje. Uvjeti na parametre su $a > 0$ i $b \in (0, 1)$ i ti parametri predstavljaju redom autonomnu potrošnju i graničnu sklonost potrošnji. Također ovdje imamo i uvjet $Y = C$ koji nismo posebno pisali. Svrha ovoga modela je naći ravnotežne vrijednosti $(\overline{C}, \overline{Y})$. Rješenja ovoga modela su sljedeća:

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b} \\ \overline{C} &= \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1 - b}. \end{aligned} \tag{7}$$

Kako bi ovi izrazi bili pozitivni, jer je prirodno tako pretpostaviti, nužan je onaj uvjet na b i također zbog izbjegavanja djeljenja s nulom. Kao i prethodni model, ovaj model je jednostavan, dok je u praksi on mnogo kompliciraniji i s više varijabli.

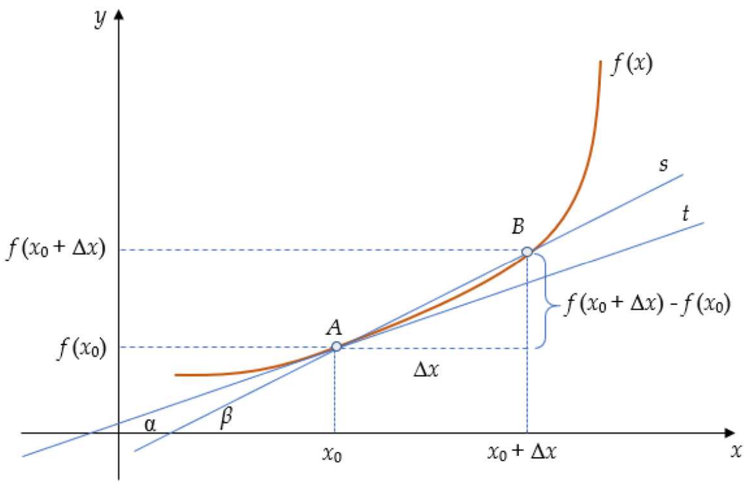
[1]John Maynard Keynes, 1883 - 1946, engleski ekonomist

2 Primjene derivacija u ekonomiji

U ovom poglavlju prisjetit ćemo se pojmova derivacija, točnije "obične" i parcijalne, te ćemo opisati neke primjene derivacija u ekonomiji. Također primjene ćemo ilustrirati brojnim primjerima. U ekonomiji problemi u kojima se koriste derivacije nazivamo komparativna statika. Problem komparativne statike koji se razmatra je zapravo problem traženja stope promjene, odnosno stope promjene endogene varijable modela obzirom na promjenu parametra ili egzogene varijable. U ekonomiji se derivirana funkcija još naziva i granična funkcija.

2.1 Pojam i svojstva "obične" derivacije

Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in (a,b)$. Promotrimo sljedeći problem na slici.



Slika 2: Derivacija funkcije

Vidimo da točka A ima koordinate $(x_0, f(x_0))$, a točka B ima $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Neka je s sekanta kroz točke A i B. Kako je s pravac, ima jednadžbu oblika $y = cx + d$. Nadalje, neka je β kut što ga zatvara sekanta s i os x, tj. $\beta = \measuredangle(s, \overrightarrow{ox})$. Uočimo da je

$$c = \tan(\beta) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Cilj je točku B dovesti u točku A, odnosno da Δx bude što manji, da teži u 0, $\Delta x \to 0$, pa će samim time sekanta s postati tangenta t, $s \to t$. Tangenta t je također pravac pa bi njegova jednažba bila $y = kx + l$. Neka je α kut što ga tangenta t zatvara s osi x, $\alpha = \measuredangle(t, \overrightarrow{ox})$. Dovođenjem točke B u točku A, kut β će težiti kutu α, pa će za $\Delta x \to 0$ vrijediti da $\tan(\beta) \to \tan(\alpha)$. Matematički zapisano to izgleda ovako:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan(\alpha).$$

U svrhu toga uvodimo sljedeću definiciju derivacije funkcije.

Definicija 2.1 Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Kažemo da je f derivabilna u točki $x_0 \in (a, b)$ ukoliko postoji

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{8}$$

Ako taj limes postoji zovemo ga derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$. Kažemo da je f derivabilna na (a, b) ako je derivabilna u svakoj točki iz (a, b).

Napomena: Izraz (8) možemo zapisati i na sljedeći način:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{c} x_0 + \Delta x = x \\ x \to x_0 \end{array} \right| = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9}$$

Primjer 2.1 Izračunajmo po definiciji derivaciju funkcije $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 2$.

Rješenje: Koristimo (8) i uvrštavamo kako slijedi:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Navedimo dalje bez dokaza teorem u kojem ćemo prikazati osnovna pravila za deriviranje funkcija.

Teorem 2.1 Neka su $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ i g takva da je $g(x_0) \neq 0$. Tada vrijede sljedeća svojstva derivacije:

1. Ako je $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in D$, onda je $f'(x_0) = 0$.
2. Neka je a realan broj različit od 0. Tada je $(a \cdot f(x_0))' = a \cdot f'(x_0)$.
3. $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
4. $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5. $\left(\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0)^2}$
6. $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Dokaz tvrdnji ovog teorema može se pogledati u [10]. Tablicu derivacija elementarnih funkcija se također može vidjeti u [10].

Nadalje, u idućem poglavlju ćemo pokazati neke ekonomske primjene derivacija, te ih ilustrirati na nekoliko primjera.

2.2 Ekonomske primjene "obične" derivacije

2.2.1 Marginalni trošak i prihod

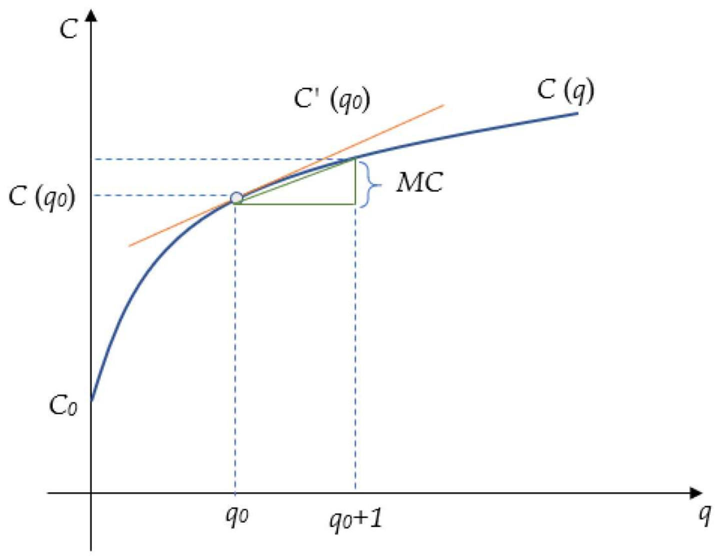
U ekonomiji pojmovi marginalnog troška i prihoda su vrlo važni. **Marginalni trošak** (MC) u ekonomiji definira se kao promjena nastalih troškova proizvodnjom dodatnih jedinica nekog dobra. Neka je $C : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ funkcija troškova. Kako je C funkcija količine proizvedenih jedinica Q, marginalni trošak možemo definirati matematički kao derivaciju funkcije troškova po količini proizvedenih jedinica, odnosno

$$MC(Q) = \frac{d}{dQ}C(Q). \tag{10}$$

Uočimo da je domena ove funkcije skup prirodnih brojeva, pa da bismo mogli derivirati, treba je proširiti na cijeli skup realnih brojeva ili neki njegov dobar podskup (npr. skup $\mathbb{R}_0^+$ bi bio jedan dobar odabir). Iz definicije derivacije dobivamo

$$C'(Q) \approx C(Q+1) - C(Q),$$

odakle iščitavamo značaj marginalnog troška: ukoliko trenutno proizvodimo Q komada proizvoda, marginalni trošak daje nam približni porast troškova proizvodnje koji bismo imali kada bismo željeli proizvodnju povećati za 1 proizvod.



Slika 3: Marginalni trošak

Sukladno tome, **Marginalni prihod** (MR) definiramo kao promjenu ukupnog prihoda dobivenog prodajom dodatnih jedinica robe ili dobara. Neka ovdje R označava funkciju prihoda. Kao i u prethodnom slučaju, R je funkcija količine proizvedenih jedinica Q, te stoga marginalni prihod možemo također definirati kao derivaciju od R po Q, točnije

$$MR(Q) = \frac{d}{dQ}R(Q). \tag{11}$$

Ako je $P(Q)$ funkcija cijene u ovisnosti o količini nekog proizvoda, tada funkciju prihoda možemo dobiti kao $R(Q) = P(Q) \cdot Q$, pa je marginalni prihod tada

$$MR(Q) = P(Q) + Q\frac{d}{dQ}P(Q)\cdot$$

Ilustrirajmo na primjerima traženje funkcija marginalnog troška i prihoda.

Primjer 2.2 Neka su za neko poduzeće dane funkcije troškova i prihoda, izrazima

$$C(Q) = Q^2 + 7Q + 23$$
$$R(Q) = 75Q + 4Q^2$$

Odredite funkcije marginalnog troška i marginalnog prihoda.

Rješenje: Marginalni trošak određujemo koristeći (10). Tako dobivamo:

$$MC(Q) = C'(Q) = 2Q + 7$$

Analogno tome, marginalni prihod dobivamo koristeći (11), pa imamo:

$$MR(Q) = R'(Q) = 75 + 8Q$$

Primjer 2.3 Pretpostavimo da je trošak proizvodnje x kvadratnih metara nekog platna dan izrazom

$$C(x) = 0.0005x^3 - 0.1x^2 + 12x + 1200$$

Odredimo $C'(200)$ i interpretirajmo dobiveni rezultat.

Rješenje: Uočimo prvo kako $C'(200)$ predstavlja marginalni trošak za proizvodnju 200 kvadratnih metara platna. Prema tome marginalni trošak je jednak:

$$MC(x) = 0.0015x^2 - 0.2x + 12,$$

pa je prema tome $C'(200) = MC(200) = 32\$/m^2$. Dobiveni broj interpretira se kao stopa rasta troška u odnosu na broj predviđenih jedinica za $x = 200$.

Primjer 2.4 Neka je $q(x)$ broj količine proizvedenih proizvoda kada u postrojenju radi x radnika. Tada prosječnu produktivnost poduzeća možemo definirati kao

$$A(x) = \frac{q(x)}{x}. \tag{12}$$

Odredimo $A'(x)$. Ako je $A'(x) > 0$, objasnimo zašto bi postrojenje trebalo tada zaposliti više radnika.

Rješenje: Kako je $A(x)$ kvocijent dviju funkcija, $A'(x)$ ćemo dobiti koristeći pravilo za deriviranje istoga. Slijedi tada da je:

$$A'(x) = \frac{xq'(x) - q(x)}{x^2}$$

Iz pretpostavke da je $A'(x) > 0$, slijedi da je funkcija $A(x)$ rastuća, te stoga raste prosječna produktivnost u ovisnosti o broju radnika.

2.2.2 Neprekidno ukamaćivanje

Pretpostavimo da smo ulog od C_0 novca stavili na štednju s godišnjom kamatnom stopom od $r \cdot 100\%$. Ukoliko se ukamaćivanje radi na godišnjoj bazi, onda nakon t godina naš ulog vrijedi

$$C(t) = C_0(1+r)^t.$$

Međutim, obično se ukamaćivanje vrši u kraćim vremenskim intervalima (polugodišnje, kvartalno, mjesečno ili dnevno). Ukoliko se vrši n puta godišnje, nakon t godina vrijednost naše investicije iznosit će

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

pri čemu je obično $n \in \{2, 4, 12, 365\}$. Sada zamislimo da se naš ulog ukamaćuje u vrlo kratkim vremenskim intervalima, odnosno da je n velik. Preciznije, promatramo što se događa kada $n \to +\infty$:

$$C(t) := \lim_{n\to+\infty} C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = C_0 \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^{rt} = C_0 e^{rt} \tag{13}$$

te ovdje govorimo o neprekinutom ukamaćivanju. Uočimo kako je $C(t) = C_0 e^{rt}$, pa je tada

$$C'(t) = r\,C_0 e^{rt} = r\,C(t) \tag{14}$$

Vidimo kako je brzina rasta uloga u nekom trenutku proporcionalna njegovom iznosu u tom trenutku.

Primjer 2.5 Neka je uloženo 1000 kuna po godišnoj kamatnoj stopi od 10%. Odredimo vrijednost uloga po isteku 5. godine ako je ukamaćivanje

(a) mjesečno

(b) godišnje

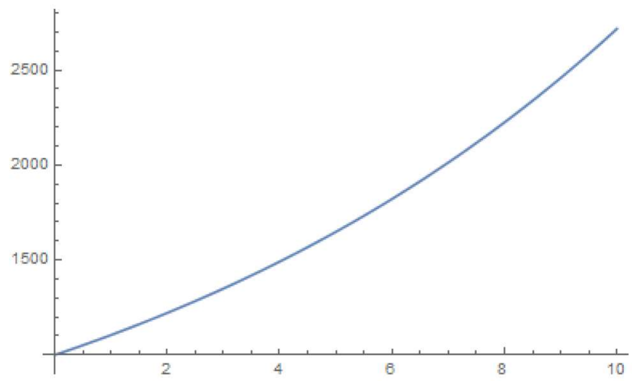
(c) neprekidno, te odredimo brzinu rasta uloga na početku prve godine.

Rješenje:

(a) $C(5) = 1000\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12\cdot 5} = 1645.31$

(b) $C(5) = 1000\,(1+0.1)^5 = 1610.51$

(c) $C(5) = 1000 \cdot e^{0.1\cdot 5} = 1648.72$
Brzina rasta uloga na početku 1. godine je $C'(0) = rC(0) = 0.1 \cdot 1000 = 100$ kn/god.



Slika 4: Graf funkcije $C(t) = 1000\, e^{0.1\, t}$

2.2.3 Elastičnost potražnje

Pojam elastičnosti funkcije je važan u ekonomskim analizama. Neka je $Q = f(P)$, funkcija potražnje koja ovisi o cijeni P. **Elastičnost** funkcije Q označavamo sa ε_d i definiramo kao

$$\varepsilon_d = \left| \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \right| \tag{15}$$

Uočimo kako je potražnja padajuća funkcija cijene P, stoga je izraz $dQ/dP < 0$, te stavljamo apsolutne vrijednosti kako bi elastičnost uvijek bila pozitivna. Razlikujemo 3 slučaja vezana za elastičnost , a to su:

1. $\varepsilon_d < 1$: Potražnja je neelastična, tj. povećanje cijena će voditi povećanju profiti
2. $\varepsilon_d > 1$: Potražnja je elastična, tj. povećanje cijena će voditi smanjenju profiti
3. $\varepsilon_d = 1$: Potražnja je jedinično elastična, odnosno nema nikakvih promjena.

Idući teorem nam govori o vezi između elastičnosti potražnje i marginalnog prihoda.

Teorem 2.2 Neka je MR funkcija marginalnog prihoda, P funkcije cijene i ε_d elastičnost potražnje. Tada vrijedi

$$MR = P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_d}\right) \tag{16}$$

Dokaz: Neka je R funkcija prihoda. Kako je P funkcija cijena možemo R dobiti kao $P(Q) \cdot Q$. Znamo da je

$$MR = R'(Q) = P(Q) + QP'(Q)$$

Također elastičnost je

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

pa slijedi da je $\frac{dP}{dQ} = P'(Q) = \dfrac{P}{\varepsilon_d \cdot Q}$. Ukoliko to sada uvrstimo gore u izraz za MR dobivamo

$$MR = P + Q\frac{P}{\varepsilon_d \cdot Q} = P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_d}\right)$$

$\square$

Interpretacija elastičnosti je: "za koliki postotak će se smanjiti potražnja, ako cijena poraste za 1%". Ilustrirajmo pojam elastičnosti na sljedećim primjerima.

Primjer 2.6 Neka je $Q = 150 - 3P$. Nađimo ε_d za $P = 30$.

Rješenje:
Deriviranje po P dobivamo sljedeći izraz $dQ/dP = -3$. Nadalje, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{150 - 3P}$. Uvrštavanjem u (15) dobivamo:

$$\varepsilon_d = \left| -3 \cdot \frac{P}{150 - 3P} \right| = \left| \frac{P}{P - 50} \right|$$

Za $P = 30$ dobiti ćemo $\varepsilon_d = |-1.5| = 1.5$. Dobiveni rezultat je veći od 1, stoga je potražnja elastična, te će svako povećanje cijena voditi ka smanjenju profiti.

Općenito, ako imamo funkciju $y = f(x)$, tada elastičnost u točki funkcije y obzirom na x definiramo kao:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{dy/dx}{y/x} \tag{17}$$

Uočimo kako je elastičnost omjer granične funkcije i prosječne funkcije.

Primjer 2.7 Neka je $a > 0$ i $b \in (0, 1)$, te neka je dana funkcija potrošnje

$$C(Y) = a + bY$$

Nađimo graničnu i prosječnu funkciju. Odredimo $\varepsilon_{C,Y}$, uz pretpostavku da je $Y > 0$.

Rješenje:
Granična funkcija:

$$\frac{dC}{dY} = b$$

Prosječna funkcija:

$$\frac{C}{Y} = \frac{a + bY}{Y} = \frac{a}{Y} + b$$

Elastičnost:

$$\varepsilon_{C,Y} = \frac{b}{\frac{a+bY}{Y}} = \frac{bY}{a + bY}$$

Uočimo kako je $\varepsilon_{C,Y} < 1$, pa je funkcija potrošnje neelastična za sve pozitivne iznose dohotka.

2.3 Pojam i svojstva parcijalnih derivacija

Do sada smo u radu promatrali pojam "obične" derivacije, koja se veže za pojam funkcije jedne varijable. No, kako u stvarnom svijetu većinom promatramo pojave vezane uz više varijabli, tada se prikladno rade modeli sa funkcijama više varijabli. Na primjer, ako promatramo vrijednost neke materijalne točke u prostoru, to možemo opisati nekom funkcijom $f(x, y, z)$ koja nam daje vrijednost u ovisnosti o položaju u prostoru. Također, pojave u fizici se često gledaju u vremenu t, pa tada sve to opisujemo nekom funkcijom $g(x, y, z, t)$. Kako u fizici, tako i razni ekonomski problemi se mogu često opisati nekim funkcijama s dvije ili više varijabli.

Prije samih primjena parcijalnih derivacija, definirajmo i objasnimo značenje same parcijalne derivacije. Nadalje, promatramo funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ i uvodimo sljedeću definiciju parcijalne derivacije.

Definicija 2.2 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : D \to \mathbb{R}$ i točka $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$. Za fiksan $k \in \{1, \ldots, n\}$ kažemo da funkcija ima $k-$tu parcijalnu derivaciju ili derivaciju po $k-$toj varijabli u točki P_0 ukoliko postoji

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{x_k - x_k^0}. \tag{18}$$

Tada taj limes nazivamo parcijalna derivacija funkcije f po $k-$toj varijabli u točki P_0 i označavamo ga s $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)$.

Uočimo kako je ova definicija zapravo poopćenje izraza (8) iz definicije derivacije funkcije jedne varijable. Tehnika parcijalnog deriviranja funkcije n varijabli svodi se na "obično" deriviranje, jer varijable po kojima ne deriviramo smatramo konstantama, pa prilikom parcijalnog derivaranja u funkciji imamo $n-1$ konstantu. Samim time, sva pravila i svojstva parcijalnih derivacija su jednaka kao i za "običnu" derivaciju.

Gradijent funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ u točki P_0 je vektor parcijalnih derivacija redom po svakoj varijabli. Označavamo ga s

$$\nabla f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix}$$

Hessijan funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ u točki P_0 je matrica "drugih" derivacija i definiramo je kao:

$$H_f(P_0) = \nabla^2 f(P_0) = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1} f(P_0) & \ldots & \partial^2_{x_1, x_n} f(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_n, x_1} f(P_0) & \ldots & \partial^2_{x_n} f(P_0) \end{bmatrix}$$

Napomena: Ako je funkcija f klase C^2 tada je $H_f(P_0)$ simetrična matrica, odnosno vrijedi da je $H_f(P_0) = H_f(P_0)^T$.

Primjer 2.8 Neka je $f(x,y) = x^3y^3$. Nađimo parcijalne derivacije po varijablama x i y i odredimo gradijent, te Hessijan funkcije u točki $P_0 = (1,1)$.

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = [y \text{ smatramo konstantom}] = 3x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = [x \text{ smatramo konstantom}] = 3y^2x^3$$

$$\nabla f(1,1) = [3,3]^T$$

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

2.4 Ekonomske primjene parcijalne derivacije

2.4.1 Marginalni trošak i prihod

Kao što smo ranije definirali pojam marginalnog troška i prihoda u ekonomiji vezanih za količinu jednog dobra, isto tako možemo definirati marginalni trošak, odnosno prihod za proizvodnju više proizvoda. Pretpostavimo da se proizvodi $n \in \mathbb{N}$ proizvoda, te neka je $Q_i, i = 1, \ldots, n$ količina proizvedenog $i-$tog proizvoda. Nadalje, neka su $C(Q_1, \ldots, Q_n)$ i $R(Q_1, \ldots, Q_n)$ redom funkcije troškova i prihoda.

Marginalni trošak proizvodnje $i-$tog proizvoda MC_i definiramo kao parcijalnu derivaciju funkcije troškova po količini Q_i, odnosno

$$MC_i(Q_1, \ldots, Q_n) = \frac{\partial C}{\partial Q_i}. \tag{19}$$

Analogno tome, marginalni prihod od proizvodnje $i-$tog proizvoda MR_i definiramo kao parcijalnu derivaciju funkcije prihoda po količini Q_i, odnosno

$$MR_i(Q_1, \ldots, Q_n) = \frac{\partial R}{\partial Q_i}. \tag{20}$$

Primjer 2.9 Pretpostavimo da neka firma proizvodi dva proizvoda sa količinama Q_1 i Q_2, te neka nam su nam dane funkcije troška i prihoda

$$C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

$$R(Q_1, Q_2) = 1500 + 2Q_1^2 + 4Q_2^2$$

Odredimo funkcije marginalnog troška i prihoda za proizvod 1.

Rješenje: Sukladno definicijama koristimo izraze (18), odnosno (19), te dobivamo sljedeće funkcije

$$MC_1(Q_1, Q_2) = \frac{\partial C}{\partial Q_1} = 4Q_1 + Q_2$$

$$MR_1(Q_1, Q_2) = \frac{\partial R}{\partial Q_1} = 4Q_1$$

2.4.2 Parcijalna elastičnost

U poglavlju 3.2.3 definirali smo elastičnost funkcije potražnje koja ovisi o cijeni P, nekog proizvoda. Ovdje pretpostavljamo da naša funkcije potražnje Q ovisi o n prozvoda, tj. o njihovim cijenama $P_i, i = 1, \ldots, n$. Ipak, svaka mjera elastičnosti se mora definirati pomoću jedne neovisne varijable. Stoga će funkcija $Q = f(P_1, \ldots, P_n)$ imati n mjera elastičnosti. Suglasno tome one se zovu **parcijalne elastičnosti**. Za funkciju potražnje Q $i-$tu parcijalnu elastičnost definiramo kao

$$\varepsilon_{Q,P_i} = \left| \frac{\partial Q}{\partial P_i} \frac{P_i}{Q} \right|, \, i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Sama interpretacija elastičnosti kao i značenje slučajeva iz poglavlja 3.2.3 su analogna. Isto tako, elastičnost možemo i općenito definirati i za proizvoljnu funkciju $f(x_1, \ldots, x_n)$. Tako elastičnost općenito definiramo kao

$$\varepsilon_{f,x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{f}, \, i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Primjer 2.10 Neka je $S = S(Y, i)$ funkcija štednje koja ovisi o realnom dohotku Y i kamatnoj stopi i. Parcijalne elastičnosti će tada imati sljedeći oblik

$$\begin{aligned} \varepsilon_{S,Y} &= \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{Y}{S} \\ \varepsilon_{S,i} &= \frac{\partial S}{\partial i} \frac{i}{S}. \end{aligned}$$

Primjer 2.11 Neka je zadana funkcija potražnje nekog dobra

$$Q(P, R) = a + bP^2 + \sqrt{R}$$

pri čemu je $a < 0, b > 0$ i R varijabla "kišovitosti". Nađimo elastičnosti obzirom na cijenu i kišovitost.

Rješenje: Po definiciji, koristeći (21) dobivamo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q,P} &= \frac{\partial Q}{\partial P} \frac{P}{Q} = \frac{2bP^2}{a + bP^2 + \sqrt{R}} \\ \varepsilon_{Q,R} &= \frac{\partial Q}{\partial R} \frac{R}{Q} = \frac{\sqrt{R}}{2(a + bP^2 + \sqrt{R})} \end{aligned}$$

Možemo uočiti ovdje kako su marginalni trošak, marginalni profit i elastičnost iz poglavlja 3.2, zapravo specijalni slučajevi svih ovdje definiranih funkcija kada je $n = 1$.

2.4.3 Primjena na komparativnostatičku analizu

U poglavlju 2.2.1 imali smo primjer u kojemu smo izgradili jedan jednostavan model ponude i potražnje u ekonomiji sa jednim dobrom. Prisjetimo se da je model izgledao ovako, ali bez dodatnog pisanja uvjeta ravnoteže

$$\begin{aligned} Q &= a - bP \\ Q &= -c + dP \end{aligned}$$

Rješavajući taj model nekom od metoda, dobili smo sljedeća rješenja:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{a+c}{b+d} \\ \overline{Q} &= \frac{ad-bc}{b+d} \end{aligned}$$

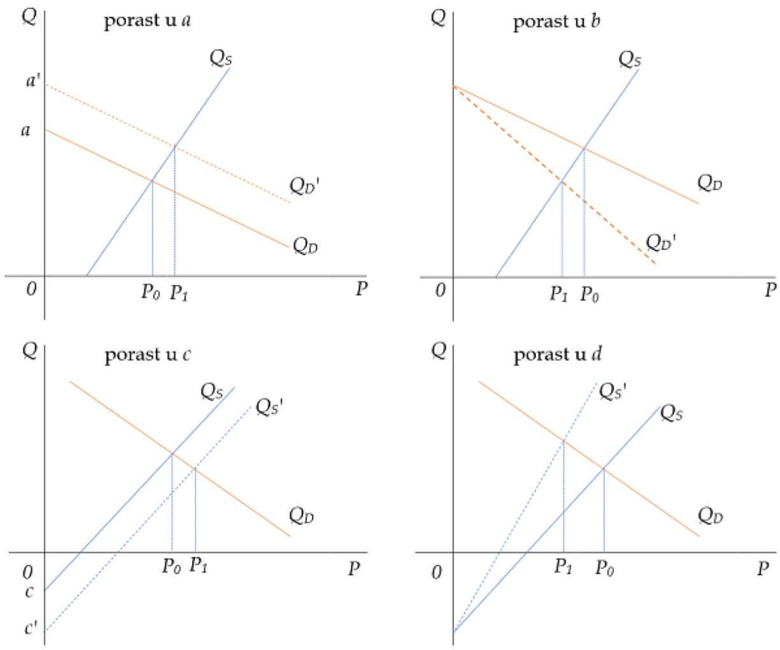
Ta rješenja ćemo zvati rješenja u reduciranom obliku. Dvije endogene varijable P i Q smo eksplictno izrazili kao funkcije parametara. Ako želimo saznati kako bi utjecala mala promjena bilo kojeg parametra, na $\overline{P}$, isti moramo u ovom slučaju parcijalno derivirati po parametru koji nas zanima. Ako možemo odrediti predznak derivacije, to će nam govoriti u kojem smjeru će se kretati $\overline{P}$. Uzmimo sad $\overline{P}$ i derivirajmo parcijalno po svim parametrima. Dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{P}}{\partial a} &= \frac{1}{b+d} \\ \frac{\partial \overline{P}}{\partial b} &= -\frac{a+c}{(b+d)^2} \\ \frac{\partial \overline{P}}{\partial c} &= \frac{1}{b+d} \\ \frac{\partial \overline{P}}{\partial d} &= -\frac{a+c}{(b+d)^2} \end{aligned}$$

Kako su svi parametri ovdje pozitivni, možemo zaključiti da je

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial a} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial c} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \overline{P}}{\partial b} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial d} < 0$$

Kako bi bolje razumjeli promjenu parametara i posljedica promjene pogledajmo sljedeću sliku. Svaka slika prikazuje promjenu jednoga parametra iz razloga jer se u ekomoniji svaka promjena gleda bez promjene ostalih. Promatrat ćemo povećanja parametara.



Slika 5: Promjene u parametrima

2.4.4 Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje

U ekonomiji i ekonometriji, Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje je jedan poseban oblik funkcije proizvodnje, koja se široko koristi za predstavljanje tehnološkog odnosa između iznosa dvaju ili više inputa (osobito fizičkog kapitala i rada) i količine proizvodnje koja može biti proizvedena tim inputima. 1928. C. Cobb[2] i P. Douglas[3] objavili su rad u kojem je predstavljena funkcija - model američke ekonomije u periodu 1899-1922. Funkcija daje ovisnost količine proizvodnje P u ovisnosti o količini uloženog rada L i uloženog kapitala K, tj. $P = f(K, L)$. Formula Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje je:

$$P(K, L) = bL^{\alpha}K^{\beta} \tag{23}$$

pri čemu je:

- P ukupna proizvodnja, monetarna vrijednost svih dobara proizvedenih u jednoj godini
- L količina utrošenog rada, ukupan broj radnih sati u jednoj godini ($L > 0$)
- K količina uloženog kapitala, monetarna vrijednost sve opreme ($K > 0$)
- α koeficijent elastičnosti proizvodnje u odnosu na rad ($\alpha > 0$)
- β koeficijent elastičnosti proizvodnje u odnosu na kapital ($\beta > 0$)
- b parametar efikasnosti.

Elastičnosti proizvodnje α i β mjere odziv outputa na promjenu razine rada ili kapitala korištenog u proizvodnji, ceteris paribus[4]. Na primjer, ako uzmemo da je $\beta = 0.45$, to

[2]Charles Cobb, 1875–1949, američki matematičar i ekonomist
[3]Paul Douglas, 1892-1976, američki ekonomist
[4]lat. bez mjenjanja ostalog

znači da povećanje korištenog kapitala za 1%, će dovesti do približno 0,45% povećanja proizvodnje. U uvjetima savršeno konkurentnog tržišta vrijedi $\alpha + \beta = 1$. Pretpostavljat ćemo dalje da smo u uvjetima savršeno konkurentnog tržišta

Cobb - Douglasova funkcija je najčešće korištena funkcija u ekonomiji (dosta precizna, te parametri b, α, β mogu se dobiti prilagođavanjem podacima metodom najmanjih kvadrata).

U svojoj generaliziranoj formi, Cobb-Douglasova funkcija modelira više od dvije robe, te se može napisati kao:

$$f(\mathbf{x}) = b\prod_{i=1}^{L} x_i^{\lambda_i}, \tag{24}$$

gdje je b parametar učinkovitosti, L ukupan broj robe, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_L)$, x_i, $i = 1, \ldots, L$ su (nenegativne) količine potrošenog, proizvedenog, itd. dobra i λ_i, $i = 1, \ldots, L$ je parametar elastičnosti za dobro i. Također i ovdje u uvjetima savršeno konkurentnog tržišta vrijedi

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i = 1.$$

Dalje ćemo promatrati oblik (23). Kao što smo ranije spomenuli pojmove marginalnog troška, odnosno prihoda, koji se dobiju derivanjem funkcije troškova i prihoda, analognu stvar možemo definirati i ovdje. U ovom slučaju definiramo marginalnu produktivnost rada kao

$$MPL(K, L) = \frac{\partial P}{\partial L}, \tag{25}$$

te definiramo marginalnu produktivnost kapitala na sličan način, kao

$$MPK(K, L) = \frac{\partial P}{\partial K}. \tag{26}$$

Cobb - Douglasova funkcija posjeduje svojstvo homogenosti. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogena sa stupnjem k ako za $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}).$$

Cobb - Douglasova funkcija je homogena funkcija stupnja $k = 1$. Pokažimo to za oblik (22). Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\alpha + \beta = 1$, tada imamo:

$$\begin{aligned} P(\lambda K, \lambda L) &= b\lambda^{\alpha} L^{\alpha} \lambda^{\beta} K^{\beta} \\ [\alpha + \beta = 1] &= \lambda \; \underbrace{bL^{\alpha}K^{\beta}}_{P(K,L)} \\ &= \lambda \, P(K, L) \end{aligned}$$

$\square$

Primjer 2.12 Pretpostavimo da smo na temelju podataka procijenili parametre Cobb - Douglasove funkcije i dobili sljedeću formulu

$$P(K,L) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}.$$

Ako je ukupan broj radnih sati iznosio 121, a monetarna vrijednost opreme je 138, odredimo ukupnu proizvodnju i marginalnu produktivnost rada i kapitala.

Rješenje: Ukupnu proizvodnju dobijemo direktnim uvrštavanjem u formulu, stoga je

$$P(138, 121) = 1.01 \cdot 121^{0.75} \cdot 138^{0.25} = 126.3.$$

Marginalnu produktivnost rada dobijemo koristeći (25):

$$MPL(138, 121) = \frac{\partial P}{\partial L}(138, 121) = 1.01 \cdot 0.75 \cdot 121^{0.75}\, 138^{0.25} = 0.78.$$

Slično, koristeći (26) dobijamo marginalnu produktivnost kapitala

$$MPK(138, 121) = \frac{\partial P}{\partial K}(138, 121) = 1.01 \cdot 121^{-0.25} \cdot 0.25 \cdot 138^{-0.75} = 0.228.$$

Primjedba. Pretpostavimo dodatno da funkciju proizvodnje promatramo i kroz vrijeme t, tj. Cobb - Douglasova funkcija je $P(K,L,t)$. Kako se kapital i rad tijekom vremena mogu mijenjati, možemo pretpostaviti da su i sami funkcije vremena, odnosno $K = K(t)$ i $L = L(t)$. Tada stopu promjene proizvodnje obzirom na vrijeme dobijemo kao:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial K} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\partial P}{\partial L} \cdot \frac{dL}{dt} + \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{27}$$

Primjer 2.13 Nađimo stopu promjene proizvodnje obzirom na vrijeme t ako je proizvodna funkcija oblika $P(K,L,t) = A(t)L^{\alpha}K^{\beta}$, gdje je $A(t)$ rastuća funkcija od t, te $K = K_0 + at$ i $L = L_0 + bt$.

Rješenje: Kako ovdje proizvodna funkcija dodatno sadrži i vrijeme t, za traženje stope promjene u vremenu t koristimo (27) i imamo:

$$\frac{dP}{dt} = \beta A(t)L^{\alpha}K^{\beta-1} \cdot a + \alpha A(t)L^{\alpha-1}K^{\beta} \cdot b + A'(t)L^{\alpha}K^{\beta}.$$

2.5 Optimizacija u ekonomiji

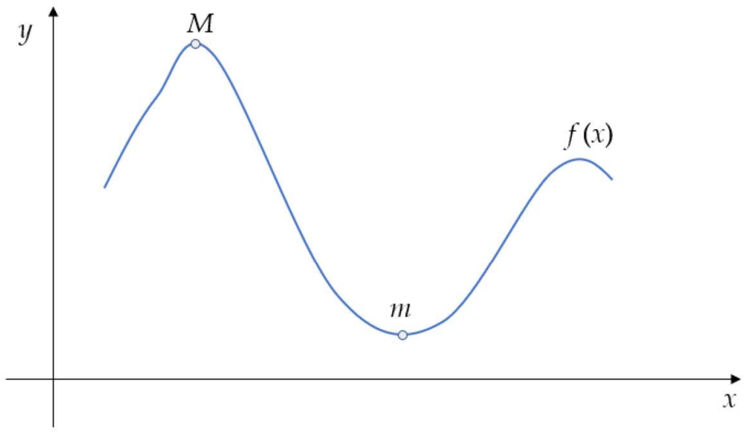
Često u svakodnevnom životu postoji neka potreba da se nešto napravi ili dogodi na optimalan način. Tako i razni problemi u znanosti, pa i ekonomiji često dovode do nekih slučajeva kada treba nešto optimizirati, maksimizirati profit, minimizirati gubitak i tako dalje. U ovom dijelu rada objasnit ćemo pojmove minimuma i maksimuma, dat ćemo postupak njihovog traženja, te pokazati to na nekoliko primjera.

Definicija 2.3 Kažemo da funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u točki $x^* \in D$ postiže **lokalni minimum** ako postoji okolina $\mathcal{O}(x^*)$ takva da je $f(x) \geq f(x^*)$ za svaki $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap D$. Točku x^* zovemo **točka lokalnog minimuma** ili **lokalni minimizator** funkcije f.

Napomena: Ako u prethodnoj definiciji stoji znak strogo veće ($>$) govorimo o strogom lokalnom minimumu. Ukoliko prethodna definicija vrijedi za sve $x \in D$ tada kažemo da je x^* točka **globalnog minimuma** funkcije f na D.

Skup svih točaka globalnog minimuma funkcije f označavamo s $\operatorname*{argmin}_{x \in D} f(x)$, te vrijednost $f(x^*)$ za $x^* \in \operatorname*{argmin}_{x \in D} f(x)$ zovemo globalni minimum funkcije f na D.
Analogno prethodnome možemo lako definirati i pojmove lokalnog i globalnoga maksimuma funkcije f.

Definicija 2.4 Kažemo da je $x^* \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ stacionarna točka funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ako je $\nabla f(x^*) = 0$.



Slika 6: Globalni minimum i maksimum funkcije

Vidimo na gornjoj slici da je točka M globalni maksimum funkcije $f(x)$, dok je točka m globalni minimum na promatranoj domeni - intervalu.

2.5.1 Optimizacija funkcije jedne varijable i primjena

U ovom dijelu ćemo opisati postupak traženja ekstrema funkcije jedne varijable i pokazati primjenu na primjerima.

Postupak traženja ekstrema:

1. Definirati funkciju cilja $f(x)$, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. Odrediti stacionarne točke, tj. odrediti x_0 takav da je $f'(x_0) = 0$.
3. Ako je $f''(x_0) < 0$ onda f u točki x_0 ima lokalni maksimum, a ako $f''(x_0) > 0$ onda f ima lokalni minimum.

Primjer 2.14 Pretpostavimo da neko poduzeće ima sljedeće funkcije troškova i prihoda

$$C(Q) = 2Q^3 - 3Q^2 + 400Q + 5000$$

$$R(Q) = 4000Q - 33Q^2$$

Odredimo za koju količinu proizvedenih proizvoda Q je profit π najveći.

Rješenje: Profit definiramo kao razliku prihoda i troškova, tj. $\pi = R - C$. U ovom slučaju funkcija profita izgleda:

$$\pi(Q) = -2Q^3 - 30Q^2 + 3600Q - 5000$$

Odredimo derivaciju funkcije $\pi(Q)$. Slijedi da je $\pi'(Q) = -6Q^2 - 60Q + 3600$. Kada riješimo jednadžbu $\pi'(Q) = 0$ dobijamo dva rješenja, a to su $Q_1 = -30$ i $Q_2 = 20$. Naravno da rješenje Q_1 nećemo uzeti u obzir jer Q mora biti pozitivan. Druga derivacija ima oblik $\pi''(Q) = -12Q - 60$. Ako uvrstimo $Q = 20$ dobit ćemo $\pi''(20) = -12 \cdot 20 - 60 = -300$, što je manje od 0, pa po koraku 3. za $Q = 20$ poduzeće će imati maksimalan profit.

Primjer 2.15 Upravitelj zgrade sa 100 stanova zna iz iskustva da će svi stanovi biti iznajmljeni ukoliko je mjesečna najamnina po stanu jednaka 800 eura. Istraživanja tržišta ukazuju na to da će za svako povećanje cijene najma za 10 eura u prosjeku jedan stan ostati neiznajmljen. Upravitelj treba odrediti najamninu koja maksimizira profit.

Rješenje: Ukoliko s x označimo povećanje cijene stanarine, onda je ukupni prihod dan funkcijom:

$$P(x) = (800 + x)\left(100 - \frac{x}{10}\right) = 80000 + 20x - \frac{x^2}{10}$$

Stacionarna točka je $x = 100$, pa je to očito točka maksimuma (tjeme parabole koja je otvorena prema dolje). Slijedi da je profit najveći ako je cijena najamnine stana jednaka 900 eura.

2.5.2 Optimizacija funkcije više varijabli i primjena

Kao i u prethodnom ćemo također opisati postupak traženja ekstrema za funkcije više varijabli, koji je ovdje nešto složeniji, te ćemo iste pokazati na primjerima. Koraci 1. i 2. su analogni, osim što u koraku 2. gledamo $\nabla f(x) = 0$. Korak 3. je u ovom slučaju složeniji. Iskažimo tvrdnje koje nam govore o tome kako prepoznati radi li se o minimumu ili maksimumu funkcije. Kako se u prethodnom gledala druga derivacija, u ovom slučaju gledamo Hessijan fukcije $H_f(P_0)$.

Definicija 2.5 Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

- pozitivno (semi)definitna ako je $x^T Ax > 0 \ (\geq 0), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0$
- negativno (semi)definitna ako je $x^T Ax < 0 \ (\leq 0), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0$
- indefinitna ako postoje $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq 0$ tako da je $x^T Ax > 0 > y^T Ay$.

Sljedeći teorem nam daje rezultat, gledajući Hessijan, hoće li točka P_0 biti točka minimuma ili maksimuma.

Teorem 2.3 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : D \to R$, te neka je P_0 stacionarna točka fukcije.

- Ako je $H_f(P_0)$ pozitivno definitna matrica, onda funkcija u P_0 postiže strogi lokalni minimum.
- Ako je $H_f(P_0)$ negativno definitna matrica, onda funkcija u P_0 postiže strogi lokalni maksimum.
- Ako je $H_f(P_0)$ indefinitna, onda f u P_0 nema lokalni ekstrem, tj. P_0 je sedlasta točka funkcije f.

Napomena. Ako je $H_f(P_0)$ pozitivno ili negativno semidefinitna matrica, onda nema odluke, tj. ne možemo ništa zaključiti o karakteru točke P_0 pa su potrebna dodatna ispitivanja. Definitnost matrice možemo odrediti gledajući svojstvene vrijednosti ili koristeći Sylvesterov kriterij [za više vidi 11].

Primjer 2.16 Pretpostavimo da poduzeće proizvodi 2 proizvoda A i B u količinama x i y redom, te da ima funkciju profita

$$\pi(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

Odredimo za koju količinu proizvoda A, odnosno B je profit najveći i odredimo koliki bi bio njegov iznos.

Rješenje: Tražimo x, y tako da je $\nabla\pi(x,y) = (0,0)$. Odredimo parcijalne derivacije i izjednačimo ih s 0:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 64 - 4x + 4y = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 4x - 8y + 32 = 0$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo stacionarnu točku $P_0 = (40, 24)$. Još preostaje odrediti radi li se o ekstremu i, ako da, kojemu. Koristimo Hessijan matricu i dobivamo:

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Koristeći neku od metoda za utvrđivanje definitnosti matrice, dolazimo do zaključka da je $H_f(P_0)$ negativno definitna, pa slijedi je točka $P_0 = (40, 24)$ točka lokalnog maksimuma. Dakle, za 40 komada proizvoda A i 24 komada proizvoda B će profit biti najveći. Iznos profita je $\pi(40, 24) = 1650$.

Primjer 2.17 U monopolističkoj konkurenciji proizvođači moraju odrediti cijenu koja maksimizira njihov profit. Pretpostavimo da proizvođač nudi dva tipa nekog proizvoda, za koji su dane funkcije potražnje:

$$Q_1 = 14 - 0.25P_1$$
$$Q_2 = 24 - 0.5P_2,$$

te zajedničku funkciju troškova $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$. Treba odrediti cijene tipova proizvoda koje će maksimizirati profit.

Rješenje:
Prisjetimo se prvo da je profit razlika između prihoda i troškova,

$$\pi(Q_1, Q_2) = R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2)$$

Kako u ovom slučaju nemamo funkciju prihoda, nju ćemo dobiti kao produkt funkcije cijene i količina, tj. $R(Q_1, Q_2) = P_1(Q_1)Q_1 + P_2(Q_2)Q_2$. Još nam je ostalo odrediti funkcije $P_1(Q_1)$ i $P_2(Q_2)$. Njih ćemo dobiti koristeći zadane funkcije potražnje.

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 14 - 0.25P_1 \\ Q_2 = 24 - 0.5P_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} P_1(Q_1) = 56 - 4Q_1 \\ P_2(Q_2) = 48 - 2Q_2 \end{array}$$

Sada možemo dobiti funkciju prihoda: $R(Q_1, Q_2) = 56Q_1 - 4Q_1^2 + 48Q_2 - 2Q_2^2$. Kada smo dobili funkciju prihoda, možemo definirati funkciju cilja, tj. u našem slučaju funkciju profita.

$$\pi(Q_1, Q_2) = 56Q_1 - 5Q_1^2 + 48Q_2 - 3Q_2^2 - 5Q_1Q_2$$

Sada možemo krenuti sa postupkom optimizacije. Nađemo parcijalne derivacije i riješimo sustav $\nabla\pi(Q_1, Q_2) = (0, 0)$.

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 56 - 10Q_1 - 5Q_2 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 48 - 6Q_2 - 5Q_1 = 0$$

Rješavajući ovaj sustav dobivamo stacionarnu točku $Q = (2.75, 5.7)$. Još preostaje odrediti radi li se o ekstremu i, ako da, kojemu. Koristimo Hessijan matricu i dobivamo:

$$H_\pi(Q) = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Koristeći se nekim od metoda za utvrđivanje definitnosti matrice dolazimo do zaključka da je $H_\pi(Q)$ negativno definitna, te je stoga točka $Q = (2.75, 5.7)$ točka lokalnog maksimuma i cijene redom iznose $P_1 = 45$ i $P_2 = 34.4$.

3 Primjena integrala u ekonomiji

Do sada smo gledali primjenu derivacija u ekonomiji. U ovom dijelu rada pokazat ćemo i neke primjene integralnog računa. U ekonomiji probleme u kojima se koriste integrali nazivamo dinamička analiza. Za razliku od statičke analize, ovdje je cilj odrediti kako se neka pojava ponaša kroz vrijeme. Ovdje ćemo opisati pojam integrala, navesti neke osnovne tvrdnje i svojstva, te na primjerima pokazati osnovnu primjenu.

3.1 Pojam i svojstva integrala

Sam korijen integralnog računa javio se kao problem površine ispod grafa omeđene funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako su funkcije najčešće "zaobljene" nije se mogla točno odrediti površina, pa se sama aproksimirala upisivanjem pravokutnika, te razdiobom segmenta $[a, b]$ na kojem je ona definirana.

Definicija 3.1 Razdioba (rastav ili dekompozicija) segmenta $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je svaki konačan skup točaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$ takav da je

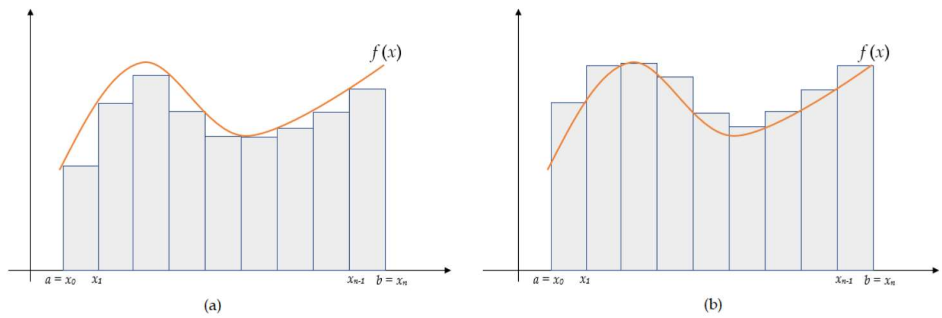
$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Skup svih dekompozicija segmenta $[a, b]$ označavamo s $\mathcal{R}$.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija i neka je $\rho : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ razbioba segmenta $[a, b]$, te neka su

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Tada je $s(f, \rho) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ donja Darbouxova suma funkcije f uz razdiobu ρ, i $S(f, \rho) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ gornja Darbouxova suma funkcije f uz razdiobu ρ.



Slika 7: (a) Donja Darbouxova suma (b) Gornja Darbouxova suma

Neka je $\mathcal{R}$ skup svih dekompozicija segmenta $[a, b]$. Broj $I^* = \inf\{S(f, \rho) : \rho \in \mathcal{R}\}$ nazivamo gornji Riemannov integral, a $I_* = \sup\{s(f, \rho) : \rho \in \mathcal{R}\}$ nazivamo donji Riemannov integral. Uočimo da vrijedi $I_* \leq I^*$.

Definicija 3.2 Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je Riemann integrabilna ($R-$integrabilna) ako je $I_* = I^*$. Tu zajedničku vrijednost zovemo određenim integralom funkcije na $[a, b]$ i označavamo s

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teorem 3.1 Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

gdje je $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ i $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Primitivna funkcija ili antiderivacija od f je svaka funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a, b)$. Skup svih primitivnih funkcija od f zove se neodređeni integral od f. Dakle,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

Iskažimo sada osnovni teorem integralnog računa koji daje postupak za računanje određenog integrala.

Teorem 3.2 (Newton-Leibnizova formula) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilo koja njezina primitivna funkcija. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{28}$$

Idući teorem nam daje neka osnovna svojstva integrala. Svojstva se odnose na određeni i neodređeni integral.

Teorem 3.3 Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je i $\alpha f + \beta g$ integrabilna funkcija i vrijedi

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \tag{29}$$

Ako je dodatno $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{30}$$

3.2 Ekonomske primjene integrala

3.2.1 Funkcije troškova i prihoda

U poglavlju 2.2 ekonomskih primjena derivacija definirali smo pojmove marginalnog troška i prihoda koji se dobiju jednostavnim deriviranjem samih funkcija troškova $C(Q)$ i funkcija prihoda $R(Q)$. Priroda ovoga problema je, ako imamo zadane funkcije $MC(Q)$ i $MR(Q)$, kako doći do funkcija troškova i funkcija prihoda.

Neka je zadana funkcija marginalnog troška MC i neka su $C(0) = C_0$ neki fiksni troškovi. Funkciju troškova definiramo kao

$$C(Q) = \int MC(Q)dQ. \tag{31}$$

Kako ćemo integriranjem funkcije MC dobiti beskonačno mnogo funkcija, fiksni troškovi C_0, će odrediti konstantu integracije, te ćemo time dobiti konkretnu funkciju troškova. Analogno tome, ako je zadana funkcija marginalnih prihoda MR, i neka je $R(0) = R_0$ neki fiksni prihod, tada funkciju prihoda definiramo kao

$$R(Q) = \int MR(Q)dQ. \tag{32}$$

Iz istog razloga kao i gore R_0 nam je potreban da odredimo točnu funkciju prihoda. Pogledajmo to na sljedećem primjeru.

Primjer 3.1 Neka poduzeće ima sljedeće marginalne funkcije troškova i prihoda:

$$MC(Q) = 2e^{0.2Q}$$
$$MR(Q) = 28Q - e^{0.2Q}$$

Dodatno ako prepostavimo da fiksni troškovi iznose 90, a fiksni prihodi 100, odredimo funkcije troškova i prihoda.

Rješenje: Koristimo izraze (31) i (32), te dobivamo:

$$C(Q) = \int MC(Q)dQ = \int 2e^{0.2Q}dQ = 10e^{0.2Q} + c.$$

Treba odrediti još konstantu c. Koristimo se uvjetom $C(0) = 90$, pa slijedi $C(0) = 10 + c = 90$. Iz ovoga dobivamo $c = 80$, odnosno dobivena funkcija troškova je oblika $C(Q) = 10e^{0.2Q} + 80$. Analogno nađemo i funkciju prihoda kao:

$$R(Q) = \int MR(Q)dQ = \int (28Q - e^{0.2Q})dQ = 14Q^2 - 5e^{0.2Q} + c$$

Slično, koristeći uvjet $R(0) = 100$ dobivamo $c = 105$, pa je stoga dobivena funkcija troškova $R(Q) = 14Q^2 - 5e^{0.2Q} + 105$.

Ranije smo vidjeli da u ekonomiji postoji pojam granične funkcije. Ako je $y = f(x)$, onda je njezina granična funkcija $y' = f'(x)$. Ako imamo neki početni, fiksan, uvjet $y_0 = f(0)$, onda $y = f(x)$ možemo naći kao $y = \int f'(x)dx$.

Primjer 3.2 Ako je zadana granična sklonost štednji (MPS) funkcije dohotka

$$S'(Y) = 0.3 - 0.1Y^{-0.5}$$

i ako je ukupna štednja $S = 0$ kada je $Y = 81$, nađimo funkciju štednje $S(Y)$.

Rješenje: Kako je granična sklonost štednji zapravo derivacija funkcije štednje, problem se rješava jednostavnim integriranjem:

$$S(Y) = \int (0.3 - 0.1Y^{-0.5})dY = 0.3Y - 0.2\sqrt{Y} + c.$$

Vrijednost konstante c dobijemo iz uvjeta $S(81) = 0$, pa slijedi da je konačna funkcija štednje $S(Y) = 0.3Y - 0.2\sqrt{Y} - 22.5$.

3.2.2 Investicije i akumuliranje kapitala

Akumuliranje kapitala je proces uvećanja danog kapitala. Ako proces uvećanja promatramo neprekidno u vremenu t, tada kapital možemo izraziti kao funkciju vremena $K(t)$. Stopa akumuliranja kapitala u trenutku t, dK/dt je jednaka stopi neto investicija koja se mijenja u vremenu t. Prema tome vrijedi

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \Longleftrightarrow K(t) = \int I(t)dt$$

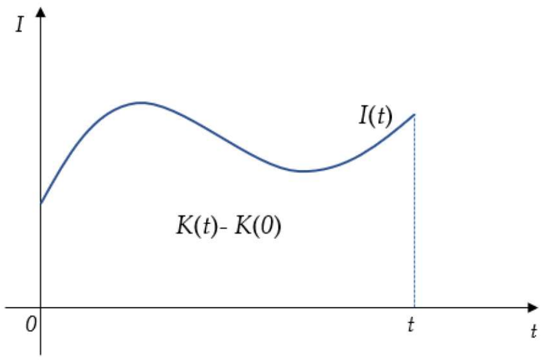
Kako bi smo odredili funkciju kapitala na nekom intervalu $[0, t]$ koristit ćemo formulu (28), te dobiti kao

$$\int_0^t I(t)dt = K(t) - K(0),$$

gdje je $K(0)$ početna vrijednost kapitala. Iz gornje jednakosti dobijemo formulu za kapital u proizvoljnom trenutku t kao:

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(s)ds. \tag{33}$$

Količina kapitala u bilo kojem trenutku t je jednaka zbroju početnog kapitala i ukupno akumuliranog kapitala do toga trenutka.



Slika 8: Kapital kao površina ispod grafa funkcije investicija

Primjer 3.3 Pretpostavimo da je stopa investicija opisana funkcijom $I(t) = 12t^{1/3}$ i da početni kapital iznosi 25. Nađimo vremensku putanju kapitala K i količinu akumuliranog kapitala na intervalu $[0, 1]$.

Rješenje: Vremensku putanju dobijamo jednostavno koristeći formulu (33).

$$K(t) = 25 + \int_0^t 12s^{1/3} ds = 25 + 9t^{4/3}$$

Količinu akumuliranog kapitala na $[0, 1]$ dobijemo kao $K(1) = 25 + 9 \cdot 1^{4/3} = 34$.

3.2.3 Sadašnja i buduća vrijednost neprekidnog toka prihoda

U točki 2.2.2 susreli smo se s pojmom ukamaćivanja i s pojmom neprekidnog ukamaćivanja. No, ukoliko neka velika firma ili poduzeće imaju prihode koje neprestalno dolaze, oni mogu biti predstavljeni nekom funkcijom vremena. Budući da stopa po kojoj se određeni prihodi zarađuju može varirati, tok prihoda možemo opisati funkcijom $S(t)$ koja predstavlja brzinu protoka u nekim novčanim jedinicama godišnje. Napominjemo da stopa ovisi o vremenu, t, obično mjerena u godinama od danas. Da bi odredili sadašnju vrijednost (PV) neprekidnog toka prihoda kroz T godina, podijelimo segment $[0, T]$ na n jednakih dijelova $\Delta t = \frac{T}{n}$ s točkama podjele $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ i pretpostavimo da je u svakom podintervalu napravljena jedna uplata. Ako pretpostavimo da je kamatna stopa r konstantna, sadašnju vrijednost tog toka prihoda možemo aproksimirati Riemannovom sumom oblika

$$PV \approx \sum_{i=1}^{n} S(t_i) e^{-rt_i} \Delta t.$$

Ako stavimo $n \to \infty$, odnosno $\Delta t \to 0$ dobijamo sljedeću formulu:

$$PV = \int_0^T S(t) e^{-rt} dt. \tag{34}$$

Sukladno tome, buduća vrijednost (FV) je dana s

$$FV = e^{rT} \int_0^T S(t) e^{-rt} dt. \tag{35}$$

Primjer 3.4 Neka investitor uplaćuje 3.3 milijuna dolara godišnje uz kamatnu stopu od $r = 9.4\%$. Uz pretpostavku neprekidnog toka i neprekidnog ukamaćivanja, odredimo iznos investicije za 10 godina.

Rješenje: Uočimo kako je $S(t) = 3.3$, tj. konstantno svake godine. Sada koristeći (34) dobivamo:

$$FV = e^{0.94} \int_0^{10} 3.3 e^{-0.094\,t} dt = 54.7653.$$

Dakle, za 10 godina vrijednost investicije će biti približno 54.7653 milijuna dolara.

Ako prihode ne gledamo na segmentu $[0, T]$, nego pustimo $T \to \infty$, tada dobivamo budući prihod koji će trajati vječno. To je stanje koje pokazuje smjer prihoda od vječnog ugovora ili prihoda od posjedovanja neuništivog kapitala, npr. zemlja. Tada sadašnju vrijednost definiramo kao nepravi integral, odnosno

$$PV = \int_0^\infty S(t)e^{-rt}dt. \tag{36}$$

Primjer 3.5 Nađimo sadašnju vrijednost budućeg vječnog prihoda koji pritječe u iznosu D novčanih jedinica godišnje, ako je neprekidna kamatna stopa jednaka r.

Rješenje: Kako imamo budući vječni prihod koristimo (36), pa dobivamo

$$PV = \int_0^\infty De^{-rt}dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x De^{-rt}dt = \lim_{x\to\infty} \frac{D}{r}(1-e^{-rx}) = \frac{D}{r}.$$

3.2.4 Potrošačev i proizvođačev višak

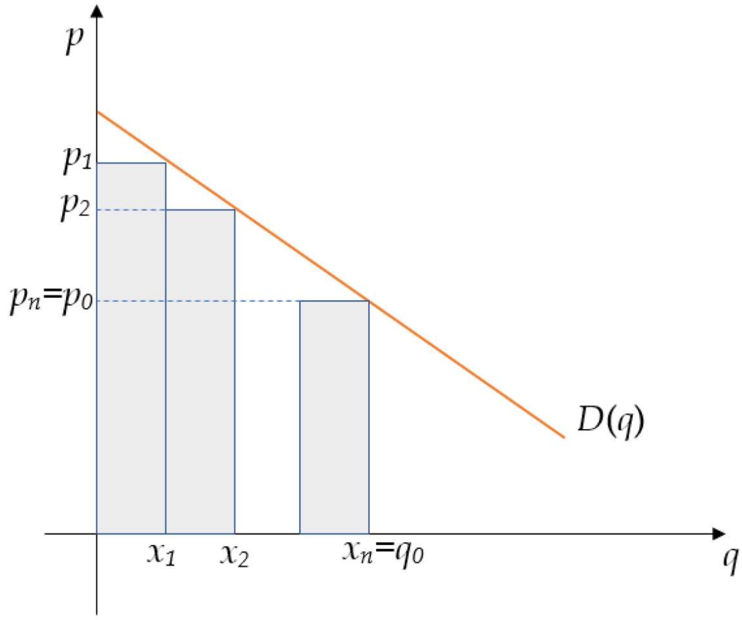
Jedan od temeljnih ekonomskih modela je zakon ponude i potražnje za određeni proizvod ili uslugu u okruženju slobodnog tržišta. U ovom modelu količina određene stavke koja je proizvedena i prodana opisana je s dvije krivulje, krivuljama ponude i potražnje ($Q_S - Q_D$ model).

Funkcija ponude daje količinu nekog dobra koju će proizvođači ponuditi po određenoj cijeni. Funkcija potražnje daje količinu koju će potrošači kupiti ili potraživati po bilo kojoj danoj cijeni.

Cijenu po jedinici označit ćemo s p, a količinu isporučenu za tu cijenu s q, te ćemo pretpostaviti da je cijena funkcija količine, $p = f(q)$. Stoga će krivulja ponude biti $p = S(q)$, a krivulja potražnje $p = D(q)$. Logično je tada zaključiti da će krivulja S biti rastuća (veća cijena vodi većoj ponudi), dok će krivulja D biti padajuća (veća cijena vodi manjoj potražnji).

Točka u kojoj se sijeku funkcije ponude i potražnje, (q_0, p_0), zove se **točka tržišne ravnoteže**. Brojevi q_0 i p_0 zovu se ravnotežna količina i ravnotežna cijena, redom.

U idealnom slobodnom tržištu prozvođači i potrošači najviše dobijaju i prodaju na ravnotežnoj cijeni. Ako bi svi potrošači kupovali po ravnotežnoj cijeni p_0 tada kupljena količina je jednaka q_0 i ukupna vrijednost potrošenog za tu količinu je $p_0 \cdot q_0$. Nadalje, izračunajmo ukupnu količinu koja bi bila potrošena ako svaki potrošač plati maksimalnu cijenu do koje je spreman platiti. Podijelimo segment $[0, q_0]$ na n jednakih dijelova duljine $\Delta x = q_0/n$, tada će točke podjele biti $\left\{x_i = \frac{i}{n}q_0 : i = 0, \dots, n\right\}$. Promotrimo, na primjer, interval $[0, x_1]$, tj. pretpostavimo da samo x_1 jedinica je dostupno. Tada su ukupni izdaci sa kupnju tih x_1 jedinica jednaki $D(x_1) \cdot \Delta x$ (cijena po jedinici $\cdot$ broj jedinica).



Slika 9: Riemmanova suma ukupne svote novca koju bi platili potrošači

Nakon prodaje x_1 jedinica, pretpostavimo da je sada dostupno x_2 jedinica po cijeni $D(x_2)$. Tada ostatak jedinica koji se može prodati je $x_2 - x_1 = \Delta x$, što vodi trošku od $D(x_2)\Delta x$. Nastavljajući postupak dalje, ukupna svota novca (TA[5]) koju bi platili potrošači je približno jednaka

$$TA \approx \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\Delta x.$$

Uočimo da gornji izraz predstavlja Riemannovu sumu. Za $n \to \infty$ ukupna svota novca je jednaka

$$TA = \int_0^{q_0} D(q)dq. \tag{37}$$

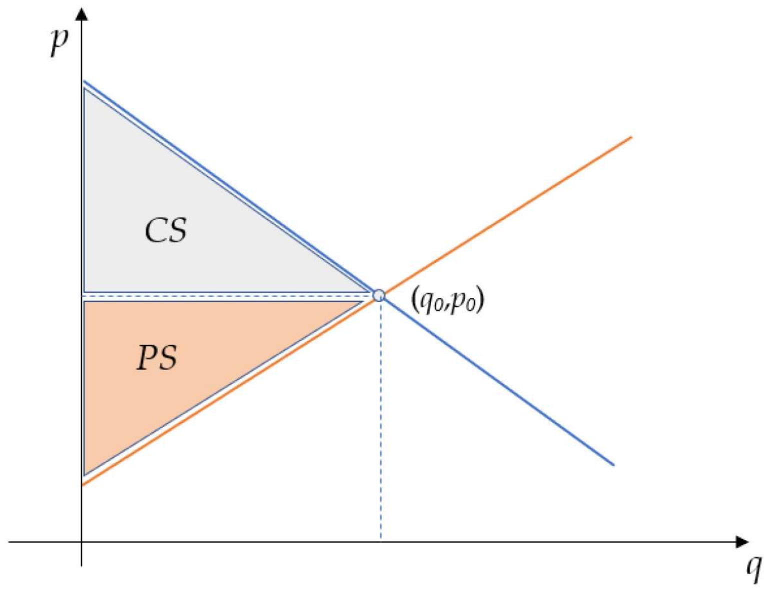
Ako od površine ispod grafa funkcije $D(q)$ oduzmemo pravokutnik površine p_0q_0, ta razlika predstavlja vrijednost koju potrošači uštede kupujući po ravnotežnoj cijeni. To se zove **potrošačev višak** (CS[6]) za taj proizvod. Matematički možemo ga definirati kao:

$$CS = \int_0^{q_0} D(q)dq - p_0q_0 = \int_0^{q_0} (D(q) - p_0)\, dq. \tag{38}$$

Sličnom analizom možamo doći do pojma **proizvođačev višak** (PS[7]). To je iznos koji proizvođači ostvaruju prodajom po tržišnoj cijeni koja je viša od najmanje za koju bi bili voljni prodati; to je otprilike jednako dobiti (budući da proizvođači obično nisu voljni prodati s gubitkom i obično su ravnodušni prema prodaji po početnoj cijeni). Proizvođačev višak se definira kao razlika između površina pravokutnika p_0q_0 i površine ispod grafa funkcije $S(q)$, odnosno matematički

$$PS = p_0q_0 - \int_0^{q_0} S(q)dq = \int_0^{q_0} (p_0 - S(q))dq. \tag{39}$$

[5]eng. total amount
[6]eng. consumer surplus
[7]eng. producer surplus



Slika 10: Potrošačev i proizvođačev višak

Primjer 3.6 Za neki proizvod dane su funkcije ponude i potražnje

$$D(q) = \frac{20}{q+1}$$
$$S(q) = q + 2$$

Izračunajmo potrošačev i proizvođačev ostatak za taj proizvod.

Rješenje: Najprije moramo izračunati točku ravnoteže (q_0, p_0). Nju ćemo dobiti izjednačavanjem krivulja ponude i potražnje, tj. $D(q) = S(q)$. Izjednačavanjem dobivamo

$$\frac{20}{q+1} = q + 2$$

Rješavanjem gornje jednadžbe dobijemo točku ravnoteže $(3, 5)$. Sada koristimo izraze (38) i (39), te dobivamo traženo:

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^3 \frac{20}{q+1} dq - 3 \cdot 5 \\ &= 20 \ln(4) - 15 \\ &\approx 12.73. \end{aligned}$$

Slično

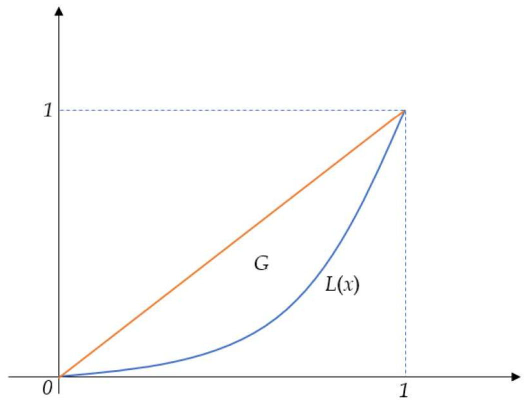
$$\begin{aligned} PS &= 3 \cdot 5 - \int_0^3 (q+2)\, dq \\ &= 15 - (4.5 + 6) \\ &= 4.5. \end{aligned}$$

3.2.5 Gini indeks

Pitanje koje se pojavljuje u ekonomiji razmatra pravednost raspodjele dohotka ili bogatstva u zemlji. U standardnim ekonomskim teorijama ili previše ili premalo pravednosti ukazuje na nedostatak mogućnosti i predstavlja prepreku rastu. Međutim, prije no što se možemo pozabaviti prednostima ili nedostacima razine nejednakosti, moramo biti u stanju kvantificirati razinu pravednosti ili nejednakosti. Standardna metoda je korištenje Lorenzove krivulje i Ginijevog indeksa (*GINI index*).

Lorenzova[8] krivulja $L(x)$ definira se kao rastuća funkcija $L : [0,1] \to [0,1]$, tako da je $L(0) = 0$ i $L(1) = 1$, koja mjeri udio nečega koje drži donji udio x populacije. Npr. ako je $L(0.2) = 0.1$ to znači da donjih 20% populacije zarađuje 10% dohotka u zemlji. Kako se Lorenzova krivulja mjeri od dna ili kraja vrijedi $L(x) \leq x$ za svaki x.

Ako postoji savršena jednakost Lorenzova krivulja će biti $L(x) = x$. Bilo koja Lorenzova krivulja za realnu populaciju bit će ispod ove krivulje. Gini indeks (G) (ili Gini koeficijent) mjeri postotak koji je stvarna Lorenzova krivulja ispod idealne krivulje.



Slika 11: Lorenzova krivulja i $GINI$ indeks

Dakle, $GINI$ indeks je omjer površina ispod grafa funkcije $f(x) = x$ i praznine između $f(x) = x$ i Lorenzove krivulje $L(x)$. Matematički to izgleda kao:

$$G = \frac{\int_0^1 (x - L(x))\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = 2\int_0^1 (x - L(x))\,dx. \tag{40}$$

U praksi se taj broj često množi sa 100, navodeći postotak (0 do 100), a ne omjer (0 do 1) područja pod idealnom funkcijom i iznad mjerene funkcije.

Primjer 3.7 Neka je izmjerena (procijenjena) Lorenzova krivulja za neku zemlju oblika $L(x) = 0.3x + 0.7x^4$. Izračunajmo $GINI$ indeks.

$$G\% = 100\,\frac{\int_0^1 (x - (0.3x + 0.7x^4))\,dx}{0.5} = 200\int_0^1 (-0.7x + 0.7x^4)\,dx = 42\%$$

[8] Max Otto Lorenz, 1876-1959, američki ekonomist

Literatura

[1] A. C. Chiang, Osnovne metode matematičke ekonomije, treće izdanje, 1994.

[2] E. T. Dowling, Introduction to Mathematical Economics, Schaum, third edition

[3] F. A. Ieskarov, H. Ersel, D. Piontkovski, Linear Algebra for Economists, Springer, 2011.

[4] J. Leydold, Mathematics 2 for Economics, Institute for Statistics and Mathematics, WU Wien, 2018.

[5] D. Sabolić, Uvod u mikroekonomiku, FER, Zagreb, 2014.

[6] M. Rosser, Basic Mathematics for Economists, second edition, 2003.

[7] M. L. Bittinger, D. J. Ellenbergen, S. A. Surgent, Calculus and its Application, tenth edition, 2012.

[8] Đ. Borozan, Makroekonomija, Ekonomski fakultet, Osijek, 2012.

[9] H. R. Varian, Microeconomics: a Modern Approach, 8th edition, 2010.

[10] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[11] Š. Ungar, Matematička analiza u R^n, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

[12] D. Bakić, D. Franciškovič, Financijska i aktuarska matematika, Odjel za matematiku Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2013, skripta.

[13] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznali smo se s nekim primjenama diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji. Najprije je navedena osnovna teorija vezana za pojmove derivacije funkcije jedne varijable i parcijalne derivacije za funkcije više varijabli. Kratko je navedena osnovna teorija vezana za pojam (jednostrukog) integrala. Nakon toga pokazana je i sama primjena istih koja je ilustrirana na primjerima. Na početku rada uvedeni su osnovni pojmovi i simboli u području ekonomije, te je izgrađen jedan jednostavan ekonomski model. U drugom poglavlju prikazane su primjene derivacije. U istom poglavlju opisana je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje kao jedna specijalna proizvodna funkcija koja se najčešće koristi. U trećem poglavlju prikazana je primjena integrala na odabranim primjerima.

Ključne riječi: derivacija, integral, marginalni trošak, marginalni prihod, profit, kapital, ukamaćivanje, akumulacija, potrošač, proizvođač.

Summary

In this final thesis, we acquainted ourselves with applications of differential and integral calculus in economics. Firstly, the fundamentals of theory regarding derivatives of functions of one and several variables, as well as the concept of the integral, were discussed. Following that, the applications of those principles were demonstrated in examples. At the very beginning of the paper, the basic concepts and symbols of economics were introduced, and a simple economics model was presented. Later, in the second chapter, applications of derivatives were shown. In the same chapter, the Cobb-Douglas function of production, as a special function of production that is most commonly used, was described. In the third chapter, applications of integrals were shown.

Key words: derivation, integration, marginal cost, marginal revenue, profit, capital, compounding, accumulation, consumer, producer.

Životopis

Rođen sam 8. studenoga 1995. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu Josipa Lovretića sam pohađao u Otoku, te srednju tehničku gimnaziju u Vinkovcima. 2014. godine upisujem Odjel za matematiku u Osijeku, smjer sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike, te se nakon druge godine prebacujem na preddiplomski studij matematike. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam na natjecanjima iz matematike, fizike i informatike. 2017. godine upisujem diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku. Na Odjelu za matematiku sam dvije godine bio demonstrator iz kolegija Uvod u vjerojatnost i statistiku, te jednu godinu iz kolegija Statistika. Stručnu praksu odradio sam u poduzeću PIK d.d u Vinkovcima. Akademske godine 2018/2019. nagrađen sam rektorovom nagradom za izvrstan seminarski rad iz kolegija Matematičke financije.