Apolonijeve kružnice

Semkiv, Marija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marija Semkiv

Apolonijeve kružnice

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marija Semkiv

Apolonijeve kružnice

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2019.

Sadržaj

1. Uvod

Konstruktivna geometrija je grana geometrije koja se bavi geometrijskim konstrukcijama. Jedan od najpoznatijih konstrukcijskih problema je Apolonijev problem poznatog grčkog matematičara čija su brojna postignuća pretežito u području geometrije. Apolonijev problem je poznat od davnina, iz razdoblja prije Krista a odnosi se na problem konstrukcije kružnice koja dodiruje tri zadane kružnice. Kada pričamo o Apolonijevim kružnicama, tada mislimo na kružnice kod kojih za svaku točku koja pripada kružnici vrijedi da je omjer udaljenosti od dvije zadane točke konstantan.
Interes za Apolonijevim problemom postoji još i danas. Descartes je 1643. godine otkrio vezu između zakrivljenosti četiri kružnice koje se međusobno diraju, a kasnije je definiran i Apolonijev skup i Apolonijeva grupa, pa se s Apolonijevim problemom možemo sresti i u području teorije brojeva, linearne algebre i fraktalne geometrije.

U ovom radu prvo ćemo proći kroz osnove konstruktivne geometrije. Zatim ćemo obraditi neke od konstrukcija mnogokuta, te ćemo pojasniti metodu inverzije s obzirom da se s njom služimo u rješavanju Apolonijevog problema. U drugom dijelu rada pojasniti ćemo Apolonijev problem te pokazati konstrukcije od nekih mogućih slučajeva koji se pojavljuju pri rješavanju Apolonijevog problema. U trećem dijelu rada proučit ćemo slučaj kada se tri kružnice međusobno diraju. Vidjet ćemo vezu između zakrivljenosti četiri kružnice koje se diraju te se upoznati s pojmom Apolonijevog skupa. Zatim ćemo vidjeti kako doći do broja kružnica u Apolonijevom skupu, upoznati se s Apolonijevom grupom te vidjeti analogon hipoteze o blizancima na Apolonijevom skupu. U zadnjem dijelu objasniti ćemo neke od daljnjih implikacija Apolonijevog problema, tj. njegovu primjenu u drugim područjima.
Slike koje se nalaze u ovom radu napravljene su u programu GeoGebra.

2. Geometrijske konstrukcije

Euklidska ravnina je skup π čiji su elementi točke, a njeni istaknuti podskupovi pravci. Osnovni objekti planimetrije [1] su točka, pravac i ravnina. Točke, pravce i ravnine smatramo intuitivno jasnim tvorevinama, dok se ostali objekti mogu izgraditi iz njih. Točka i pravac se ne definiraju, nego su određeni svojim aksiomatskim svojstvima.
Konstruktivna geometrija je grana planimetrije koja se bavi geometrijskim konstrukcijama. Geometrijske konstrukcije su dio planimetrije koji planimetrijske probleme riješava konstruktivnim metodama.

Definicija 2.1. *Bilo koji podskup točaka promatrane ravnine π zvat ćemo geometrijskom figurom ravnine π .*

Konstruirati geometrijske figure znači nacrtati te geometrijske figure. Za konstruiranje geometrijske figure koristit ćemo ravnalo i šestar. Ravnalo kojim se koristimo je jednobridno tj. koristimo se samo jednim njegovim bridom pri konstruiranju, a šestar je s promjenjivim rasponom tj. oko svake točke možemo opisati kružnicu s polumjerom po želji.

Aksiomi konstruktivne geometrije:

A 2.1. *Svaka zadana figura je konstruirana.*

A 2.2. *Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda je konstruirana i njihova unija.*

A 2.3. *Ako su konstruirane dvije figure, onda se može ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da ta razlika nije prazan skup, ta je razlika konstruirana.*

A 2.4. *Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda se može ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da taj presjek nije prazan skup, onda je taj presjek konstruiran.*

A 2.5. *Ako je dana neka neprazna figura, onda je moguće konstruirati točku koja pripada toj figuri.*

Pomoću ravnala i šestara možemo konstruirati:
1. pravac koji prolazi kroz zadane dvije različite točke
2. sjecište dvaju zadanih neparalalelnih pravaca pri čemu je jedan zadan s dvije različite točke
3. kružnicu s središtem u zadanoj točki koja prolazi drugom zadanom točkom
4. dva sjecišta pravca i zadane kružnice pri čemu je pravac zadan s dvijema točkama i siječe danu kružnicu, te dva sjecišta kružnice i zadanog pravca pri čemu je kružnica zadana s središtem i jednom točkom koja joj pripada
5. sjecište dvije kružnice pri čemu je jedna kružnica zadana, a druga je zadana svojim središtem i jednom točkom koja joj pripada.

[1] geometrija u ravnini

Temeljnim konstrukcijama nazivamo konstruktivne zadatke koji su jednostavni.
Temeljne konstrukcije su:
1. prijenos dužine
2. prijenos kutova
3. konstrukcija simetrale i polovišta dužine
4. konstrukcija simetrale kuta i polovišta luka
5. konstrukcija pravca koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan s danim pravcem
6. konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac
7. dijeljenje dužine na jednake dijelove i u danom omjeru
8. konstrukcija trokuta ako su mu poznate sve tri stranice
9. konstrukcija kružnog luka iz čijih se točaka vidi neka dužina pod danim kutom.
Pomoću niza temeljnih konstrukcija rješavamo zahtjevnije konstruktivne zadatke. Rješenje zadatka je figura koja zadovoljava sve postavljene uvjete u zadatku. Da bi riješili konstruktivni zadatak moramo proći kroz četiri koraka:
1. Analiza
Analiza zadatka je traženje načina na koji ćemo riješiti zadatak. U ovom dijelu na skici danih figura upotrebljavamo različite temeljne konstrukcije te dolazimo do tražene figure.
2. Konstrukcija
U konstrukciji zadatka određujemo broj i redoslijed temeljnih konstrukcija koje su potrebne da bi na osnovu zadanih figura dobili traženu figuru.
3. Dokaz
U ovom dijelu dokazujemo da svaka figura koju smo dobili konstrukcijom zadovoljava svaki uvjet zadatka.
4. Rasprava
Cilj rasprave je ustanoviti dali je zadatak rješiv i u kojim uvjetima te koliko mogućih rješenja imamo.
Pri rješavanju konstruktivnih zadataka pomažu nam razne metode:
1. Metode geometrijskog konstruiranja: metoda geometrijskih mjesta, algebarska metoda
2. Metode geometrijskih transformacija: metoda osne simetrije, metoda centralne simetrije, metoda translacije, metoda rotacije, metoda inverzije, metoda homotetije.

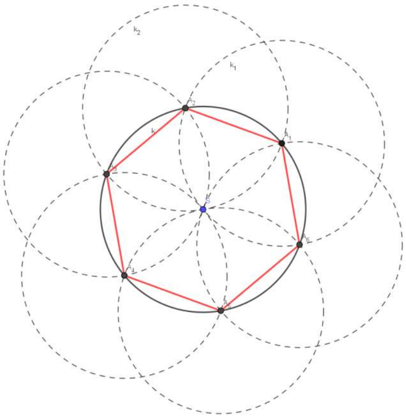
2.1. Konstrukcije pravilnih mnogokuta

Definicija 2.2. *Pravilni n-terokut je konveksan lik ravnine omeđen s n međusobno jednakih dužina, takvih da su mu i svi kutovi koji zatvaraju uzastopne stranice jednaki.*

Svi vrhovi pravilnog n-terokuta leže na jednoj kružnici. Kružnicu na kojoj leže nazivamo opisana kružnica pravilnog n-terokuta. Svaki pravilan n-terokut može se zadati dužinom kao stranicom tog n-terokuta i polumjerom opisane kružnice tog n-terokuta.

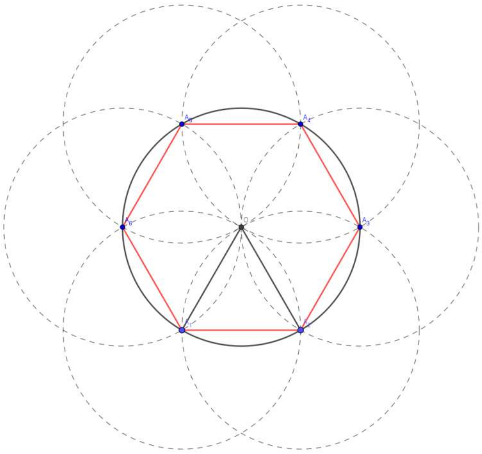
Primjer 2.1. *Konstrukcija pravilnog šesterokuta*
Zadano: kružnica k.

Imamo zadanu kružnicu k sa središtem u S i radijusom r. Odaberemo točku A_1 na kružnici k te konstruiramo kružnicu $k_1(A_1, r)$. Presjek kružnice k_1 i kružnice k je točka A_2 koja je ujedno i drugi vrh tog šesterokuta. Konstruiramo kružnicu $k_2(A_2, r)$. Presjek kružnice k i kružnice k_2 je točka A_3. Ponovimo isti postupak počevši od A_3 te dobijemo vrh A_4 itd. Konstruiran šesterokut prikazan je na Slici 1.



Slika 1: Konstrukcija pravilnog šesterokuta.

Zadano: dužina $\overline{A_1A_2}$.
Neka je zadana dužina $\overline{A_1A_2}$. Prvo konstruiramo jednakostraničan trokut. Jednakokračan trokut konstruiramo tako da iz točaka A_1 i A_2 opišemo luk radijusa $|A_1A_2|$. Presjekom ta dva luka dobijemo točku O. Točka O je središte kružnice radijusa $|A_1A_2|$. To je kružnica koja je opisana traženom pravilnom šesterokutu. Imamo kružnicu opisanu šesterokutu i dvije točke traženog šesterokuta. Ponovimo postupak kao u prethodnom dijelu primjera te dobijemo traženi šesterokut. Konstruiran šesterokut prikazan je na Slici 2.



Slika 2: Konstrukcija pravilnog šesterokuta.

Općenito, svaki pravilan n-terokut gdje je $n = 2^{k+1}$, $n = 5 \cdot 2^k$ i $n = 3 \cdot 2^k$ može se konstruirati. To je posljedica toga što se njihovi središnji kutevi $\frac{2\pi}{n}$ dobiju raspolavljanjem središnjih kuteva pravilnog trokuta, četverokuta i peterokuta. Ako znamo konstruirati pravilan n-terokut, znat ćemo konstruirati i pravilan $2n$-terokut.
Neka je zadana kružnica k radijusa 1. Želimo upisati pravilan n-terokut u zadanu kružnicu. Pravilan n-terokut možemo podijeliti na n jednakokračnih trokuta kojima je bočna stranica duljine 1, baza jednaka stranici n-terokuta te je vrh koji spaja jednake stranice jednakokračnog trokuta središte kružnice k. Stranica s_n n-terokuta je $s_n = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}$. Pošto znamo stranicu s_n našega n-terokuta, pokušat ćemo doći do stranice s_{2n} našega $2n$-terokuta.
Pomoću formule

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

i

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

izračunati ćemu stranicu pravilnog $2n$- terokuta pri čemu je $\alpha = \frac{\pi}{n}$.
Iz relacije (1) slijedi :

$$1 - \sqrt{\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n}. \tag{2}$$

Izraz (2) pomnožimo s 2 i dobijemo

$$2 - 2\sqrt{\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)} = 4\sin^2\frac{\pi}{2n}$$

tj.

$$2 - \sqrt{\left(4 - 4\sin^2\frac{\pi}{n}\right)} = s_{2n}^2$$

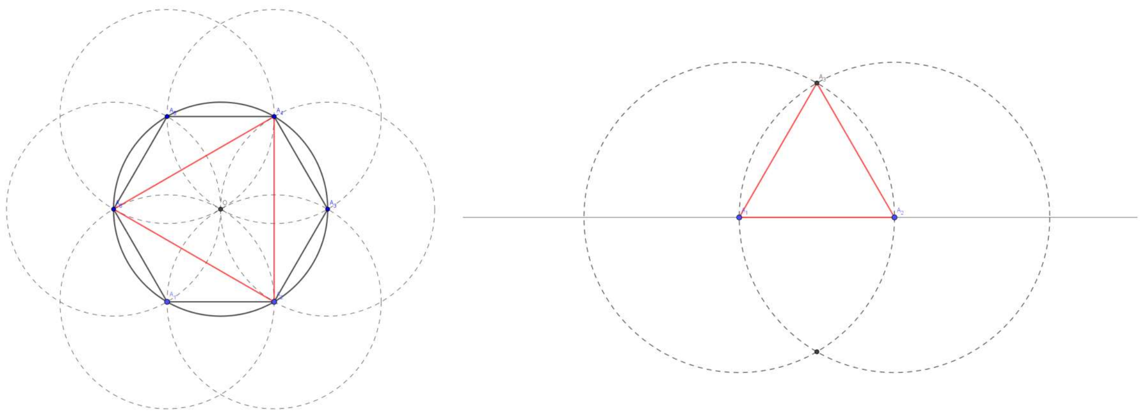
$$2 - \sqrt{\left(4 - s_n^2\right)} = s_{2n}^2$$

Konačno,

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Dakle, iz ovoga možemo vidjeti da ako se može konstruirati stranica n-terokuta, onda možemo konstruirati i stranicu $2n$-terokuta.

Primjer 2.2. K*onstrukcija pravilnog trokuta*
Zadano: kružnica k.
Neka je zadana kružnica k. Konstruiramo pravilan šesterokut, pri čemu je k kružnica opisana pravilnom šesterokutu. Spojimo svaki drugi vrh šesterokuta te dobijemo pravilan trokut. Konstruiran trokut prikazan je na Slici 3a.
Zadano: dužina $\overline{A_1A_2}$.
Neka je zadana dužina $\overline{A_1A_2}$. Iz točke A_1 i točke A_2 opišemo luk radijusa $|A_1A_2|$. Presjekom ta dva luka dobijemo točku A_3. Spojimo A_1 i A_2 i dobijemo trokut $\Delta A_1A_2A_3$ koji je jednakostraničan. Konstruiran trokut prikazan je na Slici 3b.



(a) Zadana je kružnica (b) Zadana je dužina

Slika 3: Konstrukcija pravilnog trokuta.

Teorem 2.1. *Ako je $n = p{\cdot}g$, gdje su n,p,g prirodni brojevi i p i q relativno prim, to je konstrukcija dijeljenja kružnice na n jednakih brojeva rješiva točno onda kada je i konstrukcija dijeljenja kružnice na p i q jednakih dijelova također rješiva.*

Carl Friedrich Gauss dokazao je 1796. godine da je konstrukcija pravilnog n-terokuta, $n \in \mathbb{N}$ rješiva ako n možemo prikazati kao $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, tj. ako je n Fermatov prim broj. Poznato je svega prvih pet Fermatovih prim brojeve, za $k = 0, 1, 2, 3, 4$. To su brojevi :

$$3, 5, 17, 257 \text{ i } 65537.$$

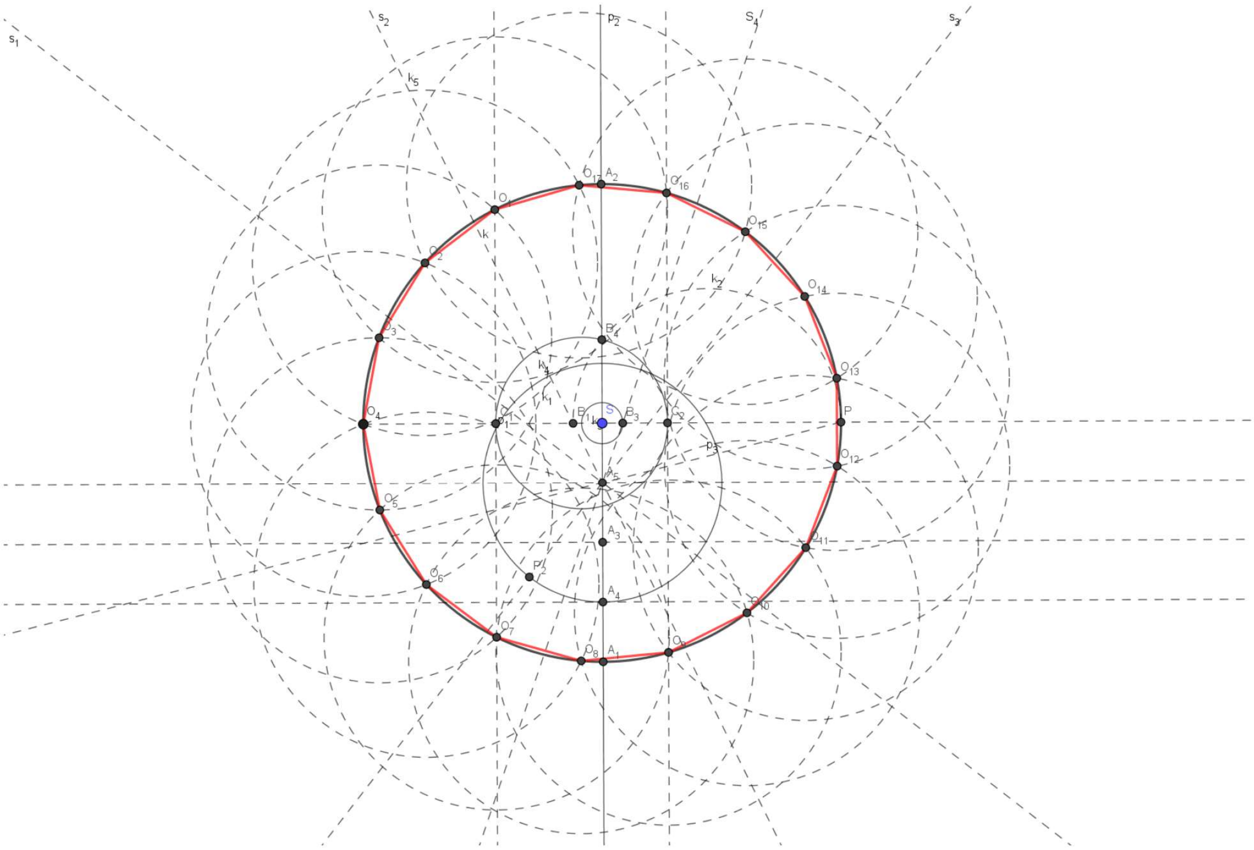
Gauss je riješio problem konstrukcije sedamnaesterokuta. Ako poznajemo koliko iznosi $\cos\frac{2\pi}{17}$ onda ćemo moći konstruirati pravilan sedamnaesterokut.

$$2\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{2(\sqrt{17}+3)(2\sqrt{7}-\sqrt{34-2\sqrt{17}})}}{8} \tag{3}$$

Kako se došlo do izraza (3) možemo vidjeti u [2].

Slijedi opis konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta.
Neka je zadana kružnica $k(S, r)$. Odaberemo točku na kružnici i konstruiramo pravac p_1 koji prolazi odabranom točkom i središtem kružnice k. Pravac p siječe kružnicu k u točki P. Konstruiramo okomicu p_2 iz točke S na pravac p. Konstruirana okomica siječe kružnicu k u točkama A_1 i A_2. Konstruiramo simetralu dužine $\overline{SA_1}$. Sjecište simetrale i pravca p_2 je točka A_3. Konstruiramo simetralu dužine $\overline{A_3A_1}$ i $\overline{A_3A_5}$ i sjecišta simetrala i pravca p_2 označimo redom A_4 i A_5. Konstruiramo kružnicu $k_1(A_5, |A_5A_3|)$. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama A_5 i P i označimo ga s p_3. Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci p_3 i p_2 i označimo ju s s_1. Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci p_2 i s_1 i označimo ju s s_2. Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci p_2 i p_3 (s druge strane pravca p_2) i označimo ju s s_3. Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci s_3 i p_2 i označimo ju s s_4. Pravac s_2 siječe pravac p_1 u točki B_1. Konstruiramo polovište dužine $\overline{PB_1}$ te kružnicu

k_2 kojoj je središte u tom polovištu radijusa PB_1. Konstruiramo kružnicu $k_3(S, |SB_3|)$, pri čemu je B_3 sjecište simetrale s_4 i pravca p_1. Konstruiramo kružnicu $k_4(B_1, |B_1B_4|)$ pri čemu je B_4 sjecište kružnice k_2 i pravca p_2. Sjecište kružnice k_4 i pravca p_1 su točke C_1 i C_2. Konstruiramo okomice iz točaka C_1 i C_2 na pravac p_1. Sjecište tih okomica i kružnice k su točke O_1, O_7, O_{16} i O_9. One su i ujedno točke traženog sedamnaesterokuta. Konstruiramo kružnicu $k_5(O_1, |O_1O_{16}|)$. Sjecište kružnice k_5 i k su točke O_{16} i O_2. Ponovimo isti postupak od O_2 i dobijemo vrh O_5 itd. Konstruiran sedamnaesterokut prikazan je na Slici 4.



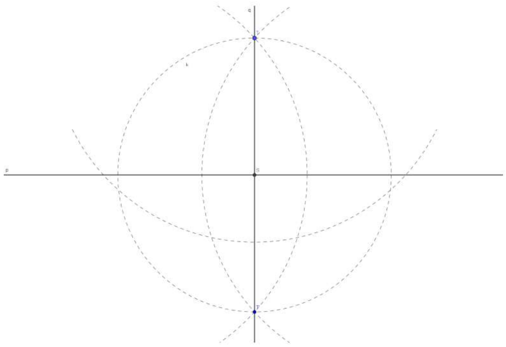
Slika 4: Pravilan sedamnaesterokut.

2.2. Metoda inverzije

Kada govorimo o transformaciji ravnine u samu sebe, podrazumijevamo da svaka točka P u ravnini ima svoju sliku P' pod tom transformacijom.
Najjednostavnija metoda geometrijskih transformacija je metoda osne simetrije.

Definicija 2.3. *Transformacija σ ravnine koja preslikava svaku točku A ravnine na njoj simetričnu točku A' s obzirom na neku os s, zovemo osnom simetrijom s obzirom na tu os.*

Primjer 2.3. *Konstrukcija osno simetrične točke*
Neka je dana točka T i pravac p. Konstruiramo okomicu iz točke T na pravac p i označimo je s q. Sjecište pravca p i q je točka S. Konstruiramo kružnicu $k(S, |ST|)$. Kružnica k siječe pravac q u točkama T i T', pri čemu su T i T' simetrične s obzirom na os p.



Slika 5: Osno simetrična slika točke koja ne leži na osi simetrije.

Ostali primjeri geometrijskih transformacija su metoda rotacije, metoda translacije, metoda centralne simetrije, metoda homotetije te metoda inverzije. U rješavanju Apolonijeva problema najviše se ističe metoda inverzije.

Definicija 2.4. *Preslikavanje σ skupa točaka ravnine, za koje vrijedi:*

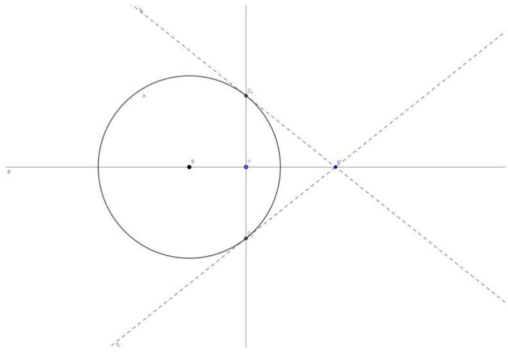
1. *Pridružene točke A i $A' = \sigma(A)$ su kolinearne sa čvrstom točkom S ravnine i A, A' je različito od S*
2. $|SA||SA'| = c$ *($c = const$, $c > 0$) nazivamo inverzijom , točku S centrom inverzije, a c konstantom inverzije σ.*

Inverziju s konstantom c i centrom S označavamo $\sigma(S, c)$. S obzirom da je c veće od 0 točke A i A' kolinearne su sa točkom S te leže s iste strane centra S.
Svojstva inverzije:
1. Neka je p pravac koji prolazi centrom inverzije S. Točke koje pripadaju pravcu p preslikavaju se u točke koje pripadaju istom pravcu tj. pravac p preslika se sam na sebe.
2. Neka je $k(S, r)$ kružnica čije je središte S centar inverzije i radijus r. Svaka točka koja leži na kružnici k preslika se sama na sebe. Kružnicu k nazivamo kružnicom inverzije.
3. Ako je $A' = \sigma(A)$ tada je $A = \sigma(A')$.
4. Ako pravac p ne prolazi centrom inverzije, tada je $\sigma(p) = p'$ kružnica koja prolazi središtem inverzije.
5. Ako kružnica k prolazi centrom inverzije, tada je $\sigma(k) = p$ pravac koji ne prolazi centrom inverzije.
6. Ako kružnica k ne prolazi centrom inverzije, tada je $\sigma(k) = k'$ kružnica koja ne prolazi centrom inverzije.
7. Ako kružnica k siječe kružnicu inverzije okomito, tada je $\sigma(k) = k$, tj. kružnica k se preslikava u samu sebe.

2.2.1. Geometrijske konstrukcije inverznih točaka

U ovome dijelu rada pokazati ćemo primjere geometrijske konstrukcije inverznih točaka, te kroz njih proći kroz sva svojstva inverzije.

Primjer 2.4. *Inverzna slika točke unutar kružnice inverzije*
Neka je $k(S, r)$ kružnica inverzije s središtem u S radijusa r. Neka je P točka koja se nalazi unutar kružnice inverzije. Konstruiramo pravac p koji prolazi točkama S i P. Konstruiramo okomicu iz točke P na pravac p. Sjecište okomice i kružnice inverzije su točke D_1 i D_2. Konstruiramo tangente iz točaka D_1 i D_2 na kružnicu k i označimo ih redom t_1 i t_2. Presjek t_1 i t_2 je točka $P' = \sigma(P)$. Možemo primjetiti da P' leži na pravcu p.



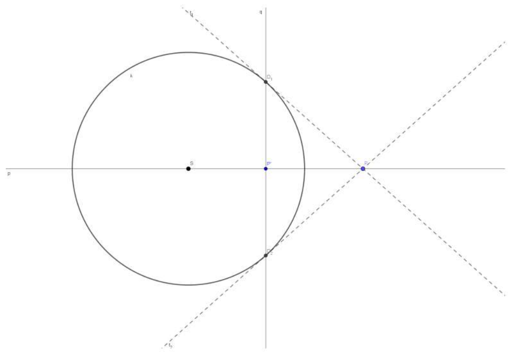
Slika 6: Inverzna slika točke unutar kružnice inverzije.

Promotrimo li $\Delta SD_1P'$, možemo uočiti da je sličan tokutu ΔSPD_1.
Tada vrijedi :

$$\frac{|SD_1|}{|SP'|} = \frac{|SP|}{|SD_1|}.$$

Slijedi $|SP||SP'| = |SD_1|^2, |SD_1| = r$.

Primjer 2.5. *Inverzna slika točke izvan kružnice inverzije*
Neka je $k(S, r)$ kružnica inverzije s središtem u S radijusa r. Neka je P točka koja se nalazi izvan kružnice inverzije. Konstruiramo pravac p koji prolazi točkama S i P. Konstruiramo tangente iz točke P na kružnicu k i označimo ih redom t_1 i t_2. Presjek t_1 i kružnice k je točka D_1, presjek t_2 i kružnice k je točka D_2. Konstruiramo pravac q koji prolazi točkama D_1 i D_2. Sjecište pravca p i q je točka $P' = \sigma(P)$.



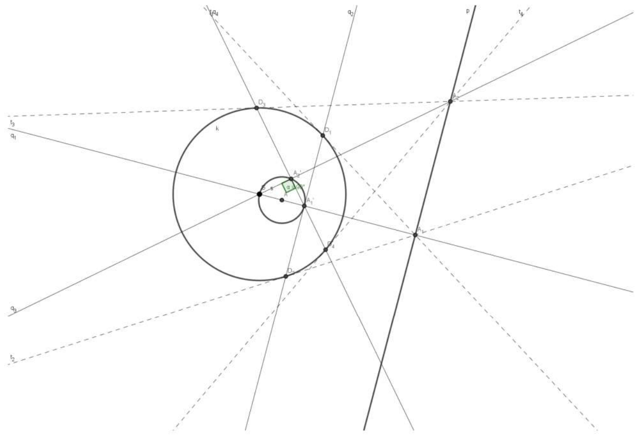
Slika 7: Inverzna slika točke izvan kružnice inverzije.

Promotrimo li ΔSD_1P, možemo uočiti da je sličan tokutu $\Delta SP'D_1$.
Tada vrijedi :

$$\frac{|SD_1|}{|SP|} = \frac{|SP'|}{|SD_1|}.$$

Slijedi $|SP||SP'| = |SD_1|^2, |SD_1| = r$.

Primjer 2.6. *Inverzna slika pravca koji ne prolazi centrom inverzije*
Neka je $k(S, r)$ *kružnica inverzije* σ *s središtem u* S *radijusa* r. *Neka je* p *pravac koji ne prolazi centrom kružnice inverzije. Konstruiramo pravac* q_1 *koji prolazi točkom* S *i okomit je na pravac* p. *Sjecište pravca* q_1 *i* p *označimo s* A_1. *Konstruiramo tangente iz točke* A_1 *na kružnicu* k *i označimo iz s* t_1 *i* t_2. *Dirалište tangente* t_1 *i kružnice* k *je točka* D_1, *a diralište tangente* t_2 *i kružnice* k *je točka* D_2. *Konstruiramo pravac* q_2 *koji prolazi točkama* D_1 *i* D_2. *Presjek pravaca* q_1 *i* q_2 *je točka* $A_1' = \sigma(A_1)$. *Analogno, konstruiramo inverznu sliku točke* A_2, $A_2' = \sigma(A)$. *Točke* A_1' *i* A_2' *leže na kružnici koja je inverzna slika pravca* p. *Konstruiramo kružnicu s kojoj je središte u polovištu spojnice* SA_1' *radijusa* $\frac{1}{2}|SA_1'|$. $s = \sigma(p)$.



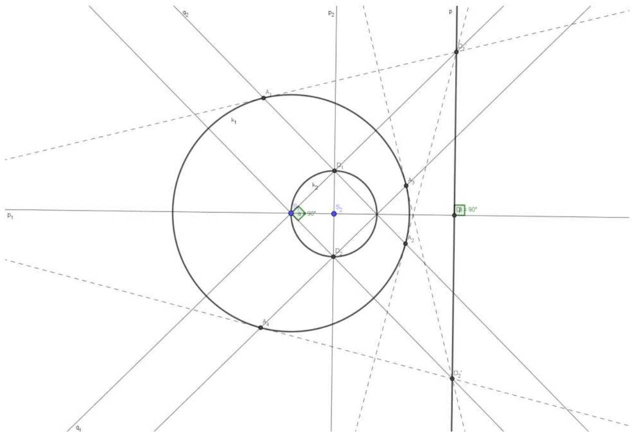
Slika 8: Inverzna slika pravca koji ne prolazi centrom kružnice inverzije.

Pošto je $A_1' = \sigma(A)$ *i* $A_2' = \sigma(A_2)$ *vrijedi:* $|SA_1||SA_1'| = r^2$ *i* $|SA_2||SA_2'| = r^2$.
Slijedi da je

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SA_2'|}{|SA_1'|}.$$

ΔSA_1A_2 *i* $\Delta SA_2'A_1'$ *su slični jer imaju dvije proporcionalne stranice i zajednički kut* $\angle A_1SA_2$. *Pošto je kut* $\angle SA_1A_2$ *pravi kut slijedi da je kut* $\angle SA_2'A_1'$ *pravi kut.* ΔSA_1A_2 *i* $\Delta SA_2'A_1'$ *su pravokutni trokuti, te* A_2' *leži na kružnici* $s(A, |AA_1'|)$, *pri čemu je* A *polovište dužine* $\overline{SA_1'}$.

Primjer 2.7. *Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom inverzije*
Neka je $k_1(S_1, r_1)$ *kružnica inverzije* σ *s središtem u* S_1 *radijusa* r_1. *Neka je* $k_2(S_2, r_2)$ *kružnica s središtem u* S_2 *radijusa* r_2 *koja prolazi centrom inverzije. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama* S_1 *i* S_2 *te ga označimo s* p_1 *i pravac koji prolazi točkom* S_2 *i okomit je na pravac* p_1 *kojega označimo s* p_2. *Sjecišta pravca* q_2 *i kružnice* k_2 *su točke* D_1 *i* D_2. *Konstruiramo pravac koji prolazi točkama* S_1 *i* D_1 *i označimo ga s* q_1, *te okomicu na pravac* q_1 *koja prolazi točkom* D_1 *i označimo ju s* q_2. *Sjecišta kružnice* k_1 *i pravca* q_2 *su točke* A_1 *i* A_2. *Konstruiramo tangente iz točaka* A_1 *i* A_2 *na kružnicu* k_1. *Presjek tih tangenti je točka* $D_1' = \sigma(D_1)$. *Analogno, konstruiramo inverznu sliku točke* D_2, $D_2' = \sigma(D_2)$. *Konstruiramo pravac koji prolazi točkama* D_1' *i* D_2' *i označimo ga s* p. $p = \sigma(k_2)$.



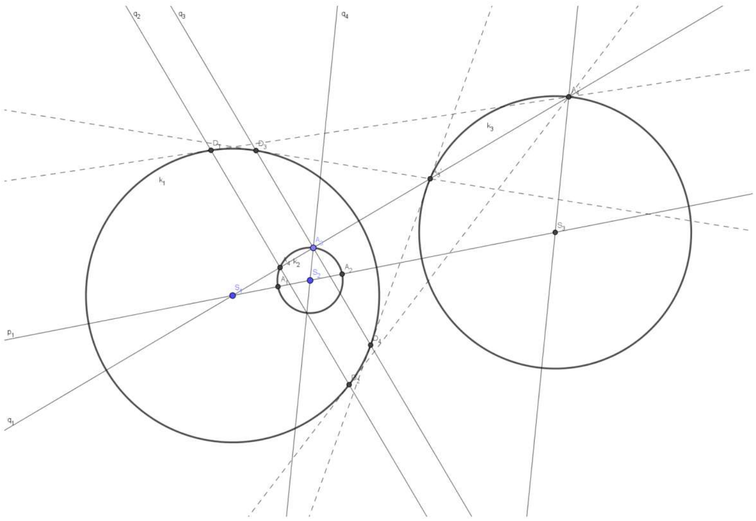
Slika 9: Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom inverzije.

Pošto je $D_1' = \sigma(D_1)$ *i* $D_2' = \sigma(D_2)$ *vrijedi:* $|S_1D_1||S_1D_1'| = r^2$ *i* $|S_1D_2||S_1D_2'| = r^2$.
Slijedi da je

$$\frac{|S_1D_1|}{|S_1D_2|} = \frac{|S_1D_2'|}{|S_1D_1'|}.$$

Neka je p *pravac kroz* D_1' *okomit na pravac* p_1*(pravac koji prolazi središtima kružnice* k_1 *i* k_2*).* $\Delta S_1D_1D_2$ *i* $\Delta S_1D_2'D_1'$ *su slični jer imaju dvije proporcionalne stranice i zajednički kut* $\angle D_1S_1D_2$.
Pošto je kut $\angle D_2S_1D_1$ *pravi kut slijedi da je kut* $\angle D_2'S_1D_1'$ *pravi kut, te točka* D_1' *leži na pravcu* p*. Svaka točka kružnice* k_2 *leži na pravcu* p*, te je* $\sigma(k_2) \subseteq p$*. Preslikavanje* σ *je bijekcija, pa je stoga* $\sigma(k_2) = p$.

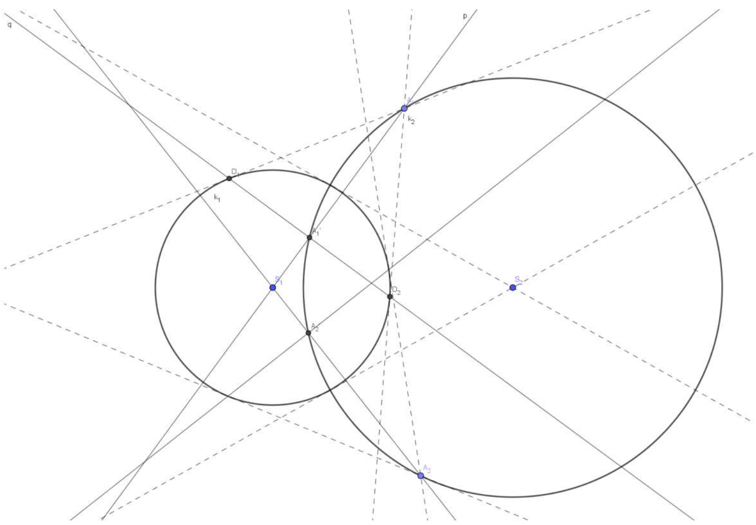
Primjer 2.8. *Inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije*
Neka je $k_1(S_1, r_1)$ *kružnica inverzije* σ *s središtem u* S_1 *radijusa* r_1*. Neka je* $k_2(S_2, r_2)$ *kružnica s središtem u* S_2 *radijusa* r_2 *koja ne prolazi centrom inverzije. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama* S_1 *i* S_2 *te ga označimo s* p_1*. Pravac* p_1 *siječe kružnicu* k_2 *u točkama* A_1 *i* A_2*. Odaberemo proizvoljno jednu točku na kružnici* k_2 *i označimo je s* A_3*. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama* S_1 *i* A_3 *i označimo ga s* q_1*. Pravac* q_1 *siječe kružnicu* k_2 *u jos jednoj točki, te ju označimo s* A_4*. Konstruiramo okomicu iz točke* A_4 *na pravac* p_1 *i označimo ju s* q_2*, te okomicu iz točke* A_3 *na pravac* p_1 *i označimo ju s* q_3*. Presjek pravca* q_2 *i kružnice* k_1 *su točke* D_1 *i* D_2*, a presjek pravca* q_3 *i kružnice* k_1 *su točke* D_3 *i* D_4*. Konstruiramo tangente iz točke* D_1 *i* D_2 *na kružnicu* k_1*. Presjek tih tangenti je točka* $A_4' = \sigma(A_4)$*. Konstruiramo tangente iz točke* D_3 *i* D_4 *na kružnicu* k_1*. Presjek tih tangenti je točka* $A_3' = \sigma(A_3)$*. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama* S_2 *i* A_3 *i označimo ga s* q_4*, te paralelu s* q_4 *kroz točku* A_4'*. Presjek te paralele i pravca* p_1 *je točka* S_3 *koja je i ujedno središte naše tražene kružnice. Konstruiramo kružnicu* $k(S_3, |S_3A_3'|) = \sigma(k_2)$.
Pošto je $A_4' = \sigma(A_4)$ *vrijedi:* $|S_1A_4||S_1A_4'| = r^2$.
Točka A_3 *je drugo sjecište pravca koji prolazi točkama* S_1 *i* A_4 *i kružnice* k_2*. Uzevši u obzir svojstva potencije točke* S_1 *s obzirom na* k_2 *vrijedi :* $|S_1A_4||S_1A_3| = R^2$*, pri čemu je* R^2 *potencija točke* S_1 *s obzirom na* k_2.



Slika 10: Inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije.

Tada slijedi: $|S_1A_4'| = \frac{r^2}{R^2}$.
Točka A_4' *je slika točke* A_3 *pri homotetiji* $h(S_1, (\frac{r}{R})^2)$. *Znamo da je homotetička slika kružnice također kružnica, pa se stoga kružnica koja ne prolazi centrom inverzije preslikava u kružnicu koja također ne prolazi centrom inverzije.*

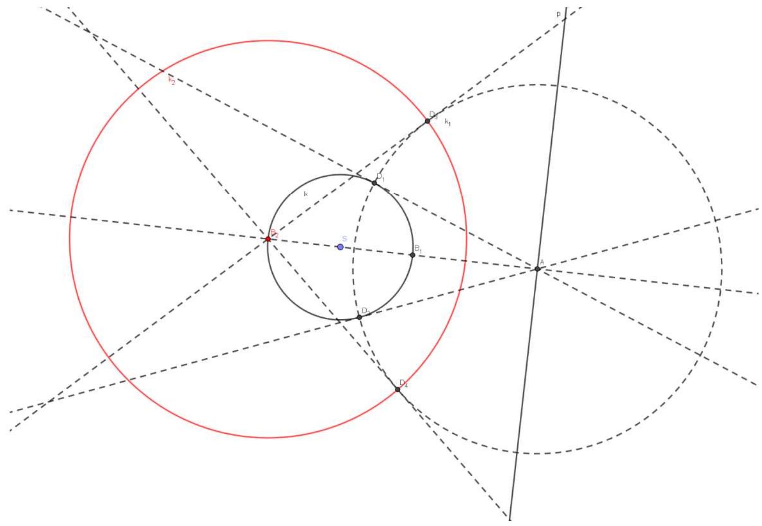
Primjer 2.9. *Inverzna slika kružnice koja siječe kružnicu inverzije okomito*
Neka je $k_1(S_1, r_1)$ *kružnica inverzije* σ *s središtem u* S_1 *radijusa* r_1*, a* $k_2(S_2, r_2)$ *kružnica s središtem u* S_2 *radijusa* r_2 *koja siječe kružnicu* k_1 *inverzije* σ *okomito. Odaberemo proizvoljno dvije točke na kružnici* k_2 *i označimo ih s* A_1 *i* A_2*. Konstruiramo pravac* p_1 *koji prolazi točkama* S_1 *i* A_1 *i tangente iz točke* A_1 *na kružnicu* k_1*. Diralište tih tangenata i kružnice* k_1 *su točke* D_1 *i* D_2*. Konstruiramo pravac* q_1 *koji prolazi točkama* D_1 *i* D_2*. Sjecište pravca* p *i* q *je točka* $A_1' = \sigma(A_1)$*. Analogno, konstruiramo inverznu sliku točke* A_2*,* $A_2' = \sigma(A_2)$*. Točke* A_1' *i* A_2' *leže na kružnici* k_2*. Kružnica* $k_2 = \sigma(k_2)$*.*



Slika 11: Inverzna slika kružnice koja siječe kružnicu inverzije okomito.

Kružnica k_2 siječe kružnicu k_1 u točkama B_1 i B_2. Pravac koji prolazi točkama S_1 i B_1 je tangenta u točki B_1 na kružnicu k_2. Neka je q pravac koji siječe kružnicu k_2 u točkama P_1 i P_2. Tada je potencija p s centrom u S_1 i inverzijom σ s obzirom na k_2: $|S_1P_1||S_1P_2| = (|S_1B_1|)^2 = p$. Slijedi: $P_2 = \sigma(P_1)$. Dakle, kružnica k_2 koja siječe kružnicu inverzije σ okomito preslika se inverzijom σ sama na sebe.

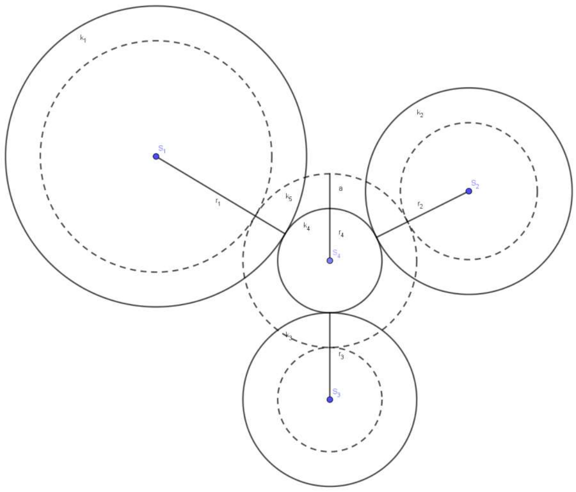
Primjer 2.10. *Inverzija σ koja preslikava kružnicu k i pravac p jedno na drugo*
Neka je dana kružnica $k(S, r)$ i pravac p. Konstruiramo okomicu iz točke S na pravac p. Presjek te okomice i pravca p je točka A, a presjek te okomice i kružnice k su točke B_1 i B_2. Konstruiramo tangente iz točke A na kružnicu k. Dirališe tangenti i kružnice k su točke D_1 i D_2. Konstruiramo kružnicu $k_1(A, |AD_1|)$ te tangente iz točke B_2 na kružnicu k_1. Dirališta tih tangenti i kružnice k_1 su točke D_3 i D_4. Konstruiramo kružnicu $k_2(B_2, |B_2D_3|)$. Kružnica k_2 je kružnica inverzije σ s centrom u B_2 koja preslikava kružnicu k u pravac p i obrnuto.



Slika 12: Inverzija σ koja preslikava kružnicu k i pravac p jedno na drugo.

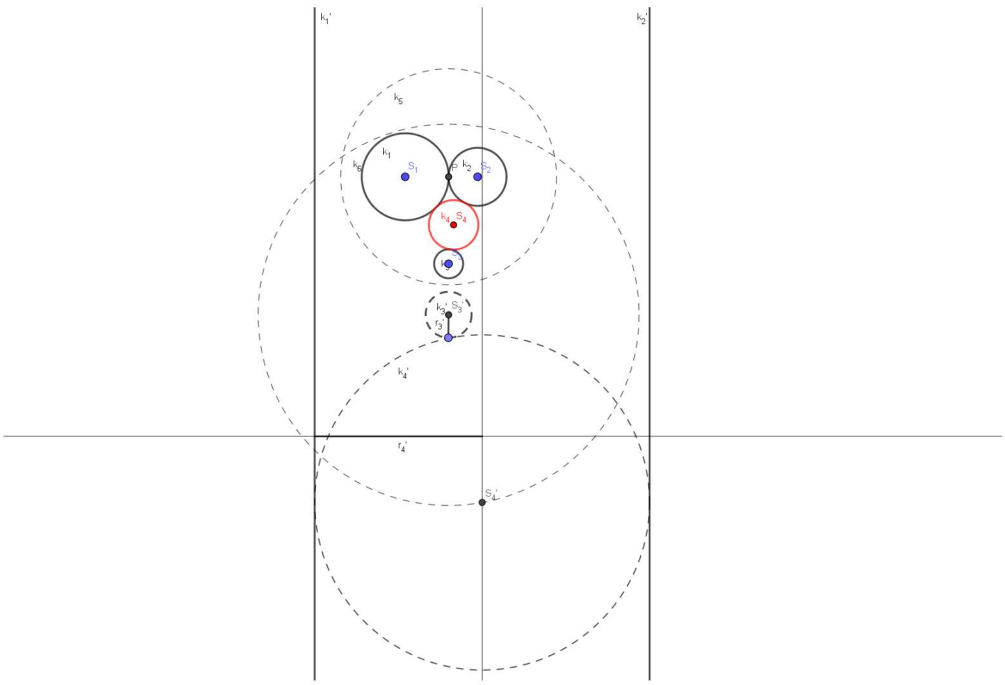
2.2.2. Primjena metode inverzije na Apolonijev problem

Apolonijev problem je najbolji primjer za rješavanje konstruktivnog zadatka pomoću metode inverzije. Inverzijom σ s obzirom na neki centar O inverzije σ Apolonijev problem za tri dane kružnice može biti transformiran u Apolonijev problem za druge tri dane kružnice. Dakle, ako imamo rješenje za bilo koje tri dane kružnice, imat ćemo rješenje i za druge tri dane kružnice koje su dobivene od prvih inverzijom. Neka su zadane tri kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$ koji se dodiruju. Pretpostavimo da postoji kružnica $k_4(S_4, r_4)$ takva da dira kružnice k_1,k_2 i k_3. Ako smanjimo radijus kružnica k_1,k_2 i k_3 za neki broj a, tada je kružnica $s(S_4, r_4 + a)$ rješenje problema kao sto možemo vidjeti na Slici 13.
Neka su dane tri kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$, pri čemu se kružnice k_1 i k_2 diraju u jednoj točki P, a kružnica k_3 nema dodirnih točaka s k_1 i k_2. Kružnica $k_4(S_4, r_4)$ je kružnica koja dira kružnice k_1, k_2 i k_3, nju želimo pronaći. Konstruiramo kružnicu inverzije $k_5(P, r_5)$,



Slika 13: Kružnica koja dira tri dane kružnice.

pri čemu je r_5 proizvoljno odabran. Kružnica k_1 se preslika u pravac k_1', kružnica k_2 u pravac k_2', a kružnica k_3 u kružnicu $k_3'(S_3', r_3')$. Kružnica k_4' treba dirati pravce k_1' i k_2', te je zato radijus r_4' polovina udaljenosti pravaca k_1' i k_2', tj. točka S_4' leži na geometrijskom mjestu točaka koje su jednako udaljene od pravaca k_1' i k_2'. Također, k_4' bi trebala dirati i kružnicu k_3'. Stoga konstruiramo kružnicu $k_6(O_3', r_4' + r_3')$, te presjekom k_6 i pravca koji predstavlja geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od pravaca k_1' i k_2' dobijemo točku S_4'. Konstruiramo kružnicu $k_4'(S_4', r_4')$. Preslikamo ju inverzijom σ te dobijemo traženu kružnicu k_4 koja dira tri dane kružnice.



Slika 14: Kružnica koja dira tri dane kružnice.

3. Apolonijev problem

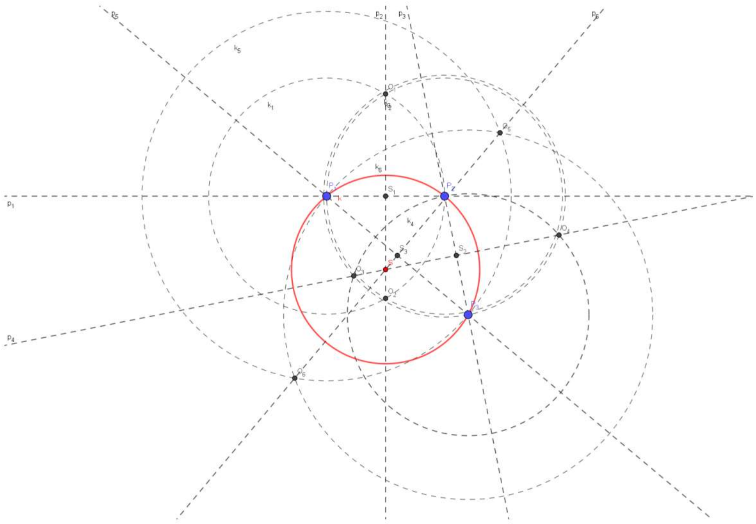
Apolonije iz Perge je grčki matematičar koji je rođen 262. godine prije Krista. Najpoznatiji je po teoriji čunjosječnjica. U svojem djelu Elementi konika je osim teorije presjeka stožca postavio i riješio Apolonijev problem. Apolonijev problem je problem konstruiranja kružnice[2] koja dira tri zadane kružnice. Pritom jedna od kružnica može imati beskonačan radijus ili radijus nula. U slučaju kada kružnica ima beskonačan radijus tada je pravac, a kad joj je radijus nula tada je točka. Postoji najviše osam rješenja Apolonijevog problema. Ovisno o položaju zadanih kružnica ovisi i broj rješenja Apolonijevog problema.
Apolonijev problem se može podijeliti na deset problema:
1. konstrukcija kružnice koja prolazi kroz tri zadane točke
2. konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira dani pravac
3. konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dva dana pravca
4. konstrukcija kružnice koja dira tri dana pravca
5. konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira danu kružnicu
6. konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu
7. konstrukcija kružnice koja dira dva dana pravca i danu kružnicu
8. konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice
9. konstrukcija kružnice koja dira dani pravac i dvije dane kružnice
10. konstrukcija kružnice koja dira tri dane kružnice.

3.1. Rješenja Apolonijeva problema

Apolonijev problem 1. Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz tri zadane točke
Neka su zadane tri točke P_1, P_2 i P_3. Konstruiramo pravac p_1 koji prolazi točkama P_1 i P_2 i kružnice $k_1(P_1, |P_1P_2|)$ i $k_2(P_2, |P_1P_2|)$. Sjecište kružnica k_1 i k_2 su točke O_1 i O_2. Kostruiramo pravac p_2 koji prolazi točkama O_1 i O_2. Sjecište pravaca p_1 i p_2 je točka S_1. Točka S_1 je polovište dužine $\overline{P_1P_2}$. Konstruiramo pravac p_3 koji prolazi točkama P_2 i P_3 i kružnice $k_3(P_2, |P_2P_3|)$ i $k_4(P_3, |P_2P_3|)$. Sjecište kružnica k_3 i k_4 su točke O_3 i O_4. Konstruiramo pravac p_4 koji prolazi točkama O_3 i O_4. Sjecište pravaca p_3 i p_4 je točka S_2. Točka S_2 je polovište dužine $\overline{P_2P_3}$. Konstruiramo pravac p_5 koji prolazi točkama P_1 i P_3 i kružnice $k_5(P_1, |P_1P_3|)$ i $k_6(P_3, |P_1P_3|)$. Sjecište k_5 i k_6 su točke O_5 i O_6. Konstruiramo pravac p_6 koji prolazi točkama O_5 i O_6. Sjecište pravaca p_5 i p_6 je točka S_3. Točka S_3 je polovište dužine $\overline{P_1P_3}$. Sjecište pravaca p_2, p_4 i p_6 je točka S. Konstruiramo kružnicu $k(S, |SP_1|)$. Kružnica k je tražena kružnica koja prolazi točkama P_1, P_2 i P_3.

Kako je središte tražene kružnice sjecište simetrala dužina $\overline{P_1P_2}$,$\overline{P_1P_3}$ i $\overline{P_2P_3}$ tada ovisno o položaju točaka P_1, P_2 i P_3 ovisi broj rješenje problema. U našem slučaju imamo samo jedno rješenje.

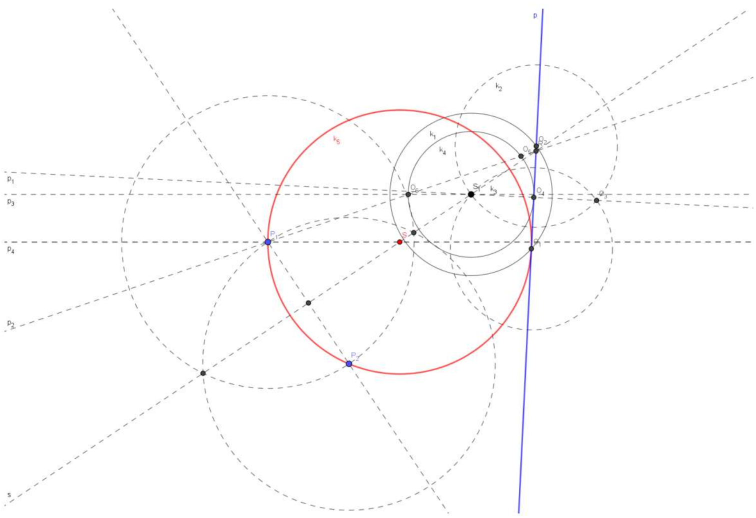
[2]Kružnica je skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke (središta kružnice).



Slika 15: Kružnica koja prolazi kroz tri zadane točke.

Apolonijev problem 2. Konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira dani pravac

Neka su zadane dvije točke P_1 i P_2 i pravac p, pri čemu pravac koji prolazi točkama P_1 i P_2 nije paralelan s P. Konstruiramo simetralu s dužine $\overline{P_1P_2}$. Sjecište simetrale s i pravca p je točka R. Odaberemo točku S_1 na simetrali s koja leži s iste stane pravca p kao i točke P_1 i P_2. Konstruiramo kružnicu k_1 radijusa r t.d. kružnica k_1 siječe pravac p u dvije točke, koje ćemo nazvati O_1 i O_2. Konstruiramo kružnice $k_2(O_1, r)$ i $k_3(O_2, r)$. Kružnice k_2 i k_3 sijeku se u točkama O_3 i S_1. Konstruiramo pravac p_1 koji prolazi točkama O_3 i S_1. Sjecište pravaca p_1 i p je točka O_4. Konstruiramo kružnicu $k_4(S_1, |S_1O_4|)$. Konstruiramo pravac p_2 koji prolazi točkama P_1 i R. Sjecište pravca p_2 i kružnice k_4 su točke O_5 i O_6. Konstruiramo pravac p_3 koji prolazi točkama O_6 i S_1 i paralelu p_4 s pravcem p_3 kroz točku P_1. Sjecište pravca p_4 i simetrale s je točka S. Kružnica koja prolazi točkama P_1 i P_2 i dira pravac p je kružnica $k_5(S, |SP_1|)$.

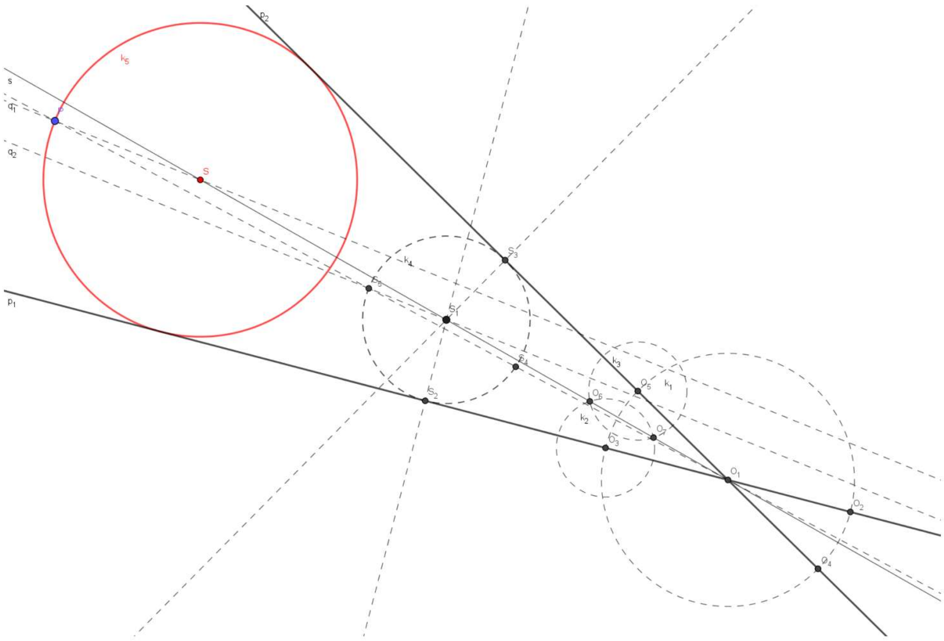


Slika 16: Kružnica koja prolazi kroz dvije zadane točke i dira zadani pravac.

Središte tražene kružnice je sjecište pravca p_4 i simetrale s. Uočimo, sjecište pravca p_2 i kružnice k_4 su dvije točke te imamo dva rješenja u ovom slučaju.

Apolonijev problem 3. Konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dva dana pravca

Neka je zadana točka P i dva pravca p_1 i p_2. Sjecište pravaca p_1 i p_2 je točka O_1. Konstruiramo kružnicu k_1 s središtem u O_1 i proizvoljnim radijusom r_1. Sjecište kružnice k_1 i pravca p_1 su točke O_2 i O_3. Sjecište kružnice k_1 i pravca p_2 su točke O_4 i O_5. Konstruiramo kružnice $k_2(O_3, r_2)$ i $k_3(O_5, r_2)$, pri čemu je r_2 veći od $\frac{1}{2}|O_3O_5|$. Sjecište kružnice k_2 i k_3 su točke O_6 i O_7. Konstruiramo pravac s koji prolazi točkama O_6 i O_1. Pravac s je simetrala kuta koji zatvaraju pravci p_1 i p_2. Odaberemo točku S_1 na simetrali s. Konstruiramo okomicu iz točke S_1 na pravac p_1. Sjecište okomice i pravca p_1 je točka S_2. Konstruiramo okomicu iz točke S_1 na pravac p_2. Sjecište okomice i pravca p_2 je točka S_3. Konstruiramo kružnicu $k_4(S_1, |S_1S_2|)$. Kružnica k_4 dira pravac p_1 u točki S_2 i pravac p_2 u točki S_3. Konstruiramo pravac q_1 koji prolazi točkama P i O_1. Sjecište pravca q_1 i kružnice k_4 su točke S_4 i S_5. Konstruiramo pravac q_2 koji prolazi točkama S_5 i S_1. Konstruiramo paralelu s pravcem q_3 koja prolazi točkom P. Sjecište te paralele i simetrale s je točka S. Kružnica koja prolazi točkom P i dira pravce p_1 i p_2 je $k_5(S, |SP|)$.



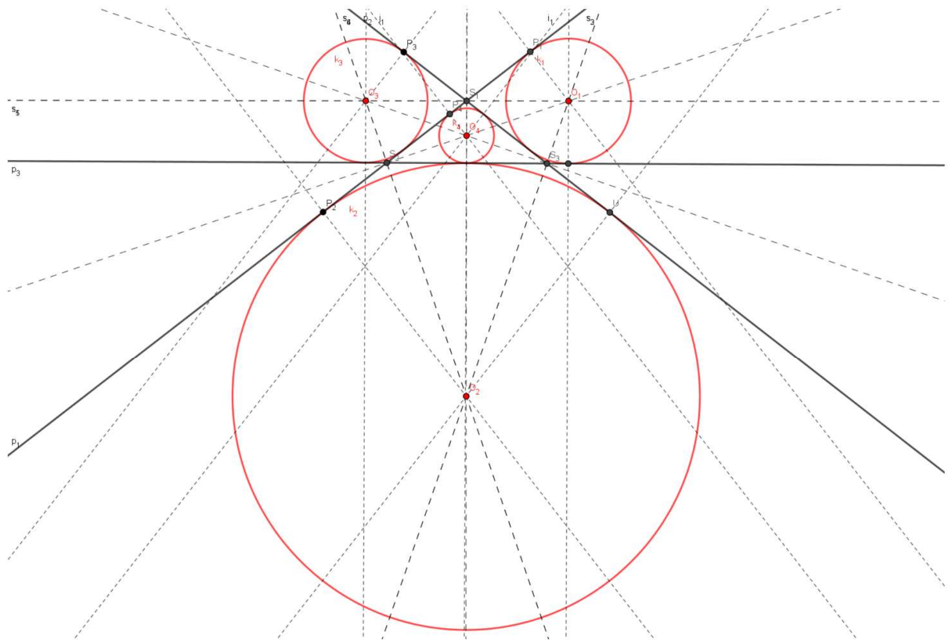
Slika 17: Kružnica koja prolazi kroz jednu zadanu točke i dira dva zadana pravaca.

Uočimo, sjecište pravca q_1 i kružnice k_4 su dvije točke. Središte tražene kružnice je sjecište paralele s pravcem koji prolazi točkom P i jednim od sjecišta pravca q_1 i kružnice k_4 te simetrale s. Pošto imamo dva sjecišta pravca q_1 i kružnice k_4, u ovom slučaju imamo dva rješenja.

Apolonijev problem 4. Konstrukcija kružnice koja dira tri dana pravca

Neka su zadana tri pravca p_1, p_2 i p_3. Pravaci se međusobno sijeku, ali ne u istoj točki. Sjecište pravca p_1 i p_2 je točka S_1, pravca p_1 i p_3 je točka S_2 i pravca p_2 i p_3 je točka S_3.

Konstruiramo simetrale vanjskih kuteva trokuta $\Delta S_1S_2S_3$ te ih označimo s s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6. Presjek simetrali s_1 i s_2 je točka O_1. Konstruiramo okomicu iz točke O_1 na pravac p_1. Presjek p_1 i te okomice je točka P_1. Tražena kružnica koja dira sva tri zadana pravca je $k_1(O_1, |O_1P_1|)$. Presjek pravaca s_3 i s_4 je točka O_2, a pravaca s_5 i s_6 je točka O_3. Na isti način, konstruiramo još dvije kružnice koje diraju tri zadana pravca: $k_2(O_2, |O_2P_2|)$ i $k_3(O_3, |O_3P_3|)$. Konstruiramo simetrale unutarnjih kuteva trokuta $\Delta S_1S_2S_3$. Sjecište simetrala unutarnjih kuteva trokuta označimo s O_4. Konstruiramo okomicu iz točke O_4 na pravac p_1, te sjecište okomice i pravca p_1 označimo s P_4. Kružnica koja dira sva tri zadana pravca je $k_4(O_4, |O_4P_4|)$. Dakle, imamo četiri rješenja ovog problema.

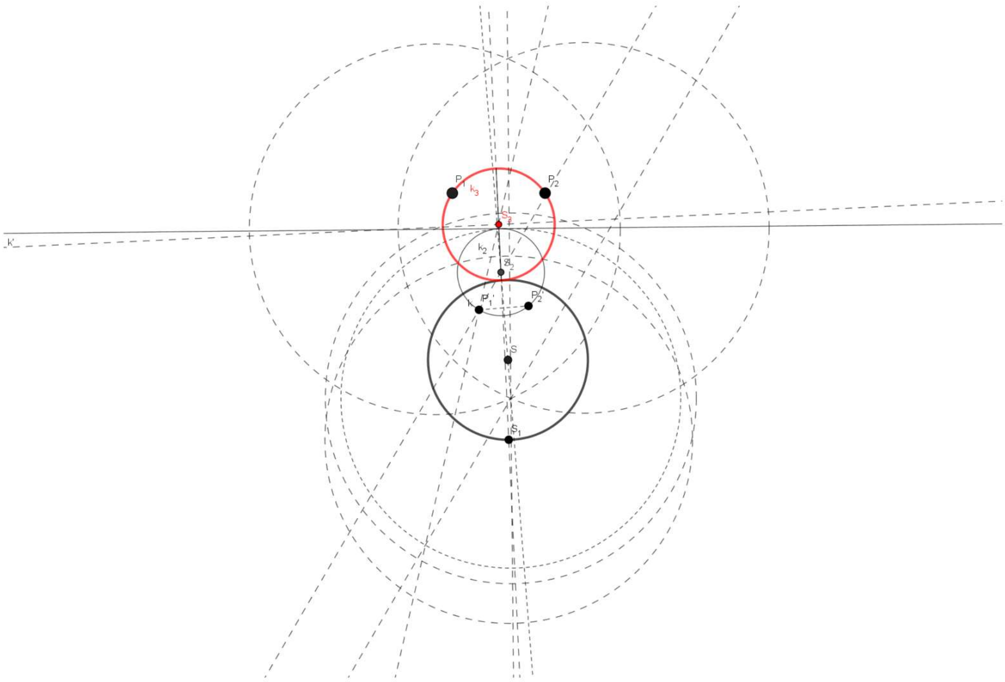


Slika 18: Kružnica koja dira tri zadana pravca.

Apolonijev problem 5. Konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira danu kružnicu

Neka su zadane dvije točke P_1 i P_2 i kružnica $k(S, r)$, pri čemu točke $P_1, P_2 \notin k$ i nisu unutar kružnice k. Konstruiramo kružnicu inverzije $k_1(S_1, r_1)$, pri čemu točka S_1 leži na kružnici $k(S, r)$ a radijus r_1 odaberemo proizvoljno. Kružnica k preslika se u pravac k', točka P_1 u P_1' i točka P_2 u P_2'. Sada smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi dvijema točkama i dira pravac. Konstruiramo kružnicu $k_2(S_2, r_2)$ koja prolazi točkama točkama P_1' i P_2' i dira pravac k' kao što je pokazano u Apolonijevom problemu 2. Zatim kružnicu $k_2(S_2, r_2)$ preslikamo u $k_3(S_3, r_3)$ s obzirom na kružnicu inverzije k_1. Kružnica $k_3(S_3, r_3)$ je tražena kružnica koja prolazi kroz dvije dane točke i dira danu kružnicu.

Uočimo, kada konstruiramo kružnicu koja koja prolazi točkama P_1' i P_2' i dira pravac k' imamo dva rješenja, te kada rješenja preslikamo s obzirom na kružnicu inverzije k_1 imamo dvije kružnice koje prolaze točkama P_1 i P_2 i diraju kružnicu $k(S, r)$. Dakle, u ovom slučaju imamo dva rješenja.

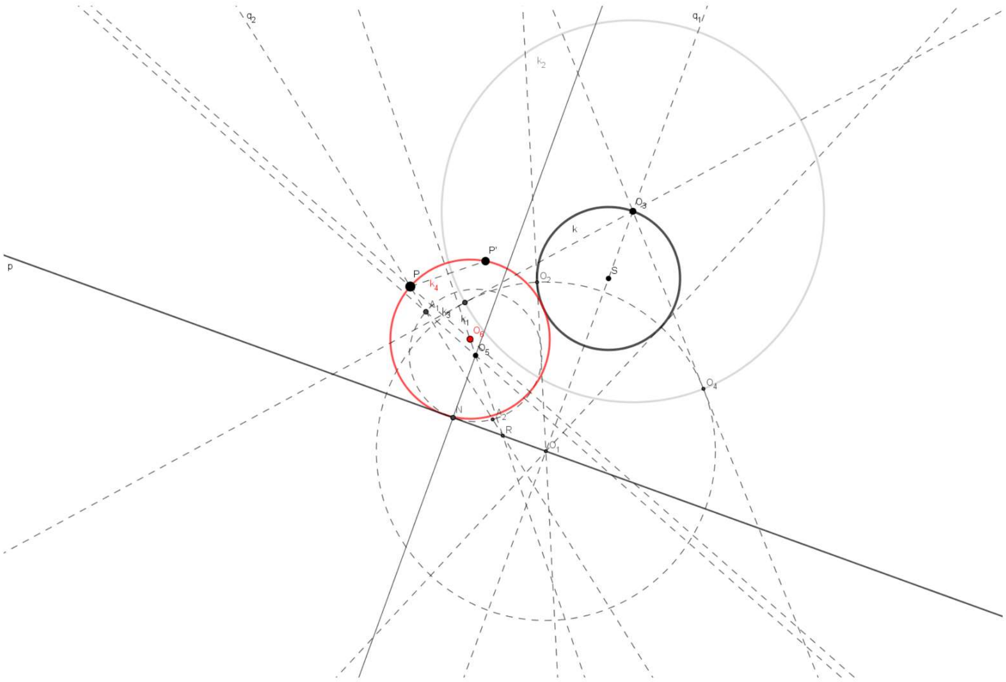


Slika 19: Kružnica koja prolazi kroz dvije dane točke i dira danu kružnicu.

Apolonijev problem 6. Konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu

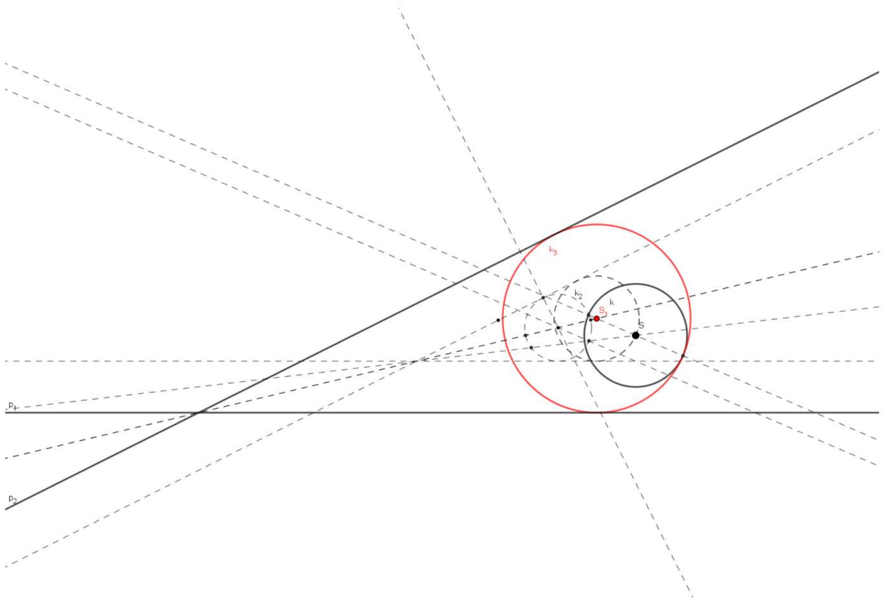
Neka su dani točka P, kružnica $k(S, r)$ i pravac p t.d. se kružnica k i pravac p ne sijeku i točka P je s iste strane pravca p kao i kružnica k. Konstruiramo okomicu iz S na pravac p te ju označimo s q_1. Sjecište kružnice k i pravca q_1 su dvije točke, pri čemu točku koja je udaljenija od pravca p označimo s O_3. Sjecište pravaca q_1 i p je točka O_1. Konstruiramo kružnicu $k_1(O_1, |O_1O_2|)$, pri čemu je O_2 dirалište tangente iz O_1 na kružnicu k. Kružnica k_1 siječe kružnicu k okomito. Konstruiramo kružnicu $k_2(O_3, |O_3O_4|)$ koja siječe kružnicu k_1 okomito, pri čemu je točka O_4 diralište tangente na kružnicu k_1 koja prolazi točkom O_3. Kružnica k_2 je kružnica inverzije σ. Ona preslikava pravac p u kružnicu k, kružnicu k u pravac p i točku P u točku P'. Konstruiramo dužinu $\overline{PP'}$ i simetralu dužine $\overline{PP'}$. Sjecište simetrale i pravca p je točka R. Odaberemo proizvoljno točku na simetrali i označimo je s O_5. Konstruiramo kružnicu $k_3(O_5, |O_5N|)$, pri čemu je N nožište okomice iz O_5 na pravac p. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama P i R i označimo ga s q_2. Sjecište pravca q_2 i kružnice k_3 su točke A_1 i A_2. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama O_5 i A_1, te paralelu s tim pravcem kroz točku P. Sjecište paralele i simetrale dužine $\overline{PP'}$ je točka O_6. Konstruiramo kružnicu $k_4(O_6, |O_6P|)$. Kružnica k_4 prolazi točkama P i P', te dira kružnicu k i pravac p.

U ovom slučaju imamo 4 rješenja. Neka je $k_5(P, r_5)$ kružnica inverzije σ'. Tada će se pravac p preslikati u kružnicu p', a kružnica k u kružnicu k'. Kako se p i k ne sijeku, tada se ni kružnice p' i k' ne sijeku. Konsturiramo zajedničke unutarne i vanjske tangente od p' i k'. Preslikamo ih inverzijom σ' i dobijemo četiri kružnice koje prolaze točkom P i diraju pravac p i kružnicu k. Dakle, imamo četiri rješenja.



Slika 20: Kružnica koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu.

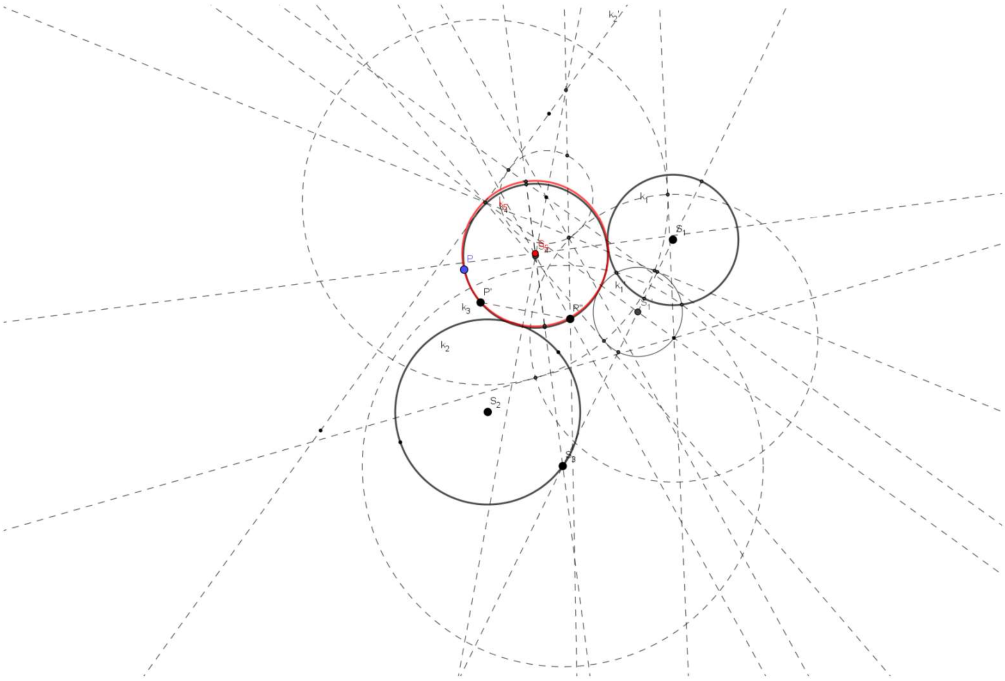
Apolonijev problem 7. Konstrukcija kružnice koja dira dva dana pravca i danu kružnicu Neka su dani pravci p_1 i p_2 i kružnica $k(S, r)$. Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci p_1 i p_2. Smanjimo radijus kružnice k za r i pravce p_1 i p_2 translatiramo za r. Sada smo sveli problem na konstrukciju kružnice koja dira dva zadana pravca i danu točku. Konstruiramo kružnicu $k_2(S_1, r_1)$ koja dira dva dana pravca i jednu točku kao što smo pokazali u Apolonijevom problemu 3. Zatim konstruiramo kružnicu $k_3(S_1, r_1 + r)$. Kružnica k_3 dira pravce p_1 i p_2 i kružnicu k.



Slika 21: Kružnica koja dira danu kružnicu i dva pravca.

Sada promatramo točku S i pravce paralelne s pravcima p_1 i p_2 i udaljene od njih za r. Za pravac p_1 imamo dva pravca koja su paralelna s njim i udaljena od njega za r, kao i za pravac p_2. Tada ćemo imati četiri slučaja u koja ćemo imati dva rješenja. Dakle, u našem slučaju imamo osam rješenja.

Apolonijev problem 8. Konstrukcija kružnice koja prolazi zadanom točkom i dira dvije zadane kružnice
Neka su zadani točka P i dvije kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$. Konstruiramo kružnicu inverzije σ $k_3(S_3, r_3)$ pri čemu točka S_3 leži na kružnici k_2. Kružnica k_2 se preslika u pravac k_2', kružnica k_1 se preslika u kružnicu $k_1'(S_1', r_1')$ a točka P se preslika u točku P'. Sada smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu. Konstruiramo kružnicu $k_4(S_4, r_4)$ koja prolazi točkom P i dira pravac k_2' i kružnicu k_1' kao što smo pokazali u Apolonijevom problemu 6. Preslikamo kružnicu k_4 inverzijom σ i dobijemo kružnicu $k_5(S_5, r_5)$. Kružnica k_5 prolazi točkom P i dira kružnice k_1 i k_2.

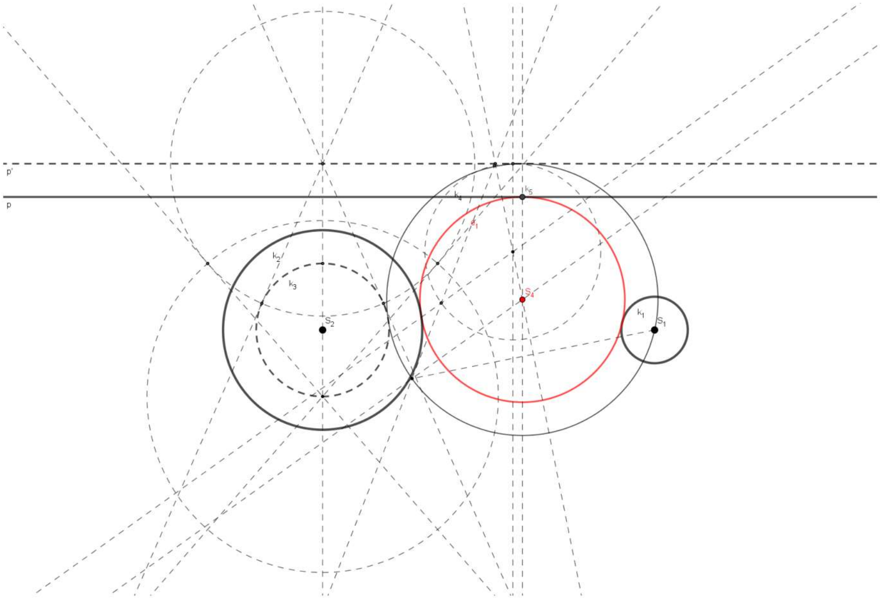


Slika 22: Kružnica koja prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice.

Neka je $k_6(P, r_6)$ kružnica inverzije σ'. Tada će se kružnice k_1 i k_2 preslikati u kružnice k_7 i k_8. Kako se k_1 i k_2 ne sijeku, tada se ni kružnice k_7 i k_8 ne sijeku. Konsturiramo zajedničke unutarne i vanjske tangente od k_7 i k_8. Preslikamo li ih sve inverzijom σ dobit ćemo četiri kružnice koje prolaze točkom P i diraju kružnice k_1 i k_2. Dakle, u ovom slučaju imamo četiri rješenja.

Apolonijev problem 9. Konstrukcija kružnice koja dira dani pravac i dvije dane kružnice
Neka su dane kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ i pravac p t.d. p ne leži na nijednoj od zadanih kružnica te se kružnice ne sijeku niti je jedna unutar druge. Radijus kružnice k_1 je manji od radijusa kružnice k_2. Smanjimo radijus kružnica k_1 i k_2 za r_1 i translatiramo pravac p za r prema gore. Sada imamo kružnicu $k_3(S_2, r_3 - r_1)$, točku S_1 i pravac p'. Sveli smo problem na

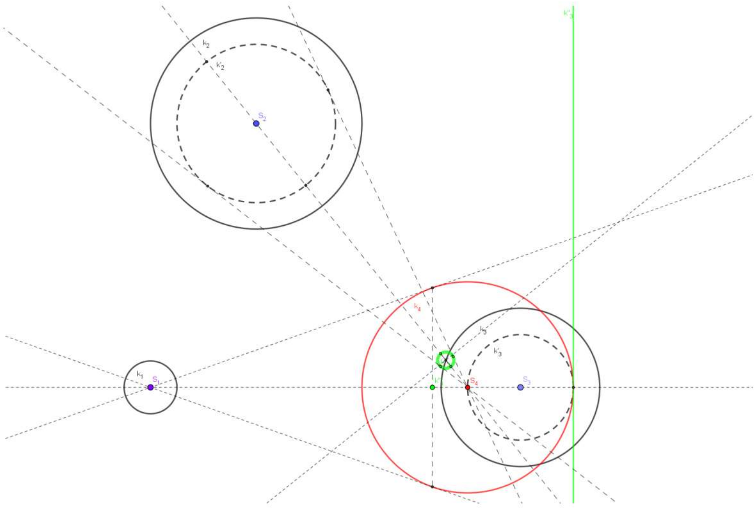
konstruiranje kružnice koja prolazi danom točkom i dira pravac i kružnicu. Konstruiramo kružnicu $k_4(S_4, r_4)$ koja prolazi točkom S_1 i dira pravac p' i kružnicu k_3 kao što smo pokazali u Apolonijevom problemu 6. Konstruiramo kružnicu $k_5(S_4, r_4 - r)$. Kružnica k_5 dira kružnicu k_1 i k_2 te pravac p.



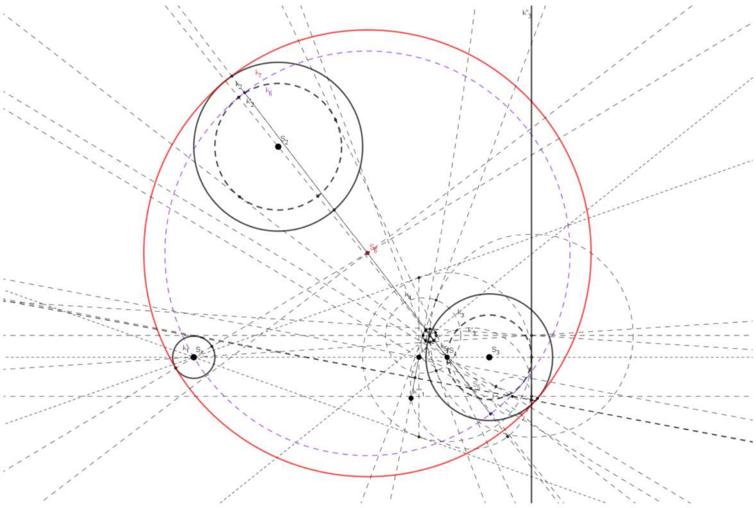
Slika 23: Kružnica koja dira dvije dane kružnice i dani pravac.

U ovom slučaju promatramo točku S_1 i kružnice $k(S_2, r_2 - r_1), k(S_2, r_2 + r_1)$ i pravce p_1 i p_2 koji su udaljeni od pravca p za r. Gledamo kružnice koje diraju k_1 i p_1 i prolaze točkom S_1, kružnice koje diraju k_1 i p_2 i prolaze točkom S_1, kružnice koje diraju k_2 i p_1 i prolaze točkom te kružnice koje diraju k_2 i p_2 i prolaze točkom S_1.
U svakom od slučaja imamo dva rješenja. Dakle, u našem slučaju imamo osam rješenja.

Apolonijev problem 10. Konstrukcija kružnice koja dira tri dane kružnice
Neka je k_1 kružnica sa središtem S_1 i polumjerom r_1, k_2 kružnica s središtem S_2 i polumjerom r_2 i k_3 kružnica s središtem S_3 i polumjerom r_3. Neka je r_1 manji od r_2 i r_3. Smanjimo polumjere kružnica k_1,k_2 i k_3 za r_1. Sada imamo kružnicu $k_2'(S_2, r_2 - r_1)$, $k_3'(S_3, r_3 - r_1)$ i točku $k_1' = S_1$, te smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi točkom k_1' i dira kružnice k_2' i k_3'. Odredimo inverziju σ čije središte leži na kružnici k_3' i ima polumjer $2(r_3 - r_1)$. Kružnica inverzije je $k_4(S_4, 2(r_3 - r_1))$ i označena je crvenom bojom na Slici 24. Kružnica k_3' preslikava se u pravac k_3'', kružnica k_2' preslikava se u kružnicu k_2'' a točka k_1' preslika se u točku k_1''. k_1'',k_2'' i k_3'' obojeni su zelenom bojom za Slici 24. Sada smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi točkom k_1'' i dira kružnicu k_2'' i pravac k_3''. Konstruiramo kružnicu $k_5(S_5, r_5)$ koja prolazi točkom k_1'' i dira kružnicu k_2'' i pravac k_3'' kao i u Apolonijevom problemu 6. Sada kružnicu k_5 preslikamo inverzijom σ. Dobivena kružnica $k_6(S_6, r_6)$ označena je ljubičastom bojom na Slici 25. Kružnici k_6 povećamo radijus za r_1 i dobijemo traženu kružnicu $k_7(S_6, r_6 + r_1)$ koja dira naše tri zadane kružnice. U ovom slučaju



Slika 24: Konstrukcija k_1'', k_2'' i k_3''.



Slika 25: Kružnica koja dira tri zadane kružnice.

Apolonijevog problema postoji osam rješenja. Konstruiramo kružnice

$$k_1(S_2, r_2 + r_1), k_2(S_2, r_2 - r_1), k_3(S_3, r_3 + r_1), k_4(S_3, r_3 - r_1).$$

Sada tražimo kružnice koje prolaze točkom S_1 i diraju konstruirane kružnice s iste strane. Dobili smo četiri rješenja. Zatim potražimo kružnice koje prolaze kroz S_1 i diraju kružnice $k_1(S_2, r_2 + r_1)$ i $k_4(S_3, r_3 - r_1)$, te kružnice $k_2(S_2, r_2 - r_1)$ i $k_3(S_3, r_3 + r_1)$ s različitih strana. Dobili smo četiri rješenja. Dakle, ukupno imamo osam rješenja Apolonijevog problema.

4. Apolonijev skup

4.1. Descartesov teorem

René Descartes je bio poznati francuski matematičar, fizičar i filozof. U području matematike istaknuo se u geometriji, te ga se smatra utemeljiteljem analitičke geometrije[3]. Godine 1643. poslao je princezi Elizabeth[4] pismo u kojemu je pisao o vezi između radijusa četiri kružnice koje se diraju [5, str.5].

Teorem 4.1. *(Descartesov teorem o kružnicama)*
Zakrivljenosti κ_i kružnica k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ koje se međusobno diraju zadovoljavaju jednakost

$$(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2).$$

Dokaz. Neka su a, b i c stranice trokuta ΔABC, s poluopseg trokuta ΔABC, r radijus trokutu upisane kružnice, te r_a radijus prve trokutu pripisane kružnice. Opseg O trokuta ΔABC je $O = a + b + c$, te stoga poluopseg s trokuta ΔABC iznosi $s = \frac{a+b+c}{2}$. Radijus trokutu upisane kružnice jednak je :

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}. \tag{4}$$

Kvadriramo li izraz (4), dobit ćemo

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}\right)^2 = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

Radijus r_a trokutu ΔABC pripisane kružnice jednak je

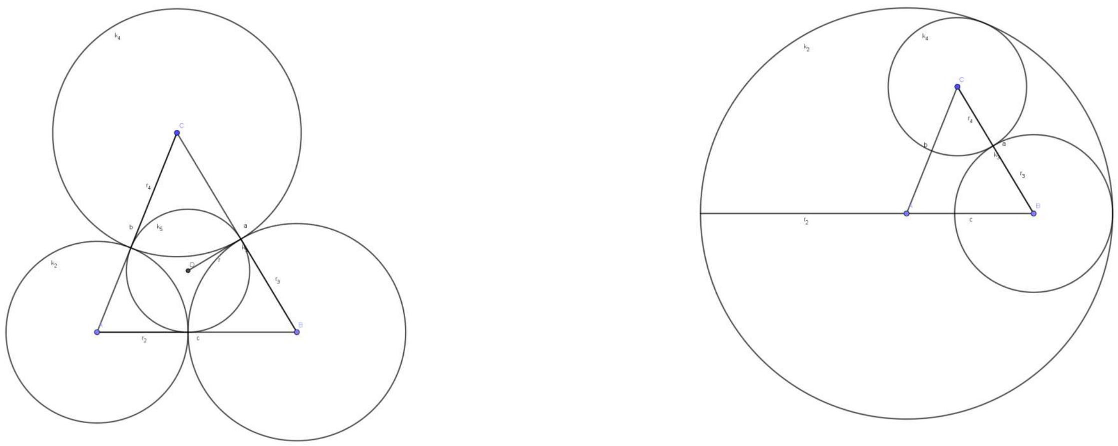
$$r_a = \frac{P}{s-a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}. \tag{5}$$

Kvadriramo li izraz (5), dobit ćemo

$$r_a^2 = \left(\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}\right)^2 = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)^2} = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}.$$

Neka su $k_2(A, r_2), k_3(B, r_3)$ i $k_4(C, r_4)$ tri kružnice koje se dodiruju. Neka je k_1 kružnica radijusa r_1 koja dira kružnice k_2, k_3 i k_4, kružnica k_5 je kružnica upisana trokutu ΔABC radijusa r i k_6 kružnica pripisana trokutu ΔABC radijusa r_a. Ako se kružnice k_2,k_3 i k_4 međusobno diraju izvana, tada je $r_2 = s - a$, $r_3 = s - b$, $r_4 = s - c$ i $r = \frac{1}{\mu_1}$. Ako se kružnice k_2, k_3 i k_4 međusobno diraju pri čemu kružnica k_4 dira kružnice k_2 i k_3 iznutra, tada je $r_2 = -s$, $r_3 = s - c$, $r_4 = s - b$ i $r_a = \frac{1}{\mu_1}$. U ovom slučaju r_2 ima predznak minus zato što dira kružnice k_3 i k_4 iznutra.
Označimo s κ_2,κ_3 i κ_4 zakrivljenosti kružnica k_2, k_3 i k_4 redom. Neka se kružnice k_7,k_8 i k_9 diraju, ali ne sijeku, te neka ih kružnica k_5 dira iznutra. μ_1, μ_2, μ_3 i μ_4 su zakrivljenosti

[3] grana geometrije koja se bavi rješavanjem geometrijskih zadataka pomoću algebarskih metoda
[4] kćer kralja Fredericha iz Češke



(a) Tri kružnice se diraju izvana

(b) Jedna kružnica dira preostale dvije iznutra

Slika 26: Tri kružnice koje se međusobno diraju.

kružnica k_5, k_7, k_8 i k_9 redom. Kružnice k_7,k_8 i k_9 prolaze diralištima kružnica k_2, k_3 i k_4. U slučaju kada se kružnice k_2, k_3 i k_4 međusobno diraju izvana vrijedi

$$\begin{aligned}\kappa_3\kappa_4+\kappa_4\kappa_2+\kappa_2\kappa_3 =&\left(\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}+\frac{1}{\kappa_4}\right)\kappa_2\kappa_3\kappa_4=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\ =&\frac{3s-(a+b+c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{3s-2s}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\ =&\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{r^2}\\ =&\mu_1.\end{aligned}$$

U slučaju kada se kružnice k_2,k_3 i k_4 međusobno diraju, pri čemu kružnica k_4 dira kružnice k_2 i k_3 iznutra vrijedi

$$\begin{aligned}\kappa_3\kappa_4+\kappa_4\kappa_2+\kappa_2\kappa_3 =&\left(\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}+\frac{1}{\kappa_4}\right)\kappa_2\kappa_3\kappa_4=\frac{-s+(s-c)+(s-b)}{-s(s-c)(s-b)}\\ =&\frac{s-c-b}{-s(s-c)(s-b)}=\frac{c+b-s}{s(s-c)(s-b)}\\ =&\frac{a+b+c-s-a}{s(s-c)(s-b)}=\frac{2s-s-a}{s(s-c)(s-b)}\\ =&\frac{s-a}{s(s-c)(s-b)}=\frac{1}{r_a^2}\\ =&\mu_1.\end{aligned}$$

Dakle, u oba slučaja je $\kappa_3\kappa_4+\kappa_4\kappa_2+\kappa_2\kappa_3=\mu_1$. Pošto je izbor k_2, k_3 i k_4 bio slučajan, možemo permutirati indekse te dobijemo

$$\begin{aligned}\mu_1^2&=\kappa_2\kappa_3+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_4\\ \mu_2^2&=\kappa_1\kappa_3+\kappa_1\kappa_4+\kappa_3\kappa_4\\ \mu_3^2&=\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_4+\kappa_2\kappa_4\\ \mu_4^2&=\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_3+\kappa_2\kappa_3.\end{aligned}$$

Pošto se i kružnice k_7, k_8 i k_9 međusobno diraju tada vrijedi

$$\begin{aligned}\kappa_1^2 &= \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4\\ \kappa_2^2 &= \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_3\mu_4\\ \kappa_3^2 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_4\\ \kappa_4^2 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{4}\kappa_i\Big)^2 =&(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2\\ =&\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2+2\kappa_1\kappa_2+2\kappa_1\kappa_3+2\kappa_1\kappa_4+2\kappa_2\kappa_3+2\kappa_2\kappa_4+2\kappa_3\kappa_4\\ =&\sum_{i=1}^{4}\kappa_i^2+(\kappa_2\kappa_3+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_4)+(\kappa_1\kappa_3+\kappa_1\kappa_4+\kappa_3\kappa_4)+(\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_4+\kappa_2\kappa_4)\\ &+(\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_3+\kappa_2\kappa_3)\\ =&\sum_{i=1}^{4}\kappa_i^2+\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^4\\ =&\sum_{i=1}^{4}\kappa_i^2+\sum_{i=1}^{4}\mu_i^2 \qquad (6)\\ =&(\mu_2\mu_3+\mu_2\mu_4+\mu_3\mu_4)+(\mu_1\mu_3+\mu_1\mu_4+\mu_3\mu_4)+(\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_4)\\ &+(\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3)+\sum_{i=1}^{4}\mu_i^2\\ =&2\sum_{1\le i<j\le 4}\mu_i\mu_j+\sum_{i=1}^{4}\mu_i^2\\ =&\Big(\sum_{i=1}^{4}\mu_i\Big)^2.\end{aligned}$$

Dakle, $\Big(\sum_{i=1}^{4}\kappa_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{4}\mu_i\Big)^2$, tj. $\sum_{i=1}^{4}\kappa_i = \sum_{i=1}^{4}\mu_i$.

$$\begin{aligned}-\kappa_1^2+(\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2 =&-\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_2\kappa_3+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_2+\kappa_3^2+\kappa_3\kappa_4+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_4+\kappa_4^4\\ =&-\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2+2\kappa_2\kappa_3+2\kappa_2\kappa_4+2\kappa_3\kappa_4\\ =&-\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2+2\mu_1^2\\ =&-(\mu_2\mu_3+\mu_2\mu_4+\mu_3\mu_4)+\mu_1\mu_3+\mu_1\mu_4+\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_4\\ &+\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+2\mu_1^2\\ =&2\mu_1\mu_2+2\mu_1\mu_3+2\mu_1\mu_4+2\mu_1^2\\ =&2\mu_1(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)\\ =&2\mu_1\Big(\sum_{i=1}^{4}\kappa_i\Big).\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$
\begin{aligned}
2\mu_1 =& \frac{-\kappa_1^2 + (\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4} \\
=& \frac{-\kappa_1^2 + (\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2 + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 - \kappa_1\kappa_2 - \kappa_1\kappa_3 - \kappa_1\kappa_4}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4} \\
=& \frac{\kappa_1(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i) + \kappa_2(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i) + \kappa_3(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i) + \kappa_4(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i)}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4} \\
=& \frac{(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)(-\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4} \\
=& -\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4.
\end{aligned}
$$

Permutiramo indekse i dobijemo sljedeće tri jednadžbe

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 &= 2\mu_2 \\
\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4 &= 2\mu_3 \\
\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 &= 2\mu_4.
\end{aligned}
$$

Kvadriramo prethodne tri jednadžbe te ih zbrojimo. Tada je

$$
\begin{aligned}
4\sum_{i=1}^4 \mu_i^2 =& (-\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2 + (\kappa_1-\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2 + (\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3+\kappa_4)^2 \\
&+ (\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3-\kappa_4)^2 \\
=& \kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2 - 2\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4 \\
&+ \kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2 - 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 - 2\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4 \\
&+ \kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 - 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 - 2\kappa_3\kappa_4 \\
&+ \kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_4 - 2\kappa_3\kappa_4 \\
=& 4(\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2) \\
=& 4\Big(\sum_{i=1}^4 \kappa_1^2\Big).
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i^2 = \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2.$$

$$2\sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 = \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 = \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2.$$

Prema jednadžbi (6) slijedi

$$\sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 = \Big(\sum_{i=1}^4 \kappa_i\Big)^2.$$

Dakle,

$$2(\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2) = (\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2.$$

□

1936. godine Sir Frederich Soddy objavio je pjesmu naziva "The Kiss Precise" u kojoj je pisao o vezi između radijusa četiri kružnice koje se diraju, ali se ne sijeku te njenu generalizaciju na trodimenzionalan prostor.
Dio Soddyjeve pjesme glasi[5, str. 7]:

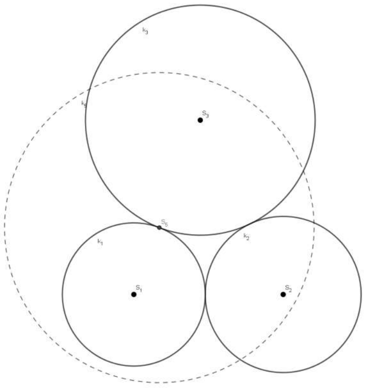
"Since zero bend's a dead straight line
and concave bends have minus sing
the sum od the squares of all four bends
is half the square of their sum."

Teorem 4.2. *(Sodijev teorem)*
Neka su $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ četiri kružnice koje se međusobno diraju, a $\kappa_i, i = 1, 2, 3, 4$ njihove zakrivljenosti. Tada vrijedi :

$$\sum \kappa_i^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum \kappa_i\Big)^2.$$

Teorem 4.3. *(Apolonijev teorem)*
Neka su dane kružnice k_1, k_2 i k_3 koje se međusobno diraju. Tada postoje točno dvije kružnice k_4 i k_4' koje diraju sve tri dane kružnice.

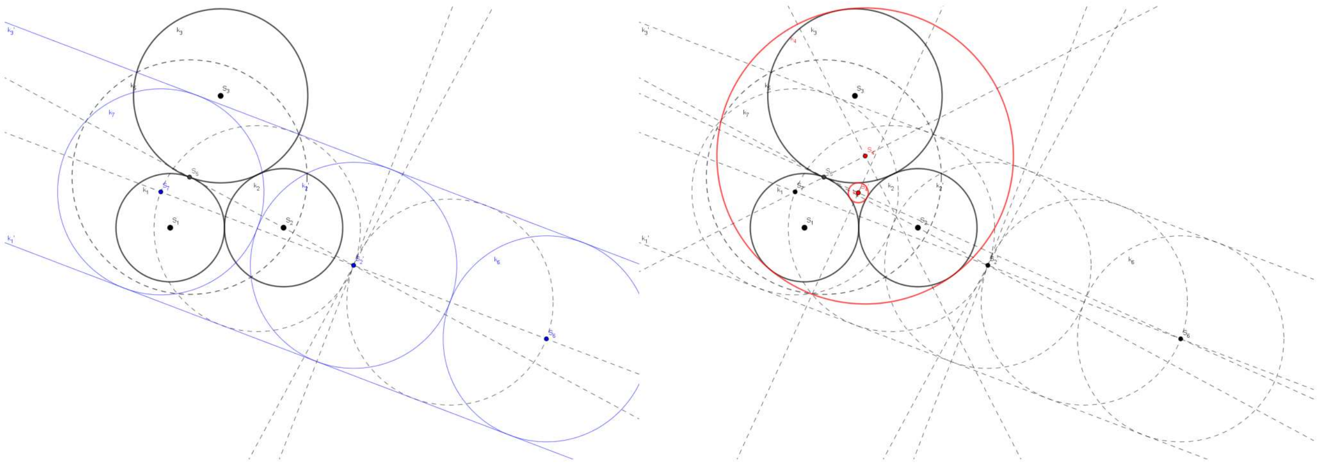
Dokaz. Neka su $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$ kružnice koje se međusobno diraju. Neka je $k_5(S_5, r_5)$ kružnica inverzije σ, pri čemu je točka S_5 dirалište kružnice k_1 i k_3.



Slika 27: Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4.

Kružnica k_1 se inverzijom preslika u pravac k_1', kružnica k_3 u pravac k_3' a kružnica k_2 u kružnicu $k_2'(S_2', r_2')$. Središte kružnice k_5 inverzije σ je dirалište kružnica k_1 i k_3, te su pravci k_1' i k_3' paralelni, a kružnica k_2' dira pravce k_1' i k_3' kao na Slici 28a. Možemo vidjeti da postoje dvije kružnice t.d. diraju pravce k_1' i k_3' i kružnicu k_2'. Te dvije kružnice su $k_6(S_6, r_2')$ i $k_7(S_7, r_2')$, pri čemu točke S_6 i S_7 leže na geometrijskom središtu točaka jednako udaljenih od pravaca k_1' i k_3', te je $d(S_2', S_6) = d(S_2', S_7) = r_2'$. Preslikamo kružnice k_6 i k_7 inverzijom σ i dobijemo kružnice k_4 i k_4' koje diraju kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$.

□



(a) Konstrukcija k_1'',k_2'', k_3'', k_6 i k_7 (b) Konstrukcija kružnica k_4 i k_4'

Slika 28: Konstrukcija kružnica koje diraju tri zadane kružnice.

Znamo da za zakrivljenosti κ_i kružnica $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ koje se međusobno diraju vrijedi

$$(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2),$$

te da postoje točno dvije kružnice k_4 i k_4' koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_3, pri čemu se kružnice k_1, k_2 i k_3 međusobno diraju. Sada možemo izračunati koliko iznose zakrivljenosti kružnica k_4 i k_4' .

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 = 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4$$

$$\kappa_4^2 - 2\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3) = 0$$

$$\begin{aligned}
\kappa_4 =& \frac{2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \pm \sqrt{4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 - 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3))}}{2} \\
=& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3))} \\
=& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + 4(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3) - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)} \\
=& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{4(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)} \\
=& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}
\end{aligned}$$

Dakle, zakrivljenosti kružnica κ_4 i κ_4' koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_3 su:

$$\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$$

$$\kappa_4' = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}. \tag{7}$$

Apolonijev skup je fraktal[5] koji se sastoji od kružnica. U Apolonijevom skupu svaka kružnica u skupu dira susjedne tri kružnice. Descartesova četvorka je svaka četvorka $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$

[5]Geometrijske objekte kojima je fraktalna dimenzija veća od topološke dimenzije nazivamo fraktalima.

koja zadovoljava Descartesovu jednadžbu $(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2)$, pri čemu su $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ i κ_4 zakrivljenosti četiri kružnice koje se međusobno diraju. Ako su zakrivljenosti kružnica koje pripadaju Apolonijevom skupu iz skupa cijelih brojeva, tada Apolonijev skup nazivamo cjelobrojnim.

Teorem 4.4. *Ako početne četiri kružnica koje se međusobno diraju u Apolonijevom skupu imaju cjelobrojne zakrivljenosti, tada sve kružnice u Apolonijevom skupu imaju cjelobrojne zakrivljenosti.*

Dokaz. Neka su k_1, k_2 i k_3 kružnice koje se međusobno diraju, te κ_1, κ_2 i κ_3 njihove zakrivljenosti. Prema teoremu 4.3 postoje kružnice k_4 i k_4' zakrivljenosti κ_4 i κ_4' koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_3. Neka su k_1, k_2, k_3 i k_4 početne četiri kružnice u Apolonijevom skupu, te neka su $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{Z}$. Prema relaciji (7) vrijedi :

$$\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$$

$$\kappa_4' = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\kappa_4 + \kappa_4' &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} \\ &= 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3.\end{aligned}$$

$$\kappa_4' = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4 \in \mathbb{Z}.$$

□

Kada imamo tri kružnice k_1, k_2 i k_3 koje se međusobno diraju, tada možemo odrediti četvrtu kružnicu k_4 koja ih dira iznutra. Apolonijev skup će biti određen s kružnicama k_1, k_2, k_3 i k_4, pri čemu će ostale kružnice koje pripadaju Apolonijevom skupu biti unutar kružnice k_4.

Primjer 4.1. *Neka su k_1,k_2 i k_3 kružnice koje se diraju, te $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ zakrivljenosti kružnica k_1,k_2,k_3 redom. Neka je $\kappa_1 = 21, \kappa_2 = 24, \kappa_3 = 28$. Prema relaciji (7), kružnice k_4 i k_4' koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_3 imaju zakrivljenosti :*

$$\begin{aligned}\kappa_4 =& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} = 21 + 24 + 28 - 2\sqrt{21\cdot 24 + 21\cdot 28 + 24\cdot 28} \\ =& 73 - 2\sqrt{504 + 588 + 672} = 73 - 2\sqrt{1764} = 73 - 2\cdot 42 = 73 - 84 = -11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_4' =& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} = 21 + 24 + 28 + 2\sqrt{21\cdot 24 + 21\cdot 28 + 24\cdot 28} \\ =& 73 + 2\sqrt{504 + 588 + 672} = 73 + 2\sqrt{1764} = 73 + 2\cdot 42 = 73 + 84 = 157.\end{aligned}$$

Kružnica k_4 ima negativnu zakrivljenost zato što dira kružnice k_1, k_2 i k_3 iznutra. Zakrivljenosti kružnica k_5 i k_5' koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_4 su:

$$\begin{aligned}\kappa_5 =& \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_4} = 21 + 24 - 11 - 2\sqrt{21\cdot 24 - 21\cdot 11 - 24\cdot 11} \\ =& 34 - 2\sqrt{504 - 231 - 264} = 34 - 2\sqrt{9} = 34 - 2\cdot 3 = 34 - 6 = 28\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_5' =&\kappa_1+\kappa_2+\kappa_4+2\sqrt{\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_4+\kappa_2\kappa_4} = 21+24-11+2\sqrt{21\cdot 24-21\cdot 11-24\cdot 11}\\ =&34+2\sqrt{504-231-264} = 34+2\sqrt{9} = 34+2\cdot 3 = 34+6 = 40.\end{aligned}$$

Primjetimo, k_5 je zapravo kružnica k_3, kao što možemo vidjeti na Slici 29. Zakrivljenosti kružnica k_6 i k_6' koje diraju kružnice k_2, k_3 i k_4 su:

$$\begin{aligned}\kappa_6 =&\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4-2\sqrt{\kappa_2\kappa_3+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_4} = 24+28-11-2\sqrt{24\cdot 28-24\cdot 11-28\cdot 11}\\ =&41-2\sqrt{672-264-308} = 41-2\sqrt{100} = 41-2\cdot 10 = 41-20 = 21\end{aligned}$$

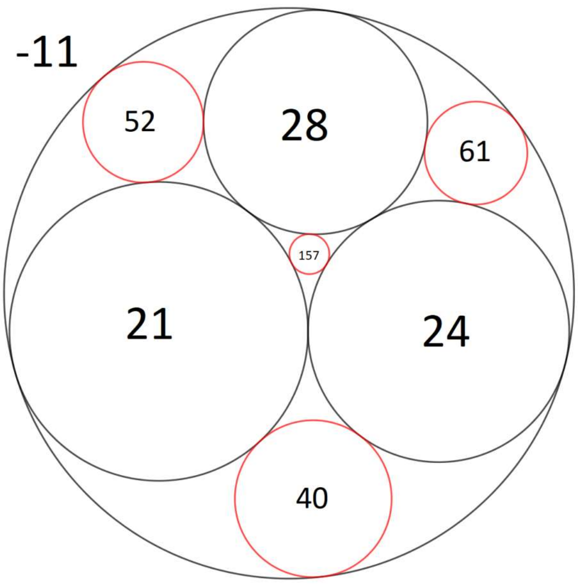
$$\begin{aligned}\kappa_6' =&\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4+2\sqrt{\kappa_2\kappa_3+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_4} = 24+28-11+2\sqrt{24\cdot 28-24\cdot 11-28\cdot 11}\\ =&41+2\sqrt{672-264-308} = 41+2\sqrt{100} = 41+2\cdot 10 = 41+20 = 61.\end{aligned}$$

Zakrivljenosti kružnica k_7 i k_7' koje diraju kružnice k_1, k_3 i k_4 su:

$$\begin{aligned}\kappa_7 =&\kappa_1+\kappa_3+\kappa_4-2\sqrt{\kappa_1\kappa_3+\kappa_1\kappa_4+\kappa_3\kappa_4} = 21+28-11-2\sqrt{21\cdot 28-21\cdot 11-28\cdot 11}\\ =&38-2\sqrt{588-231-308} = 38-2\sqrt{49} = 38-2\cdot 7 = 38-14 = 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_7' =&\kappa_1+\kappa_3+\kappa_4+2\sqrt{\kappa_1\kappa_3+\kappa_1\kappa_4+\kappa_3\kappa_4} = 21+28-11+2\sqrt{21\cdot 28-21\cdot 11-28\cdot 11}\\ =&38+2\sqrt{588-231-308} = 38+2\sqrt{49} = 38+2\cdot 7 = 38+14 = 52.\end{aligned}$$

Kao što možemo vidjeti na Slici 29, kružnica k_6 je zapravo kružnica k_1, a kružnica k_7 je zapravo kružnica k_2. Također, pošto su zakrivljenosti početnih kružnica u Apolonijevom skupu $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{Z}$, tada su i zakrivljenosti ostalih kružnica u ovom Apolonijevom skupu cjelobrojne.



Slika 29: Kružnice $k_1, k_2, k_3, k_4, k_4', k_5', k_6', k_7'$.

4.2. Broj kružnica u Apolonijevom skupu

Neka je P Apolonijev skup, k kružnica u Apolonijevom skupu, r radijus kružnice k i κ zakrivljenost kružnice k. Neka je $l(k)$, $l \geq 1$ generacija u kojoj se kružnica k prvi put pojavljuje u Apolonijevom skupu, $N_u(l)$ ukupan broj kružnica u Apolonijevom skupu u l-toj generaciji te $N_p(l)$ broj kružnica koje se pojavljuju prvi put u l-toj generaciji.
Za $l = 1$, tj. u prvoj generaciji imamo početne četiri kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 koje se diraju. Dakle, broj kružnica u 1. generaciji je 4.
Za $l = 2$ tražimo kružnice koje diraju po tri od četiri početne. Kružnice koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_3 su k_4 i k_5. Kružnice koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_4 su k_3 i k_6. Kružnice koje diraju kružnice k_1, k_3 i k_4 su k_2 i k_7. Kružnice koje diraju kružnice k_2, k_3 i k_4 su k_1 i k_8. Sada imamo osam kružnica više u Apolonijevom skupu, tj. broj kružnica u 2. generaciji je $4 + 8 = 12$.
Za $l = 3$ tražimo kružnice koje diraju po tri od osam kružnica u prvoj generaciji. Kružnice koje diraju kružnice k_1, k_6 i k_4 su k_4 i k_9. Kružnice koje diraju kružnice k_6, k_2 i k_4 su k_4 i k_{10}. Kružnice koje diraju kružnice k_2, k_8 i k_4 su k_4 i k_{11}. Kružnice koje diraju kružnice k_8, k_3 i k_4 su k_4 i k_{12}. Kružnice koje diraju kružnice k_3, k_7 i k_4 su k_4 i k_{13}. Kružnice koje diraju kružnice k_7, k_1 i k_4 su k_4 i k_{14}. Kružnice koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_5 su k_3 i k_{15}. Kružnice koje diraju kružnice k_1, k_3 i k_5 su k_2 i k_{16}. Kružnice koje diraju kružnice k_2, k_3 i k_5 su k_1 i k_{17}. Kružnice koje diraju kružnice k_6, k_1 i k_2 su k_4 i k_{18}. Kružnice koje diraju kružnice k_8, k_2 i k_3 su k_4 i k_{19}. Kružnice koje diraju kružnice k_7, k_3 i k_1 su k_4 i k_{20}. Sada imamo 24 kružnice više u Apolonijevom skupu, tj. broj kružnica u 3. generaciji je $12 + 24 = 36$.
Dakle, u 1. generaciji imamo 4 kružnice, u 2. generaciji $12 = 4 \cdot 3$ kružnica, u 3. generaciji $36 = 4 \cdot 9 = 4 \cdot 3^2$ kružnica. Broj kružnica u l-toj generaciji je $4 \cdot 3^{l-1}$. Primjetimo, $N_u(l) = 4 \cdot 3^{l-1} = 3 \cdot 4 \cdot 3^{l-2} = 3 \cdot N_u(l-1)$.
Dokaz matematičkom indukcijom
1. korak: provjeravamo dali je tvrdnja točna za l=1.

$$N_u(1) = 4 \cdot 3^{1-1} = 4 \cdot 3^0 = 4$$

2. korak: pretpostavimo da za $l = k$ tvrdnja vrijedi.

$$N_u(k) = 4 \cdot 3^{k-1}$$

3. korak: dokazujemo da za $l = k + 1$ vrijedi tvrdnja, tj. $N_u(k+1) = 4 \cdot 3^k$.

$$N_u(k+1) = 3 \cdot N_u(k) = 3 \cdot 4 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^k.$$

Sada kada znamo koliko imamo kružnica u svakoj generaciji, zanima nas koliko se kružnica pojavljuje prvi put u svakoj generaciji. U 1. generaciji imamo četiri početne kružnice. U 2. generaciji pojavljuje se još osam kružnica, od koji se samo kružnice k_5, k_6, k_7 i k_8 pojavljuju prvi put. U 3. generaciji pojavljuje se još 24 kružnice, od koji se samo kružnice $k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{15}, k_{16}, k_{17}, k_{18}, k_{19}$ i k_{20} pojavljuju prvi put. Dakle, u 2. generaciji 4 kružnice koje se pojavljuju prvi put, u 3. generaciji 12=4·3 kružnica. Broj kružnica koje

se pojavljuju prvi put u l-toj generaciji je $4 \cdot 3^{l-2}$, $l > 1$. Primjetimo, $N_p(l) = 4 \cdot 3^{l-2} = 3 \cdot 4 \cdot 3^{l-3} = 3 \cdot N_p(l-1)$.
Dokaz matematičkom indukcijom
1. korak: provjeravamo dali je tvrdnja točna za l=2.

$$N_p(2) = 4 \cdot 3^{2-2} = 4 \cdot 3^0 = 4$$

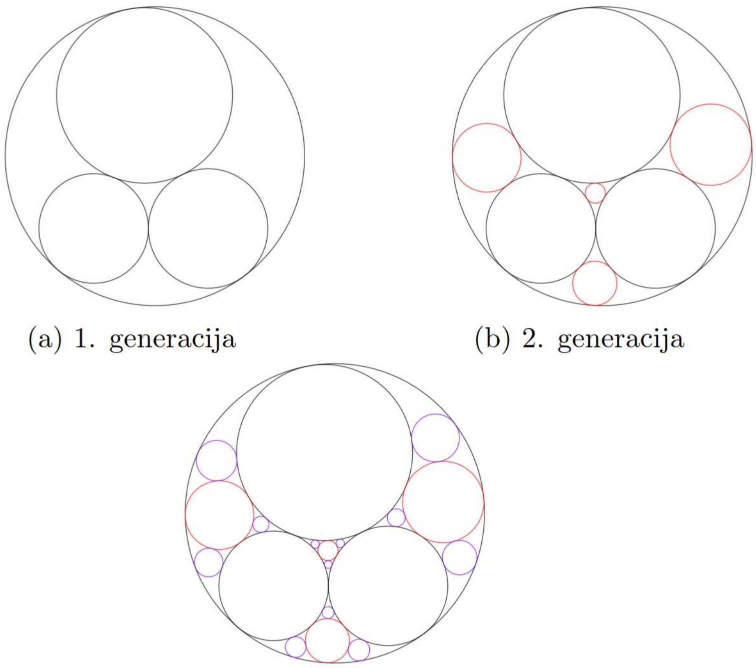
2. korak: pretpostavimo da za $l = k$ tvrdnja vrijedi.

$$N_p(k) = 4 \cdot 3^{k-2}$$

3. korak: dokazujemo da za $l = k + 1$ vrijedi tvrdnja, tj. $N_p(k+1) = 4 \cdot 3^{k-1}$.

$$N_p(k+1) = 3 \cdot N_p(k) = 3 \cdot 4 \cdot 3^{k-2} = 4 \cdot 3^{k-1}.$$

Kružnice koje se prvi puta pojavljuju u 2. generaciji označene su crvenom bojom na Slici 30b, a kružnice koje se prvi puta pojavljuju u 3. generaciji označene su ljubičastom bojom na Slici 30c.



(a) 1. generacija

(b) 2. generacija

(c) 3. generacija

Slika 30: Generacije kružnica u skupu P.

Drugi način za određivanje broja kružnica u Apolonijevom skupu je pomoću veličine zakrivljenosti kružnica koje pripadaju cjelobrojnom Apolonijevom skupu P. Neka je

$$N(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x\}|,$$

te $\delta(P)$ konstanta, $1 \leq \delta(P) \leq 2$.

Teorem 4.5. *Neka je* $N(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x\}|$. *Tada je*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log N(x)}{\log x} = \delta(P).$$

Dokaz teorema možemo vidjeti u [1]. Numerički rezultati sugeriraju da je $\delta = 1.30568$. Neka su R četvorke $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ Descartesove četvorke najmanjih zakrivljenosti u Apolonijevom skupu P, te $V(\kappa) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$.

Definicija 4.1. *Četvorka zakrivljenost* $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ *s* $V(\kappa) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 > 0$ *je R četvorka ako vrijedi da je* $\kappa_1 \leq 0 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \kappa_4$ *i* $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \geq \kappa_4$.

Prim R četvorke su R četvorke kojima je najveći zajednički djelitelj broj 1.

Teorem 4.6. *Za* $n > 1$ *broj* $N_R(-n)$ *prim cjelobrojnih R četvorki je*

$$N_R(-n) = \frac{n}{4}\prod_{p|n}(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}) + 2^{\omega(n)-\delta_n-1},$$

gdje je $\chi_4(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ *za neparne* n *te 0 inače,* $\omega(n)$ *broj različitih prim brojeva koji dijele* n, δ_n *je 1 za* $n \equiv 2(mod4)$ *te 0 za* $n \not\equiv 2(mod4)$.

Dokaz teorema možemo vidjeti u [9, str. 25].
Neka je $n = p$, pri čemu je p prim broj. Pošto je p prost broj i $n > 1$ te je stoga i $p > 1$ i $\omega(n) = 1$. Tada je $p \equiv 1(mod4)$ ili $p \equiv 3(mod4)$. Za $p \equiv 1(mod4)$ vrijedi da $4|(p-1)$, te postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $p - 1 = 4 \cdot k$ te je $p = 4 \cdot k + 1$. Tada je $\chi_4(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4\cdot k}{2}} = (-1)^{2k} = 1$, $\omega(n) = 1$, $\delta_n = 0$. Tada je

$$N_R(-p) = \frac{p}{4}(1 - \frac{1}{p}) + 2^{1-0-1} = \frac{p}{4}(\frac{p-1}{p}) + 1 = \frac{1}{4} \cdot (p-1) + 1 = \frac{p-1+4}{4} = \frac{p+3}{4}.$$

Za $p \equiv 3(mod4)$ vrijedi da $4|(p-3)$, te postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $p - 3 = 4 \cdot k$ te je $p = 4 \cdot k + 3$. Tada je $\chi_4(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4\cdot k+3-1}{2}} = (-1)^{\frac{4\cdot k+2}{2}} = (-1)^{2\cdot k+1} = -1$, $\omega(n) = 1$, $\delta_n = 0$. Tada je

$$N_R(-p) = \frac{p}{4}(1 + \frac{1}{p}) + 2^{1-0-1} = \frac{p}{4}(\frac{p+1}{p}) + 1 = \frac{1}{4} \cdot (p+1) + 1 = \frac{p+1+4}{4} = \frac{p+5}{4}.$$

$$\mathbf{N_R(-p)} = \begin{cases} \frac{p+3}{4} & \text{, ako je } p \equiv 1(mod4) \\ \frac{p+5}{4} & \text{, ako je } p \equiv 3(mod4) \end{cases}$$

4.3. Apolonijeva grupa

Neka su k_1, k_2, k_3 i k_4 četiri kružnice koje se međusobno diraju, pri čemu kružnica k_4 dira kružnice k_1, k_2 i k_3 iznutra. Kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 su početne kružnice u Apolonijevm skupu. Ako pogledamo kružnice k_1, k_2 i k_3 koje se međusobno diraju, prema Teoremu 4.3 postoje jos dvije kružnice k_4 i k_4' koje diraju kružnice k_1, k_2 i k_3. Tada imamo novu konfiguraciju od četiri kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4' koje se međusobno diraju. Prema (7) slijedi da je $\kappa_4' = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4$, što možemo zapisati u matričnom zapisu kao $A = B \cdot S_4$ pri čemu je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4' \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ i

$$\mathbf{S_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako pogledamo kružnice k_2, k_3 i k_4, tada postoje dvije kružnice k_1 i k_1' koje ih diraju. Tada je $C = B \cdot S_1$, pri čemu je $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \kappa_1' & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ i

$$\mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako pogledamo kružnice k_1, k_3 i k_4, tada postoje dvije kružnice k_2 i k_2' koje ih diraju. Tada je $D = B \cdot S_2$, pri čemu je $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2' & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ i

$$\mathbf{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako pogledamo kružnice k_1, k_2 i k_4, tada postoje dvije kružnice k_3 i k_3' koje ih diraju. Tada je $E = B \cdot S_3$, pri čemu je $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3' & \kappa_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ i

$$\mathbf{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice $S_i, i = 1, 2, 3, 4$ su kvadratne matrice. Determinanta matrica $S_i, i = 1, 2, 3, 4$ je -1, te su matrice $S_i, i = 1, 2, 3, 4$ regularne matrice ranga 4.

$$\mathbf{det(S_1)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{det(S_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbf{det(S_3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{det(S_4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Pošto su matrice $S_i, i = 1, 2, 3, 4$ regularne, tada postoje inverzi matrica $S_i, i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I$$

$S_i^2 = I, i = 1,2,3,4,$ tj. matrice S_i su same sebi inverzne.

Definicija 4.2. *Apolonijeva grupa A je podgrupa 4x4 cjelobrojnih matrica determinante ±1 $(GL_4(\mathbb{Z}))$ generirana s S_1, S_2, S_3 i S_4.*

Primjer 4.2. *Neka je G grupa,*

$$G = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_1S_2, S_1S_3, S_1S_4, S_2S_3, S_2S_4, S_3S_4, S_4S_3, S_3S_2, S_4S_2\}.$$

Neka je P_3 Apolonijev skup u kojemu imamo 3.generacije kružnica koje se diraju, pri čemu je R četvorka (-11,21,24,28). Pomnožimo li R četvorku s elementima skupa G dobit ćemo sve Descartesove četvorke zakrivljenosti kružnica koje se diraju u skupu P_3.

$$\mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 157 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -11 & 61 & 24 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_3 = \begin{pmatrix} -11 & 21 & 52 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_4 = \begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 40 \end{pmatrix}$$

Sada smo dobili nove četvorke zakrivljenosti kružnica koje se diraju u 2. generaciji.

$$\mathbf{S_1S_2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_1S_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_1S_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S_2S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_2S_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{S_3S_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S_4S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_3S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_4S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S_4S_1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_3S_1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S_2S_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_1S_2 = \begin{pmatrix} 157 & 397 & 24 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_1S_3 = \begin{pmatrix} 157 & 21 & 388 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_1S_4 = \begin{pmatrix} 157 & 21 & 24 & 376 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_2S_3 = \begin{pmatrix} -11 & 61 & 132 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_2S_4 = \begin{pmatrix} -11 & 61 & 24 & 120 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_3S_4 = \begin{pmatrix} -11 & 21 & 52 & 96 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_4S_3 = \begin{pmatrix} -11 & 21 & 76 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_3S_2 = \begin{pmatrix} -11 & 117 & 52 & 28 \end{pmatrix}$$

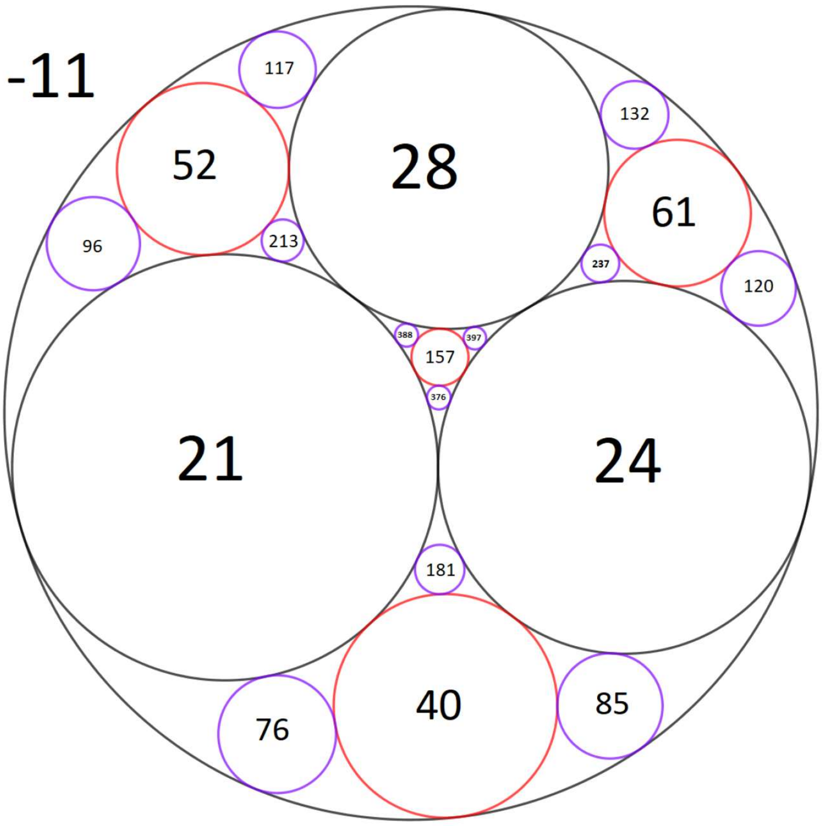
$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_4S_2 = \begin{pmatrix} -11 & 85 & 24 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_4S_1 = \begin{pmatrix} 181 & 21 & 24 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_3S_1 = \begin{pmatrix} 213 & 21 & 52 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 21 & 24 & 28 \end{pmatrix} \cdot S_2S_1 = \begin{pmatrix} 237 & 61 & 24 & 28 \end{pmatrix}$$

Sada smo dobili nove četvorke zakrivljenosti kružnica koje se diraju u 3. generaciji. Na Slici 31 prikazane su kružnice i njihove zakrivljenosti. Možemo vidjeti da su elementi grupe G 4x4 matrice determinanti 1*, te da su* S_1, S_2, S_3 *i* S_4 *generatori grupe* G*. Dakle,* G *je Apolonijeva grupa.*



Slika 31: Apolonijev skup P_3.

4.4. Analogon hipoteze o blizancima

Neka je p prim broj, $x \in [2, \infty >$, $\pi(x) : [2, \infty > \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\pi(x) = card\{p \in P : p \leq x\}.$$

Dakle, funkcija $\pi(x)$ broji koliko ima prim brojeva p koji su manji ili jednaki od broja x.

Teorem 4.7. *(Teorem o prim brojevima)*
Za funkciju π imamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} = 1;$$

tj. za "velike" x imamo asiptotsko ponašanje $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$.

Jedan od zanimljivih problema u brojanju kružnica u cjelobrojnom Apolonijevom skupu je brojanje kružnica kojima je zakrivljenost prim broj te brojanje prim blizanaca u Apolonijevom skupu. Prim blizanci su dvije kružnice u Apolonijevom skupu koje se diraju i imaju zakrivljenosti koje pripadaju skupu prim brojeva.

Teorem 4.8. *U svakom cjelobrojnom Apolonijevom skupu ima beskonačno mnogo Prim blizanaca i beskonačno mnogo kružnica čije su zakrivljenosti prim brojevi.*

Neka je P cjelobrojni Apolonijev skup, k kružnica koje pripadaju skupu P, te $r(k)$ radijus i $\kappa(k)$ zakrivljenost kružnice k. Neka je

$$\Pi_P(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x, \kappa(k) \text{ je prim broj}\}|.$$

Funkcija $\Pi_P(x)$ broji koliko ima kružnica k čije su zakrivljenosti $\kappa(k)$ prim brojevi i manje ili jednake broju x. Defininiramo

$$\psi_P(x) = \sum_{k \in P} \log \kappa(k).$$

Kada $x \to \infty$ tada je $\Pi_P(x) \sim \frac{\psi_P(x)}{\log(x)}$.
Prisjetimo se, $N_P(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x\}|$.
Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se diraju i zakrivljenosti $\kappa(k_1)$ i $\kappa(k_2)$ su im prim brojevi i $\kappa(k_1)$,$\kappa(k_2) \leq x$, tj. kružnice k_1 i k_2 su prim blizanci čije su zakrivljenosti manje ili jednake broju x. Tada je

$$\Pi_P^{(2)}(x) = |\{k_1, k_2 \in P | \kappa(k_1), \kappa(k_2) \leq x, \kappa(k_1), \kappa(k_2) \text{ je prim broj}\}|.$$

Funkcija $\Pi_P^{(2)}(x)$ broji koliko ima Prim blizanaca čije su zakrivljenosti $\kappa(k_1)$ i $\kappa(k_2)$ prim brojevi i manje ili jednake broju x. Definiramo

$$\psi_P^{(2)}(x) = \sum_{k_1, k_2 \in P} \log \kappa(k_1) \log \kappa(k_2).$$

Neka je $N_P^{(2)}(x) = |\{k_1, k_2 \in P | \kappa(k_1), \kappa(k_2) \leq x \text{ i } k_1, k_2 \text{ se diraju}\}|$.

Hipoteza 4.1. *Za bilo koji prim cjelobrojni Apolonijev skup P vrijedi da*

$$\frac{\psi_P(x)}{N_p(x)} \to L(2, \chi_4)$$

i

$$\frac{\psi_P^{(2)}(x)}{N_p^{(2)}(x)} \to \alpha,$$

gdje je

$$L(2, \chi_4) = \prod_{p \equiv 1 mod(4)} (1 - p^{-2})^{-1} \cdot \prod_{p \equiv 3 mod(4)} (1 + p^{-2})^{-1} = 0.9159...,$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \cdot \prod_{p \equiv 1 mod(4)} (1 - p^{-2})^{-2} \cdot \prod_{p \equiv 3 mod(4)} (1 + p^{-2})^{-2} \cdot (1 - 2p(p-1)^{-2}) = 0.460...$$

Kao što možemo primjetiti, konstante $L(2, \phi_4)$ i α ne ovise o skupu P. Više o prethodnoj hipotezi možemo vidjeti u [8].

5. Daljnje implikacije Apolonijevog problema

Iako se na prvi pogled možda tako ne čini, Apolonijev problem je iznimno važan. Osim što je bitan u geometriji, povezan je i sa drugim problemima u matematici te čak ima primjenu u sadašnjem svijetu.
Najpoznatija primjena Apolonijevog problema je u hiperboličkoj trilateraciji. Hiperbolička trilateracija je postupak kojega primjenjujemo da bi odredili položaj uz poznate razlike u udaljenostima između barem tri točke i našeg položaja. Hiperboličkom trilateracijom se koriste Decca Navigator System i LORAN. Decca Navigator System je hiperbolički radio navigacijski sustav, niskofrekventan i dugog dometa, pomoću kojega su brodovi i avioni mogli odrediti svoj položaj primajući radio signal s odašiljačke stanice. Brod bi primio signal s barem tri odašiljačke stanice, te bi imali hiperbole[6] čiji fokusi predstavljaju odašiljačke stanice. Presjekom tri hiperbole bi dobili točan položaj koji tražimo. LORAN je hiperboliči radio navigacijski sustav dugog dometa koji je pomoću signala s barem tri navigacijske postaje određivao položaj broda ili aviona. Ako bi htjeli odredi položaj aviona, mogli bi ga odrediti uspoređujući razlike u vremenu dolasku signala aviona do četiri različitih postaja. Na sličan način, trodimenzionalni generalizirani Apolonijev problem [7] ima primjenu i u funkcioniranju GPS, koja je opisana u [13]. Globalni pozicijski sustav funkcionira tako da satelit mjeri udaljenost od našega položaja. Kako ta informacija putuje do nas, naš položaj se u međuvremenu mijenja te zbog te vremenske razlike dobijemo udaljenost koja je malo dulja ili kraća od stvarne udaljenosti. Zato se gleda udaljenost od jos barem tri satelita. Presjekom sfera čije je središte satelit a radijus udaljenost satelita od prijemnika na traženoj lokaciji dobit ćemo traženu lokaciju. Više o navigacijskim sustavima možemo vidjeti u [11].

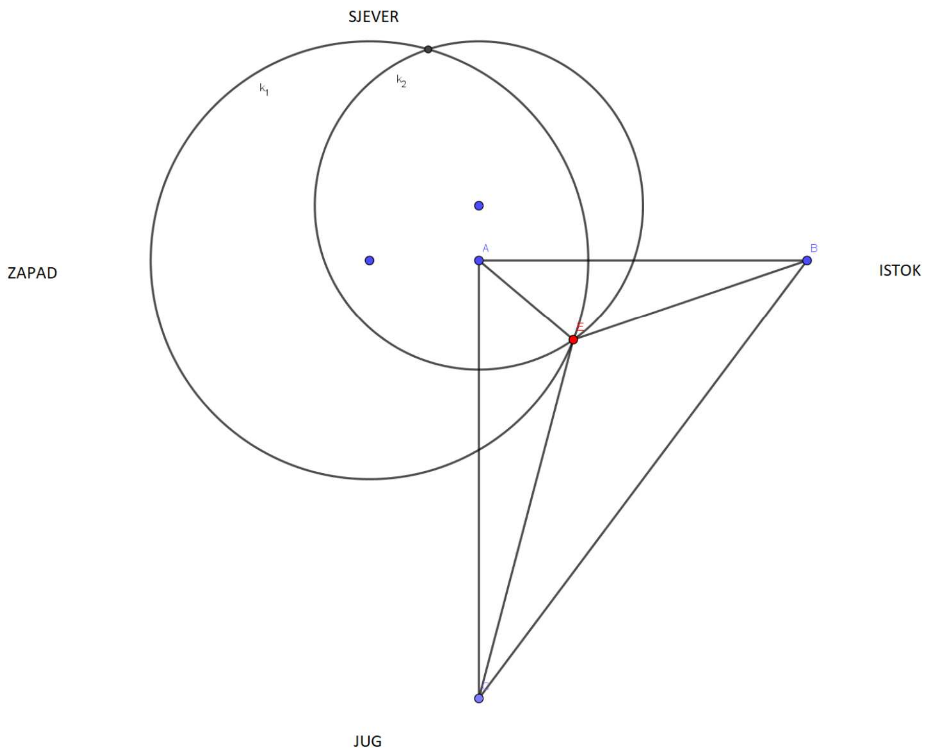
Primjer 5.1. *Neka su dana tri svjetionika A,B i C takvi da je $|AB| = 1.5, |AC| = 2$. Brod se nalazi unutar trokuta ΔABC, pri čemu je ΔABC pravokutan. Poznato je da se intenziteti svjetlosti svjetionika odnose u omjerima 36:9:4 s pozicije broda, te da svjetionici imaju ista svjetla. Sada ćemo pomoću Apolonijevih kružnica odrediti položaj broda.*
Zbog zakona inverznih kvadrata vrijedi: intenzitet $= \frac{G}{r^2}$, pri čemu je G jačina svjetlosti a r udaljenost našega broda od izvora svjetlosti. Kako je jačina svjetlosti jednaka za sve svjetionike imamo: $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{intenzitet_2}{intenzitet_1} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow |AS| : |BS| = 1 : 2$ i $\frac{r_1^2}{r_3^2} = \frac{intenzitet_3}{intenzitet_1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \rightarrow |AS| : |CS| = 1 : 3$ te se udaljenosti naših svjetionika od broda odnose kao $|AS| : |BS| : |CS| = 1 : 2 : 3$ pri čemu točka S označava položaj broda.
Znamo da za Apolonijevu kružnicu vrijedi da je omjer udaljenosti od dvije zadane točke $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ i točaka koje pripadaju kružnici konstantan. Radijus Apolonijeve kružnice je $r_1 = \frac{p \cdot q \cdot |PQ|}{|p^2 - q^2|}$ pri čemu je $\frac{p}{q}$ omjer udaljenosti od dvije zadane točke $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ i točaka koje pripadaju kružnici a x koordinata središta kružnice $x = \frac{(\frac{p}{q})^2 \cdot x_Q - x_P}{(\frac{p}{q})^2 - 1}$. Tražimo Apolonijevu kružnicu k_1 za koju je omjer udaljenosti od točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ i točaka koje pripadaju kružnici 1 : 2. Radijus te kružnice je $r_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1.5}{|1^2 - 2^2|} = \frac{3}{3} = 1$ a x koordinata

[6]Neka su dane točke F_1 i F_2. Hiperbola je skup točaka u ravnini za koje vrijedi $d(F_1, F_2) = 2a = const.$ Tjemena hiperbole su točke $T_1(a, 0)$ i $T_2(-a, 0)$.
[7]problem pronalaska sfere koja dira tri dane sfere

središta kružnice je $x_1 = \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot x_B - x_A}{(\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(x_B - x_A) - \frac{3}{4}\cdot x_A}{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} + x_A$*, te je* $x_1 - x_A = -\frac{1}{2}$*. Središte kružnice* k_1 *nalazi se za 0.5 zapadno od svjetionika* A*.*

Ponovimo isti postupak za točke A *i* C*. Tražimo Apolonijevu kružnicu* k_2 *za koju je omjer udaljenosti od točaka* $A(x_A, y_A)$ *i* $C(x_C, y_C)$ *i točaka koje pripadaju kružnici* $1 : 3$*. Radijus te kružnice je* $r_2 = \frac{1\cdot 3\cdot 2}{|1^2 - 3^2|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ *a x koordinata središta kružnice* $x_2 = \frac{(\frac{1}{3})^2 \cdot x_C - x_A}{(\frac{1}{3})^2 - 1} = \frac{\frac{1}{9}\cdot(x_C - x_A) - \frac{8}{9}\cdot x_A}{-\frac{8}{9}} = -\frac{1}{4} + x_A$*, te je* $x_2 - x_A = -\frac{1}{4}$*. Središte kružnice* k_2 *nalazi se za 0.25 sjeverno od svjetionika* A*.*

Presjekom kružnice k_1 *i* k_2 *se sijeku u dvije točke, te se naš brod nalazi u jednoj od njih. Pošto znamo da je brod unutar trokuta* ΔABC*, uzimamo sjecište koje se nalazi unutar trokuta* ΔABC*. Više o ovom primjeru možemo vidjeti u [4].*



Slika 32: Svjetionici i brod.

Literatura

[1] D. W. Boyd, *The Sequence of Radii of the Apollonian Packing*, Mathematics of Computation, 39(1982), 249-254

[2] C. H. Chepmell, G. I. Hopkins, *Problem 2745*, The American Mathematical Monthly, 27(1920), 331-332

[3] R. Courant, H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1996

[4] J. Cox, M. B. Partensky, *Spatial Localization Problem and the Circle of Apollonius*, arXiv:physics/0701146, 2007.

[5] H. S. M. Coxeter, *The Problem of Apollonius*, The American Mathematical Monthly, 75(1967), 5-15

[6] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992

[7] M. Fraboni, T. Moller, *Fractals in the Classroom*, The Mathematics Teacher, 102(2008), 197-199

[8] E. Fuchs, K. Sanden, *Some experiments with integral apollonian circle packings*, Experimental Mathematics, 20(2011), 1-29

[9] R. L. Graham, J. C. Lagarias C. L. Mallows, A. R. Wilks, C. H. Yan, *Apollonian Circle Packings: Number Theory*, J. Number Theory, 100(2003), 1-45

[10] K. E. Hirst, *The kiss precise*, The Mathematical Gazette, 53(1969), 305-308

[11] B. Hofmann-Wellenhof, K. Legat, M. Wieser, *Navigation: Principles of Positioning and guidance*, Springer, 2003

[12] J. Hoshen, *On the Apollonius solutions to the GPS equations*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1(1999), 99-102

[13] J. Hoshen, *The GPS equations and the Problem of Apollonius*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems , 32(1996), 1116 - 1124

[14] N. Koceić Bilan, N. Smajić, L. Trombetta Burić, *Konstruktivna geometrija u nastavi matematike*, Osječko matematički list, 83(2013), 73-83

[15] J. C. Lagarias, C. L. Mallows, A. R. Wilks, *Beyond the Descartes Circle Theorem*, The American Mathematical Monthly, 109(2002), 338-361

[16] D. Mackenzie, *A Tisket, a tasket, an Apollonian Gasket*, American Scientist, 98(2010), 10-14

[17] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996

[18] B. Pavković, D. Veljan, *Elemenatna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 2004

[19] D. Pedoe, *On a theorem in Geometry*, The American Mathematical Monthly, 74(1967), 627-640

[20] P. Sarnak, *Integral Apollonian Packings*, The American Mathematical Monthly, 118(2011), 291-306

[21] B. Širola, *Distribucija prim brojeva i Reimannova zeta-funkcija; 1. dio* , Math. e, 13(2008)

Sažetak

U ovome radu proučavati ćemo Apolonijeve kružnice. Na početku ćemo proći kroz osnove konstruktivne geometrije i metodu inverzije kako bi mogli konstruirati neke od slučajeva Apolonijevog problema. Zatim ćemo se upoznati s Apolonijevim skupom. Proći ćemo kroz neka svojstva koja vrijede za četiri kružnice koje se diraju te vidjeti kako saznati broj kružnica u Apolonijevom skupu. Zatim ćemo se upoznati s Apolonijevom grupom i vidjeti analogon hipoteze o blizancima za Apolonijev skup. Na kraju ćemo navesti neke primjene Apolonijevog problema u drugim područjima.

ključne riječi:
geometrijske konstrukcije,kružnice, Apolonijev problem, Apolonijev skup, Apolonijeva grupa, metoda inverzije

Abstract

In this paper we study Apollonian circles. At the beginnig, we touched the basics of constructions in geometry and inversion method so that we could construct some cases of the Apollonian problem. Then, we meet the Apollonian packing. We go through some characteristics that are valid for four circles that are touching each other and see how to find out the number of circles in an Apollonian packing. Then we meet then the Apollonian group and see the analog of the hypothesis about twins for the Apollonian packing. Finally, we adduce some applications of the Apollonian problem in other areas.

Key words:
geometric constructions, circles, Apollonian problem, Apollonian packing, Apollonian group, inversion method

Životopis

Rođena sam 20. siječnja 1992. godine u Slavonskom Brodu. Obrazovanje započinjem 1998. godine u Osnovno školi "Hugo Badalić" u Slavonskom Brodu. 2006. godine upisujem matematičku gimnaziju "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu te ju završavam 2010. godine. Tada upisujem Preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematčkom fakultetu u Zagrebu, koji završavam 2016. godine. Iste godine upisujem Diplomski studij matematike, smjer financijska matematika i statistika na Sveučilištu J.J. Strossmayera u Osijeku.