Model difuzije s primjerima

Ivanković, Marija Magdalena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Marija Magdalena Ivanković

Model difuzije s primjerima

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Marija Magdalena Ivanković

Model difuzije s primjerima

Diplomski rad

mentor: prof. dr. sc. Mirta Benšić
komentor: dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod

Tema diplomskog rada je model difuzije. Ugrubo rečeno, difuzija je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe. Početkom 20. stoljeća počeli su se raditi prvi modeli koji bi pratili promjenu cijena rizične financijske imovine na financijskom tržištu. To možemo smatrati početkom interesa za model difuzije. Promjena cijena rizične financijske imovine opisivala se slučajnim procesom $S = (S_t, t \geq 0)$ na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Slučajni proces je familija slučajnih varijabli definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru. Prvi takav model napravio je L. Bachelier 1900. godine koji je modelirao promjenu cijena dionica na burzi u Parizu. Neka je slučajnim procesom $(S_t, t \geq 0)$ modelirana cijena dionice. Tada je po Bachelieru

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t,$$

pri čemu je $B = (B_t, t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje, μ parametar pomaka, a σ volatilnost.

Definicija 1.1 Brownovo gibanje $(B_t, t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je slučajan proces u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja koji ima sljedeća svojstva:

1. $B_0 = 0$ gotovo sigurno
2. (**Nezavisnost prirasta**) Za proizvoljne $t_0, t_1, .., t_n \geq 0$ takve da je $t_0 < t_1 < ... < t_n$ slučajne varijable $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su nezavisne
3. (**Stacionarnost prirasta**) Za proizvoljne $s, t \geq 0$ takve da je $0 \leq s < t$ je $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Iako je to bio veliki napredak u svijetu financija, taj model imao je i brojne nedostatke. Jedan od nedostataka je taj što je slučajna varijabla S_t kojom modeliramo cijenu dionice mogla poprimati negativne vrijednosti što u praksi nije slučaj. Idući korak u nadogradnji modela napravio je P. Samuelson koji je predložio da se umjesto Brownovog gibanja uvede geometrijsko Brownovo gibanje.

Definicija 1.2 Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajan proces $(S_t, t \geq 0)$ definiran s $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + t(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})}$, pri čemu je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovno gibanje, a $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.

Nakon uvođenja geometrijskog Brownovog gibanja model je bio sljedećeg oblika:

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + t(\mu - \frac{\sigma^2}{2})}.$$

Logaritmiranjem prethodnog izraza dobije se sljedeće:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t.$$

Korištenjem Itôve formule dobijemo da je to ekvivalentno sljedećem:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t).$$

U konačnici, dijeljenjem sa S_t izraz možemo zapisati kao

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

te smo dobili standardni model difuzije na financijskom tržištu.

Upravo taj model koristili su Black, Sholes i Merton kada su se bavili cijenama opcija na financijskom tržištu. Kako je trgovanje financijskim instrumentima sve više raslo, raslo je i zanimanje za modelima koji bi što bolje mogli predvidjeti kretanje tržišta. Upravo tako je raslo i zanimanje za modelima difuzije koje ćemo detaljno obraditi u nastavku rada.

2 Stohastičke diferencijalne jednadžbe

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s konceptom stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. Najprije ćemo uvesti pojmove koji će nam biti potrebni za razumijevanje i definiranje stohastičkih diferencijalnih jednadžbi.

Neka je $[0, T]$ segment u $\mathbb{R}$ i neka je $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[0, T]$ te neka je $\rho = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ subdivizija segmenta $[0, T]$. Nadalje, definiramo međusubdiviziju $\Pi = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ segmenta $[0, T]$ s obzirom na ρ takvu da je $t_{i-1} \leq y_i < t_i$. Definiramo Riemannovu sumu $S_n(\rho, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(t_i - t_{i-1})$ koju možemo interpretirati kao aproksimaciju površine koju nad segmentom $[0, T]$ zatvara graf funkcije f.

Definicija 2.1 Ako limes $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ postoji i ne ovisi o izboru subdivizije ρ i međusubdivizije Π onda se S zove **Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$ i pišemo

$$S = \int_a^b f(t)dt.$$

Idući je korak definiranje Riemann-Stieltjesovog integrala. Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je F_X njezina funkcija distribucije. Očekivanje slučajne varijable X po definiciji možemo zapisati kao:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x).$$

Neka su $\rho = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ i $\Pi = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ redom subdivizija i međusubdivizija na skupu $\mathbb{R}$ takve da je $t_{i-1} \leq y_i < t_i$. Tada očekivanje od X možemo aproksimirati na sljedeći način:

$$E[X] \approx \sum_{i \in \mathbf{R}} y_i(F_X(t_i) - F_X(t_{i-1})).$$

Da bismo izračunali očekivanje, uočavamo da moramo integrirati u odnosu na funkciju F_X i upravo zbog toga nam je potrebno uvođenje Riemann-Stieltjesovog integrala.

Pretpostavimo da imamo realne funkcije f i G definirane na segmentu $[0, T]$ te neka su $\rho = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ i $\Pi = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ opet subdivizija i međusubdivizija segmenta $[0, T]$. Tada možemo definirati Riemann-Stieltjesovu sumu na sljedeći način:

$$S_n = S_n(\rho, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(G(t_i) - G(t_{i-1})).$$

Definicija 2.2 Ako limes $S = \lim_{n\to\infty} S_n(\rho, \Pi)$ postoji i ne ovisi o izboru subdivizije ρ i međusubdivizije Π, tada S zovemo **Riemann-Stieltjesov integral (RS integral)** funkcije f u odnosu na funkciju G na segmentu $[0, T]$ i pišemo

$$S = \int_0^T f(x)dG(x).$$

Navest ćemo još dovoljne uvjete za egzistenciju RS integrala. Dakle, RS integral postoji ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- Funkcije f i G nemaju prekide u istim točkama iz segmenta $[0, T]$;
- Funkcija f je ograničene p-varijacije, a funckija G je ograničene q-varijacije na $[0, T]$ za neke $p, q > 0$ takve da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

No, što se događa kada jedan od uvjeta nije zadovoljen. Promotrimo sljedeći primjer: neka je $f(t) = G(t) = B_t(\omega)$, za fiksni $\omega \in \Omega$. Želimo izračunati $\int_0^T B_t dB_t$. Ako krenemo provjeravati uvjete za egzistenciju RS integrala, vidimo da je prvi uvjet zadovoljen jer su obje funkcije f i G neprekidne gotovo sigurno.Također obje funkcije su ograničene 2-varijacije na segmentu $[0, T]$ pa je $p = q = 2$. Međutim $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \not> 1$. Dakle, nisu ispunjeni dovoljni uvjeti da bi ovaj integral postojao u RS smislu. Štoviše, može se pokazati da ovaj integral ne postoji u RS smislu. Naime, ako RS integral postoji za sve neprekidne funkcije $f(x)$ na $[0, T]$, tada je $G(x)$ nužno ogranične varijacije. Budući da trajektorije Brownovog gibanja nemaju ograničene varijacije ovaj integral ne postoji u RS smislu. Stoga uvodimo Itôv stohastički integral.
Najprije definirajmo jednostavne slučajne procese.

Definicija 2.3 Slučajni proces $C = (C_t, t \in [0, T])$ je **jednostavan** ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:

1. Postoji subdivizija $\pi_t = \{t_0, t_1, ..., t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ segmenta $[0, T]$ i niz slučajnih varijabli $(Z_i, i = 1, ..., n)$ takvih da je $E[Z_i^2] < \infty$ za svaki i za koji je
$$C_i = \begin{cases} Z_i, & t \in [t_{i-1}, t_i\rangle \\ Z_n, & t = T \end{cases} .$$
2. Niz $(Z_i, i = 1, ..., n)$ adaptiran je na filtraciju $\{\mathcal{F}_{t_{i-1}}, i = 1, ..., n\}, \mathcal{F}_{t_{i-1}} = \sigma(\{B_s : s \in [0, t_{i-1}]\})$, gdje je $(B_t, t \in [0, T])$ standardno Brownovo gibanje na $[0, T]$.

Sada možemo definirati Itôv stohastički integral jednostavnog procesa.

Definicija 2.4 Za $(C_t, t \in [0, T])$ jednostavan slučajan proces, **Itôv integral** definiran je na sljedeći način:

1. $\int_0^T C_s dB_s = \sum_{i=1}^k Z_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$
2. $\int_0^t C_s dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i(B_{t_i} - B_{t_{1i-1}}) + Z_k(B_t - B_{t_{k-1}}) = I_t$, uz dogovor da je $\sum_{i=1}^0(\cdot) = 0$, za $t \in [t_{k-1}, t_k\rangle$.

Uočimo i da vrijede sljedeća svojstva:

1. $\int_0^{t_k} C_s dB_s = \sum_{i=1}^k Z_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = I_{t_k}$
2. $\int_0^0 C_s dB_s = 0$
3. $(I_t, t \in [0, T])$ je slučajan proces.

Navest ćemo još nekoliko bitnih teorema kojima su iskazana svojstva Itôvog integrala.

Teorem 2.1 Slučajan proces $(I_t, t \in [0,T])$ je martingal u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$.

Teorem 2.2 (Itôva izometrija)

$$E\Big[\Big(\int_0^t C_s dB_s\Big)^2\Big] = \int_0^t E\big[C_s^2\big]ds, \quad t \in [0,T].$$

Teorem 2.3 (Linearnost Itôvog integrala) Za konstante c_1 i c_2 te jednostavne slučajne procese $C^{(1)}$ i $C^{(2)}$ na $[0,T]$ vrijedi:

$$\int_0^t \Big(c_1 C^{(1)} + c_2 C^{(2)}\Big) dB_s = c_1 \int_0^t C^{(1)} dB_s + c_2 \int_0^t C^{(2)} dB_s.$$

Teorem 2.4 $E[I_t] = 0, \quad \forall i \in [0,T]$.

Spomenut ćemo i kako se računa Itôv integral kada je riječ o procesima koji nisu jednostavni slučajni procesi.
Neka je $(C_t, t \in [0,T])$ slučajan proces koji zadovoljava sljedeće pretpostavke:

- C_t je izmjeriva u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s, s \in [0,t]\})$
- $\int_0^T E[C_s^2]ds < \infty$.

Sada možemo iskazati lemu koja nam daje važan rezultat u računanju općeg Itôvog integrala.

Lema 2.5 Ako slučajan proces $C = (C_t, t \in [0,T])$ zadovoljava gore navedene pretpostavke, tada postoji niz jednostavnih slučajnih procesa $(C_t^{(n)}, t \in [0,T], n \in \mathbb{N})$ takvih da je:

$$\int_0^T E\Big[\big(C_s - C_s^{(n)}\big)^2\Big] ds \to 0, \quad n \to \infty.$$

Drugim riječima, proces C možemo dobro aproksimirati jednostavnim slučajnim procesom $(C_t^{(n)}, t \in [0,T], n \in \mathbb{N})$ za dovoljno veliki n.

Konačno, možemo definirati Itôv stohastički integral procesa C

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dB_s = \lim_{n \to \infty} \int_0^t C_s^{(n)} dB_s.$$

Možemo reći da je Itôv integral općeg procesa $(C_t, t \in [0,T])$ limes u srednje kvadratnom smislu niza Itôvih integrala jednostavnih slučajnih procesa koji ga aproksimiraju u smislu gore iskazane leme. Svojstva se nasljeđuju od Itôvog integrala jednostavnih slučajnih procesa. Sada kada smo definirali Itôv integral, preostaje nam još doći do Itôve formule.

U klasičnom diferencijalnom računu znamo da je $df(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$. Nama treba pravilo za kompoziciju funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i trajektorije Brownovog gibanja $t \to B_t(\omega)$, za fiksni $\omega \in \Omega$. No zbog nenul kvadratne varijacije Brownovog gibanja neće vrijediti $df(B_t) = f'(B_t)dB_t$. Za točnu formulu moramo pretpostaviti da $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima drugu derivaciju i tada vrijedi $df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt$. To je jednostavna Itôva formula u diferencijalnom obliku. Ako želimo generalizirati Itôvu formulu, definirat ćemo najprije Itôv proces.

Definicija 2.5 Neka je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ njegova prirodna filtracija. **Itôv proces** je slučajni proces $(X_t, t \geq 0)$ oblika $X_t = X_0 + \int_0^t \Delta(s) dB_s + \int_0^t \theta(s) dB_s$, pri čemu je X_0 $\mathcal{F}_0$-adaptirana slučajna varijabla, a $(\Delta(t), t \geq 0)$ i $(\theta(t), t \geq 0)$ su $\mathcal{F}$-adaptirani slučajni procesi koji zadovoljavaju sljedeće:

$$E\left[\int_0^t \Delta^2(s) ds\right] < \infty, \quad \int_0^t |\theta(s)| ds < \infty.$$

Sljedeći teorem govori o Itôvoj formuli za Itôv proces.

Teorem 2.6 Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Itôv proces i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x), f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada $\forall T > 0$ vrijedi $f(T, X_T) - f(0, X_0) = \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) \Delta(t) dB_t + \int_0^T f_x(t, X_t) \theta(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) \Delta^2(t) dt$.

Sada kada smo uveli bitne pojmove za razumijevanje stohastičkih diferencijalnih jednadžbi, možemo ih definirati.
Počet ćemo od determinističke diferencijalne jednadžbe oblika $dx(t) = a(t, x(t))dt$, uz početni uvjet $x(0) = x_0$. Kako želimo uvesti slučajnost u tu jednadžbu, rješenje $x(t)$ zamijenimo slučajnim procesom $(X_t, t \in [0, T])$. Tada dobijemo $dX_t = a(t, X_t)dt$, $X_0(\omega) = Y(\omega)$. Rješenje ove jednadžbe ne zahtijeva stohastički račun, već ga možemo dobiti i primjenom neke od klasičnih metoda. Da bismo došli do stohastičke diferencijalne jednadžbe, uvodimo još jedan slučajni proces. Stohastička diferencijalna jednadžba je jednadžba sljedećeg oblika:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \quad X_0(\omega) = Y(\omega), \tag{1}$$

pri čemu je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje, $a(t, x)$ i $b(t, x)$ determinističke funkcije. Jednadžbu možemo zapisati i u integralnom obliku

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dB_s$$

te ju nazivamo Itôva stohastička integralna jednadžba. Prvi integral u jednadžbi je Riemannov integral, dok je drugi Itôv stohastički integral. Interpretacija jednadžbe nam kaže da je prirast $dtX_t = X_{t+dt} - X_t$ procesa $(X_t, t \in [0, T])$ na $[t, t + dt]$ uzrokovan promjenom vremena dt s faktorom $a(t, X_t)$ i promjenom Brownovog gibanja $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ s faktorom $b(s, X_s)$. Brownovo gibanje nazivamo i pogonski proces stohastičke diferencijalne jednadžbe. Ako u jednadžbi stavimo da je $a(t, x) = 0$ i $b(t, x) = 1$ vidimo da je Brownovo gibanje primjer difuzije.

Sljedeći teorem daje rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Teorem 2.7 Neka je $E\left[X_0^2\right] < \infty$ i neka je X_0 slučajna varijabla nezavisna od Brownovog gibanja $(B_t, t \in [0, T])$ te neka $\forall t \in [0, T]$ i $x, y \in \mathbb{R}$ funkcije $a(t, x)$ i $b(t, x)$ zadovoljavaju sljedeće:

1. $a(x)$ i $b(x)$ su neprekidne

2. Zadovoljavaju Lipschitzov uvjet: $|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|, L > 0.$

Tada stohastička diferencijalna jednadžba (1) ima jedinstveno rješenje na $[0, T]$.

Za dokaz vidi [13].

Za kraj ćemo navesti primjer optimalne podjele u kojem se koriste stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Primjer 2.1 Imovinu u trenutku t modelirat ćemo slučajnom varijablom A_t i neka se ona sastoji od nerizične financijske imovine koju ćemo modelirati slučajnom varijablom B_t i rizične financijske imovine K_t. Tada je $A_t = B_t p_t + K_t q_t$, pri čemu je p_t cijena nerizične, a q_t cijena rizične financijske imovine po jedinici. Pretpostavimo da će se cijena q_t mijenjati sukladno stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi:

$$\frac{dq_t}{q_t} = \pi dt + \sigma dB, \tag{2}$$

koja sadrži element slučajnosti, dok će se p_t mijenjati sukladno običnoj diferencijalnoj jednadžbi

$$\frac{dp_t}{t} = rdt \tag{3}$$

koja ne sadrži element slučajnosti. Problem nam je odabrati odgovarajuće B_t, K_t i C_t da bismo optimizirali korisnost, pri čemu s C_t modeliramo dio financijske imovine stavljene u funkciju. Korisnost ćemo u ovom slučaju shvatiti kao mjeru koja nam govori koliko je dobara ulagač ostvario nakon kreiranja nekog portfelja. Dobivamo stohastičku diferencijalnu jednadžbu sljedećeg oblika:

$$dA_t = B_t dp_t + K_t dq_t - C_t dt. \tag{4}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (2) i (3) u jednadžbu (4) dobijemo sljedeće:

$$dA_t = B_t r dt + K_t q_t(\pi dt + \sigma dB) - C_t dt.$$

Sređivanjem gornjeg izraza u konačnici dobijemo da je:

$$dA_t = A_t \alpha r + A_t(1-\alpha)\pi + A_t(1-\alpha)\sigma B_t - C_t dt,$$

gdje je $\alpha = \frac{B_t p_t}{A_t}$. U ovom je primjeru vrijednost imovine A_t dobro modelirana, ali je problem pronaći α i C_t tako da povećamo očekivanje korisnosti U:

$$E\left[\int_0^\infty U(C_t)e^{-pt}dt\right].$$

Primjer preuzet iz Karlin & Taylor ([9], str. 367).

3 Model difuzije

Došli smo do glavnog dijela rada u kojem ćemo definirati difuzije te navesti neka osnovna svojstva i karakterizacije.
Već smo spomenuli kako difuzije možemo definirati kao rješenja stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. Formalizirajmo tu definiciju.

Definicija 3.1 **Difuzija** $(X_t, t \geq 0)$ je slučajni proces koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu sljedećeg oblika

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

pri čemu je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje, a μ i σ funkcije koje zadovoljavaju uvjete Teorema 2.7.

Neka je $(X_t, t \geq 0)$ difuzija sa skupom stanja I čije su krajnje točke a i b tako da je I jednog od sljedećih oblika: $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ ili $[a, b]$. Također postoji mogućnost da je $a = -\infty$ i/ili $b = \infty$.

Definicija 3.2 Za proces kažemo da je **regularan** ako krenuvši iz bilo koje točke iz unutrašnjosti intervala I s pozitivnom vjerojatnošću možemo doći do bilo koje druge točke, također iz unutrašnjosti intervala I.

Regularne procese možemo preciznije objasniti i na sljedeći način. Neka je T_z slučajna varijabla kojom modeliramo vrijeme prvog dolaska u stanje $z \in I$. U slučaju da proces nikada nije došao do stanja z stavljamo da je $T_z = \infty$. Kažemo da je proces **regularan** ako je

$$P(T_z < \infty \mid X(0) = x) > 0,$$

gdje je $a < x, z < b$.

U nastavku rada, ako se ne kaže drugačije, promatrat će se samo regularni procesi.

Većina Markovljevih procesa, kao i npr. Poissonov proces, zadovoljavaju sljedeće svojstvo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(|X(h) - x| > \epsilon \mid X(0) = x) = \lambda(x, \epsilon),$$

gdje je $\lambda(x, \epsilon)$ nenegativna za mali ϵ. No, svaki proces difuzije zadovoljava sljedeće:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(|X(t+h) - x| > \epsilon \mid X(t) = x) = 0, \tag{5}$$

za svaki $x \in I$ i $\epsilon > 0$. Ova relacija govori da su veliki pomaci malo vjerojatni na malim vremenskim intervalima, za fiksan ϵ. Također, tvrdnja može predstavljati formalni zapis svojstva da su trajektorije procesa difuzije neprekidne g. s.

Difuzije su karakterizirane dvama osnovnim uvjetima koji daju veću vrijednost relaciji (5) i opisuju srednju vrijednost i varijancu infinitezimalnih pomaka. Definiramo ih na sljedeći način:

$$\lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} E[X(t) - X(s) \mid X(s) = y] = \mu(y, s) \tag{6}$$

i

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}E[(X(t)-X(s))^2 \mid X(s)=y]=\sigma^2(y,s). \tag{7}$$

Napomena: Pretpostavljamo da spomenuti momenti postoje, za $a < x < b$.
Funkciju $\mu(y,s)$ nazivamo **parametar pomaka ili infinitezimalno očekivanje**, a funkciju $\sigma^2(y,s)$ **parametar difuzije ili infinitezimalna varijanca**. Općenito su to neprekidne funkcije u varijablama y i s, dok je za regularne procese $\sigma^2(y,s)$ pozitivna $\forall y \in \langle a,b\rangle$ i $s > 0$.

Nadalje, definiramo prijelaznu funkciju gustoće $p(x,t;y,s)$ kao

$$p(x,t;y,s)=\frac{\partial}{\partial x}P(X(t)\leq x \mid X(s)=y),$$

gdje je $0 \leq s < t$. Sada relacije (6) i (7) možemo zapisati pomoću prijelazne funkcije gustoće

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|x-y|<\epsilon}(x-y)p(x,t;y,s)dx=\mu(y,s)$$

i

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|x-y|<\epsilon}(x-y)^2p(x,t;y,s)dx=\sigma^2(y,s),$$

pri čemu je $\epsilon > 0$, $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
Na taj način karakterizirali smo difuzije preko prijelazne funkcije gustoće.

Od sada smatramo da relacije (6) i (7) vrijede. Povrh toga, koncentrirat ćemo se samo na homogene slučajeve, tj. slučaje gdje $\mu(y,s) = \mu(y)$ i $\sigma(y,s) = \sigma(y)$ ne ovise o s, a prijelazna funkcija gustoće ovisi samo o razlici $(t-s)$ te možemo pisati $p(x,t-s;y)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $s = 0$ i tada pišemo $p(x,t;y)$.

Postoji i drugi način definiranja procesa difuzija, pomoću Markovljevih procesa.

Definicija 3.3 Markovljev proces s neprebrojivim skupom stanja u neprekidnom vremenu i s gotovo sigurno neprekidnim trajektorijama nazivamo **difuzija**.

Prije nego nastavimo dalje, najprije ćemo reći nešto o Markovljevim procesima. Markovljevi procesi obuhvaćaju cijelu klasu slučajnih procesa.

Definicija 3.4 Slučajan proces $(X_t, t \in T)$ je **Markovljev proces** ako je

$$P(a < X_t \leq b|X_{t_1}=x_1, X_{t_2}=x_2,\dots,X_{t_n}=x_n)=P(a<X_t\leq b|X_{t_n}=x_n), \tag{8}$$

za proizvoljne $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t \in T$ i $x_1, x_2, \dots x_n$ za koje je dobro definirana prijelazna vjerojatnost.

Drugim riječima, Markovljev proces je slučajan proces sa svojstvom da uz danu vrijednost X_t (sadašnjost) vrijednost X_s za $s > t$ (budućnost) ne ovisi o X_u za $u < t$ (prošlost). Svojstvo u relaciji (8) naziva se **Markovljevo svojstvo**.

Također razlikujemo dva tipa Markovljevih procesa:

- Markovljevi procesi s diskretnim skupom stanja - **Markovljevi lanci** te razlikujemo one u diskretnom i neprekidnom vremenu

- Markovljevi procesi s neprebrojivim skupom stanja.

Alternativno se često kaže da je slučajan proces $(X(t), t \geq 0)$ difuzija ako je $(X(t), t \geq 0)$ Markovljev proces koji zadovoljava relaciju (5) te ako su $\mu(y,s)$ i $\sigma(y,s)$ neprekidne funkcije od y i s.

3.1 Multivariatni proces difuzije

Ukratko ćemo reći kako se definira proces difuzije kada je riječ o višedimenzionalnom skupu stanja, npr. neka je $I = \mathbb{R}^n$. Nadalje, neka je $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ vektor procesa. Definiramo infinitezimalne parametre:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[X_i(t+h) - X_i(t) \mid \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \mu_i(\boldsymbol{x}, t), i = 1, 2, \ldots, n,$$

i

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[X_i(t+h) - X_i(t) X_j(t+h) - X_j(t) \mid \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}] = \sigma_{i,j}(\boldsymbol{x}, t), i, j = 1, \ldots, n.$$

Matrica $||\sigma_{i,j}(\boldsymbol{x}, t)||_1^n$ mora biti pozitivno definitna.
Za momente višeg reda vrijedi da su zanemarivi u odnosu na h, tj.:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E[X_i(t+h) - X_i(t)^4 \mid X(t) = \boldsymbol{x}] = 0,$$

za $i = 1, \ldots, n$.

Primjer 3.1 Graf Brownovog gibanja

Neka je s B označeno jednodimenzionalno Brownovo gibanje te neka je $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{cases} dX_1 = dt; & X_1(0) = t_0 \\ dX_2 = dB; & X_2(0) = x_0 \end{cases}.$$

Sustav možemo zapisati na sljedeći način:

$$dX = \mu dt + \sigma dB; \qquad X(0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ X_0 \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Drugim riječima, graf Brownovog gibanja prikazali smo pomoću dvodimenzionalne stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Primjer preuzet iz [13].

3.2 Konzervativni procesi i difuzija sa zaustavljanjem

Za proces kažemo da je **difuzija sa zaustavljanjem** ako se trajektorije tog procesa ponašaju kao trajektorije regularnog procesa, sve do nekog slučajnog vremena ψ (može biti i ∞) kada je proces zaustavljen. Difuziju sa zaustavljanjem označavamo na sljedeći način: $(X(t), 0 \leq t < \psi)$. Budući da smo ju definirali tako da je moguće da je $\psi = \infty$, to uključuje slučaj kada se zaustavljanje ne pojavljuje. Ako je $\psi = \infty$ iz svake početne točke $X(0) = x$, tada kažemo da je proces **konzervativan** i pišemo $(X(t), t \geq 0)$. Dakle, regularni proces difuzije $X(t)$ definiran na I je konzervativan ako je

$$P(X(t) \in \mathbb{R} | X(0) = x) = P(\psi > t \mid X(0) = x) = 1,$$

za svaki $t \geq 0$ i $x \in I$.

Mnogi autori dodaju karakterističnu točku Δ, koju nazivamo "groblje" intervala I i time proširuju skup stanja u $I \cup \Delta$ s time da je $X(t) = \Delta$ za $t \geq \psi$. Ova je konstrukcija tehnička i služi za osiguranje da je proces uvijek konzervativan na proširenom skupu stanja $I \cup \Delta$. Za difuziju sa zaustavljanjem, za svaku točku x postoji vjerojatnost $k(x)dt + O(dt)$ takva da će proces biti zaustavljen u trajanju od $(t, t + dt)$, dok je vjerojatnost $1 - k(x)dt + O(dt)$ takva da zaustavljanja procesa nema. Uočimo da stopa zaustavljanja $k(x)$ može ovisiti o poziciji, čak i o vremenu, ako dopustimo da $k(x, t)$ bude funkcija vremena t i pozicije x. Matematički zapisano:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(t < \psi < t + h \mid X(t) = x) = k(x, t).$$

Primjer 3.2 *Model populacije mutanata*

a) Promatramo populaciju koja se sastoji od N članova. Vrijeme potrebno da se populacija promijeni je eksponencijalno distribuirano s parametrom λ. Promjena podrazumijeva slučajno odabranu jedinku koja umire i nezavisno slučajno odabranu jedinku koja će nositi potomka. Svaki potomak može mutirati s vjerojatnošću μ i stvoriti novi tip mutanta. Jedinku nazivamo p-mutant ako je neki od njezinih predaka uključujući i nju samu pokazao p-mutaciju.

Sa $X(t)$ označimo broj 0-mutanata u trenutku t i pretpostavimo da je $X(t) = k$. Promatrajmo vremenski interval $\langle t, t + h \rangle$, za mali h. Broj $X(t)$ će se povećati za jedan ako umre mutant reda 1 ili više i rodi se 0-mutant bez nove mutacije. Na kraju promatranog vremenskog intervala $\langle t, t + h \rangle$ imamo:

$$X(t + h) = k + 1, \quad \text{s vjerojatnošću} \quad \lambda h \Big(\frac{N - k}{N} \Big) \frac{k}{N} (1 - \mu) + o(h). \tag{9}$$

Slično, imamo:

$$X(t + h) = k - 1, \quad \text{s vjerojatnošću} \quad \lambda h \frac{k}{N} \left[\frac{k}{N} \mu + \frac{N - k}{N} \right] + o(h), \tag{10}$$

te

$$X(t + h) = k, \quad \text{s vjerojatnošću} \quad 1 - \lambda h + \lambda h \left[\frac{N - k}{N} \Big(\frac{N - k}{N} + \frac{k}{N} \mu \Big) + \frac{k}{N} \frac{k}{N} (1 - \mu) \right] + o(h).$$

Naravno, $X(t+h) = l$, pri čemu je $l \neq k,\ k-1,\ k+1$ realizira se s vjerojatnošću $o(h)$. Očekivano vrijeme između promjena je $\frac{1}{\lambda}$. Stoga je prosječno trajanje jedne generacije jednako $\frac{N}{\lambda}$. Razmotrimo $Y_N(t) = \frac{X(t)}{N}$ koji predstavlja proporciju 0-mutanata u vremenu t. Ubrzat ćemo promjenu ($\lambda \to \infty$) i staviti da $N \to \infty$ tako da se $Y_N(t)$ ponaša približno jednako kao proces difuzije pri čemu će jedna jedinica vremena odgovarati približno N generacija originalnog procesa. U tu svrhu stavimo da je $\lambda = N^2$.
Neka je:

$$\Delta_h Y_N(t) = Y_N(t+h) - Y_N(t) = \frac{X(t+h) - X(t)}{N}.$$

Sada ćemo, pomoću (9) i (10) te ako stavimo da je $Nx = k$ i $h = \frac{q}{N}$, računati srednju vrijednost očekivane promjene:

$$\frac{1}{h} E[\Delta_h Y_N(t) \mid Y_N(t) = x] = \frac{\lambda}{hN}\left[\frac{N-k}{N} q \frac{k}{N}(1-\mu)h - \frac{k}{N}\left(\frac{k}{N}\mu + \frac{N-k}{N}\right)h\right] + \frac{o(h)}{h}. \quad (11)$$

Neka je $\mu = \frac{\theta}{N}$, θ fiksan i $\lambda = N^2$. Tada se desna strana relacije (11) reducira na $-\mu N[\frac{k}{N}] + O(1)$, što teži u $-\theta x$. Sličan račun vodi nas do sljedeće relacije:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E\left[\left\{\Delta_h Y_N(t)\right\}^2 \mid Y_N(t) = \frac{k}{N} = x\right] = 2x(1-x)$$

i također:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E\left[\left\{\Delta_h Y_N(t)\right\}^4 \mid Y_N(t) = x\right] = 0.$$

Dakle, dobili smo aproksimaciju modela difuzijom sljedećeg oblika:

$$dX = -\theta x dt + \sqrt{2x(1-x)} dB_t.$$

Ako pogledamo kategorizaciju Pearsonovih difuzija u 4. poglavlju, zaključujemo da je dobivena difuzija Jacobijeva, uz reparametrizaciju $a = 0$, $b = \theta$.

b) Sada promatramo isti proces koji se zaustavi kada se stvori prvi 2-mutant. Neka je $Z(t)$ broj 1-mutanata u trenutku t te pretpostavimo da se 2-mutanti još nisu pojavili. Možemo tvrditi da:

$$P_{k,k+1}(t,t+h) = P(Z(t+h) = k+1 \mid Z(t) = k) = \lambda h \frac{N-k}{N}\left[\frac{N-k}{N}\mu + \frac{k}{N}(1-\mu)\right] + o(h).$$

Prelazak $Z(t) = k$ u $Z(t+h) = k+1$ zahtijeva smrt jednog od 0-mutanata i onda ili rođenje novog 1-mutanta ili mutacija 0-mutanta bez zaustavljanja procesa, odnosno bez formiranja 2-mutanta. Sličnim promatranjem zaključujemo:

$$P_{k,k-1}(t,t+h) = \lambda h\left[\frac{k}{N}\frac{N-k}{N}(1-\mu)\right] + o(h),$$

$$P_{k,k}(t,t+h) = 1 - \lambda h + \lambda h\left[\left(\frac{N-k}{N}\right)^2(1-\mu) + \frac{k}{N}\left(\frac{N-k}{N}\mu + \frac{k}{N}(1-\mu)\right)\right] + o(h),$$

$$P_{k,j}(t,t+h) = o(h), \qquad \text{za } j \neq k, j \neq k-1, j \neq k+1,$$

i konačno

$$P(2 - \text{mutant je stvoren i proces staje u}(t, t+h) \mid Z(t) = k) = \lambda h \frac{k}{N}\mu + o(h).$$

Neka je $\mu = \frac{\theta}{N}$. Ako je Z(t) reda N i događaj se dogodi brzo, tada se 2-mutanti stvore gotovo trenutačno. Ali ipak, ako je $Z(t)$ mali i ako je λ također mali prvo vrijeme nastajanja dvostrukog mutanta, može biti jako dugačko. Točan razmjer događaja koji vode do uspostavljajna ravnoteže zahtijeva $\lambda = N^{\frac{3}{2}}$ i samo ako je $Z(t)$ reda $\sqrt{N}$ postoji netrivijalna vjerojatnosna distribucija za vrijeme nastajanja 2-mutanta. S ovim normalizacijama $\lambda = N^{\frac{3}{2}}, \mu = \frac{\theta}{N}, Z(t) = x\sqrt{N}$ je:

$$Z_N(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{N}}.$$

Tada je:

$$\frac{1}{h}E[\Delta_k Z_N(t) \mid Z_N(t) = x] = \frac{1}{h}hN^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{N}}\Big\{\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{N}}\Big)\Big[\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{N}}\Big)\frac{\theta}{N} + \frac{x}{\sqrt{N}}\Big(1 - \frac{\theta}{N}\Big)\Big]$$
$$- \frac{x}{\sqrt{N}}\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{N}}\Big)\Big(1 - \frac{\theta}{N}\Big)\Big\} + o(1).$$

Limes kada $N \to \infty$ je jednak θ. Analogno dobijemo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\{\Delta_h Z_N(t)\}^2 \mid Z_N(t) = x] = 2x.$$

Infinitezimalna stopa zaustavljanja za $Z_N(t) = x = \frac{k}{\sqrt{N}}$ je:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\lambda h\frac{k}{N}\mu = \theta x.$$

Na taj način aproksimirani proces možemo identificirati s procesom difuzije sa zaustavljanjem pri čemu je:

$$\mu(x) = \theta, \quad \sigma^2(x) = 2x, \quad k(x) = \theta x.$$

Primjer preuzet iz [9].

3.3 Vrijeme prvog zaustavljanja

U ovom poglavlju napisat ćemo nešto više o vremenu prvog zaustavljanja u nekom stanju, npr. ako imamo proces kojim modeliramo cijene kretanja dionica može nas zanimati kada će vrijednost neke dionice prvi put iznositi 10 000 kuna. Vrijeme prvog zaustavljanja igra važnu ulogu u proučavanju jednodimenzionalnih difuzija.

Definicija 3.5 **Vrijeme prvog zaustavljanja** slučajnog procesa $\{X(t), 0 \leq t < \psi\}$ u stanje z definiramo na sljedeći način:

$$T_z = \begin{cases} \infty, & X(t) \neq z \text{ za } 0 \leq t < \psi \\ inf\{t \geq 0; X(t) = z\}, & \text{inače} \end{cases}.$$

Također koristimo i zapis

$$T* = T_{a,b} = T(a,b) = min\{T(a), T(b)\} = T(a) \wedge T(b)$$

za vrijeme prvog zaustavljanja u stanju a ili b, tj. prvi put kada je $X(t) = a$ ili $X(t) = b$. Za proces $X(t)$ za koji je $X(0) = x$, $x \in \langle a, b \rangle$ definiramo i **vrijeme izlaska** iz intervala $\langle a, b \rangle$:

$$T(a,b) = inf\{t \geq 0; X(t) \notin \langle a, b \rangle\}.$$

Primjer 3.3 Neka je $\sigma^2(x) = 1$ te neka je

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1-2\lambda}{2x} - \sqrt{\psi}\frac{I_{\lambda-1}x\sqrt{\psi}}{I_\lambda x\sqrt{\psi}}, & \psi > 0,\ \lambda \leq 0 \\ \frac{1+2\lambda}{2x}, & \psi = 0,\ \lambda < 0 \end{cases},$$

pri čemu je I_λ modificirana Besselova funkcija. Distribucija vremena zaustavljanja u 0, difuzije koja kreće iz x_0 sa spomenutim infinitezimalnim parametrima je inverzna normalna distribucija s parametrima (λ, x_0^2, ψ).

Primjer preuzet iz [4].
Napomena: Besselov proces je granični slučaj difuzije iz prethodnog primjera kada λ i ψ idu u 0, a poznato je da se Besselov proces ne zaustavlja u 0 g.s.

3.4 Kako iz slučajnog procesa prepoznati difuziju?

U ovom dijelu dat ćemo neke kriterije pomoću kojih ćemo moći reći je li pojedini Markovljev proces ujedno i proces difuzije. Najprije ćemo definirati standardni proces.

Definicija 3.6 Jaki Markovljev proces $(X(t), t \geq 0)$ nazivamo **standardni proces** ako njegove trajektorije zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. $X(t)$ je neprekidan zdesna, tj. za svaki $s \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{t \to s^+} X(t) = X(s)$$

2. Limes slijeva od $X(t)$ postoji, tj.

$$\lim_{t \to s^-} X(t) postoji, \forall s > 0$$

3. $X(t)$ je neprekidan slijeva u Markovljevim vremenima, tj. ako su $T_1 \leq T_2 \leq \dots$ Markovljeva vremena koja konvergiraju u $T < \infty$ tada je

$$\lim_{n \to \infty} X(T_n) = X(T)$$

za $T < \infty$.

Napomena: Definicija je dana samo za procese bez zaustavljanja.

Također, zadnje svojstvo naziva se i kvazi-neprekidnost slijeva jer ne govori da su trajektorije neprekidne slijeva, već samo da skokovi nisu prediktivni. Npr. Poissonov proces je standardni proces koji sadrži isprekidane skokove. Slučajna vremena $T_n = T - \frac{1}{n}$, gdje je T vrijeme prvog skoka, nisu Markovljeva vremena. Vrijedi i da svaki jaki Markovljev proces $(X(t), t \geq 0)$, koji je neprekidan po vjerojatnosti i podložan uvjetima regularnosti, ima svoju modifikaciju $(\tilde{X}(t), t \geq 0)$ koja je standardni proces.

Definicija 3.7 Slučajni proces je **neprekidan po vjerojatnosti** ako za bilo koji $\epsilon > 0$ i $s \geq 0$ vrijedi:

$$\lim_{t \to s} P(|X(t) - X(s)| > \epsilon) = 0. \tag{12}$$

Svojstvo (12) zadovoljava većina slučajnih modela pa možemo pretpostavljati da je Markovljev proces ujedno i standardni proces. Dovoljan uvjet da bi standardni proces bio difuzija ispunjavanje je Dynkinsova uvjeta:

$$\frac{1}{h} P(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon \mid X(t) = x) \to 0, \quad \text{za} \quad \epsilon > 0.$$

Idući teorem potvrđuje dovoljnost ovog uvjeta.

Teorem 3.1 Neka je $(X(t), t \geq 0)$ standardni proces i neka vrijedi Dynkinsov uvjet. Tada je $(X(t), t \geq 0)$ difuzija.

Za dokaz vidi [9].
Kao posljedicu ovog teorema imamo sljedeću lemu:

Lema 3.2 Ako standardni proces zadovoljava sljedeći uvjet:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E\left[|\Delta_h X(t)|^p \mid X(t) = x\right] = 0$$

za neki $p > 2$, uniformno za x iz nekog kompaktnog podskupa od $\langle a, b \rangle$ i t iz nekog konačnog segmenta $[0, N]$, tada je zadovoljen Dynkinsov uvjet.

Primjer 3.4 U primjeru pokazat ćemo da Ornstein-Uhlenbeckov proces zadovoljava Lemu 3.4. OU proces definirat ćemo kao rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe sljedećeg oblika:

$$dX_t = -\theta X(t) dt + \sqrt{2\theta} dB_t,$$

pri čemu su infinitezimalni parametri dani s

$$\mu(x) = -\theta x \quad \text{i} \quad \sigma(x) = \sqrt{2\theta}.$$

Prijelazna funkcija gustoće OU procesa je normalno distribuirana i dana s

$$p(y, h; x) = \mathcal{N}(xe^{-\theta h}, 1 - e^{-2\theta h}).$$

Vidi [1].
Neka je $p = 3$. Nakon što raspišemo uvjet iz leme trebamo pokazati sljedeće:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\left| E[X(t+h)^3 \mid X(t) = x] - 3xE[X(t+h)^2 \mid X(t) = x] + 3x^2 E[X(t+h) \mid X(t) = x] - x^3 \right| \right] = 0.$$

Budući da je prijelazna funkcija gustoće normalno distribuirana, znamo sve momente koji su nam potrebni, tj.

$$E[X(t+h) \mid X(t) = x] = xe^{-\theta h},$$

$$\begin{aligned} E[X(t+h)^2 \mid X(t) = x] &= E[X(t+h) \mid X(t) = x]^2 + Var(X(t+h) \mid X(t) = x) \\ &= 1 - e^{-2\theta h} + x^2 e^{-2\theta h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[X(t+h)^3 \mid X(t)=x] &= E[X(t+h) \mid X(t)=x]^3 + 3E[X(t+h) \mid X(t)=x] \\ &\cdot Var(X(t+h) \mid X(t)=x) \\ &= x^3 e^{-3\theta h} + 3x(e^{-\theta h} - e^{-3\theta h}).\end{aligned}$$

Uvrštavanjem i sređivanjem momenata u danom uvjetu u konačnici dobijemo

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[x^3e^{-3\theta h} + 3xe^{-\theta h} - 3xe^{-3\theta h} - 3x^3e^{-2\theta h} - 3x + 3xe^{-2\theta h} + 3x^3e^{-\theta h} - x^3\Big] \\ = & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[x^3(e^{-\theta h}-1)^3 + 3xe^{-\theta h}(1-e^{-2\theta h}) - 3x(1-e^{-2\theta h})\Big] \\ = & \ 0 + 3x \lim_{h\to 0} \frac{(1-e^{-2\theta h})}{h} \cdot \lim_{h\to 0}(e^{-\theta h}-1) \\ = & \ 0 + 3x \cdot 2\theta \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Dakle, Ornstein-Uhlenbeckov proces po Lemi 3.4 zadovoljava Dynkinsonov uvjet, tj. Ornstein-Uhlenbeckov proces je difuzija.

Sljedeći kriterij kojim provjeravamo ima li neki jednodimnezionalni slučajni proces, koji ne mora nužno posjedovati jako Markovljevo svojstvo, neprekidne trajektorije je Kolmogorovljev uvjet. Neka je $(X(t), t \geq 0)$ slučajni proces koji zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$E\big[|X(t) - X(s)|^\gamma\big] \leq C|\varphi(t) - \varphi(s)|^{1+\alpha},$$

za sve $s, t \geq 0$, pri čemu su α, γ i C pozitivne konstante neovisne o s i t te φ je neprekidna neopadajuća funkcija. Tada postoji modifikacija $\tilde{X}(t)$ s neprekidnim trajektorijama.

Primjer 3.5 U ovom primjeru pomoću Kolmogorovljevog uvjeta pokazat ćemo da Ornstein-Uhlenbeckov proces ima neprekidnu modifikaciju. Neka je OU proces zadan kao i u prethodnom primjeru te neka je $\gamma = 4$. Kako je funkcija prijelazne gustoće OU procesa normalno distribuirana slijedi da je $(X_t - X_s) \sim \mathcal{N}\big(0, 2(1-e^{-2\theta(t-s)})\big)$. Dakle, računamo

$$E[|X_t - X_S|^4] = 3\cdot 2^4(1-e^{-2\theta(t-s)})^4 = 48(1-e^{-2\theta(t-s)})^4 \leq 48\cdot 2\theta|t-s|^4 = 96\theta|t-s|^4.$$

Pokazali smo da OU proces ima modifikaciju s neprekidnim trajektorijama.

Ako je riječ o n-dimenzionalnom procesu, Kolmogorovljev uvjet možemo iskazati i na sljedeći način:

$$E\big[|X(t) - X(s)|^\gamma\big] \leq C|\varphi(t) - \varphi(s)|^{n+\alpha},$$

pri čemu su α, γ i C pozitivne konstante.

3.5 Klasifikacija granica regularnih difuzija

U ovom poglavlju usmjerit ćemo se na noviji način klasifikacije ponašanja procesa u blizini granica intervala na kojemu je proces definiran. Radit ćemo samo s regularnim procesima. Dakle, neka je $(X_t, t \geq 0)$ regularna difuzija definirana na intervalu $I = \langle l, r\rangle$. Pretpostavljamo da su za $x \in \langle l, r\rangle$ dobro definirani parametar pomaka $\mu(x)$ i parametar difuzije $\sigma^2(x)$.
Analizu ćemo provoditi na lijevoj granici l, dok su rezultati za desnu granicu r analogni.

Najprije pustimo da a opada prema l na sljedeći način:

$$u(x) = u_{a,b}(x) = P(T_b < T_a \mid X(0) = x), \quad l < a < x < b < r \tag{13}$$

i

$$v(x) = v_{a,b}(x) = E\left[T_{a,b} \mid X(0) = x\right], \quad l < a < x < b < r, \tag{14}$$

pri čemu je T_a vrijeme prvog prelaska u stanje a, a $T_{a,b} = min\{T_a, T_b\}$. Definiramo gustoću skaliranja $s(\zeta)$:

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} s(\zeta)d\zeta; \quad s(\zeta) = e^{-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{2\mu(\eta)}{\sigma^2(\eta)}\right]d\eta},$$

gdje su $x_0, \zeta_0 \in \langle l, r\rangle$ fiksne. Nadalje, uvodimo mjeru, $S[J]$ zatvorenog intervala $J = [c, d] \subset \langle l, r\rangle$ definiranu na sljedeći način:

$$S[J] = S[c, d] = S(d) - S(c).$$

Primijetimo da je $0 < S[c, d] < \infty$ za $l < c < x < d < r$ te da je

$$S[c, d] = S[c, x] + S[x, d], \quad \text{za} \quad l < c < x < d < r. \tag{15}$$

Na sličan način, pomoću gustoće mjere brzine $m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)s(x)}$ uvodimo mjeru brzine M

$$M[J] = M[c, d] = \int_{c}^{d} m(x)dx, \quad J = [c, d] \subset \langle l, r\rangle.$$

Za $J = [c, d] \subset \langle l, r\rangle,\ M[J]$ je pozitivna i konačna.

Sada relacije (13) i (14) možemo zapisati na sljedeći način:

$$u(x) = u_{a,b}(x) = \frac{S[a, x]}{S[a, b]}, \quad l < a < x < b < r, \tag{16}$$

i

$$v(x) = v_{a,b}(x) = 2\left\{u(x)\int_{x}^{b} S[\eta, b]dM(\eta) + [1 - u(x)]\int_{a}^{x} S[a, \eta]dM(\eta)\right\}. \tag{17}$$

Zbog nenegativnosti mjere S i relacije (15) slijedi da je $S[a, b]$ monotona u a za fiksan b te možemo definirati $S\langle l, b] \leq \infty$ na sljedeći način:

$$S\langle l, b] = \lim_{a \to l} S[a, b] \leq \infty, \quad l < b < r.$$

Ukoliko je $[a, b] \subset \langle l, r\rangle$ tada je $0 \leq S[a, b] < \infty$. Kao posljedica toga i relacije (15) vrijedi da je:

$$S\langle l, b] = \infty \quad \text{za neki} \quad b \in \langle l, r\rangle$$

ako i samo ako je:

$$S\langle l, b] = \infty \quad \forall b \in \langle l, r\rangle.$$

Podsjetimo se da je za svaku trajektoriju koja kreće iz $X(0) = x$ u $\langle a, b\rangle$ vrijeme prvog zaustavljanja u stanje a monotono nerastuća funkcija u a. Stoga možemo definirati slučajno vrijeme $T_{l+} = \lim_{a \to l^+} T_a \leq \infty$. Pokažimo da je $T_{l+} = T_l$. Kada je $X(0) = x$ u

$\langle a, b\rangle$ je $T_a \leq T_l$ te je onda $T_{l+} = \lim_{a\to l^+} T_a \leq T_l$. Ako je $T_{l+} = \infty$ tada je $T_l = T_{l+} = \infty$, stoga pretpostavljamo da je $T_{l+} < \infty$. Zbog neprekidnosti trajektorija imamo

$$X(T_{l+}) = \lim_{a\to l^+} X(T_a) = \lim_{a\to l} a = l > -\infty$$

kada je $T_{l+} < \infty$ i tada je $T_{l+} \geq T_l = inf\{t \geq 0, X(t) = l\}$. Budući da smo pokazali da je $T_{l+} \leq T_l$ i $T_{l+} \geq T_l$ slijedi da je $T_{l+} = T_l \leq \infty$. Primijetimo da je T_l definiran čak i kada l nije moguće stanje i u tom slučaju je $T_l = \infty$.

Lema 3.3

1. Neka je $S\langle l, x_0] < \infty$ za neki $x_0 \in \langle l, r\rangle$. Tada je

$$P(T_{l+} \leq T_b \mid X(0) = x) > 0, \quad \forall l < x < b < r.$$

2. Neka je $S\langle l, x_0] = \infty$ za neki $x_0 \in \langle l, r\rangle$. Tada je

$$P(T_{l+} < T_b \mid X(0) = x) = 0, \quad \forall l < x << b < r.$$

Napomena: Za $a \neq b \in \langle l, r\rangle$ ne može biti $T_a = T_b$ jer trajektorija ne može u isto vrijeme poprimati dvije različite vrijednosti.

Definicija 3.8 Granica l je **privlačeća** ako je $S\langle l, x] < \infty$, za bilo koji $x \in \langle l, r\rangle$.

Primjer 3.6 Za standardno Brownovo gibanje granica $l = -\infty$ nije privlačeća budući da je $S[a, x] = x - a$ i $S\langle -\infty, x] = \infty$. Ako pretpostavimo da je parametar pomaka $\mu = -\alpha < 0$, tada $S[a, x] = e^{2\alpha x} - e^{2\alpha a} \to e^{2\alpha x} < \infty$ kada $a \to \infty$. Tada je $l = -\infty$ privlačeća granica za Brownovo gibanje s negativnim parametrom pomaka.

Iz primjera uočavamo da privlačeća granica ne mora nužno biti u skupu stanja procesa.

Iz relacija (16) i (17) vidimo da je:

$$\begin{aligned}\lim_{a\to l} E[T_a \wedge T_b] = \lim_{a\to l} E[T_a \wedge T_b] &= \lim_{a\to l} \frac{2S[a, x]}{S[a, b]} \int_x^b S[\zeta, b] dM(\zeta) \\ &+ \lim_{a\to l} \frac{2S[x, b]}{S[a, b]} \int_a^x S[a, \zeta] dM(\zeta).\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da je granica l privlačeća, tada je $\lim_{a\to l} \frac{S[a,x]}{s[a,b]}$ konačan i pozitivan, kao i $\lim_{a\to l} \frac{S[x,b]}{s[a,b]}$. Slijedi da je:

$$\lim_{a\to l} E[T_a \wedge T_b] < \infty \quad \text{ako i samo ako} \quad \lim_{a\to l} \int_a^x S[a, \zeta] dM(\zeta) < \infty.$$

Sada možemo definirati:

$$\begin{aligned}\Sigma(l) &= \lim_{a\to l} \int_a^x S[a, \zeta] dM(\zeta) = \int_l^x S\langle l, \zeta] dM(\zeta) \\ &= \int_l^x \left\{ \int_l^\zeta s(\eta) d\eta \right\} m(\zeta) d\zeta = \int_l^x \left\{ \int_\eta^x m(\zeta) d\zeta \right\} s(\eta) d\eta \\ &= \int_l^x M[\eta, x] dS(\eta).\end{aligned}$$

Definicija 3.9 Za granicu l kažemo da je:

1. **dostižna** ako je $\Sigma(l) < \infty$
2. **nedostižna** ako je $\Sigma(l) = \infty$.

Ako je $\Sigma(l) < \infty$ tada je $S\langle l, x] < \infty$ odnosno, ako je l dostižna, tada je i privlačeća. Za nedostižnu granicu to ne vrijedi.

Primjer 3.7 Pretpostavimo da imamo Brownovno gibanje s negativnim parametrom pomaka. U prethodnom primjeru vidjeli smo da je $l = -\infty$ privlačeća, ali i nedostižna jer je očekivano vrijeme potrebno za dostizanje l ili b iz bilo kojeg stanja $x < b$ beskonačno.

Lema 3.4 Neka je l privlačeća granica i pretpostavimo da je $l < x < b < r$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1. $P(T_l < \infty \mid X(0) = x)$
2. $E[T_l \wedge T_b \mid X(0) = x] < \infty$
3. $\Sigma(l) = \int_l^x S\langle l, \eta] dM(\eta) < \infty$.

Dokaz se može pronaći u [9].

Možemo reći da $\Sigma(l)$ mjeri vrijeme potrebno da proces dođe do granice l ili nekog drugog stanja b krenuvši iz bilo koje točke $x < b$ iz intervala $\langle l, r\rangle$. Nadalje, uvodimo sljedeće funkcije:

$$M\langle l, x] = \lim_{a \to l} M[a, x]$$

i

$$N(l) = \int_l^x S[\eta, x] dM(\eta) = \int_l^x M\langle l, \zeta] dS(\zeta).$$

$M\langle l, x]$ mjeri brzinu procesa u blizini granice l, dok $N(l)$ mjeri vijeme potrebno da proces dođe do stanja $x \in \langle l, r\rangle$ krenuvši iz l. Novija klasifikacija graničnog ponašanja temelji se na vrijednostima sljedećih funkcija $S\langle l, x], \Sigma(l), N(l)$ i $M\langle l, x]$.

Lema 3.5 Vrijede sljedeće relacije:

1. $S\langle l, x] = \infty \Rightarrow \Sigma(l) = \infty$;
2. $\Sigma(l) < \infty \Rightarrow S\langle l, x] < \infty$;
3. $M\langle l, x] = \infty \Rightarrow N(l) = \infty$;
4. $N(l) < \infty \Rightarrow M\langle l, x] < \infty$;
5. $\Sigma(l) + N(l) = S\langle l, x] M\langle l, x]$.

U sljedećoj tablici prikazane su moguće kombinacije konačnih ili beskonačnih vrijednosti navedenih četiriju funkcija.

$S\langle l,x]$	$M\langle l,x]$	$\Sigma(l)$	$N(l)$
$<\infty$	$<\infty$	$<\infty$	$<\infty$
$<\infty$	$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$
$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$
$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$
$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$
$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$<\infty$

Tablica 1.

Po Felleru postoje četiri vrste granica:

- regularna
- izlazna
- ulazna
- prirodna

U nastavku navodimo dovoljne uvjete za Fellerovu klasifikaciju granica.
Za granicu l kažemo da je **regularna** ako vrijedi:

$$S\langle l,x] < \infty \quad \text{i} \quad M\langle l,x] < \infty.$$

Proces može i ući i izaći iz regularne granice.

Da bi granica bila **izlazna** mora vrijediti:

$$\Sigma(l) < \infty \quad \text{i} \quad M\langle l,x] = \infty.$$

Ako krećemo iz l, nije moguće doći ni do jednog stanja $b \in \langle l,r\rangle$ bez obzira koliko je blizu. Dakle, stanje l smatramo apsorpcijskim stanjem difuzije.

Granica l je **ulazna** ako vrijedi da je:

$$S\langle l,x] = \infty \quad \text{i} \quad N(l) < \infty.$$

U l nije moguće doći iz bilo kojeg drugog stanja iz unutrašnjosti skupa stanja, već je prirodno smatrati da proces kreće iz stanja l.

Za granicu l kažemo da je **prirodna** ako vrijedi da je:

$$\Sigma(l) = \infty \quad \text{i} \quad N(l) = \infty.$$

Proces ne može kretati iz stanja l te ne može u konačnom vremenu doći do njega.

Primjer 3.8 Besselov proces

Besselov proces $(Y(t), t \geq 0)$ s parametrom $\alpha \geq 0$ jednodimenzionalna je difuzija definirana na $[0,\infty\rangle$ s infinitezimalnim parametrima:

$$\mu(x) = \frac{\alpha-1}{2x} \quad \text{i} \quad \sigma^2(x) = 1.$$

Prijelazna funkcija gustoće Besselovog procesa sljedećeg je oblika:

$$p(x,t;y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}}{t(xy)^{\frac{\alpha-2}{2}}} y^{\alpha-1} I_{\frac{\alpha-2}{2}}\left(\frac{xy}{2}\right), \quad t>0, \quad x,y>0,$$

pri čemu je $I_v(z)$ modificirana Besselova funkcija definirana na sljedeći način:

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k!\Gamma(k+v+1)}.$$

Gustoća skaliranja i gustoća mjere brzine dane su sljedećim relacijama;

$$s(\eta) = e^{-\int^{\eta}(\alpha-1)\frac{dz}{z}} = \eta^{1-\alpha},$$

$$S(\zeta) = \int_1^{\zeta} \eta^{1-\alpha} d\eta = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}\zeta^{2-\alpha}, & \text{ako je} \quad \alpha \neq 2 \\ \ln\zeta, & \text{ako je} \quad \alpha = 2 \end{cases},$$

$$m(x) = \eta^{\alpha-1}.$$

Promatrat ćemo lijevu granicu koja je 0. Imamo

$$\begin{aligned} \Sigma(0) &= \int_0^1 \left[\int_{\zeta}^1 m(\eta)d\eta\right] s(\zeta)d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{\alpha}(1-\zeta^{\alpha})\zeta^{1-\alpha}d\zeta \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\int_0^1 \zeta^{1-\alpha}d\zeta - 1\right) = \begin{cases} <\infty, & \text{ako je} \quad \alpha<2, \\ =\infty, & \text{ako je} \quad \alpha \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(0) &= \int_0^1 \left[\int_{\eta}^1 s(\zeta)d\zeta\right] m(\eta)d\eta = \frac{1}{2-\alpha}\int_0^1 (1-\eta^{2-\alpha})\eta^{\alpha-1}d\zeta \\ &= \frac{1}{2-\alpha}\left(\int_0^1 \eta^{\alpha-1}d\eta - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} <\infty, & \text{ako je} \quad \alpha>0, \\ =\infty, & \text{ako je} \quad \alpha=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je granica 0:

- **ulazna** ako je $\alpha \geq 2$
- **regularna** ako je $0 < \alpha < 2$
- **izlazna** ako je $\alpha = 0$.

Primjer preuzet iz [9].

3.6 Kolmogorovljeve jednadžbe

Neka je $(X(t), t \geq 0)$ difuzija definirana na skupu stanja $I = \langle l, r \rangle$. Prvo definiramo infinitezimalni generator difuzije na sljedeći način:

$$\mathcal{G}f = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t},$$

pri čemu je

$$T_t f(x) = \int_l^r f(y) p(x, t; y) dy = E[f(X(t)) \mid X(0) = x].$$

Infinitezimalni generator dobro opisuje kretanje difuzije na infinitezimalnom vremenskom intervalu, tj, vrijedi:

$$E[f(X(h)) - f(X(0)) \mid X(0) = x] = T_h f(x) - f(x) = h\mathcal{G}f(x) + o(h).$$

Domena infinitezimalnog generatora sljedećeg je oblika

$$D(\mathcal{G}) = \{f \in C_b(I) \cap C^2(I) : \mathcal{G}f \in C_b(I) \text{ i } f \text{ zadovoljava granične uvjete za } l \text{ i } r\},$$

pri čemu je $C^2(I)$ skup svih neprekidnih, dva puta diferencijabilnih funkcija na I, a granični uvjeti koji moraju biti zadovoljeni su:

- ako je e regularna ili izlazna granica mora vrijediti:

$$\lim_{x \to e} f(x) = 0;$$

- ako je e ulazna granica mora vrijediti:

$$\lim_{x \to e} \frac{f'(x)}{\mathfrak{s}(x)} = 0;$$

- ako je e prirodna granica, nisu potrebni nikakvi uvjeti sve dok je $f, \mathcal{G}f \in C_b(I)$.

U jednodimenzionalnom slučaju $\mathcal{G}$ definiramo na sljedeći način:

$$\mathcal{G}f(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2} f''(x) = \frac{1}{m(x)} \Big(\frac{f'(x)}{s(x)} \Big)', \quad x \in I,$$

pri čemu je $\mu \in C^1(I)$ i $\sigma \in C^2(I)$, $\sigma(x) > 0, \forall x \in I$.

Sada ćemo iskazati Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed i unatrag za difuzije. Neka je $(X(t), t \geq 0)$ regularni, homogeni proces difuzije na intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Pretpostavimo da su $\mu(x)$ i $\sigma(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije i da je $\sigma(x) > 0, \forall x$. Tada za $t > 0$ proces difuzije ima prijelazne vjerojatnosti $p(x, t; y)$ koje su jedanput diferencijalne po t i dva puta diferencijalne po x. Najprije ćemo iskazati Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu:

$$p(x, s + t; y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, s; z) p(z, t; y) dz. \tag{18}$$

Ako u (18) od obje strane oduzmemo $p(x,t;y)$, zatim podijelimo sa s i stavimo da $s \to 0$ dobijemo da lijeva strana jednakosti teži prema $\frac{\partial}{\partial t}p(x,t;y)$, a na desnoj strani dobijemo sljedeće:

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(E[p(X_s,t;y)|X_0 = x] - p(x,t;y)). \tag{19}$$

Zatim razvijemo po Taylorovom razvoju oko x za fiksne t, y:

$$p(X_s,t;y) = p(x,t;y) + (X_s - x)\frac{\partial}{\partial x}p(x,t;y) + \frac{1}{2}(X_s - x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t;y) + O(|X_s - x|^3).$$

Relaciju (19) pomoću svojstava difuzije možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}p(x,t;y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t;y).$$

I tako dolazimo do **Kolmogorovljeve jednadžbe unazad**

$$\frac{\partial p(x,t;y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p(x,t;y)}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p(x,t;y)}{\partial x}.$$

Možemo uočiti da Kolmogorovljeva jednadžba unazad sadrži infinitezimalni generator u sebi, tj. vrijedi $\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{G}p$. Slično se izvodi i **Kolmogorovljeva jedandžba unaprijed**

$$\frac{\partial p(x,t;y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[\sigma^2(y)p(x,t;y)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[\mu(y)p(x,t;y)\Big].$$

Ta jednadžba poznata je i pod nazivom Fokker-Planckova jednadžba. Uz Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed vežemo i stacionarnu distribuciju. Ako postoji rješenje $\psi(y)$ vremenski nezavisne Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y)\psi(y)] - \frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)\psi(y)] = 0,$$

tada je to rješenje ujedno i funkcija gustoće stacionarne distribucije odgovarajuće difuzije. Ako jednadžba nema rješenja, tada funkcija gustoće stacionarne distribucije odgovarajuće difuzije ne postoji.

Primjer 3.9 Ornstein-Uhlenbeckov proces

Difuzija X koja je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX(t) = -\theta(X(t) - \mu)dt + \sqrt{2\theta\sigma^2}dB_t, \quad t \geq 0 \tag{20}$$

naziva se Ornstein-Uhlenbeckov proces. Skup stanja Ornstein-Uhlenbeckove difuzije je $\mathbb{R}$. Infinitezimalni parametri ovoga procesa dani su sljedećim izrazima:

$$\mu(x) = -\theta(x - \mu) \quad \text{i} \quad \sigma(x) = \sqrt{2\theta\sigma^2},$$

dok je infinitezimalni generator sljedećeg oblika:

$$\mathcal{G}f(x) = -\theta(x - \mu)f'(x) + \theta\sigma^2 f''(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako gustoću skaliranja $s(x)$ i gustoću mjere brzine $m(x)$ definiramo sljedećim izrazima

$$s(x) = e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad m(x) = \frac{1}{\theta\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

infinitezimalni generator možemo zapisati i kao:

$$\mathcal{G}f(x) = \theta\sigma^2 e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} f'(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jednadžbom (20) opisan je općeniti oblik Ornstein-Uhlenbeckovog procesa. Vasiček je koristio specijalnu parametrizaciju OU procesa za modeliranje kratkoročne kamatne stope. Zbog toga je ova difuzija poznata i pod nazivom Vasičekov model. Ako difuziju zapišemo pomoću jednadžbe:

$$dX(t) = -\theta X(t)dt + 2\theta\sigma^2 dB_t, \quad t \geq 0,$$

s parametrima:

$$\mu(x) = -\theta x \quad \text{i} \quad \sigma(x) = \sqrt{2\theta\sigma^2}$$

Kolmogorovljevu jednadžbu unazad možemo zapisati kao:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \theta\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \theta x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x, \quad y > \infty.$$

Jedinstveno rješenje Kolmogorovljeve jednadžbe unazad dano je kao prijelazna funkcija gustoće:

$$p(x,t;y) = \varphi(\sigma^2(1-e^{-2\theta t}), xe^{-\theta t}, y),$$

pri čemu je $\varphi(t,x,y)$ Gaussova jezgra definirana na sljedeći način:

$$\varphi(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}},$$

za $t > 0$, $-\infty < x, y < \infty$. Prijelaznu funkciju gustoće eksplicitno možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} p(x,t;y) &= \varphi\left(\sigma^2(1-e^{-2\theta t}), xe^{-\theta t}, y\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-e^{-\theta t})}} e^{-\frac{(y-xe^{-\theta t})^2}{2\sigma^2}(1-e^{-2\theta t})} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-e^{-\theta t})}} e^{-\frac{(y-xe^{-\theta t})^2}{2\sigma^2}(1-e^{-2\theta t})}. \end{aligned}$$

Kolmogorovljeva jednadžba unaprijed je dana sljedećim izrazom:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x)p) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)p).$$

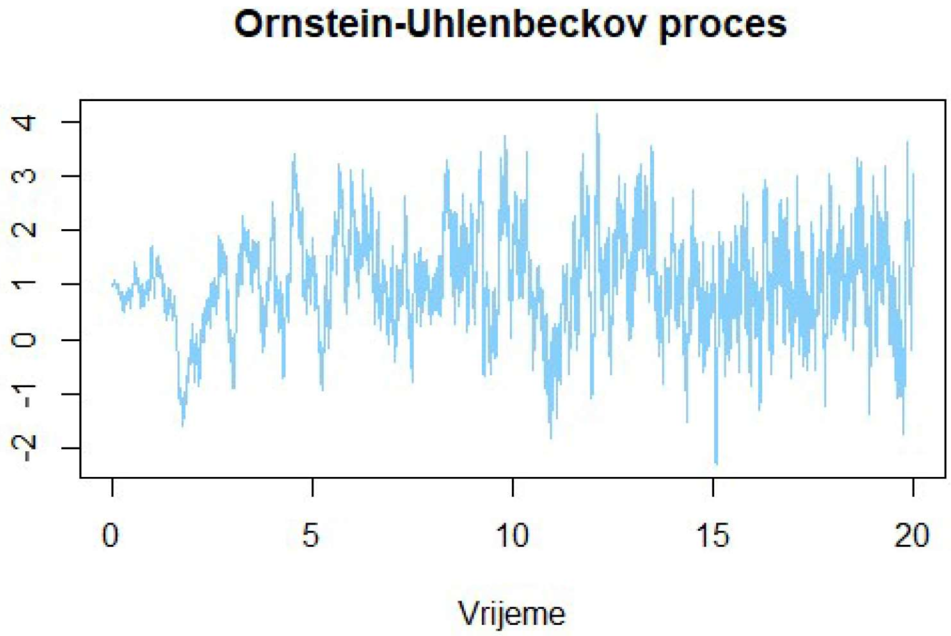
Kako smo već ranije rekli, uz Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed vežemo i funkciju gustoće stacionarne distribucije. Dakle, ukoliko postoji rješenje $\psi(x)$ vremenski nezavisne Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x)\psi(x)) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)\psi(x)) = 0,$$

tada je to rješenje upravo funkcija gustoće stacionarne distribucije. Za Ornstein-Uhlenbeckovu difuziju funkcija gustoće stacionarne distribucije je oblika:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\pi}}.$$

Pogledajmo još grafički prikaz simulacije trajektorije Ornsten-Uhlenbeckova procesa



Slika 1. Ornsten-Uhlenbeckov model s parametrima $\theta = 0.05$, $\sigma^2 = 1$, $\mu = 1$.

Primjer 3.10 Vasičekov model

Vasičekov model jedan je od standardnih modela kojima se modelira promjenjiva kamatna stopa r_t. Stohastička diferencijalna jednadžba kojom opisujemo promjenu kamatne stope je oblika

$$r_t = r_0 + c\int_0^t [\mu - r_s]ds + \sigma\int_0^t dB_s, \quad t \in [0, T], \tag{21}$$

što možemo zapisati i u diferencijalnom obilku:

$$dr_t = c[\mu - r_t]dt + \sigma dB_t, \quad t \in [0, T],$$

pri čemu su c, μ, σ pozitivne konstante. U ovom modelu, kamatna stopa će fluktuirati oko svog očekivanja μ. Ukoliko r_t odstupi od svog očekivanja, vrlo brzo se vraća, odnosno kada je $r(t) > \mu$, tada je drift negativan te vraća difuziju prema očekivanoj vrijednosti. Isto tako kada je $r(t) < \mu$ drift je pozitivan te opet vraća difuziju prema očekivanoj vrijednosti. Također, brzina povratka u očekivanje definirana je parametrom c. Parametar σ predstavlja volatilnost procesa. Rješenje jednadžbe (21) dano je sljedećim izrazom:

$$r_t = r_0 e^{-ct} + \mu(1 - e{-}ct) + \sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs} dB_s.$$

Pretpostavljamo da je r_0 konstanta te je tada r Gaussovski proces. Ako uzmemo da je $\mu = 0$ vidimo da je Vasičekov model specijalan slučaj Ornstein-Uhlenbeckova procesa uz reparametrizaciju $c = \theta$ i $\sigma = \sqrt{2\theta\sigma^2}$. Očekivanje Vasičekova modela je

$$E[r_t] = r_0 e^{-ct} + \mu(1 - e^{ct}),$$

a varijanca

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2c}(1 - e^{-2ct}).$$

Kada $t \to \infty$, slučajna varijabla r_t konvergira po distribuciji u $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{2c})$. Kako je r_t normalno distribuirana slučajna varijabla, s pozitivnom vjerojatnošću moguće su negativne vrijednosti. Upravo je to problem Vasičekova modela jer kamatne stope ne mogu poprimati negativne vrijednosti. Međutim, ako je t velik, a $\frac{\sigma^2}{2c}$ mali u usporedbi s μ, tada r_t s vrlo malom vjerojatnošću poprima negativne vrijednosti.

Primjer preuzet iz [15].

3.7 Spektralna reprezentacija prijelazne funkcije gustoće

Uz pojam infinitezimalnog generatora vežemo i spektralnu reprezentaciju prijelazne funkcije gustoće. Važno je poznavanje spektra infinitezimalnog generatora. Spektar možemo razdvojiti na dva dijela, na diskretan i esencijalni dio.
Realni broj λ nalazi se u spektru $\sigma(H)$ hermitskog operatora H ako i samo ako je

$$\epsilon(\langle \lambda - \delta, \lambda + \delta \rangle) \neq 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Kažemo da je $\lambda \in \sigma(H)$:

- u diskretnom dijelu spektra od H, oznaka $\sigma_d(H)$ ako i samo ako je $\epsilon(\langle \lambda - \delta, \lambda + \delta \rangle)$ konačnodimenzionalan za neki $\delta > 0$
- u esencijalnom dijelu spektra od H, oznaka $\sigma_e(H)$ ako i samo ako je $\epsilon(\langle \lambda - \delta, \lambda + \delta \rangle)$ nije konačnodimenzionalan za svaki $\delta > 0$.

Dakle, spektar možemo zapisati kao uniju dva disjunktna dijela

$$\sigma(H) = \sigma_d(H) \cup \sigma_e(H),$$

pri čemu $\sigma_d(H)$ ne mora nužno biti zatvoren, dok je $\sigma_e(H)$ uvijek zatvoren.

Razlikujemo tri spektralne reprezentacije prijelazne funkcije gustoće.

Spektralna kategorija I. obuhvaća slučaj kada je spektar operatora $(-\mathcal{G})$, koji nazivamo i Sturm-Liouvilleov operator, jednostavan, nenegativan i diskretan te se sastoji od konačnog niza svojstvenih vrijednosti:

$$\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \lambda_0 > \lambda_1 > \dots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Odgovarajuće svojstvene funkcije:

$$\{\varphi_n(x), n \in \mathbb{N}_0\},$$

rješenje su pridruženog svojstvenog problema operatora $(-\mathcal{G})$:

$$(-\mathcal{G})\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x).$$

Spektralna reprezentacija prijelazne funkcije gustoće $p(x,t;y)$ difuzije koja pripada spektralnoj kategoriji I. dana je sljedećim izrazom:

$$p(x,t;y) = m(x)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n}\varphi_n(x)\varphi_n(y), \quad x,y \in I, \quad t \geq 0.$$

Spektralna kategorija II. Spektralna reprezentacija prijelazne funkcije gustoće $p(x,t;y)$ difuzije koja pripada spektralnoj kategoriji II. dana je sljedećim izrazom:

$$p(x,t;y) = m(x)\Big(\sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y) + \int_{\Lambda}^{\infty} e^{-\lambda t}\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)d\rho_{ac}(\lambda)\Big), \quad x,y \in I, \quad t \geq 0,$$

pri čemu su $\lambda_n, n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ svojstvene vrijednosti u diskretnom dijelu spektra, $\varphi(n), n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ odgovarajuće svojstvene funkcije, a $\varphi(x,\lambda)$ netrivijalno rješenje jednadžbe $(-\mathcal{G})f(x) = \lambda f(x)$.

Spektralna kategorija III. Spektralna reprezentacija prijelazne funkcije gustoće $p(x,t;y)$ difuzije koja pripada spektralnoj kategoriji III. dana je sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} p(x,t;y) &= m(x)\sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda n}\varphi_n(x)\varphi_n(y) + m(x)\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} e^{-\lambda t}\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)d\rho_{ac}(\lambda) \\ &+ m(x)\int_{\Lambda_2}^{\infty} e^{-\lambda t}\sum_{i,j=1}^{2} f_i(x,\lambda)f_j(y,\lambda)d\rho_{ac,ij}(\lambda), \quad x,y \in I, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

pri čemu su $\lambda_n, n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ svojstvene vrijednosti, $\varphi(n), n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ odgovarajuće svojstvene funkcije, $\varphi(x,\lambda)$ netrivijalno rješenje jednadžbe $(-\mathcal{G})f(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \sigma_e(-\mathcal{G}), \quad \Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ te $\rho_{ac}(\lambda)$ neprekidna spektralna funkcija na ovom dijelu spektra. $\lambda \in \sigma_e(-\mathcal{G}), \Lambda_2 < \lambda$ te su $f_1(x,\lambda)$ i $f_2(x,\lambda)$ rješenja problema

$$(-\mathcal{G})f(x,\lambda) = \lambda f(x,\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad x \in I,$$

koja zadovoljavaju uvjete:

$$f_1(x_0,\lambda) = 1, \quad \frac{f_1'(x_0,\lambda)}{s(x_0)} = 0, \quad f_2(x_0,\lambda) = 0, \quad \frac{f_2'(x_0,\lambda)}{s(x_0)} = 0.$$

Za više detalja vidi [9].

4 Pearsonove difuzije

Familija neprekidnih distribucija koja zadovoljava:

$$\frac{p'}{p} = \frac{c_1 x + c_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \tag{22}$$

naziva se **Pearsonova familija distribucija**. Jednadžba (22) naziva se i Pearsonova diferencijalna jednadžba. Pearson je zapravo 1895. godine identificirao sljedeće tipove neprekidnih distribucija:

- tip I: generalizirana beta distribucija
- tip II: simetričan slučaj generalizirane beta distribucije
- tip III: gamma, χ^2 i eksponencijalna distribucija
- tip IV: Cauchy i iskrivljena Studentova distribucija
- tip V: normalna distribucija,

dok je 1916. godine nadodao još i:

1. tip V: recipročna gama distribucija
2. tip VI: Fisher-Snedecor i beta-prime distribucija.

Na temelju navedenih neprekidnih distribucija definirat ćemo klasu Pearsonovih difuzija. Kažemo da slučajna varijabla ima **distribuciju s teškim repom** ako vrijedi:

$$e^{\gamma x} P(X > x) \to \infty, \quad x \to \infty, \quad \gamma > 0.$$

Distribucije s teškim repom su Fisher-Snedecorova, recipročna gama i Studentova distribucija, dok normalna, gama i beta distribucija nemaju teške repove. Kolmogorov je promatrao jednadžbu unaprijed, tj. Fokker-Planckovu jednadžbu:

$$\frac{\partial p(x,t;y)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(A(x)p(x,t;y)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(B(x)p(x,t;y)\Big),$$

pri čemu je linearni parametar pomaka $A(x) = A_0 + A_1 x$, a parametar difuzije $B(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2$. Ako postoji jedinstveno rješenje $p(x)$ vremenski nezavisne Fokker-Planckove jednadžbe, tada vrijedi sljedeće:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{A(x) - B'(x)}{B(x)} = \frac{(A_1 - 2B_2)x + (A_0 - B_1)}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2}, \tag{23}$$

a to je upravo diferencijalna jednadžba Pearsonovog tipa. Polinom iz brojnika je u potpunosti određen linearnim parametrom pomaka i parametrom difuzije, a polinom iz nazivnika upravo je parametar difuzije promatranog procesa. Klasa difuzijskih procesa sa stacionarnim distribucijama iz Pearsonove familije naziva se klasa Pearsonovih difuzija.

Postoji i moderna definicija Pearsonove difuzije. **Pearsonova** difuzija $(X(t), t \geq 0)$ je jedinstveno ergodično i stacionarno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sqrt{2\theta k(b_2 X_t^2 + b_1 X_t + b_0)}dB_t, \quad k > 0, \quad t \geq 0,$$

pri čemu je $\theta > 0$ autokorelacijski parametar, $2\theta k(b_2 X_t^2 + b_1 X_t + b_0) = 2\theta k b(x)$ najviši je kvadratni polinom koji odgovara polinomu $B(x)$ iz nazivnika Pearsonove jednadžbe (23), parametar pomaka $\mu(x) = -\theta(x - \mu)$ koji odgovara polinomu $A(x)$ u jednadžbi (23) i $(B_t, t \geq 0)$ je Brownovo gibanje. Parametar pomaka Pearsonove difuzije dan je sljedećim izrazom:

$$\mu(x) = -\theta(x - \mu), \quad \theta > 0, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

a parametar difuzije

$$\sigma^2(x) = 2\theta k(b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \quad k > 0, \quad b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

pri čemu b_0, b_1, b_2 nisu svi jednaki nuli te su takvi da je kvadratni korijen od $\sigma^2(x)$ dobro definiran. Gustoća skaliranja definira se na sljedeći način

$$s(x) = e^{\int^x \frac{y-\mu}{k(b_2 y^2 + b_1 y + b_0)} dy},$$

dok se gustoća mjere brzine definira na sljedeći način:

$$m(x) = \frac{1}{\theta k s(x)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)}.$$

Razlikujemo šest podfamilija Pearsonovih difuzija. Možemo ih kategorizirati pomoću stupnja polinoma b(x) ili u kvadratnom slučaju $b(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ pomoću predznaka vodećeg koeficijenta te pomoću predznaka diskriminante Δ:

- $b(x)$ konstantan -> Ornstein-Uhlenbeck proces s normalnom stacionarnom distribucijom
- $b(x)$ linearan -> Cox-Ingersoll-Rossov(CIR) proces s gama stacionarnom distribucijom
- $b(x)$ kvadratan s $b_2 < 0$ -> Jacobijeva difuzija s beta stacionarnom distribucijom
- $b(x)$ kvadratan s $b_2 > 0$ i $\Delta > 0$ -> Fisher-Snedecorova difuzija s Fisher-Snedecorovom stacionarnom distribucijom
- $b(x)$ kvadratan s $b_2 > 0$ i $\Delta = 0$ -> recipročna gama difuzija s recipročnom gama stacionarnom distribucijom
- $b(x)$ kvadratan s $b_2 > 0$ i $\Delta < 0$ -> Studentova difuzija sa Studentovom stacionarnom distribucijom.

4.1 Cox-Ingersoll-Rossova difuzija

Cox-Ingersoll-Rossov (CIR) model 1985. godine uveli su John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll i Stephen A. Ross kao nadogradnju Vasičekova modela. Dakle, i CIR model se koristi za modeliranje kretanja kamatnih stopa. Vasičekov model nije uključivao komponentu u obliku korijena i zbog toga je povremeno izbacivao negativnu kamatnu stopu što u CIR modelu nije slučaj. **CIR proces** $(X_t, t \geq 0)$ definiramo kao rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe:

$$dX(t) = -\theta\left(X(t) - \frac{b}{a}\right)dt + \sqrt{\frac{2\theta}{a}X(t)}dB(t), \quad \theta > 0, \quad t \geq 0.$$

Ovaj model poznat je i pod nazivom kvadratna difuzija.
Infinitezimalni parametri dani su sljedećim izrazima:

$$\mu(x) = -\theta\left(x - \frac{b}{a}\right) \quad \text{i} \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{2\theta}{a}x},$$

dok je infinitezimalni generator definiran kao:

$$\mathcal{G}f(x) = -\theta\left(x - \frac{b}{a}\right)f'(x) + \frac{\theta}{a}xf''(x), \quad x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Stacionarna distribucija ovog procesa je gama distribucija s funkcijom gustoće

$$g(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}\mathbf{I}_{\langle 0,\infty\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

pri čemu je $a > 0$ parametar skaliranja i $b > 0$ parametar oblika stacionarne distribucije. Definiramo i očekivanje i varijancu:

$$E[X_t] = \frac{b}{a}, \quad Var(X_t) = \frac{b}{a^2}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Gustoća skaliranja definirana je kao:

$$s(x) = x^{-b}e^{ax},$$

dok je gustoća mjere brzine definirana kao:

$$m(x) = \frac{a}{\theta}x^{b-1}e^{-ax}.$$

Sada infinitezimalni generator možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{\theta}{a}x^{1-b}e^{ax}\frac{d}{dx}\left(x^b e^{-ax}f'(x)\right), \quad x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Skup stanja CIR procesa je $I = \langle 0, \infty\rangle$, pri čemu je lijeva granica $l = 0$ regularna za $b \in \langle 0, 1\rangle$ te ulazna za $b \geq 1$, dok je desna granica $r = \infty$ prirodna za $b > 0$.
Svojstvene vrijednosti operatora $-\mathcal{G}$ su

$$\lambda_n = \theta n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

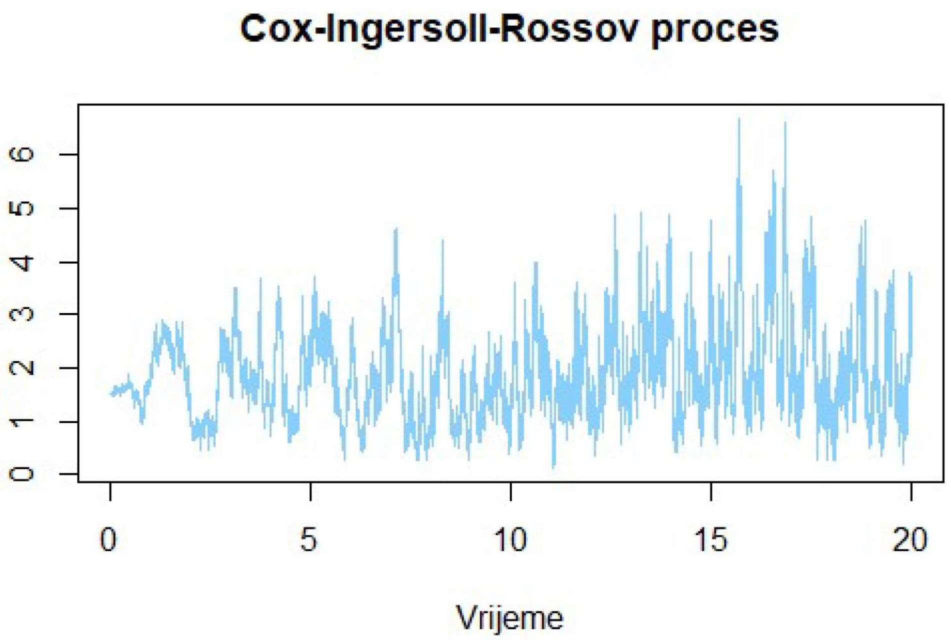
s odgovarajućim normaliziranim ortogonalnim Laguerrovim polinomom

$$L_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(b)}{n!\Gamma(n+b)}} x^{1-b} e^{\alpha x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+b-1}e^{-\alpha x}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Prijelaznu funkciju gustoće možemo eksplicitno zapisati kao:

$$p(x,t;x_0) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{b-1}{2}} \frac{a}{(1-e^{-\theta t})\Gamma(b)} e^{\frac{\theta(b-1)t}{2} - ax - \frac{a(x+x_0)}{e^{\theta t}-1}} I_{b-1}\left(\frac{a\sqrt{xx_0}}{sinh(0.5\theta t)}\right),$$

pri čemu je $I_{b-1}(\cdot)$ modificirana Besselova funkcija prve vrste. Pogledajmo još grafički prikaz simulacije trajektorije CIR procesa:



Slika 2. CIR model s parametrima $\theta = 0.05$, $a = 2$, $b = 4$.

4.2 Jacobijeva difuzija

Jacobijeva difuzija rješenje je stohastičke diferencijalne jednadžbe:

$$dX(t) = -\theta\left(X(t) - \frac{a}{a+b}\right)dt + \sqrt{\frac{2\theta}{a+b}X(t)(1-X(t))}dB(t), \quad \theta > 0, \quad t \geq 0.$$

Infinitezimalni parametri dani su sljedećeim izrazima:

$$\mu(x) = -\theta\left(x - \frac{a}{a+b}\right) \quad \text{i} \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{2\theta}{a+b}x(1-x)},$$

dok je infinitezimalni generator definiran kao:

$$\mathcal{G}f(x) = -\theta\left(x - \frac{a}{a+b}\right)f'(x) + \frac{\theta}{a+b}x(1-x)f''(x), \quad x \in [0,1].$$

Stacionarna distribucija ovog procesa je beta distribucija s funkcijom gustoće:

$$b(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

pri čemu je:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

standardna beta funkcija, dok su $a > 0$ i $b > 0$ parametri oblika stacionarne distribucije. Očekivanje i varijanca dani su sa:

$$E[X_t] = \frac{a}{a+b}, \quad Var(X_t) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b-1)}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Gustoća skaliranja definirana je kao:

$$s(x) = x^{-a}(1-x)^{-b},$$

dok je gustoća mjere brzine definirana kao:

$$m(x) = \frac{a+b}{\theta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Sada infinitezimalni generator možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{\theta}{a+b} x^{1-a}(1-x)^{1-b} \frac{d}{dx}\Big(x^a(1-x)^b f'(x)\Big), \quad x \in [0,1].$$

Skup stanja Jacobijeve difuzije je $I = [0,1]$, pri čemu je lijeva granica $l = 0$ regularna za $a \in \langle 0,1 \rangle$ te ulazna za $a \geq 1$, dok je desna granica $r = 1$ regularna za $b \in \langle 0,1 \rangle$ te ulazna za $b \geq 1$. Uz Jacobijevu difuziju veže se i pojam normalizirani ortogonalni Jacobijev polinom dan sljedećim izrazom:

$$J_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{B(a,b)B^{-1}(a+n,b+n)}{n!(n+a+b+1)_n}} x^{1-a}(1-x)^{1-b} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+a-1}(1-x)^{n+b-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdje je $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ standardni Pochhammerov simbol.

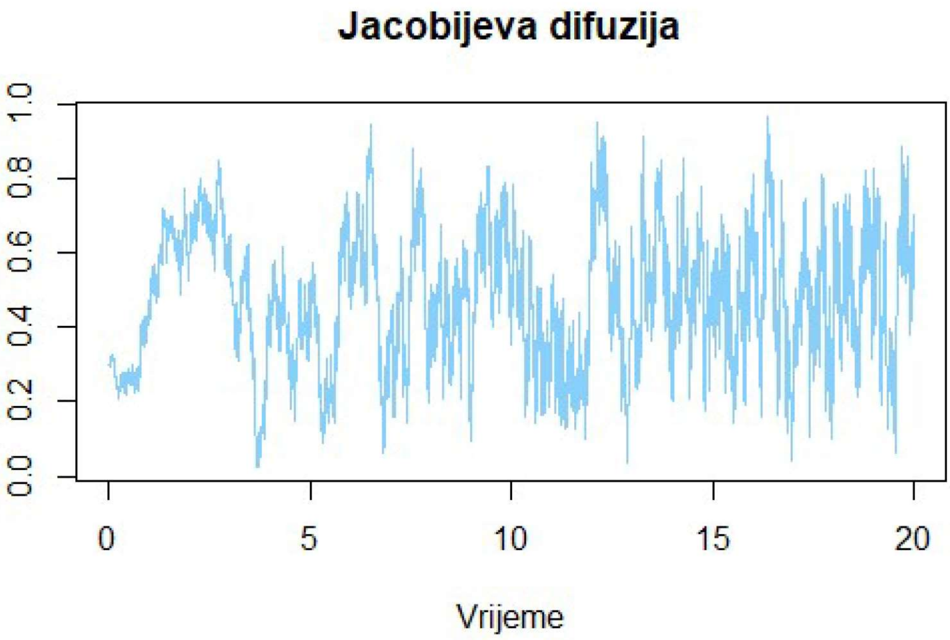
Sada možemo definirati prijelaznu funkciju gustoće kao:

$$p(x,t;x_0) = b(x) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} J_n(t) J_n(x_0), \quad x, x_0 \in [0,1],$$

pri čemu je $b(x)$ funkcija gustoće beta distribucije, $J_n(x)$ Jacobijev polinom, a λ_n svojstvene vrijednosti operatora $-\mathcal{G}$ definirane na sljedeći način:

$$\lambda_n = \frac{\theta}{a+b} n(n+a+b-1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pogledat ćemo još grafički prikaz simulacije trajektorije Jacobijeve difuzije



Slika 3. Jacobijeva difuzija s parametrima $\theta = 0.05$, $a = 4$, $b = 4$.

4.3 Fisher-Snedecorova difuzija

Fisher-Snedecorova difuzija $(X(t), t \geq 0)$ rješenje je stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX(t) = -\theta\left(X(t) - \frac{\beta}{\beta-2}\right)dt + \sqrt{\frac{4\theta}{\gamma(\beta-2)}X(t)(\gamma X(t)+\beta)}dB(t), \quad \theta > 0, \quad t \geq 0.$$

Za razliku od CIR procesa i Jacobijeve difuzije, Fisher-Snedecorova difuzija je Pearsonova difuzija s teškim repom. Infinitezimalni parametri dani su sljedećim izrazima:

$$\mu(x) = -\theta\left(x - \frac{\beta}{\beta-2}\right) \quad \text{i} \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{4\theta}{\gamma(\beta-2)}x(\gamma x+\beta)},$$

dok je infinitezimalni generator definiran kao:

$$\mathcal{G}f(x) = -\theta\left(x - \frac{\beta}{\beta-2}\right)f'(x) + \frac{2\theta}{\gamma(\beta-2)}x(\gamma x+\beta)f''(x), \quad x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Stacionarna distribucija ovog procesa je Fisher-Snedecorova distribucija s funkcijom gustoće:

$$fs(x) = \frac{\gamma^{\frac{\gamma}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}}{B(\frac{\gamma}{2},\frac{\beta}{2})}\frac{x^{\frac{\gamma}{2}-1}}{(\gamma x+\beta)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}}}\mathbb{I}_{\langle 0,\infty\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

pri čemu su $\gamma > 0$ i $\beta > 0$ parametri oblika stacionarne distribucije.
Međutim, $\beta > 4$ osigurava postojanje očekivanja i varijance koje definiramo kao

$$E[X_t] = \frac{\beta}{\beta-2}, \quad Var(X_t) = \frac{2\beta^2(\alpha+\beta-2)}{\alpha(\beta-2)^2(\beta-4)}, \quad \beta > 4.$$

Gustoća skaliranja definirana je kao:

$$s(x) = x^{-\frac{\gamma}{2}}(\gamma x + \beta)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}-1},$$

dok je gustoća mjere brzine definirana kao:

$$m(x) = \frac{\gamma(\beta-2)}{2\theta} x^{\frac{\gamma}{2}-1}(\gamma x + \beta)^{-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}}.$$

Sada infinitezimalni generator možemo zapisato i u sljedećem obliku:

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{2\theta}{\gamma(\beta-2)} x^{1-\frac{\gamma}{2}}(\gamma x + \beta)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}} \frac{d}{dx}\Big(x^{\frac{\gamma}{2}}(\gamma x + \beta)^{1-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}} f'(x)\Big), \quad x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Skup stanja Fisher-Snedecorove difuzije je $I = \langle 0, \infty\rangle$, pri čemu je lijeva granica $l = 0$ regularna za $\gamma \in \langle 0, 2\rangle$ te ulazna za $\gamma \geq 2$, dok je desna granica $r = \infty$ prirodna za $\gamma > 0$, $\gamma \notin \{2m, m \in \mathbb{N}\}$.

$\sigma_d(-\mathcal{G})$ sadstoji se od konačnog skupa svojstvenih vrijednosti:

$$\lambda_n = \frac{\theta}{\beta-2} n(\beta-2), \quad n \in \Big\{0, 1, \ldots, \Big\lfloor \frac{\beta}{4} \Big\rfloor\Big\}, \quad \beta > 2.$$

Ortogonalizirani Fisher-Snedecorovi polinomi su oblika:

$$\tilde{F}_n(x) = x^{1-\frac{\gamma}{2}}(\gamma x + \beta)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\Big\{2^n x^{\frac{\gamma}{2}+n-1}(\gamma x + \beta)^{n-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}}\Big\}, \quad n \in \Big\{0, 1, \ldots, \Big\lfloor \frac{\beta}{4} \Big\rfloor\Big\}, \quad \beta > 2.$$

Normalizirani Fisherovi polinomi su oblika:

$$F_n(x) = K_n \tilde{F}_n(x),$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} K_n &= (-1)^n \sqrt{\frac{B(\frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2})}{n!(-1)^n(2\beta)^{2n} B(\frac{\gamma}{2}+n, \frac{\beta}{2}-2n)} \frac{\Gamma(n-\frac{\beta}{2})}{\Gamma(2n-\frac{\beta}{2})}} \\ &= (-1)^n \sqrt{\frac{B(\frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2})}{n!(2\beta)^{2n} B(\frac{\gamma}{2}+n, \frac{\beta}{2}-2n)} \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta}{2}+k2n\right)\right]^{-1}} \end{aligned}$$

normalizirajuća konstanta.

U $\sigma_d(-\mathcal{G})$ svojstvene vrijednosti su oblika

$$\lambda = \Lambda + \frac{2\theta k^2}{\beta-2} = \frac{2\theta}{\beta-2}\left(\frac{\beta^2}{16} + k^2\right), \quad \beta > 2, k \geq 0,$$

gdje je $\Lambda = \frac{\theta\beta^2}{8(\beta-2)}$. Tada se spektralna reprezentacija prijelazne funkcije gustoće sastoji od dva dijela

$$p_1(x, t; x_0) = p_d(x, t; x_0) + p_e(x, t; x_0),$$

gdje je:

$$p_d(x,t;x_0) = fs(x)\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{\beta}{4} \rfloor} e^{-\lambda_n t} F_n(x_0)F_n(x),$$

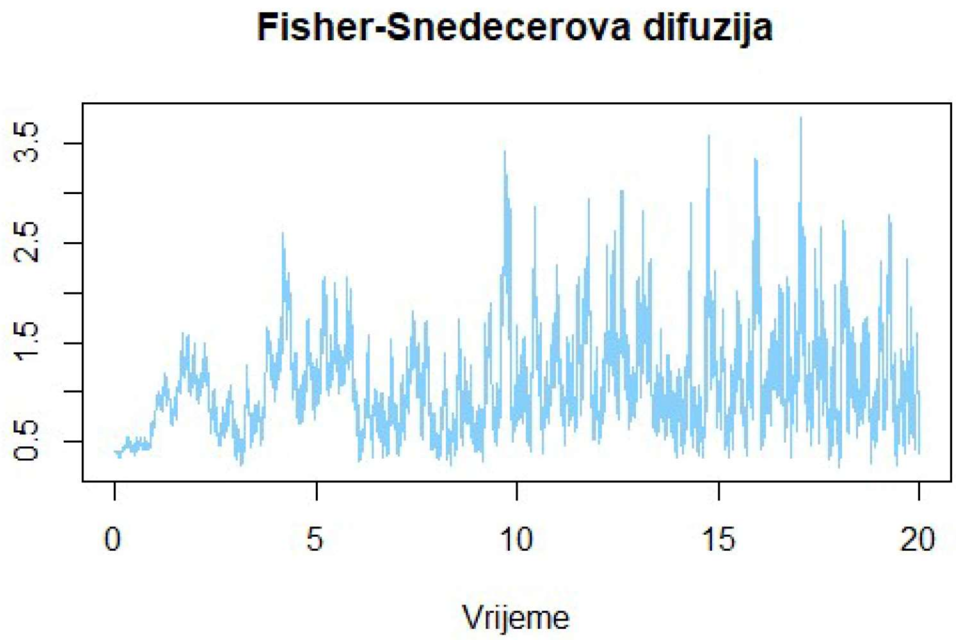
a

$$p_e(x,t;x_0) = fs(x)\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\theta\beta^2}{8(\beta-2)}}^{\infty} e^{-\lambda t} a(\lambda) f_1(x_0,-\lambda) f_1(x,-\lambda) d\lambda,$$

$$k(\lambda) = -i\sqrt{\frac{\beta^2}{16} - \frac{\lambda(\beta-2)}{2\theta}}$$

$$a(\lambda) = k(\lambda)\left|\frac{B^{\frac{1}{2}}(\frac{\gamma}{2},\frac{\beta}{2})\Gamma(-\frac{\beta}{4}+ik(\lambda))\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{4}+ik(\lambda))}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\Gamma(1+2ik(\lambda))}\right|^2.$$

Funkcija f_1 rješenje je jednadžbe $\mathcal{G}f(x) = -\lambda f(x), \lambda > 0$. Na kraju ćemo još pokazati kako izgleda simulacija trajektorije Fisher-Snedecorove difuzije



Slika 4. Fisher-Snedecerova difuzija s parametrima $\theta = 0.05$, $\beta = 20$, $\gamma = 15$.

Literatura

[1] C. Archambeau, A Short Introduction to Diffusion Processes and Ito Calculus, University College London, 2007.

[2] F. Avram, N. N. Leonenko & N. Šuvak, On spectral analysis of heavy-tailed Kolmogorov-Pearson diffusions, Markov Processes and Related Fields **19**(2), 2013.

[3] F. Avram, N. N. Leonenko & N. Šuvak, Spectral representation of transition density of Fisher-Snedecor diffusion, Stochastics **85**(2), 2013.

[4] O. Barndorff-Nielsen, P. Blæsild & C. Halgreen, First hitting time models for the generalized inverse Gaussian distribution, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

[5] J. Cox, J. Ingersoll & S. Ross, A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, 1985.

[6] H. Föllmer, A micronomic approach to diffusion models for stock prices, Institut für angewandte mathematik, Bonn, 1993.

[7] J. Forman & M. Sørensen, Ther Pearson diffusions: a class of statistically tractable diffusion processes, Scandinavian journal of statistics, **35**(3)

[8] S. M. Iacus, Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations, Springer Science+Business Media, New York, 2008.

[9] S. Karlin & H. Taylor, A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York, 1981.

[10] V. Linetsky, The spectral decomposition of the option value, International Journal of Theoretical and Applied Finance, **7**(03), 2004.

[11] G. Ludvigsson, Kolmogorov equations, Uppsala university, Uppsala, 2013.

[12] T. Mikosch, Elementary stochastic calculus, World scientific, Singapore, 1998.

[13] B. Øksendal, Stochastic Differential equations, Springer Verlag, New York, 2000.

[14] I. Papić,Time-changed stochastic models: fractional Pearson diffusions and delayed continous-time autoregressive processes, doktorska disertacija, Sveučilišni poslijediplomski doktorski studij, Zagreb, 2019.

[15] A. N. Shiryaev, Essentials of stochastic finance, World scientific, Singapore, 1997.

[16] O. Vasicek, An equilibrium characterization of the term structure, Journal of financial economics, **5**(2), 1977.

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznali smo se s procesom difuzija. U prvom poglavlju smo definirali stohastičke diferencijalne jednadžbe. Krenuli smo od Riemannovog integrala, definirali Riemann-Stieltjesov integral nakon čega smo došli do Itôvog integrala, Itôve formule i važnijih svojstava za razumijevanje koncepta stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. U drugom poglavlju, koji je i glavni dio rada detaljnije smo razradili difuzije. Definirali smo difuzije preko stohastičkih diferencijalnih jednadžbi te preko Markovljevih procesa. Opisali smo infinitezimalne parametre, definirali vrijeme prvog zaustavljanja i difuzije sa zaustavljanjem koje smo objasnili pomoću primjera. Zatim smo naveli uvjete pomoću kojih se može provjeriti je li stohastički proces difuzija. Slijedi definiranje gustoće skaliranja i gustoće mjere brzine pomoću kojih smo definiral funkcije $S\langle l, x], M\langle l, x], \Sigma(l), N(l)$. Pomoću tih funkcija smo odredili vrste granica intervala na kojem je difuzija definirana. Granica može biti privlačeća, dostižna, nedostižna te ih po Felleru dijelimo na regularnu, izlaznu, ulaznu i prirodnu. Iduće smo definirali infinitezimalni generator, uz koji se vežu i Kolmogorovljeve jednadžbe. Također smo uočili i da je rješenje Kolmogorovljeve jednadžbe unazad prijelazna funkcija gustoće procesa, dok je rješenje vremenski nezavisne Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed funkcija gustoće stacionarne distribucije procesa. Na Ornstein-Uhlenbeckovom procesu smo pokazali kako izgledaju Kolmogorovljeve jednadžbe, uočili smo da je Vasičekov model specijalan slučaj Ornstein-Uhlenbeckova procesa koji se često koristi za modeliranje kamatnih stopa. Treće poglavlje temelji se na Pearsonovim difuzijama. Može se reći da Pearsonove difuzije možemo definirati na dva načina, pomoću Pearsonove diferencijalne jednadžbe do koje je Kolmogorovljev došao proučavanjem Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed te kao rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe određenog oblika. Na kraju smo naveli tri Pearsonove difuzije, njihove stohastičke diferencijalne jednadžbe, parametre, funkciju prijelazne gustoće te grafički prikazali simulacije trajektorija.

Ključne riječi: difuzija, stohastička diferencijalna jednadžba, Markovljev proces, Pearsonove difuzije, Kolmogorovljeve jednadžbe, infinitezimalni parametri, prijelazna funkcija gustoće.

Summary

In this thesis, we introduced the diffusion process. In the first chapter, we defined stochastic differential equations. We started from the Riemann integral, defined the Riemann-Stieltjes integral, after which we came to the Itô integral, Itô formula and more important properties for understanding the concept of stochastic differential equations. In the second chapter, which is also the main part of the paper, we have elaborated diffusions. We defined diffusions via stochastic differential equations and Markov processes. We have described the infinitesimal parameters, defined the hitting time and diffusion with killing, which we explained with the help of example. We have then outlined the conditions by which the stochastic process can be verified as diffusion. The following is to define the scale function and the speed density by which we have defined the functions $S\langle l, x], M\langle l, x], \Sigma(l), N(l)$. Using these functions, we have determined the types of boundaries. The boundary can be attracting, attainable, unattainable and, according to Feller, we divide them into regular, exit, entrance and natural. Next, we have defined the infinitesimal generator, which is linked to the Kolmogorov equations. We have also noticed that the solution of the Kolmogorov backward equation is a transition density, while the solution of the time-independent Kolmogorov forward equation is a stationary distribution of the corresponding diffusion. In the Ornstein-Uhlenbeck process, we have showed what the Kolmogorov equations look like, we have noticed that the Vasicek model is a special case of the Ornstein-Uhlenbeck process, which is often used for interest rate modeling. The third chapter is based on Pearson diffusions. It can be said that we can define Pearson diffusions in two ways, using the Pearson differential equation that Kolmogorov obtained by studying the Kolmogorov forward equation and as a solution of a stochastic differential equation of a certain form. Finally, we have listed the three Pearson diffusions, their stochastic differential equations, the parameters, the transition density and graphically depicted the simulations of the sample paths.

Key words: diffusion, stochastic differential equation, Markov processes, Pearson diffusions, Kolmogorov equations, infinitesimal parameters, transition density.

Životopis

Rođena sam 20. rujna 1995. godine u Osijeku. Nakon završene Osnovne škole Frana Krste Frankopana upisujem III. gimnaziju u Osijeku. 2014. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Preddiplomski studij završila sam 2017. godine uz završni rad na temu Krivulje drugoga reda. Iste godine upisujem diplomski studij Financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Stručnu praksu odradila sam u Hrvatskoj agenciji za hranu i poljoprivredu u Osijeku.