Poučavanje algebre iz perspektive učitelja.

Anić, Marina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marina Anić

Poučavanje algebre iz perspektive učitelja

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marina Anić

Poučavanje algebre iz perspektive učitelja

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Matematika je jedan od glavnih predmeta u osnovnom obrazovanju, često i u nastavku obrazovanja u srednjoj školi, a neizbježan je uvjet upisa na bilo koju višu razinu obrazovanja na učilištima, veleučilištima i sveučilištima. Algebra kao njen vitalan dio velik je dio onoga što matematika obuhvaća te je stoga važnost njenog kvalitetnog poučavanja izrazito bitna. Ovaj rad otkriva s kojim se problemima susreću učitelji matematike u poučavanju algebre i na koji način se s tim problemima suočavati. Prvo pitanje je pitanje inicijalne motivacije učenika. Rad obrađuje način na koji učitelji trebaju pristupiti nagovoru na algebru počevši od intuitivnosti tablice višekratnika broja tri gdje učenici zapažanjem da je 300 stoti broj u tablici nesvjesno rješavaju jednadžbu $3n = 300$. U nagovoru na algebru rad razmatra argumente korisnosti i zanimljivosti algebre te zaključuje da učenike učimo i drugim granama znanosti i umjetnosti ne samo zbog njihove korisnosti već i zanimljivosti te da je s algebrom odnosno matematikom slučaj isti.
Rad se dalje bavi specifičnostima poučavanja algebre te posebnom kategorijom znanja koju treba posjedovati učitelj algebre. Radi se o spoju stručnog matematičkog znanja i pedagoškog znanja kako bi učitelji lakše razumjeli uzroke učeničkih pogrešaka te pronašli najefikasniji način poučavanja. U svrhu efikasnijeg poučavanja rad iznosi poučavanje algebre u kontekstu odnosno rješavanje stvarnih situacija pomoću algebre kako bi matematiku učenicima prikazali korisnom i učinili zanimljivom te tako utjecali na njihovu motivaciju.U sklopu *algebre u kontekstu* rad odgovara na pitanja što zadatak čini autentičnim i kako ga postaviti te kako uklopiti apstraktne problemske situacije u uvodni dio učenja algebre. Navedeni su često korišteni primjeri neautentičnih zadataka odnosno zadataka koje bi učitelji trebali izbjegavati te primjeri autentičnih zadataka koji mogu poslužiti kao dobar primjer i izvor inspiracije za učitelje.
Rad obrađuje primjer THOAN (Think Of A Number) zadatka gdje učenici povezuju algebru s aritmetikom pokušavajući otkriti "magični trik". Ukazujući na to da autentični zadaci učiteljima nisu jednostavni za postavljanje rad raspravlja o kriterijima autentičnosti i realističnosti. Razjašnjavanje ovih kriterija učitelje usmjerava na izbjegavanje "nerealnih" situacija u zadacima, razgovor s kolegama učiteljima iz drugih prirodnih znanosti i izvlačenje zadataka iz tih dijaloga te na promišljanje situacija koje pobuđuju maštu i zanimanje učenika, a primjenjive su u matematici.
Rad promišlja općeprihvaćeno mišljenje da je za uspjeh u matematici najpotrebnija vježba, te pokušava odgovoriti na pitanje na kakvu vrstu vježbi se ovdje misli. Je li korisnije dovesti se do razine automatskog rješavanja ili fleksibilnog algebarskog razmišljanja ili je moguće usvojiti obje vještine? Na ovu dilemu rad odgovara zadacima koji obuhvaćaju sveukupnost algebarskog znanja: primjenu pravila i kritičko promišljanje. Kako je odnos ove dvije suprotstavljene struje česta tema rasprava, rad istražuje obje. Standardizirani postupci lako rješavaju niz zadataka, a ako ih učenici ne savladaju izloženi su problemima u radu na višoj razini matematičkih zadataka. Koristeći primjere iz literature rad se zalaže za povezivanje algebarskih postupaka s razumijevanjem njhovog značenja i fleksibilnim izborom metoda

rješavanja.
Dalje rad pruža primjere spajanja rutinskog razmišljanja i uvida u osmišljavanju i korištenju zadataka za učenike. Potiče se prakticiranje proceduralnih vještina dok u isto vrijeme traže učenika da pozorno promatra jednadžbe ili funkcije s kojima radi. Oba su pristupa potrebna za potpuno iskorištavanje moći algebre i učenici bi trebali biti sposobni koristiti oba, a zadatak učitelja je obje vještine razviti kod učenika zajedno sa svijesti o važnosti njihovog međuodnosa.
Zbog činjenice da svi učenici griješe u radu su istražene i učeničke pogreške i istraženi su mogući uzroci istih. Često učenici slova odnosno varijable krivo tumače kao objekte i u tim je slučajevima korisno naglašavati da varijable označavaju broj objekata. Objašnjava se i pogreška u kojoj učenici pretjerano generaliziraju distributivno svojstvo algebarskih operacija te se kao rješenje nudi da za provjeru slova zamijenimo brojkama. Česte učeničke pogreške mogu biti prilika za pronalazak onoga što se krije iza tih pogrešaka te za raspravu pravog uzroka. Učenik može postati učitelj u igri zamijenjenih uloga i analizirati rad nekog drugog učenika i na taj način povećati svijest o vlastitim pogreškama. Na ovaj način greške postaju prilike kako za učenika tako i za učitelja jer moguće je da one odražavaju propuste u nastavnom procesu te su nam zbog toga u temi poučavanja algebre izrazito bitne.
Iduće poglavlje koje rad obrađuje bavi se dokazima u matematici. Dokazi u matematici su poticajni i motivirajući za učenike te su stoga izuzetno važni u poučavanju algebre uzimajući u obzir koliko je učitelju bitno da motivira svoje učenike kroz cijeli proces poučavanja. Kritičko razmišljanje trebalo bi biti cilj svog obrazovanja, a posebice matematičkog. Dokazi učenicima daju pouzdanje u njihovu sposobnost kritičkog razmišljanja umjesto slijepog vjerovanja u ono što učitelj izlaže. Iako se dokazi katkad izbjegavaju u nastavi matematike iz različitih razloga, na taj način učenicima se uskraćuje moć generalizacije u algebri. Iako izazovno, uključivanje dokaza u nastavu algebre trebao bi biti zadatak svakog učitelja matematike. Rad pruža primjer jedne formule zajedno s koracima koje je potrebno poduzeti u svrhu dokazivanja s jednostavnim trikom izrezivanja koraka u kojem učenici mogu slagati korake te na taj način sudjelovati u dokazivanju kako bi bolje razumjeli svojstvo koje su dokazali.
U zadnjem poglavlje rad pokazuje kako povezati traženje uzorka s funkcijama te način na koji možemo uvesti pojmove domena, kodomena i slika funkcije.

1 Učenje algebre

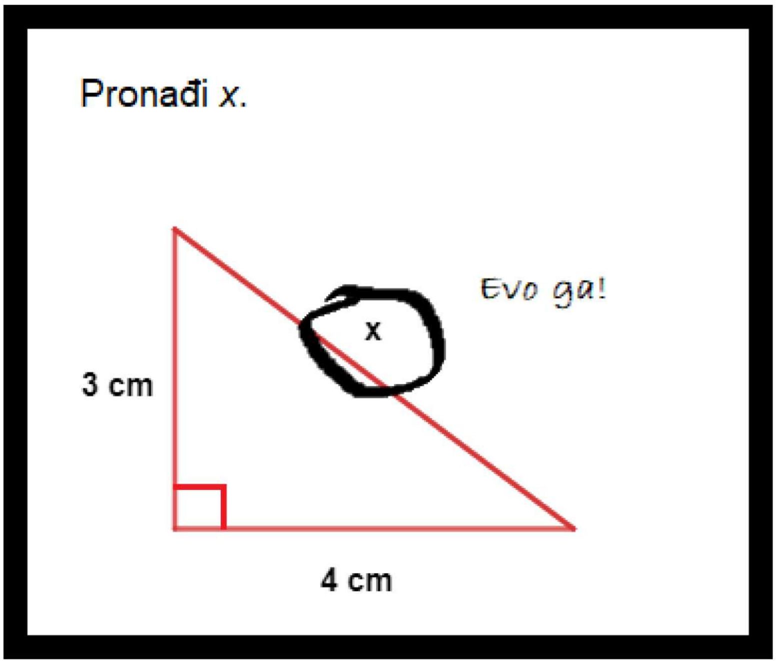
Algebra kao vitalan dio matematike sve je više prihvaćena i kao važan element nastavnog plana i programa matematike. Sastavni dio nove Odluke o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj je i kurikulum nastavnog predmeta Matematika. Domene Matematike kao nastavnog predmeta su: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje i Podatci, statistika i vjerojatnost. Navedene domene se postupno razvijaju i nadograđuju, a udio podjedine domene u godinama obrazovanja prilagođen je razvojnim mogućnostima učenika te potrebi sustavne izgradnje cjelovitoga matematičkog obrazovanja.

> ”U domeni Algebra i funkcije učenici se služe različitim vrstama prikaza; grade algebarske izraze, tablice i grafove radi generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija. Uočavaju nepoznanice i rješavaju jednadžbe i nejednadžbe računski provođenjem odgovarajućih algebarskih procedura i grafički te služeći se tehnologijom kako bi otkrili njihove vrijednosti i protumačili ih u danome kontekstu. Određenim algebarskim procedurama koriste se i za primjenu formula i provjeravanje pretpostavki.” [MZO, 2019.]

Kako se i sama reforma naziva „Školom za život“ vidljivo je da je algebra prepoznata kao moćan alat u rješavanju problema u ”stvarnom” svijetu, no mnogo učenika ne uspijeva naći smisao u algebri niti cijeniti široki spektar njene upotrebe. Upravo zbog toga poučavanje algebre aktualna je tema vrijedna promišljanja u krugovima učitelja matematike.
Iako postoji puno istraživanja i unapređivanja kurikuluma u području poučavanja i učenja algebre, ne postoji jednostavan recept za uspjeh jer su poučavanje i učenje algebre kompleksni zadaci, a sama algebra izazovna. Iako je način na koji ćemo poučavati algebru uvelike određen našim uvjerenjima o učenju i poučavanju algebre kao i o našem pogledu na određen dio koji pokušavamo prenijeti učenicima, ipak postoji okvir ideja na kojima možemo temeljiti svoja poučavanja. Već postojeće ideje vrijedne su proučavanja, ali i daljnjeg istraživanja u cilju unapređivanja prakse poučavanja algebre. Osim načina na koji ćemo gradivo prezentirati važan je i inicijalni stav učenika te njihova motivacija za učenje algebre.

1.1 Zašto učiti algebru?

Ako ne vidimo svrhu i ne možemo dati smisao onome što radimo ili učimo vrlo brzo izgubit ćemo motivaciju. Isto vrijedi i za učenja algebre. Svaki prijedlog algebre kao korisne i zanimljive u neslaganju je s iskustvom mnogih učenika. Učitelji nisu uspješni u prenošenju znanja o pravoj prirodi i moći algebre da predvidi, riješi i dokaže. Ovaj neuspjeh onemogućuje učenicima da donesu informiranu odluku o tome trebaju li nastaviti s učenjem algebre. Cockcroft je rekao da je ”matematika težak predmet za učenje i poučavanje” (Cockfort prema French, 2002.), a isto, s još većim naglaskom, se može reći i za algebru. U očima učenika algebra je često odbojna zbog dodatnog ”kompliciranja” matematike uvođenjem simbola, no ova inicijalna odbojnost proizlazi iz činjenice da imaju problema s objašnjavanjem toga što algebra uopće jest, a posljedično i s odgovorom na pitanje koja joj je svrha. Ovakva pitanja nižu se jer učenici u svom školovanju dobivaju usku, ograničenu i nejasnu sliku algebre. Nažalost i sami učitelji matematike teško odgovaraju na navedena učenička pitanja. Rješavanje ovog problema moglo bi biti u osvještavanju znanja o algebri koje učitelji imaju i sažeto objašnjenje početaka algebre kao i naglašavanje njene intuitivnosti.



Slika 1: Primjer učeničke dosjetljivosti

Algebra svoje korijene ima u aritmetici i geometriji te se razvila kao jezgrovit sistem simbola koji objašnjava veze ili odnose. Na osnovnom nivou ove veze uključuju brojeve i njihova glavna odlika je da izražavaju općenitosti. Kada pogledamo brojeve 3, 6, 9, 12 i 15 prva asocijacija nam je višekratnik broja tri. Znamo da se niz nastavlja sa 18, 21, 24 i ako odemo dovoljno daleko doći ćemo do 99, 300 ili čak 3 milijuna. Osvještavanjem ovog znanja kod učenika stvara se osjećaj svrhovitosti i povećava motivacija za učenje algebre. Naš osjećaj za pravilnost uzoraka vrlo je snažan, a algebra upravo tu općenitost teži opisati te s njom raditi.
Primjetimo da se tablica višekratnika broja tri "povećava za tri", no svaki broj u tablici mnogo je moćniji kada se "uvećava tri puta" što nam omogućuje slučaj u kojem možemo reći da je 300 stoti broj u nizu jer je $3 \times 100 = 300$. Iako nema potrebe ovako jednostavan problem izražavati u algebarskim terminima, mišljenje u njemu u potpunosti je algebarsko i zbog toga je bitno iznijeti ga učenicima. "Nešto" je varijabla koja vrijedi za bilo koji pozitivni cijeli broj te je najčešće označena sa n. "Tri puta nešto" može se zapisati kao $3n$, a zapažanje da je 300 stoti broj u tablici proizlazi iz nesvjesnog rješavanja jednadžbe $3n = 300$.

Mogućnost da općenite numeričke veze izrazimo u simboličkim terminima vrlo je moćna.

Jednom kada znamo da u "tri puta nešto tablici" svi brojevi imaju oblik "tri puta nešto" ili jednostavnije rečeno $3n$, možemo odrediti bilo koji broj u slijedu i možemo upotrijebiti to znanje da riješimo probleme i objasnimo iznenađujuće veze među brojevima.

Slika 2. prikazuje rezultate zbrajanja više različitih skupina brojeva sastavljenih od tri uzastopna broja. Upečatljivo u rezultatima je da je svaki višekratnik broja tri iz čega možemo posumnjati da dodavanjem tri uzastopna broja uvijek daje višekratnik broja tri, ali kako možemo biti sigurni? U algebarskim izrazima; upotrebljavajući varijablu n za označavanje bilo kojeg pozitivnog cijelog broja, tri uzastopna broja mogu se izraziti kao n, $n+1$ i $n+2$. Spajajući ove izraze dobivamo: $n+n+1+n+2 = 3n+3$. Opći rezultat $3n+3$ govori nam

$$1+2+3=6 \qquad 7+8+9=24$$

$$3+4+5=12 \qquad 9+10+11=30$$

$$49+50+51=150 \qquad 22+23+24=69$$

Slika 2: Zbroj tri uzastopna broja

da kada god dodajemo tri uzastopna broja dobivamo višekratnik broja tri, no govori nam i više od toga. Pošto $3n+3$ može biti zapisano i u alternativnom obliku $3(n+1)$, možemo vidjeti koji višekratnik broja tri je uključen: to je tri puta $n+1$ što označava srednji broj. Jasno, ovo svojstvo uzastopnih brojeva je vrlo jednostavno i moglo bi se objasniti i bez upotrebe algebre, no ono je ipak dobar primjer za neke od ključnih značajki algebarskog argumenta. Postavlja se simboličan izraz koji predstavlja zbroj tri uzastopna broja i onda ih transformira u dvije različite forme koje pružaju više informacija za objašnjenje i proširenje svojstva koje je predloženo numeričkim primjerima.

Izum simboličke algebre bio je značajan napredak koji je razumijevanje i rad na kompleksnim situacijama učinio mnogo jednostavnijim. Potreban je velik trud u učenju rada sa simboličkim sistemom, ali kada se njegovi elementi savladaju služi kao veoma moćan alat. Navedeno je učiteljima jasno, no potrebno je isto istaknuti učenicima u cilju objašnjavanja svrhovitosti algebre.

> "Postoji stadij u kurikulumu u kojem uvođenje algebre čini jednostavne stvari teškima, ali ne učiti algebru prouzročilo bi nemogućim učiniti teške stvari jednostavnima." [Tall i Thomas prema French, 2002.]

Bit algebre je u tome da upotrebljava ekonomičan i dosljedan sustav simbola da prikaže izraze i veze koje se zatim koriste u formuliranju argumenata zajedno s predviđanjem, rješavanjem problema, objašnjavanjem i dokazom.

Dva su glavna razloga zašto učiti algebru: prvi je to da je korisna, a drugi da je zanimljiva. Očito je da je algebra korisna onima koji rade u znanstvenim poljima, inženjerstvu, računarstvu i naravno, poučavanju algebre. Samo manji dio učenika će naći ovakve poslove, ali ne možemo znati koji će učenici to biti sve do kasnijih godina školovanja i stoga je bitno da im mogućnosti ostanu otvorene. Međutim, većina neće uvidjeti iskoristivost algebre u svojim poslovima ili igri i nema smisla pokušavati dokazati suprotno.
Algebra je također indirektno korisna na druga dva polja: prvo, omogućuje vrijedan trening vještine promišljanja i poštovanja prema argumentiranju i drugo, daje objašnjenja mnogih pojava u svijetu. Prvi razlog nije dovoljan jer se isto može reći za druge grane matematike i zapravo za svaki drugi školski predmet. Drugo je istinito u pogledu da građanin koji je dobro informiran i zainteresiran za svijet više doprinosi društvu i zadovoljniji je svojim životom. Ovo se odnosi i na drugi razlog koji zagovara učenje algebre koji govori da je algebra zanimljiva i sama po sebi, baš kao što je korisna u razumijevanju zanimljivih pojava. Djecu ne učimo o glazbi, umjetnosti i književnosti jer su one direktno korisne već zato što su potencijalno zanimljive i jer se u njima može uživati. One daju uvid u različite aspekte ljudskog napora. Isto je istinito i za matematiku i njen vitalni dio, algebru.

2 Specifičnosti u poučavanju algebre

Nakon osvještavanja potrebe motiviranja učenika učitelji matematike susreću se s drugim pitanjima:

1. Kako algebru učiniti dijelom matematike koja je već poznata učenicima (objasniti kontekst)?
2. Kako vježbati algebru?
3. Kako pristupiti dokazima u algebri?
4. Kako se suočiti s najčešćim problemima učenika?

Sva navedena pitanja dio su pedagoške problematike poučavanja algebre. Bitno je napomenuti da se motiviranje učenika proteže kroz cijeli proces poučavanja algebre. Početna motivacija samo je nagovor na algebru, točka s koje motiviranje učenika postaje pratitelj poučavanja algebre kroz cijeli proces. Shulman (prema Arcavi, Drijvers i Stacey, 2017.) navodi jednu posebnu kategoriju znanja koju mora posjedovati učitelj matematike: spoj stručnog znanja matematike i pedagoško znanje što zajedno rezultira upravo praksom poučavanja matematike. Takvo znanje nazivamo metodičko znanje.

2.1 Matematičko pedagoško znanje

Studija Baumerta i dr. (2010.) ukazuje na važnost gore spomenute kombinacije stručnog i pedagoškog znanja. Prema studiji, osim navedene kombinacije, izuzetno je važno stručno znanje jer bez njega ograničava se i razvoj kombinacije stručnog (matematičkog) i pedagoškog znanja. Učitelji s dobrim metodičkim znanjem imaju bolji uvid u učenički način razmišljanja, brže prepoznaju uzroke učeničkih grešaka i na temelju toga razvijaju način poučavanja koji učenicima pomaže u lakšem i učinkovitijem učenju.

3 Algebra u kontekstu

Ukoliko učenik shvaća svrhu onoga što uči, učenje će biti produktivnije jer će i sama motivacija rasti. Navedena postavka vrijedi za svaku vrstu gradiva, posebice algebru. Zahvaljujući svom apstraktnom karakteru algebra nije jednostavna za poučavanje te ju je zbog toga potrebno staviti u kontekst koji učenici razumiju. Najčešći primjer stavljanja algebre u kontekst su problemski zadaci za mlađe učenike. Ovdje ćemo pristupiti dvjema dilemama s kojima se učitelji bore u postavljanju problemskih zadataka:

1. Kako postaviti problemski zadatak koji će učenicima biti smislen i svrhovit?
2. Kako uklopiti apstraktne problemske situacije u uvodni dio učenja algebre?

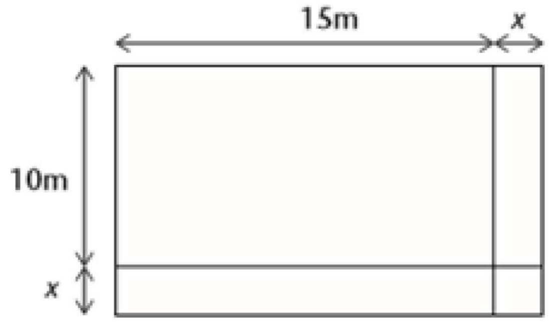
3.1 Autentični problemski zadaci

U potrazi za odgovorom na prvo pitanje, za primjer neautentičnog zadatka koji učenici neće smatrati smislenim i svrhovitim naveden je sljedeći primjer:

Primjer 3.1. *Mjere travnjaka u vrtu su* 10×15 *metara. Vlasnik je odlučio proširiti travnjak. Na dvije strane dodao je trake jednake širine od* x *metara. Vidi sliku ispod.*

1. *Prikaži da je površinu povećanog travnjaka moguće izraziti kao*
   Površina $= x^2 + 25x + 150$.

2. *Novi travnjak ima površinu* $204\ m^2$. *Postavi jednadžbu i izračunaj širinu trake.*

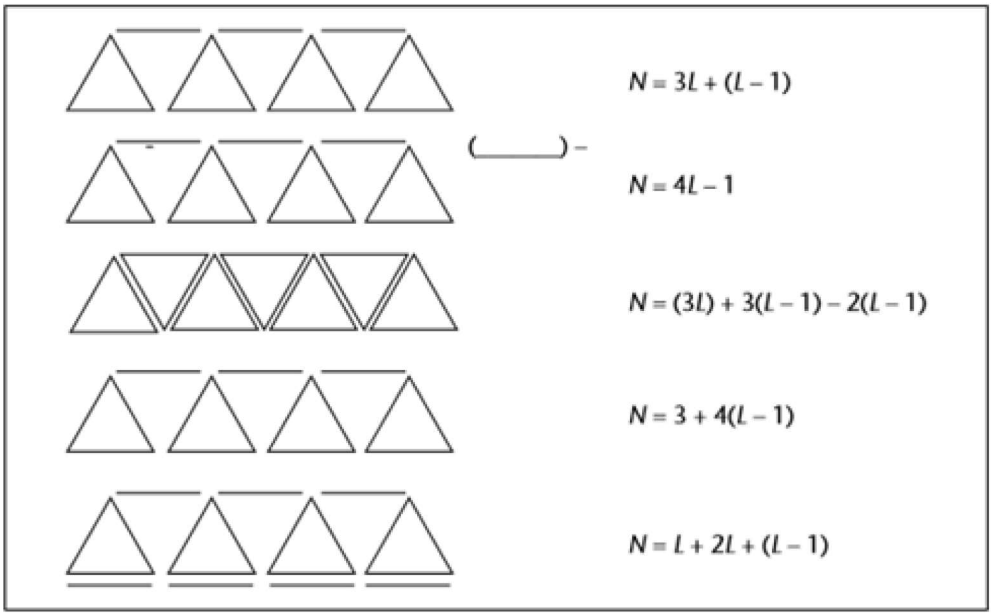


Slika 3: Proširenje travnjaka

U ovom primjeru učenici se mogu zapitati zbog čega proširivanje travnjaka nije unaprijed isplanirano te zašto su dimenzije travnjaka izmjerene tek nakon njegovog produženja. Ovim pitanjima moguće je doći do zaključka da nam algebra u ovom slučaju nije niti potrebna jer bismo odmah mogli izmjeriti širinu traka i izbjeći množenje proširenih dimenzija, a s tim i primjenu algebre. Već tu učenici gube zanimanje za zadatak jer ga ne doživljavaju kao

moguć i stvaran problem. Ovaj problemski zadatak dakle nije autentičan već umjetan način da se učenike uključi u rješavanje algebarske jednadžbe te kao takav nije koristan pedagoški pristup. Štoviše, učenici algebru neće doživjeti korisnim alatom već nepotrebnim kompliciranjem.
Iz ovakvih zadataka učenici zaključuju da se upotreba algebre svodi na snalaženje u nerealističnim pričama iz udžbenika, umjesto da algebru shvate kao moćan alat u rješavanju stvarnih problema. Upravo ovo potonje shvaćanje trebala bi biti težnja matematičkog obrazovanja.

Za primjer autentičnog zadatka, onog bližeg stvarnom životu uzet ćemo sljedeći primjer koji razmatra problem slaganja metalnih greda za krovnu konstrukciju koja je zavarena u trokutasti uzorak. Čak i ako je očito da zadatak nije stvarni građevinski zadatak, učenici su ga doživljavali smislenim i autentičnim jer su u zadatku dodani prikazi stvarnih krovnih konstrukcija. Pogledajmo sljedeću sliku:



Slika 4: Metalne grede za krovnu konstrukciju zavarene u trokutasti uzorak

Slika sadržava prikaz različitih algebarskih formula kojima su učenici riješili zadatak, svaka od njih odražava različite strategije rješavanja. U tim jednadžbama, N označava broj šipki potrebnih za gredu duljine L, a duljina L odgovara ukupnom broju trokutastih baza koje se koriste za formiranje grede. Prva jednadžba, koju su postavili učenici, izražava konstruiranje grede od L trokuta (dakle 3L strane) nizom L - 1 konektora postavljenih preko vrha. Druga jednadžba odražava strategiju dodavanja jedne šipke za izgradnju L "jedinica", pri čemu se svaka sastoji od četiri šipke, i konačno oduzimanje prvotno dodane šipke.

Raznolikost ponuđenih rješenja predstavlja izvrsnu osnovu za raspravu u razredu. Moguće je raspravljati o tome koja su rješenja ispravna, kako jedna jednadžba može biti izvedena iz druge te svaki učenik može objasniti svoj pristup zadatku. Sve navedeno pruža mogućnost za raspravu o pojmu ekvivalencije i drugačijeg zapisa algebarskih izraza.

Druge poznate primjere algebarskih formula u stvarnom životu uključuju zadatke s cijenama u koje je uključen ili nije uključen porez ili za izračun točke isplativosti neke investicije. Navedeni primjeri pokazuju da postavljanje autentičnih i realističnih zadataka nije jednostavno. Ono što jedni percipiraju kao realno, drugima može izgledati nerealno. Ovisno o njihovim prethodnim iskustvima i prethodnom poznavanju konteksta, ali i algebre. Van den Heuvel-Panhuizen i Drijvers ističu da se u kontekstu ovog problema riječ "realističan" treba primjenjivati u smislu onoga što učenici mogu zamisliti, a ne onoga što se odnosi na stvarni život. Drugi kriterij, autentičnost, odnosi se na učeničko percipiranje zadatka kao svrhovitog i smislenog te doživljavanje algebre kao korisnog alata u svakodnevnom životu.
Budući da učenici s godinama napreduju u matematici, problemski zadaci ne moraju uvijek biti stavljeni u realan kontekst. Moguće im je dati i apstraktniji karakter. Razmotrit ćemo par primjera. Prvi od ovih apstraktnih primjera vuče korijene iz aritmetike.

Primjer 3.2. *Izračunajte koliko je:* $2 \times 2 - 1 \times 3, 3 \times 3 - 2 \times 4, 4 \times 4 - 5 \times 3.$

Od učenika se traži da izračunaju $2 \times 2 - 1 \times 3, 3 \times 3 - 2 \times 4, 4 \times 4 - 5 \times 3$ i oni će primijetiti da je rezultat uvijek jednak i iznosi 1. Zašto je to tako? To može potaknuti na izražavanje svojstva u općem obliku: $a^2 - (a+1) \times (a-1) = 1$. Naravno, taj identitet zahtijeva dokaz koji se lako može dobiti proširivanjem i pojednostavljivanjem izraza na lijevoj strani.

Za još jedan primjer takvog zadatka uzet ćemo tzv. THOANs probleme (iz engleskog Think Of A Number).

Primjer 3.3. *Pomislite na neki broj, dodajte mu 1, udvostručite rezultat, dodajte 3, oduzmite 4, dodajte 5, prepolovite rezultat, oduzmite 2 i oduzmite broj na koji ste prvotno pomislili.*

Bez obzira koji broj zamislili, rezultat će uvijek biti 1. Ovdje nam algebra služi kao alat za dokazivanje navedenog.

Sličan primjer je i zadatak s godinama koji glasi:

Primjer 3.4. *Moj otac dvostruko je stariji od mene, a zajedno imamo 75 godina. Koliko imam godina?*

Primjer zadatka s godinama može zahtijevati primjenu određenih numeričkih metoda isprobavanja te može biti manje prikladan za demonstriranje značenja i snage algebre dok je THOAN u prednosti jer su takvi zadaci zagonetni i izazovni za učenike dok istovremeno povezuju algebru s aritmetikom. U ovakvim primjerima učenici ciljaju na otkrivanje trika koji se krije iza magičnog pogađanja zamišljenog broja što ih čini intrigantnima iako nisu smisleni u stvarnom životu.

Iz svega navedenog vidljiva je važnost naglašavanja svrhe algebre i značenja koje ona može imati za učenike. To ćemo naglasiti autentičnim kontekstima te izbjegavanjem umjetnih konteksta u odabiru zadataka.

Stavljati algebru u kontekst moguće je na nekoliko načina:

1. Prilikom pripreme nastavne teme gdje učitelj kritički razmatra primjene algebre u zadacima i pokušava izbjeći umjetne problemske situacije koje učenicima neće pružiti smisleni doživljaj algebre.

2. Nakon eliminacije umjetnih situacija potrebno je pronaći autentične problemske situacije koje će ukazivati na svrhu algebre. Već je ranije spomenuto značenje autentičnosti u ovom kontekstu; autentičnost se ovdje očituje kroz učeničko percipiranje zadatka kao svrhovitog i smislenog te doživljavanje algebre kao korisnog alata u svakodnevnom životu. Uzevši to u obzir, zadatke koji će zadovoljiti te uvjete moguće je naći u on line izvorima, ali i iz dijaloga s kolegama učiteljima iz prirodnih znanosti. Često je potrebno realne situacije "prevoditi" u svijet matematike i nakon procesa rješavanja problema učiniti obrnuto, što ovaj zadatak za učitelja čini još kompleksnijim.

3. Stavljanje algebre u kontekst kroz igre i zagonetke koje pobuđuju maštu i zanimanje učenika, no potrebno je naglasiti da ih ne treba prikazivati kao realistične.

4. Poučavanje algebre uključuje puno više od same primjene algebre. U poučavanje algebre implementirano je pomaganje učenicima da razviju apstraktno mentalno shvaćanje algebarskih objekata i odnosa. Kojom brzinom će ovaj proces biti savladan ovisi o ciljnoj skupini, ali svakako zahtjeva posebnu pažnju učitelja.

4 Produktivno vježbanje algebre

Općeprihvaćeno je mišljenje da je za postizanje dobrih rezultata u matematici potrebna vježba. Isto vrijedi i za algebru. Pitanje koje se ovdje postavlja je; kakva vrsta vježbe? Dovesti se do razine automatskog rješavanja ili fleksibilnog algebarskog razmišljanja te je li moguće usvojiti obje vještine?

> ”Primijetio sam, ne samo kod drugih ljudi, već i kod samoga sebe ... da izvori uvida mogu biti začepljeni automatizmom. Naposljetku, osoba toliko savršeno svlada aktivnost da se pitanja ”kako” i ”zašto” više ne postavljaju, niti se mogu postaviti, niti se više mogu shvatiti kao smislena i relevantna pitanja.” [Freudenthal prema Arcavi, Drijvers i Stacey, 2017.]

Iz navedenog citata vidljivo je da automatsko rješavanje zadataka Freudenthal smatra štetnim za dublji uvid i kritičko promišljanje danog sadržaja. Li pak smatra da je prakticiranje proceduralnih vještina temelj za formiranje koncepta. (Li prema Arcavi, Drijvers i Stacey, 2017.)
U potrazi za vježbom koja će uključivati primjenu pravila ali i poticati učenike na pažnju, kreativnost i razmišljanje potrebni su nam zadaci koji se bave praktičnim vještinama. Ovaj dio rada bavi se zadacima koji obuhvaćaju sveukupnost algebarskog znanja, kako primjenu pravila tako i kritičko promišljanje.
Kindt prema Arcavi, Drijvers i Stacey predlaže tzv. zadatke za produktivnu vježbu. Vježba najčešće ima reproduktivni karakter gdje učenici ponavljaju postupke prikazane u primjerima, no produktivna vježba smjera na zahtjevnije zadatke u kojima se postupci iz riješenih primjera koriste za stvaranje i proizvodnju, pružaju mogućnost spoja proceduralnih vještina s fleksibilnom i kreativnom primjenom istih. U nastavku prikazat ćemo zadatke koji omogućuju produktivnu vježbu.
Prvi primjer koji ćemo pokazati moguće je koristiti nakon što su učenici vježbali proširenje zagrada.

Primjer 4.1. *U sljedeća četiri reda postavite zagrade, ako je to potrebno, na lijevu stranu od znaka jednako kako biste postigli jednakost među izrazima.*

$a + 2 \cdot a + 7 = 3a + 7$
$a + 2 \cdot a + 7 = 3a + 14$
$a + 2 \cdot a + 7 = a^2 + 2a + 7$
$a + 2 \cdot a + 7 = a^2 + 9a + 14$

U ovom primjeru obrnuto pitanje glasi: kako staviti zagrade da bi se postigla jednakost? Ovako postavljen zadatak zahtjeva fleksibilno razmišljanje dok učenici vježbaju vještine proširenja zagrada. Obrnuto razmišljanje usmjerava učenike na značenje onoga što rade umjesto na automatizaciju.

Primjer 4.2. *Oba algebarska izraza* $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ *i* $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ *moguće je svesti na* $\frac{x}{x+1}$.

1. *Dokažite da je navedeno istina.*

2. *Osmislite brojne druge algebarske izraze koje je moguće svesti na* $\frac{x}{x+1}$. *Što raznolikije to bolje!*

U drugom primjeru vidimo da kada se pojedini algebarski razlomci pojednostave, rezultati su isti, iz čega proizlazi manje rutinski i produktivniji zadatak: pronaći druge algebarske razlomke koji se mogu pojednostaviti na isti izraz. Takav zadatak doprinosi određenim varijacijama prilikom vježbanja. Važan aspekt takvog zadatka jest da postoji mnogo točnih odgovora. Raznovrsnost odgovora može biti odličan uvod u raspravu u razredu; moguće je raspravljati o ispravnosti različitih odgovora te načinima na koje su ih učenici pronašli.

Primjer 4.3. *Kvadriraj izraz* $x+6$ *,oduzmi 1 od dobivenog izraza te dobiveno rješenje rastavi na faktore.*

U ovom primjeru se od učenika traži da kvadriraju izraz $x+6$, što rezultira $x^2+12x+36$. Zatim se od njih traži da oduzmu 1 i rastave na faktore rezultat što dovodi do odgovora $(x+5)(x+7)$. Do ovog stadija učenici upotrebljavaju proceduralne vještine, no zatim se od njih traži da ponove ovaj niz operacija za izraze kao što su $x+4, y+10$ i $z+11$. Očekuje se da će to otkriti pomalo iznenađujuću pojavu.
Od učenika se traži da pronađu druge primjere istih svojstava, eksplicitno ih opišu i dokažu. Konačni rezultat je izraz $(x+a)^2–1 = (x+a+1)(x+a-1)$.

Ovdje proceduralne vještine igraju važnu ulogu, no uključuje se i razmišljanje o više primjera, prepoznavanje obrazaca, povezivanje različitih svojstava i generalizacija što nadilazi čisto proceduralni rad. Dokazivanje novootkrivenog pravila možda bude zahtijevalo vodstvo učitelja i može biti prikladna aktivnost za čitav razred, rasprava u kojoj se odgovara na pitanje: kako možemo biti sigurni da će ovo uvijek biti primjenjivo?

Primjer 4.4. *Kategorizirajte sljedeće izraze u dvije skupine. Opišite svaku skupinu. Kategorizirajte iste te izraze, ali ovaj put u tri skupine. Opišite svaku skupinu.*

$$\begin{array}{cccc} x^2-8x+16, & x^2-16, & x^2+8x+16, & x^2+16, \\ x^2-10x+25, & x^2+25, & x^2-25, & x^2+10x-25 \end{array}$$

Ovaj primjer učenicima pruža slobodu osmišljavanja vlastitih kategorija što može rezultirati zanimljivim raspravama u učionici. Kako bi bio još produktivniji, zadatak se može proširiti tako da se od učenika traži da u zbirke dodaju druge izraze i da ih dodijele postojećom kategorizaciji ili da ju prošire.

Iz navedena četiri primjera zadataka produktivne vježbe moguće je uvidjeti i načela ideje produktivne vježbe. Ključno je učenicima dati prostora za stvaranje i proizvodnju umjesto osjećaja da su uhvaćeni u zamku autora zadatka. Zadaci produktivnih vježbi pozivaju na razmišljanje dok se u isto vrijeme temelje na vještinama koje se mogu smisleno prakticirati. U skladu s tim, Friedlander i Arcavi nude popis kognitivnih procesa koje je potrebno razmotriti pri odabiru produktivnih vježbi: obrnuto razmišljanje, konstruiranje primjera i kontraprimjera te globalno razumijevanje.

Kindt je sažeo svoja načela osmišljavanja zadataka produktivne vježbe u deset preporuka: (Kindt prema Arcavi, Drijvers i Stacey, 2017)

1. Postavite obrnuta pitanja radi poticanja mentalne agilnosti.
2. Mijenjajte oblik vježbe i aktivnosti što je više moguće.
3. Izazovite učenike da logično razmišljaju.
4. Izazovite učenike da generaliziraju.
5. Vježbajte zamjenu (supstituciju) "formula u formulama".
6. Vježbajte uklanjanje varijabli u sustavima formula ili jednadžbi.
7. Obratite pozornost na čitanje i pisanje algebarskih izraza.
8. Izazovite učenike da stvore svoje "vlastite produkte".
9. Vježbajte algebru i u geometriji.
10. Tamo gdje je to moguće, održavajte i jačajte prethodno stečene računske i algebarske vještine.

Ovladavanje proceduralnim vještinama važno je i zahtjeva vježbu, no vježba se ne bi trebala svoditi samo na reproduciranje postupaka u svrhu automatizacije. Takav način demotivira učenike i može biti kontraproduktivno. Zadaci za vježbu trebali bi osigurati učenicima prostor za produktivne i izazovne oblike vježbanja koji drže učenike na oprezu i potiču njihovu kreativnost. Pozitivna nuspojava ovakvih zadataka, koji obično imaju više od jednog rješenja, je mogućnost rasprave u razredu. Učinkovito može biti i korištenje uobičajenih zadataka za vježbu no uz male promjene koje će učenicima pružiti više slobode i zadatke učiniti izazovnijima.

5 Usklađivanje rutinskog razmišljanja i shvaćanja

U prošlom poglavlju iznesen je, objašnjen i primjerima potkrijepljen termin produktivne vježbe. U pojašnjavanju termina dotakli smo se odnosa automatiziranih rutinskih postupaka i shvaćanja u algebri. Ovaj odnos česta je tema rasprava te će zbog posljedica na poučavanje algebre biti obrađen u nastavku.

Kao što smo već prije napomenuli, primjena rutinskih postupaka važan je aspekt izvođenja algebre. Standardizirani postupci mogu riješiti velik broj značajnih matematičkih problema. Takva rješenja stečena su napornim radom briljantnih matematičara tijekom više stoljeća i upravo ti standardizirani postupci odražavaju moć algebre. Ljepota standardiziranih postupaka i slijeđenja pravila u algebri vrlo lako se uočava u rješavanju linearnih jednadžbi, kvadratnih jednadžbi i sustava linearnih jednadžbi.
U linearnoj jednadžbi samo pomaknite sve pojmove koji sadrže varijable na lijevu stranu, a sve konstante na desnu stranu. Za kvadratne jednadžbe; samo ih stavite u standardni oblik i primijenite kvadratnu formulu.
Ako učenici ne usvoje ova znanja mogući su problemi kada započnu s radom na višoj razini matematičkih zadataka. Gledajući iz te perspektive moguće je zaključiti da je svladavanje proceduralnih vještina jedan od glavnih ciljeva podučavanja algebre. Ali bavljenje algebrom ne znači isključivo primjenjivati rutinske postupke jer u nekim slučajevima široki niz standardnih postupaka jednostavno nije dovoljan.

Postavlja se pitanje koja je svrha ovladavanja algebarskim postupcima ako je osoba nemoćna kad se iste ne mogu izravno primijeniti?
Fleksibilne vještine analitičkog rasuđivanja važne su za kompetencije 21. stoljeća jer je proceduralne vještine moguće automatizirati i uokviriti u obliku algoritama. Tako možemo zamagliti uvid u temeljno algebarsko značenje i spriječiti fleksibilno rješavanje problema. Sličnu formulaciju nalazimo ranije u radu u citatu Freudenthala.

Arcavi, Drijvers i Stacey iznose iskustvo učitelja čiji su učenici, u dobi od 14 godina, riješili jednadžbu $(x-3)^2+5=30$ proširujući zagrade, nakon čega je uslijedila primjena formula za rješavanja kvadratne jednadžbe, postupak u kojem su učenici skloni pogreškama.
Jednadžba je stajala na ploči i učenici u dobi od 12 godina koji su imali sat nakon starijih učenika primijetili su jednadžbu. Oni su je odmah uspjeli riješiti putem $(x-3)^2=25$ i potom $x-3=5$ ili $x-3=-5$.
Kako nisu znali za kvadratne jednadžbe imali su drukčiji pogled na jednadžbu i pronašli su strategiju za izravan dolazak do rješenja. Radnja koju su izvodili stariji učenici čak i uz dobro poznavanje proceduralnih vještina nosi opasnost od pogrešaka pri izračunu. Ovaj primjer upozorava na ono što je Freudenthal isticao u spomenutom citatu: „uvid zamagljen automatizmom“ (Freudenthal prema Arcavi, Drijvers i Stacey, 2017.) te ukazuje da je dihotomija između automatizacije i uvida moguće izbjeći zadavanjem zadataka koji se bave

praktičnim vještinama, ali istovremeno privlače pažnju učenika te potiču na kreativnost i razmišljanje.

Kompetentnost školske algebre podrazumijevala bi i fleksibilan prijelaz iz rutinskih radnji na smisleno razmišljanje. Uključivala bi i pravovremenu odgodu smislenog razmišljanja u korist brze i učinkovite primjene postupaka, ali i prekid automatske rutine u svrhu propitivanja, razmišljanja, zaključivanja i povezivanja ideja ili stvaranja novog značenja.
Iz ovoga zaključujemo da je prilikom poučavanja algebre postupke potrebno povezati s razumijevanjem njihovog značenja i fleksibilnim izborom metoda rješavanja.

Sljedeći primjeri daju nam moguće odgovore na to kako spojiti rutinsko razmišljanje i uvid u osmišljavanju i korištenju zadataka u razredu. Prvi primjer je tzv. metoda prikrivanja koja nudi fleksibilan pristup rješavanju jednadžbi.

Primjer 5.1. *Riješi jednadžbu:*

$\left(\frac{12}{\sqrt{x+4}}\right)^3 = 27$

Prvi korak za rješavanje ove jednadžbe, koji je mnogim učenicima složen, jest pažljivo pregledati jednadžbu kako bismo primijetili da već znamo nešto o izrazu unutar zagrada koji kada se stavi na treću potenciju iznosi 27. Prema tome, sakrijemo ga prstom. Budući da je treća potencija 27, primjećujemo da bi njezina vrijednost trebala biti 3, što onda zapišemo. Zatim ponavljamo navedeni postupak odabira podizraza i dodjeljujemo mu brojčanu vrijednost, sve dok ne pronađemo vrijednost x, koja je u ovom slučaju 12.

Ova metoda je fleksibilna u smislu da se može koristiti za različite vrste jednadžbi, od kojih neke mogu izgledati prilično složeno. Međutim, ova metoda također ima svoja ograničenja po tome što se može koristiti samo za jednadžbe koje su napisane u obliku u kojem se varijabla pojavljuje samo jednom.

Primjer 5.2. *Pogledaj tablicu i izračunaj.*

Izračunaj x za:	***Deriviraj:***	***Deriviraj:***
$x^2+3x+2=0$	$f(x)=2^x$	$g(x)=e^{2x}$
$x^2+3x+1=0$	$f(x)=3^x$	$h(x)=\sin(2x)$
$x^2+3x=0$	$f(x)=x^3$	$m(x)=\ln(7x)$
$x+3^2=0$	$f(x)=(1/3)^x$	$p(x)=\sqrt[3]{27x}$

Ovaj primjer sastoji se od uključivanja neuobičajenih primjera implementiranih u dobro poznate sljedove vježbi na kakve su učenici navikli iz udžbenika algebre. Na lijevoj strani slike vježbe su koje se odnose na kvadratne jednadžbe. Kada se učenici upoznaju s općom kvadratnom jednadžbom razviju naviku da je kontinuirano koriste. No treća stavka u ovom stupcu poziva na jednostavniju strategiju, a četvrta jednadžba čak nije ni kvadratna.

Na isti način neuobičajen primjer implementiran je i u drugi stupac. U ovom slučaju učenici razviju naviku prema kojoj zanemaruju činjenicu da treća stavka nije eksponencijalna već, u ovom primjeru, kubna. Ovakvi skupovi vježbi imaju za cilj prakticirati proceduralne vještine, ali i tražiti od učenika pozorno promatranje jednadžbi i funkcija o kojima je riječ.

Treći stupac nešto je drukčiji. Od učenika traži da zamisle da je lančano pravilo prekinuto i da funkcije deriviraju primjenjujući druga svojstva. Aktivnost u ovoj vježbi rezultirat će razvojem spoznaje da postoje različiti načini pronalaženja derivacija.

U navedenim primjerima fokus je stavljen na fleksibilan uvid u strategiju rješavanja problema i na razmatranje koji bi korak mogao biti sljedeći. Od učenika se traži fleksibilnost ali i osjećaj za određivanje primjene pravilnog postupka.
Gore navedeni zadaci učenicima daju uvid u uzajamni odnos između vještina u rutinskom proceduralnom radu i strateškog uvida u vrijednost tih rutina u određenim situacijama, mogućnost uključivanja ili isključivanja jednog i drugog kada je to potrebno, svjež pogled na problem kad nam iskustvo pokazuje da sama rutina nije dovoljna. Umjetnost poučavanja algebre leži u pomaganju učenicima da razviju ovakvu vrstu simboličkog smisla.

Zaključak jest da razmatranje odnosa rutine i uvida kao međusobnih protivnika nije razuman pristup u poučavanju algebre. Oba pristupa potrebna su za potpuno iskorištavanje moći algebre i učenici bi trebali biti sposobni koristiti oba: primjenjivati proceduralne vještine ali i pratiti postupak rješavanja problema i koristiti uvid kako bi se prebacili na kreativniji i fleksibilniji način rada u nestandardnim situacijama. Razviti obje vještine kod učenika, ali i osvijestiti važnost njihovog međuodnosa glavni je cilj poučavanja algebre, ali i veliki izazov za učitelja.

5.1 Učeničke pogreške

Svaki učenik ponekad pogriješi. Često je to tzv. tipfeler uslijed pada koncentracije. No moguće je da je uzrok pogreške i ozbiljniji razlog. Koji god razlog pogreške bio, najčešće frustrira i učenika i učitelja. Učenici su frustrirani jer greškama produžuju vrijeme završetka zadatka i čine ga složenijim. Osim vremena koje gube, učenici gube i samopouzdanje. Učitelji su pak frustrirani jer se greške ponavljaju unatoč njihovim strpljivim objašnjenjima, brojnim primjerima i vremenu provedenom u vježbi s učenicima.
Ovo poglavlje pokušat će odgovoriti na pitanje kako riješiti uporne greške poučavanjem algebre.

5.1.1 Primjeri učeničkih pogrešaka

U nastavku ćemo navesti dvije česte vrste učeničkih pogrešaka zabilježenih u stručnoj literaturi.

5.1.1.1 Tumačenje slova kao objekata

Prva vrsta pogreške je tumačenje slova kao objekata. Učenici promatraju varijable kao da one predstavljaju objekte umjesto brojeva. Kako bismo izbjegli ovakvo shvaćanje možemo se poslužiti različitim strategijama poučavanja.

Kao prvo, kad uvodimo pojam varijable pokušati izbjeći prečvrstu povezanost s uključenim predmetima. Arcavi, Drijvers i Stacey navode primjer tzv. algebre voćne salate u kojoj je prisutna primjena slova kao objekata: a su ananasi, b su banane. Navedeni primjer potrebno je izbjegavati te naglašavati da varijable označavaju broj objekata. Ukoliko želimo posegnuti za slikovitim objašnjenjima varijable mogu biti npr. broj kotača.

Druga korisna strategija je početna primjena formula izraženih riječima gdje se preporučuje primjena proširenih naziva varijabli.
Naprimjer: broj kotača $= 4 \times$ broj automobila.
Ovakvim postupanjem može se smanjiti tendencija da se rečenice "svaki automobil ima četiri kotača" ili "postoje četiri kotača za svaki automobil" krivo prevedu u jednadžbe $a = 4k$ ili $4k = a$.

Treća strategija govori nam da je mudro navesti učenike da zamijene probne brojeve u njihovim jednadžbama, odnosno da vide imaju li smisla.

Četvrta strategija ističe da bi bilo dobro da učenici postanu svjesni ove vrste pogrešaka, tako da razviju naviku provjere ovih pogrešaka u slučajevima koji zahtijevaju takvu vrstu prevođenja u algebri.

5.1.1.2 Pojednostavljenje zadataka

Druga vrsta uobičajenih pogrešaka odnosi se na sljedeću vrstu pojednostavljenja:
$a^2 + b^2 = 49$ pa je $a + b = 7$.

Učeničko obrazloženje pojednostavljenja je vjerovanje da je moguće uzeti kvadratni korijen zbroja kao pojedinačni element. Prema Arcavi, Drijvers i Stacey, De Bock i suradnici ovo nazivaju iluzijom linearnosti.

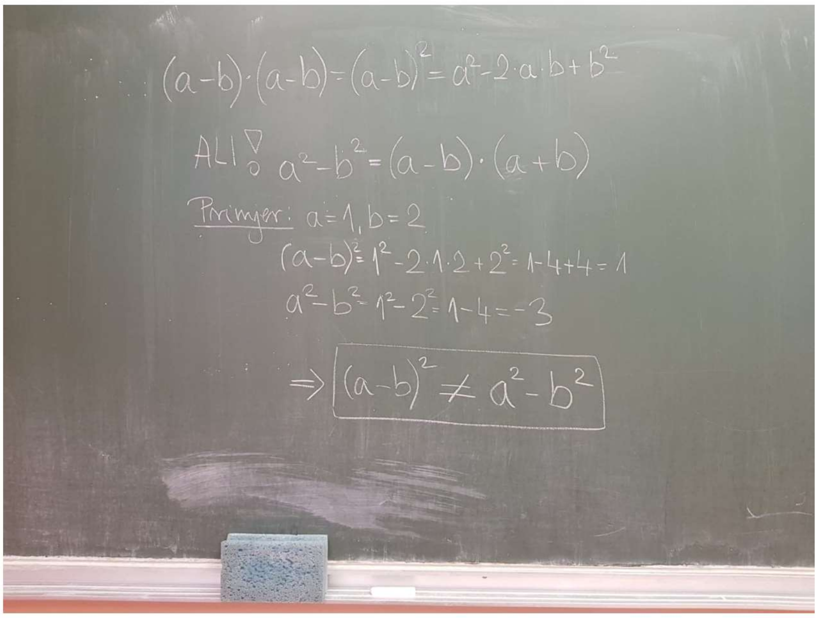
U ovom slučaju to bi se svodilo na:

$a + b = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{49} = 7.$

Problem leži u drugom znaku jednakosti. Kvadratni korijen zbroja nije jednak zbroju kvadratnih korijena.
Učenik ovdje uočava analogiju s problemom u kojem bi slično razmišljanje funkcioniralo, ali s množenjem umjesto zbrajanjem:

ako je $a^2 \times b^2 = 49$, onda je $a \times b = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 \times b^2} = \sqrt{49} = 7$

Isti način razmišljanja funkcionira i ako zamijenimo korijen s faktorom 5 jer:
$5(a^2 + b^2) = 5a^2 + 5b^2$.



Slika 5: Primjer školske ploče iz nastave

Učenici koji prave prvu grešku zapravo pretjerano generaliziraju svojstvo distributivnosti algebarskih operacija: množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje.

Svojstvo distributivnosti ima određenu suptilnost koju nije lako vidjeti. Gore navedena pravila pojednostavljenja su primamljiva zbog njihovog vizualnog izgleda u formulama.
Prikladna strategija za nošenje s ovom vrstom zadatka mogla bi biti da za provjeru i pronalazak kontra primjera slova zamijenimo brojkama.

Pokazivanjem da izračun $1^2 + 2^2$ nije jednak $(1 + 2)^2$ ovdje može biti korisno, a isto vrijedi i za:
$\sqrt{2} = \sqrt{1 + 1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2.$

Za izraz "$a^2 + b^2 = 49$ pa je $a + b = 7$ " možemo upotrijebiti primjer pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine 7 i stranicama duljine a i b. Jasno je da $a+b$, zbroj dvaju strana trokuta mora biti veći od 7. Ovakva provjera na jednostavan način pokazat će učenicima netočnost izraza.

5.1.2 Prepoznavanje pogrešaka

Navedene greške su uporne, teško ih je iskorijeniti, pojavljuju se kad ih najmanje očekujemo i to kroz različite generacije učenika u različitim zemljama. U nastavi ih se ne može zanemariti. Ako ne možemo postići da svi naši učenici mogu raditi algebarska pojednostavljenja bez grešaka, možemo to iskoristiti kao priliku da imenujemo temeljni uzrok tih grešaka na način da eksplicitno raspravimo upravo taj temeljni uzrok.

To možemo napraviti tako da stavimo učenika u položaj učitelja na način da svakom učeniku damo da analizira rad nekog od svojih razrednih kolega. Pogledajmo sljedeće primjere.

Primjer 5.3. *Provjerite rad sljedećih učenika i ispravite pogreške ukoliko ih ima:*

Ana: $-5-\frac{3+6}{3}=-5-1+6=0$

Ivan: $-5-\frac{3+6}{3}=\frac{-15-3+6}{3}=\frac{-12}{3}=4$

Vladimir: $-5-\frac{3+6}{3}=-5-\frac{9}{3}=-8$

Maša: $-5-\frac{3+6}{3}=-5-\frac{9}{3}=-2$

Primjer 5.4. *Od učenika se tražilo da pojednostave izraz:* $\frac{y^2+7y+6}{y^2+8y+12}$. *Jedan učenik bavi se ovim problemom na sljedeći način:*

U prvom koraku je skratio y^2 *u brojniku i nazivniku:* $\frac{7y+6}{8y+12}$

Nakon toga je oduzeo $7y$ *iz brojnika i nazivnika:* $\frac{6}{y+12}$

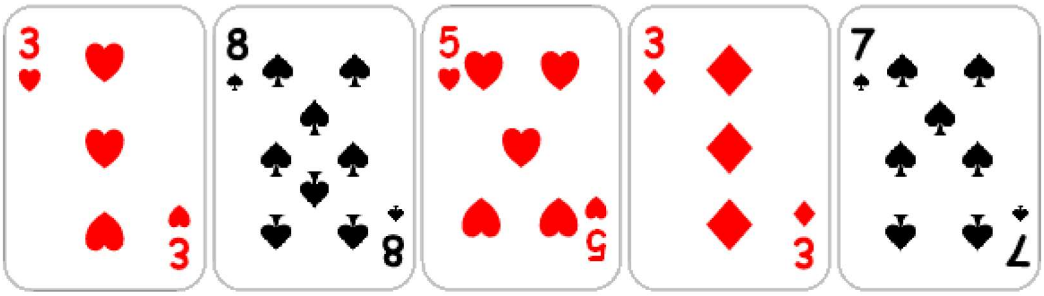
Zatim je oduzeo 6 *iz brojnika i nazivnika. U brojniku ne ostaje ništa te se isti u potpunosti poništava i učenik dobiva rješenje:* $y+6$.

Učenik je napravio nekoliko pogrešaka. Koje su to pogreške?

Zahtijevanje da učenici otkriju pogreške drugih mogu povećati svijest o vlastitim pogreškama i omogućuje učiteljima da odaberu i raspravljaju o vrstama pogrešaka koje žele riješiti.

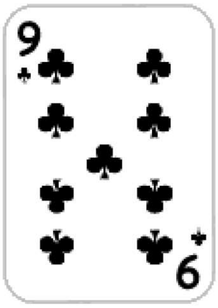
Otkriti i raspravljati o pogreškama možemo i kroz različite igre koje vrlo lako u današnje vrijeme možemo pronaći na internetu. Igra potiče kreativnost i maštu i kroz igru se lakše uči.

Primjer 5.5. *Učenike podijelite u grupe te svakoj grupi dajte špil karata. Iz špila karata izbacite sve karte s "licima" (as, kralj, dama, dečko). Nakon toga u svakoj grupi jedna osoba promiješa špil i okrene prvih pet karata licem prema naprijed da se vide brojevi kao na Slici 6. Nakon toga se izvlači još jedna karta i ta karta je traženi broj i postavimo ju sa strane.*



Slika 6: Prvih pet izvučenih karata

Zamislimo da su izvukli broj 9 (Slika 7.). Učenici trebaju koristeći izvučene karte i matematičke operacije dobiti traženi broj koji je u našem slučaju 9.



Slika 7: Traženi broj

Pravila:

1. *Svaki učenik mora iskoristiti barem dvije od zadanih pet karata.*
2. *Svaki broj se može iskoristiti samo jednom.*
3. *Nakon određenog vremena učenici u grupi pogledaju međusobno svoja rješenja i provjere istinitost istih.*
4. *Ukoliko jednadžba nije dobro napisana, učenik gubi dva boda.*
5. *Ukoliko je jednadžba dobro napisana, učenik dobiva tri boda.*

6. *Ukoliko je jednadžba dobro napisana i učenik je iskoristio svih pet karata, dobiva bonus tri boda.*

Dobro je poznato da se učeničke pogreške u algebarskim postupcima ponavljaju. Neke od njih su samo "slučajna greška u pisanju" i učenik će ih odmah prepoznati kao takve, nakon što mu se iste istaknu. Druge pogreške, međutim, mogu odražavati zabludu, ograničen uvid u značenje radnje ili pretjeranu generalizaciju. One mogu imati temelje koji su vrijedni razmatranja. U nastavi, navedene pogreške i pogrešne predodžbe ne smiju se zanemariti, nego ih treba shvatiti ozbiljno. Kao učitelj, osoba može pokušati otkriti i raspraviti razloge koji stoje iza njih. U tom smislu, pogreške su prepreke, ali također i prilike za učenje. One su također i prilike za učitelja, jer pogreške mogu odražavati propuste u nastavnom procesu.

Kako bi pomogli učenicima da razviju uvid u strukturu algebarskih izraza i izbjegnu navedene pogreške,učitelji mogu ponuditi učenicima "algebarske diktate" u kojima je zadatak zapisati algebarske simbole koji odražavaju izraze koje učitelj čita naglas u materinjem jeziku, npr., "zbroj kvadrata a i b".

6 Dokazi u poučavanju algebre

Dokazi čine središte matematike. Ne samo geometrije gdje obično igraju važnu ulogu, nego i algebre, gdje su dokazi potrebni za provjeru istinitosti pretpostavki i svojstava. Dokazivanje ne donosi samo intelektualne nagrade, ono nas također osnažuje sigurnošću da je neki teorem ili pravilo valjana posljedica drugih pravila. Kritičko razmišljanje jedan je od ciljeva suvremenog matematičkog obrazovanja te ne bismo trebali učiti naše učenike da vjeruju isključivo u ono što kažemo.

Učitelji mogu odlučiti da ne obrađuju dokaze iz različitih razloga. Razlog može biti da se dokaze smatra previše apstraktnima i preteškima za učenike ili da je nastava usredotočena na algebru u primjeni, a za dokaze se smatra da se ne uklapaju najbolje u navedeno. Neobraćanje pozornosti na dokaze uskratit će učenicima mogućnost da iskuse moć generalizacije u algebri. Prema tome, jedan od izazova poučavanja algebre jest pomagati učenicima da iskuse dokaze.

Kao primjer možemo uzeti formulu za rješenja kvadratne jednadžbe. U nekim zemljama, ova formula se učenicima predstavlja kao jednostavan trik koji bi trebali naučiti primjenjivati. Kalkulatori sadržavaju programe za izračunavanje rješenja, a cjelokupna demonstracija koju učitelj daje čitavom razredu, većini učenika je zamarajuća. Međutim, ne bi li se ona mogla poučavati na način koji bi potaknuo veći angažman učenika? Pogledajmo sljedeću tablicu.

Formula	**Opis sljedećeg koraka**
$ax^2 + bx + c = 0$	Pomnožite s $a, a \neq 0$
$(ax)^2 + abx + ac = 0$	Nadopunite do potpunog kvadrata
$(ax + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + ac = 0$	Izrazite kvadratni izraz
$(ax + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2-4ac}{4}$	Korjenujte, uz pretpostavku da je $b^2 - 4ac \geq 0$
$ax + \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}$ ili $ax + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}$	Izrazite x
$x = -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ili $x = -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Spremni, riješeno!

U tablici su prikazane formule zajedno sa sljedećim koracima koje je potrebno poduzeti u svrhu dokazivanja.

Učitelj može rezati tablicu u vodoravne trake. U pokušaju da se dokaže formula, skupine učenika zamoljene su da ih stavljaju u ispravan redoslijed.

Drugi i teži pristup bio bi rezati trake okomito, tako da se formule i opisi koraka također razdvoje. To se također može organizirati u okruženju čitavog razreda.

Treći, još teži način bio bi dati učenicima prvu i posljednju formulu te sve opise koraka iz drugog stupca. Zadatak u ovom slučaju bio bi napraviti lanac opisa koraka od prve formule do završne formule i ručno dovršiti međukorake.

Četvrti pristup, za darovite učenike, bio bi samo dati im prvu i konačnu formulu i zatražiti da dođu od jedne do druge.

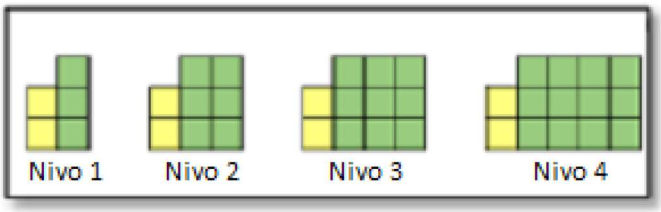
Na kraju, lakši pristup je dati učenicima vodoravne rezove, ali ovaj put s brojevima umjesto parametara a, b i c. Ako različite skupine rješavaju jednadžbe za različite vrijednosti parametara, rasprava čitavog razreda može dovesti do općeg opisa i, u konačnici, do opće formule.

U konačnici, dokaz je neizostavan dio algebre. Iako učenici mogu smatrati dokaze apstraktnima, dokazi i dokazivanje mogu pomoći učenicima da iskuse moć algebre i bolje razumiju svojstvo koje su dokazali. Izazov za učitelje je pronaći sredstva za bavljenje ključnim idejama dokaza putem pristupačnih načina koji u rad uključuju i učenike.

7 Algebra i funkcije

U sljedeća dva primjera navesti ćemo kako povezati traženje uzorka s funkcijama te na koji način možemo uvesti pojmove domene, kodomene i slike funkcije u nastavu jer učitelji često ne znaju kako to uspješno napraviti, a i učenicima je ponekad teško povezati navedene pojmove.
U prvom primjeru imamo diskretan slučaj linearne funkcije, a u drugom primjeru neprekidan slučaj linearne funkcije.

Primjer 7.1. *Pronađi vezu između brojeva nivoa i broja kvadratića na slici:*



Na slici vidimo da Nivo 1 ima dva žuta kvadratića i jedan stupac od tri zelena kvadratića. Nivo 2 ima isto dva žuta kvadratića ali ima dva stupca od tri zelena kvadratića. Nivo 3 ima isto dva žuta kvadratića i ima tri stupca od tri zelena kvadratića. Nivo 4 također ima dva žuta kvadratića ali ima četiri stupca od tri zelena kvadratića. Već sada lagano vidimo uzorak. Vezu između brojeva nivoa i broja kvadratića dobivamo tako da broj nivoa pomnožimo s brojem zelenih kvadratića u jednom stupcu i dodamo mu broj žutih kvadratića.
To lako možemo zapisati funkcijom $f(x) = 3x + 2$ gdje x označava broj nivoa.

Kako bi učenicima bolje objasnili što su domena, kodomena i slika funkcije uvodimo pojmove ulazne i izlazne vrijednosti. Ulazna vrijednost se odnosi na varijablu funkcije, a izlazna na vrijednost funkcije u toj varijabli. U našem primjeru ulazne vrijednosti su brojevi nivoa, a izlazne vrijednosti brojevi kvadratića.

Nakon što učenici shvate razliku između ulaznih i izlaznih vrijednosti postavimo im sljedeća pitanja:

1. Kako biste opisali ulazne vrijednosti?
   Mogući odgovori učenika:

   (a) Pozitivni cijeli brojevi

   (b) Prirodni brojevi

   (c) $\{1,2,3,4\}$

   Učenici bi trebali uvidjeti da ulazna vrijednost -32 ili $\frac{8}{3}$ ovdje nemaju smisla.
   Sada možemo definirati domenu funkcije f kao skup svih ulaznih vrijednosti.

2. Kako biste opisali izlazne vrijednosti?

   Učenici bi mogli odgovoriti da su izlazne vrijednosti svi pozitivni cijeli brojevi. Pošto im je odgovor uglavnom točan on nam daje odličnu raspravu o kodomeni funkcije. Izlazne vrijednosti su pozitivni brojevi ali nisu svi pozitivni brojevi uključeni. Skup svih mogućih izlaznih vrijednosti funkcije f nazivamo kodomenom funkcije f.

3. Možete li malo određenije definirati izlazne vrijednosti?

   Učenici mogu sada opisati izlazne vrijednosti kao skup $\{5, 8, 11, ...\}$ ili kao cijele brojeve koji počinju s brojem pet i povećavaju se za tri, itd.
   Rasprava o ovom pitanju je dobar način za uvođenje definicije slike funkcije kao skupa svih stvarnih izlaznih vrijednosti funkcije f.

Primjer 7.2. *U dvorištu jedne kuće zasađena su dva suncokreta. Njihov rast je opisan na sljedeći način:*
Suncokret A: Početna visina suncokreta je bila 3 *cm i svakim danom je rastao* 2 *cm više.*
Suncokret B: Početna visina suncokreta je bila 6 *cm i svakim danom je rastao* 3 *cm više.*

Opišite funkcijom rast svakog suncokreta.

U tablicama su prikazani podatci rasta za prvih pet dana, a na Slici 8. grafički prikaz rasta suncokreta A i B za prvih pet dana.

Suncokret A	
Vrijeme (dani)	*Visina (cm)*
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

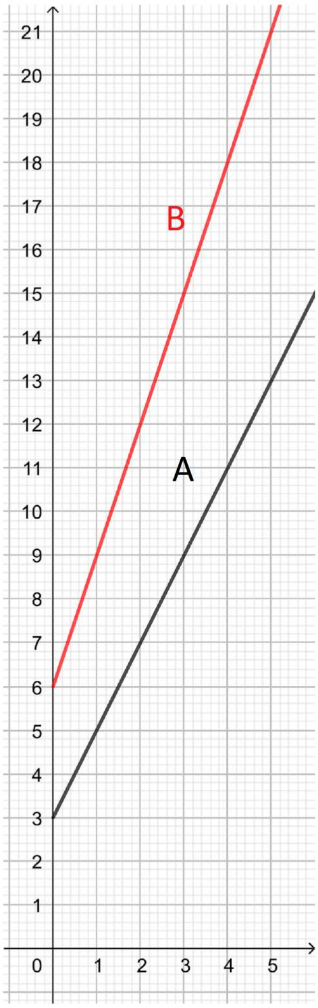
Suncokret B	
Vrijeme (dani)	*Visina (cm)*
0	6
1	9
2	12
3	15
4	18
5	21

Suncokret A: Vezu između dana i visine suncokreta A dobivamo tako da dnevni rast suncokreta A od 2 cm pomnožimo s brojem dana i tomu dodamo početnu visinu od 3 cm što opisujemo funkcijom $f(x) = 2x + 3$, gdje x označava vrijeme u danima.

Suncokret B: Vezu između dana i visine suncokreta B dobivamo tako da dnevni rast suncokreta B od 3 cm pomnožimo s brojem dana i tomu dodamo početnu visinu od 6 cm što opisujemo funkcijom $f(x) = 3x + 6$, gdje x označava vrijeme u danima.

Sada učenicima ponovno postavljamo pitanja kao i u prethodnom primjeru:

1. Kako biste opisali ulazne vrijednosti za suncokret A, a kako za suncokret B?



Slika 8: Grafički prikaz suncokreta A i B

Učenici bi mogli odgovoriti da su ulazne vrijednosti za oba suncokreta iste te da one mogu biti svi realni pozitivni brojevi i nula.
Također bi učenici trebali uvidjeti da za razliku od prethodnog primjera ovdje imamo neprekidni slučaj linearne funkcije i možemo gledati koliko će suncokret narasti ukoliko mu za ulaznu vrijednost stavimo polovicu dana, tj. broj $\frac{1}{2}$ no isto tako trebaju uvidjeti da ne možemo uzeti broj -5 i stoga je domena skup svih pozitivnih realnih brojeva uključujući 0.

2. Kako biste opisali izlazne vrijednosti?

   Učenici bi trebali odgovoriti da su izlazne vrijednosti za oba suncokreta iste te da one mogu biti svi realni pozitivni brojevi uključujući nulu čime smo dobili kodomenu funkcije f za oba suncokreta.

3. Kako biste odredili sliku funkcije f za suncokret A, a kako za suncokret B?

   Učenici trebaju odgovoriti da se slike funkcije f suncokreta A i B razlikuju, tj. da je slika funkcije suncokreta A skup svih pozitivnih realnih brojeva većih ili jednakih od 3, a slika funkcije suncokreta B skup svih pozitivnih realnih brojeva većih ili jednakih od 6.

Literatura

[1] A. Arcavi, P.Drijvers, K. Stacey, *The learning and teaching of algebra: ideas, insights, and activities*, Saxon Graphics Ltd, Derby, 2017.

[2] D. French, *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002.

[3] Professional development service for teachers, *Algebra Through the Lens of Functions Part 1* , https://www.projectmaths.ie/documents/PDF/AlgebraThroughTheLensOfFunctions.pdf?stran

[4] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html

[5] Learn with math games, *Algebra games*, https://www.learn-with-math-games.com/algebra-games.html

Sažetak

Diplomski rad obrađuje temu poučavanja algebre iz perspektive učitelja. Odgovara na pitanja s kojima se susreću učitelji matematike u poučavanju algebre. Obrađuju se pitanja inicijalne motivacije učenika te primjeri kojima je moguće dati argumente u prilog korisnosti i zanimljivosti algebre. Rad se dalje bavi specifičnostima poučavanja algebre te posebnom kategorijom znanja koju treba posjedovati učitelj algebre koja je spoj stručnog matematičkog znanja i pedagoškog znanja. Rad zagovara poučavanje algebre na autentičnim primjerima iz stvarnog života što naziva algebrom u kontekstu. Promišlja se odnos automatskog rješavanja zadataka odnosno korištenja standardiziranih postupaka i fleksibilnog algebarskog razmišljanja i zaključuje o potrebi svladavanja obje vještine. Osvrće se na najčešće učeničke pogreške u algebri, uzroke istih i prilike za učenje koje te pogreške omogućavaju. Rad se također dotiče dokaza u poučavanju algebre i njihove korisnosti u razvoju kritičkog mišljenja učenika, ali i motivaciji koju donosi intelektualna nagrada u dokazivanju.Na samom kraju rada se kroz dva primjera može vidjeti kako povezati traženje uzorka s funkcijama te na koji način možemo uvesti domenu, kodomenu i sliku funkcije u nastavu.

Ključne riječi: poučavanje algebre, stručno matematičko znanje, pedagoško znanje, učenička motivacija, algebra u kontekstu, funkcija

Title and Summary

Teaching algebra from a teacher's perspective

The diploma thesis addresses the topic of teaching algebra from the teacher's perspective. It answers the questions that math teachers encounter in teaching algebra. The matter of initial motivation of students and examples that can be presented as arguments in support of usefulness and interestingness of algebra were being addressed. The thesis further deals with specifics of teaching algebra and the particular category of knowledge that algebra teacher must possess and that is a combination of professional mathematical knowledge and pedagogical knowledge. The thesis advocates for teaching algebra using authentic examples from real life, which it titles as algebra in context. Relationship between automatic problem solving, or usage of standardised methods, and flexible algebraic thinking is being considered which concludes on the need for both skills to be mastered. It reflects on the most common student mistakes in algebra, their causes and learning opportunities that are opened by them. The thesis also touches on the proofs in teaching algebra and their utility in development of critical thinking in students, but also in motivation that the intellectual reward in proving brings. At the very end of the thesis, through two examples, one can see how to connect pattern search with the functions, and a way to introduce domain, codomain and range function into classes.

Key words: algebra teaching, professional mathematical knowledge, pedagogical knowledge, student motivation, algebra in context, function

Životopis

Moje ime je Marina Anić. Rođena sam 26. ožujka 1989. godine u Osijeku. Nakon završene osnovne škole Tin Ujević u Osijeku, upisala sam III. gimnaziju u Osijeku. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja upisala sam Preddiplomski studij na Odjelu za matematiku u Osijeku, a 2012. sam se prebacila na Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. U međuvremenu sam završila Preddiplomski studij matematike 2016. godine. Volontirala sam dvije godine u udruzi "Dokkica" u Osijeku gdje sam podučavala djecu koja su imala teškoće u učenju matematike.