Paradoksi u teoriji vjerojatnosti i teoriji slučajnih procesa

Okopni, Jasna

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Jasna Okopni

Paradoksi u teoriji vjerojatnosti i teoriji slučajnih procesa

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Jasna Okopni

Paradoksi u teoriji vjerojatnosti i teoriji slučajnih procesa

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Tijekom povijesti pojavljivali su se brojni problemi, kontradikcije i paradoksi koji su doveli do osporavanja tadašnjih teorija i poticali traženje novih rješenja. Što je paradoks? "Znam da ništa ne znam." Ova izjava je jednostavan primjer paradoksa. Paradoksom nazivamo tvrdnju koja vodi do kontradikcije ili situacije koja je u suprotnosti s intuicijom. Paradoksi postoje svuda, u znanosti, matematici, filozofiji i u svakom kutku našeg života.

U ovom radu detaljnije ćemo se upoznati s nekim paradoksima iz teorije vjerojatnosti i teorije slučajnih procesa. Za početak opisat ćemo najstarije paradokse poput paradoks kockica i paradoks podjele, potom ćemo definirati pojam nezavisnosti i paradokse vezane uz taj pojam. Nadalje, govorit ćemo i o nekim već poznatim paradoksima poput paradoks Montyja Halla, Bertrandov paradoks i St. Petersburški paradoks. Paradoks o Bernullijevom zakonu velikih brojeva i De Moivreov paradoks su paradoksi koji su vezani za najznačajnije teoreme u teoriji vjerojatnosti. Na kraju poglavlja je rođendanski paradoks koji matematički izračun suprotstavlja prirodnoj intuiciji. Na posljetku, navest ćemo tri paradoksa iz teorije slučajnih procesa: paradoks procesa grananja, paradoks o Brownovom gibanju i paradoks vremena čekanja.

2 Paradoksi u teoriji vjerojatnosti

Ljude su oduvijek zanimale stvari koje su nemoguće ili same sebi protuslovne. Takve zanimljive "pogreške" postoje i u matematici. U ovom poglavlju bit će opisano devet paradoksa koji su vezani za teoriju vjerojatnosti.

2.1 Paradoks kockica

Kockice su bile najpopularnija igra na sreću sve do kraja srednjeg vijeka. Prema grčkoj tradiciji Palamedeo[1] je izmislio kockice kako bi zabavio grčke vojnike dok čekaju bitku kod Troje. Prva knjiga o teoriji vjerojatnosti je "De Ludo Aleae" od Gerolama Cardanoa[2] koja je uglavnom posvećena kockicama te sadrži paradokse kojima se kasnije bavio i Galileo[3] u svome radu.

U teoriji vjerojatnosti osnovni pojmovi su pokus i njegov ishod, tj. elementarni događaj. Pokus čiji je ishod slučajan naziva se slučajan pokus, a za njegovo opisivanje koristimo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vjerojatnosni prostor je matematički model za dani slučajni pokus koji nastaje tako što svakom događaju A, koji je element σ-algebre $\mathcal{F}$ podskupova od $\Omega \neq \emptyset$, pridružuje njegova vjerojatnost $P(A)$ sa svojstvom $0 \leq P(A) \leq 1$, pri čemu je ona potpuno određena tim modelom.

Ako imamo slučajan pokus s konačno mnogo elementernih događaja i ako su svi ti elementarni događaji jednako mogući, onda je vjerojatnost da se realizra događaj $A \subseteq \Omega$ jednaka je kvocijentu broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω, tj.

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Vjerojatnost u klasičnom smislu suprostavlja dio cjeline samoj cjelini. $P(A)$ je oznaka za vjerojatnost događaja A, dok je $k(A)$ oznaka za broj elemanata skupa A.

Paradoks

Pretpostavimo da imamo dvije pravilne (simetrične) kockice. Zbroj točkica na kockicama je između 2 *i* 12. 9 *i* 10 *možemo dobiti na dva različita načina:*

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5$$

$$10 = 4 + 6 = 5 + 5$$

U slučaju kada bacamo tri pravilne kockice, 9 *i* 10 *možemo dobiti na* 6 *različitih načina. Zašto je vjerojatnost da ćemo dobiti* 9 *veća ako igramo s dvije kockice, a* 10 *ako igramo s tri kockice?*

Problem je tako jednostavno riješiti da je u to vrijeme zaista bilo iznenađujuće. Cardano i Galileo su istaknuli da se u obzir mora uzeti poredak brojeva u bacanju. Inače svi rezultati ne bi bili jednako vjerojatni. Označimo događaje s:

A - suma brojava koji su pali je 9.

B - suma brojeva koji su pali je 10.

U slučaju dvije kockice, prostor elementernih događaja je $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, a njegov kardinalni broj iznosi $k(\Omega) = 36$. Događaj A možemo zapisati na sljedeći način

$$A = \{(i, j) \in \Omega : i + j = 9\} = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\},$$

[1] grčki pjesnik i izumitelj

[2] talijanski fizičar, matematičar, astronom, liječnik i filozof.

[3] talijanski matematičar, fizičar, astronom i filozof.

dok je

$$B = \{(i,j) \in \Omega : i+j = 10\} = \{(4,6),(6,4),(5,5)\}.$$

Primjenom klasičnog pristupa računanja vjerojatnost, vjerojatnost događaja A je veća od vjerojatnosti događaja B, tj.

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ P(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$
$$P(A) > P(B).$$

U slučaju tri kockice, prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{(i,j,z) : i,j,z \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, dok je $k(\Omega) = 216$. Također primjenom klasičnog pristupa računanja vjerojatnosti, vjerojatnost događaja "suma brojeva koji su pali je 9" je manja od vjerojatnosti događaja "suma brojeva koji su pali je 10", tj.

$$P(A) = \frac{25}{216},\ P(B) = \frac{27}{216},$$
$$P(A) < P(B).$$

2.2 Paradoks podjele

Paradoks je prvi puta objavio fra Luca Pacioli[4] u svom djelu "Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita" u Veneciji 1494. godine no kasnije je otkriveno spominjanje paradoksa podjele u talijanskom rukopisu koji datira iz 1380. godine[5]. Mnoge stvari ukazuju na to da je problem arapskog podrijetla te da je stigao do Italije proučavanjem arapskog jezika. Ma koliko problem bio star činjenica je da je trebalo jako dugo da se nađe pravo rješenje. Nakon nekoliko neuspješnih pokušaja Pascal[6] i Fermat[7], neovisno jedan o drugome, došli su do točnog rezultata 1654. godine. Otkriće je bilo tako važno da mnogi ljudi tu godinu smatraju rađanjem teorije vjerojatnosti, a svi dotadašnji rezultati pripadaju parpovijesti.

Paradoks
Dva igrača igraju fer igru, tj. obojica imaju iste šanse za pobjedu. Tko prvi dobije 6 *rundi osvaja cijelu nagradu. Pretpostavimo da se igra zaustavi prije nego što ijedan od njih osvoji nagradu (npr. prvi igrač je osvojio* 5*, a drugi* 3 *runde). Kako se nagrada može pošteno podijeliti?*

Ovaj problem zapravo nije paradoks, no neuspješnost u njegovom rješavanju stvorio je legendu paradoksa. Jedan od odgovora je bio podijeliti nagradu u omjeru dobivenih rundi npr. 5 : 3. Tartaglia[8] je predložio podjelu u omjeru 2 : 1. Najvjerojatnije je mislio da je prvi igrač osvojio dva kruga više od drugoga što je $\frac{1}{3}$ od preostalih 6 rundi tako da prvi igrač treba dobiti trećinu nagrade, a ostatak podijeliti na pola. Pošteni omjer je 7 : 1 što je daleko od prethodnih rezultata.

[4]talijanski matematičar, franjevac, suradnik Leonarda da Vincija i jedan od prvih tvoraca modernog računovodstva
[5]otkrio je Øystein Ore, norveški matematičar
[6]francuski filozof, matematičar i fizičar
[7]francuski matematičar i pravnik
[8]mletački matematičar

Pascal i Fermat smatrali su to vjerojatnosnim problemom. Pravedna podjela je omjer vjerojatnosti da prvi igrač pobjedi drugoga i vjerojatnosti da drugi igrač pobjedi prvoga. Pretpostavimo da prvom igraču treba jedna pobjeda od završetka igre, a drugom trebaju tri. Igra će završiti u najviše tri runde, tako da je broj svih mogućih jednako vjerojatnih ishoda $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Najispravnija podjela nagrade je u omjeru $7 : 1$ jer postoji samo jedan mogući ishod da drugi igrač dobije nagradu (kada pobijedi u sve tri preostale runde), dok u ostalim slučajevima pobjeđuje prvi igrač.
Općenito, neka prvom igraču trebaju n, a drugom m pobjeda do kraja. Maksimalni broj rundi do kraja je $n+m-1$, a broj svih mogućih ishoda je 2^{n+m-1}. Izračunajmo kolika je vjerojatnost da prvi igrač osvoji nagradu. Broj svih povoljnih šansi za pobjedu prvog igrača je

$$\binom{n+m-1}{n} + \binom{n+m-1}{n+1} + \cdots + \binom{n+m-1}{n+m-2} + \binom{n+m-1}{n+m-1},$$

tako da je vjerojatnost da prvi igrač osvoji nagradu

$$\frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{j=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{j}.$$

Slično, vjerojatnost da drugi igrač dobije nagradu je

$$\frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{j=m}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{j},$$

a omjer tih vjerojatnosti je upravo omjer u kojem igrači trebaju podijeliti nagradu. Drugim riječima, nije važan broj rundi koje je svaki igrač osvojio, već broj rundi koje svaki igrač mora osvojiti da bi postigao ukupnu pobjedu.

2.3 Paradoksi nezavisnosti

Intuitivmo je jasno da pojam nezavisnosti dvaju događaja A i B podrazumijeva da realizacija jednog od njih ne utječe na realizaciju drugog.

Definicija 2.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da su događaji $A, B \in \mathcal{F}$ nezavisni ako vrijedi:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Sljedeća definicija pojam nezavisnosti događaja generalizira na proizvoljnu familiju događaja.

Definicija 2.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je proizvoljna familija događaja $(A_x, x \in I) \subseteq \mathcal{F}$ nezavisna ako za svaki konačan skup različitih indeksa $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ vrijedi*

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Ako za familiju događaja $\{A_i : i \in I\}$ vrijedi $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ za sve $i \neq j$ onda je ona nezavisna u parovima.
S. N. Bernstein[9] je skrenio pozornost na sljedeći paradoks.

[9] ruski matematičar

Paradoks
Bacamo dva pravilan novčića. Neka su događaji:

$$A - \textit{na prvom novčiću je pala glava},$$
$$B - \textit{na drugom novčiću je pala glava},$$
$$C - \textit{na jednom i samo jednom novčiću je pala glava}.$$

Događaji A, B, i C su nezavisni u parovima te bilo koja dva jednoznačno određuju treći.

Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{(P,P),(G,G),(P,G),(G,P)\}$, a pripadne vjerojatnosti događaja su:

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{2}$$

Očito je da su A i B nezavisni, tj.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B),$$

rezultat prvog bacanja je nezavisan o rezultatu drugoga.
Događaji A i C (također B i C) na prvi pogled ne djeluju nezavisno, no kako je

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4},$$

slično

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4},$$

slijedi njihova nezavisnost.
Zaključujemo da su događaji A, B i C nezavisni u parovima jer vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Kako je

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

događaji nisu međusobno nezavisni. Ovaj paradoks pokazuje da nezavisnost u parovima ne povlači međusobnu nezavisnost događaja.

Paradoks
Relacija $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ ne znači uvijek da su događaji međusobno nezavisni.

Ako imamo dvije pravilne kockice prostor elementarnih događaja je

$$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\},\ k(\Omega) = 36,$$

te je svaki događaj jednako vjerojatan. Pretpostavimo da imamo sljedeće događaje:
$A = \{\textit{prvo je pao } 1, 2 \textit{ ili } 3\}$,
$B = \{\textit{prvo je pao } 3, 4 \textit{ ili } 5\}$,
$C = \{\textit{dobivena suma na palim kockicama je } 9\}$.
Vjerojatnosti navedenih događaja su

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{9}.$$

Nadalje definirajmo
$A \cap B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$,
$A \cap C = \{(3,6)\}$,
$B \cap C = \{(3,6), (4,5), (5,4)\}$,
$A \cap B \cap C = \{(3,6)\}$.
Kako je

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A)P(B)P(C)$$

mogli bi pretpostaviti da su događaji međusobno nezavisni. Provjerom nezavisnosti u parovima dolazimo do zaključka da događaji A, B, C nisu međusobno nezavisni jer

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(B)P(C)$$

Drugim rječima, nezavisnost na razini 3 ne povlači nezavisnost na razini 2.

2.4 Paradoks Montyja Halla

U američkom časopisu *Parade* postojala je kolumna *Pitajte Marilyn* u kojoj je Marilyn vos Savant[10] odgovarala na pitanja svojih čitatelja. 1990. godine postavljen joj je problem Montyja Halla koji je vjerojatnosna zagonetka koja se temelji na igri u okviru američkog show *Let's Make a Deal*, a nazvan je prema voditelju Montyju Hallu.

Paradoks
Pretpostavimo da igrač sudjeluje u TV igri na sreću u kojoj bira jedna od triju vrata. Iza jednih je vrata nagrada, a iza preostalih dvaju vrata nalaze se koze. Nakon što igrač izabere vrata, voditelj otvori jedna od preostalih vrata, pokaže da je iza njih koza te pita igrača želi li promijeniti izbor. Ima li igrač veće šanse za pobjedu ako promijeni izbor?

Odgovor od Marilyn je bio da igrač treba promijeniti svoj izbor. Primila je tisuće pisama svojih čitatelja od kojih se velika većina, uključujući i matematičare i znanstvenike, nije složila s njezinim odgovorom.

Mnogo ljudi bi razmišljalo na sljedeći način. Ako voditelj otvori jedna vrata i iza njih se nalazi koza, onda mogu izabrati jedna od preostalih dvaju vrata (zadržati prvotno izabrana vrata ili izabrati nova vrata), tj. svaka vrata imaju vjerojatnost $\frac{1}{2}$ da se iza njih nalazi nagrada, pa im je svejedno hoće li izabrati nova vrata ili ostati pri svom prvom izboru. Takvo razmišljanje je krivo.

[10] žena s najviše ikada postignutih bodova na IQ testu uključujući i muškarce i žene

Na početku igre svaka vrata imaju vjerojatnost $\frac{1}{3}$ da se iza njih nalazi nagrada. Nakon što igrač izabere vrata i voditelj otvori jedna od preostalih vrata te pokaže da se iza njih nalazi koza, igrač ima opciju zadržati svoj izbor ili zamijeniti svoja vrata s vratima koja su ostala zatvorena. Rješenje za ovaj problem je uvijek mijenjati vrata jer vjerojatnost da se nagrada nalazi iza prvih vrata je $\frac{1}{3}$, a iza preostalih dvojih vrata je $\frac{2}{3}$. Ako se jedna od preostalih dvojih vrata otvore i iza njih se nalazi koza znači da je njezina vjerojatnost jednaka 0, pa je vjerojatnost da se nagrada nalazi iza vrata koja igrač nije izabrao $\frac{2}{3}$. Znači, u slučaju da se igrač odluči promijeniti svoj izbor osvaja nagradu s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$.

(a) Početni izbor (b) Potez voditelja

Slika 2.1: Monty Hall problem (preuzeto iz [9])

Pogledajmo sada matematički rješenje ovog problema.
Pretpostavimo da je igrač izabrao prva vrata.
Za početak, definirajmo potpun sustav događaja

Definicija 2.3. *Konačna ili prebrojiva familija događaja* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *u vjerojatnostnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je potpun sustav događaja ako vrijedi:*

1. $H_i \neq \emptyset$ *za sve* $i \in I$,
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ *za sve* $i \neq j,\ i, j \in I$,
3. $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$.

Imamo tri događaja
$A_i - nagrada\ se\ nalazi\ iza\ i - tih\ vrata,\ i = 1, 2, 3,$
koji čine potpun sustav događaja. Zbog slučajnog rasporeda nagrade i koza vrijedi

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Označimo s
$B_i - voditelj\ je\ otvorio\ i - ta\ vrata,\ i = 1, 2, 3.$
Ako je nagrada iza vrata broj 1, voditelj slučajno bira između vrata broj 2 i 3:

$$P(B_2|A_1) = P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}.$$

Ako je nagrada iza vrata broj 2, voditelj mora otvoriti vrata broj 3:

$$P(B_2|A_2) = 0,\ P(B_3|A_2) = 1,$$

a ako se nagrada nalazi iza vrata broj 3, voditelj mora otvoriti vrata broj 2:

$$P(B_2|A_3) = 1,\ P(B_3|A_3) = 0.$$

Za određivanje vjerojatnosti događaja B_i bit će nam potreban sljedeći teorem.

Teorem 2.1 (Formula potpune vjerojatnost). *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $\{H_i : i \in I\}, I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i).$$

Dokaz. Uočimo da događaj $A \in \mathcal{F}$ možemo predstaviti na sljedeći način:

$$A = \bigcup_{i \in I} A \cap H_i.$$

Također uočimo da je $\{A \cap H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, familija disjunktnih skupova. Prema tome slijedi da je

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i).$$

□

Kako voditelj neće otvoriti vrata koja je igrač izabrao slijedi

$$P(B_1) = 0.$$

Korištenjem Formule potpune vjerojatnosti dobivamo

$$P(B_2) = P(B_2|A_1)P(A1) + P(B_2|A_2)P(A2) + P(B_2|A_3)P(A3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_3) = P(B_3|A_1)P(A1) + P(B_3|A_2)P(A2) + P(B_3|A_3)P(A3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Korištenjem sljedećeg teorema dobit ćemo tražene vjerojatnosti

Teorem 2.2 (Bayesova formula). *Neka je* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka je* $A \in \mathcal{F}$ *događaj s pozitivnom vjerojatnosti, tj.* $P(A) > 0$. *Tada za svaki* $i \in I$ *vrijedi:*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Dokaz. Primjenom definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

□

Ako voditelj na primjer izabere vrata broj 2 prema Bayesovoj formuli slijedi

$$P(A_1|B_2) = \frac{P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_2|B_2) = 0,$$

$$P(A_3|B_2) = \frac{P(B_2|A_3)P(A_3)}{P(B_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Analogno za B_3.
Shodno tome, igrač bi trebao promijeniti izbor jer je vjerojatnost za osvajanje nagrade dvostruko veća.

2.5 Bertrandov paradoks

Francuski matematičar Joseph Bertrand objavio je ovaj vjerojatnosni paradoks u svome djelu *Calcul des probabilités.* Bertrandov paradoks je primjer koji pokazuje da vjerojatnosti ne moraju biti dobro određene ako metoda kojom generiramo slučajnu varijablu nije jasno određena.

Definicija 2.4. *Neka je prostor elementarnih događaja Ω ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ koji je izmjeriv (u smislu da postoji njegova mjera $\lambda(\Omega) < \infty$). Geometrijska vjerojatnost proizvoljnog izmjerivog podskupa $A \subseteq \Omega$ dana je formulom:*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Paradoks

Kružnici je upisan jednakostraničan trokut. Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana tetiva te kružnice biti dulja od stranice upisanog trokuta.

Za rješavanje Bertrandovog paradoksa potrebna nam je sljedeća tvrdnja.

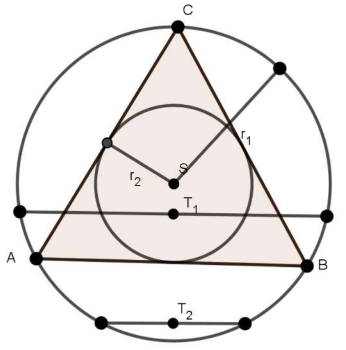
Lema 2.1. *Zadanom kružnicom jednoznačno je određena duljina stranice upisanog jednakostraničnog trokuta.*

Detaljno o prethodnoj lemi možete vidjeti u [3].
Postoje tri metode za rješavanje ovoga paradoksa.
Nasumično izaberemo jednu točku A na kružnici i konstruirajmo jednakostraničan trokut ABC koji je upisan u tu kružnicu.

Prva metoda

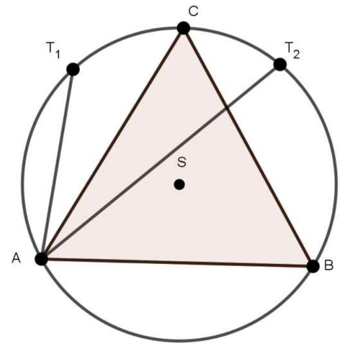
Upišimo kružnicu zadanom trokutu.
Izaberemo bilo koju točku unutar zadane kružnice, koja je različita od središta, kao polovište tetive. Ako je izabrana točka unutar trokutu upisane kružnice, duljina tetive je dulja od stranice trokuta. Znamo da je radijus upisane kružnice r_2 jednakostraničnog trokuta jednak polovici radijusa opisane kružnice r_1. Tražena vjerojatnost je omjer površine upisanog i zadanog kruga:

$$P = \frac{r_2^2\pi}{r_1^2\pi} = \frac{1}{4}.$$



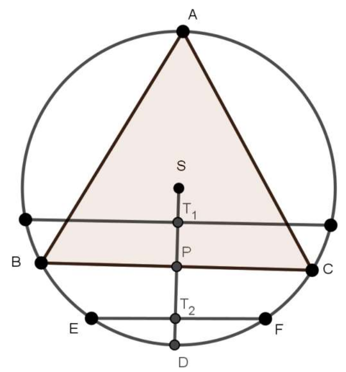
Slika 2.2: Prva metoda

Druga metoda
Na kružnici odaberemo točku T koja je različita od A i tako odredimo tetivu $\overline{AT}$. Ako tetiva siječe stranicu $\overline{BC}$ onda je ona dulja od stranice trokuta. Obzirom da su kružni lukovi nad tetivama jednake duljine jednaki, duljina luka BC jednaka je trećini opsega kružnice. Tražena vjerojatnost je omjer duljine kraćeg kružnog luka i cijele kružnice te iznosi $\frac{1}{3}$.



Slika 2.3: Druga metoda

Treća metoda
Nasumično odaberemo polumjer zadane kružnice $\overline{SD}$ i točku T na tom polumjeru koja je različita od središta i ne pripada kružnici. Kroz tu točku povučemo okomicu na taj polumjer. Točke E i F su sjecišta kružnice i okomice. Rotiramo trokut tako da je jedna stranica okomita na taj polumjer. Označimo s P točku koja je sjecište polumjera i stranice BC. Za svaku točku T na dužini $\overline{PD}$ tetiva će biti kraća od duljine stranice trokuta, a na dužini $\overline{SP}$ će biti dulja od stranice trokuta. Zbog sukladnosti trokuta $\triangle BPD$ i $\triangle BPS$ zaključujemo da je točka P polovište dužine $\overline{SD}$. Tražena vjerojatnost je omjer duljina dužina $\overline{SP}$ i $\overline{SD}$ te iznosi $\frac{1}{2}$.



Slika 2.4: Treća metoda

2.6 St. Petersburški paradoks

Akademija u Sankt Petersburgu objavila je članak u kojem se činilo da matematički račun nije u skladu s razumom, a napisao ga je Daniel Bernoulli[11]. Problem je prvi spomenuo 1713. godine njegov nećak Nicolaus Bernoulli[12].

Paradoks
St. Petersburška igra sastoji se od bacanja pravilnog novčića sve dok ne padne glava. Ako glava padne u r-tom bacanju igrač osvaja 2^r\$. Koja bi bila poštena cijena ulaska u igru?

Ako pri prvom bacanju padne glava, igrač osvaja 2\$, 4\$ ako glava padne u drugom bacanju. Padne li glava prvi puta u trećem bacanju igrač će osvojiti 8\$. Dakle, ako glava padne u k-tom bacanju igrač osvaja 2^k\$, tj. dobit se udvostručuje za svako bacanje. Znamo da s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ glava padne u prvom bacanju, ako glava padne u drugom bacanju znači da je u prvom bacanju palo pismo. Vjerojatnost toga događaja iznosi $\frac{1}{4}$. Ako glava padne u trećem bacanju, vjerojatnost toga događaja je $\frac{1}{8}$ itd.
Da bi smo odredili pošteni ulog trebamo uzeti u obzir kolika bi bila očekivana isplata igraču. Neka X modelira isplatu za jednu odigranu igru, a pripadni je niz vjerojatnosti definiran kao

$$P(X = 2^i) = \frac{1}{2^i},\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Stoga očekivana isplata igraču iznosi

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \cdots = \infty.$$

Dakle, koliko god da na početku igrač uloži u konačnici će profitirati, a kockarnica bankrotirati. Iako je ovaj izračun matematički ispravan, rezultat je bio neprihvatljiv. Nekoliko matematičara je predložilo prihvatljive izmjene.
Gabriel Cramer[13] je predložio pretpostavku o ograničenim resursima koja su na raspolaganju kockarnicama. Neka je taj iznos 1 milijun dolara. Tada očekivana vrijednost dobitka igrača je

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \cdots + 2^{19} \cdot \frac{1}{2^{19}} + \Big(\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{21}} + \cdots\Big)10^6 = 19 + 1.90... \approx 21.$$

Prema tome, igrač treba platiti 21\$ za ulazak u igru što je prihvatljivo za kockarnice.

Daniel Bernoulli uvodi funkciju korisnosti U (engl. utility) kojoj je varijabla trenutni kapital K igrača. Bernoulli je smatrao da svako povećanje kapitala rezultira povećanju korisnosti, koja je obrnuto proporcionalna količini kapitala kojeg igrač trenutno posjeduje, tj.

$$dU \propto \frac{dK}{K}.$$

Slijedom navedenog, funkcija korisnosti ima oblik

$$U(K) = k \log(K) + konst.$$

[11] švicarski matematičar, fizičar, botaničar, oceanograf i anatom
[12] švicarski matematičar
[13] švicarski matematičar

gdje je k parametar. Ako u prethodnoj relaciji postavimo da je $k = 1$ te $konst. = 0$, očekivana korisnost je umnožak korisnosti isplate i vjerojatnosti pripadajućeg ishoda, tj.

$$EU = \sum_{n=1}^{\infty} p_n U(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log 2^n = \log 4.$$

Zaključujemo da prema Brenoullijevoj pretpostavci igrač je spreman platiti najviše 4$ za sudjelovanje u igri.

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Ako za neke nizove brojeva $(a_n, n \geq 1)$ i $(b_n, n \geq 1)$, sa svim $b_n > 0$, vrijedi sljedeći odnos

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to 0, \ \ n \to \infty \tag{2.1}$$

kažemo da $(X_n, n \in \mathbb{N})$ zadovoljava generalizirani zakon velikih brojeva. Je li slabi ili jaki ovisi o tipu konvergencije.

Definicija 2.5. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X na tom istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geq \epsilon\} = 0.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{P} X$.

Teorem 2.3 (Slabi zakon velikih brojeva)**.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli takav da su, za svaki $n \in \mathbb{N}$, slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne s $E[X_n] = \mu$ i neka su varijance tih slučajnih varijabli uniformno ograničene, tj. postoji $M > 0$ takav da je*

$$\max_{k\in\mathbb{N}} VarX_k \leq M.$$

Označimo sa $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| \geq \epsilon\right\} = 0.$$

Ekvivalentno,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| < \epsilon\right\} = 1.$$

Također možemo zapisati $S_n \xrightarrow{P} \mu$.

Dokaz teorema može se vidjeti u [18].
Slabi zakon velikih brojeva nije moguće koristiti u St. Petersburškoj igri jer je očekivana isplata beskonačna. W. Feller[14] je dokazao da će igra biti fer ako je cijena ulaska u igru $b_n = n \log_2 n$,[15] tj. cijena ulaska u igru ovisi o broju igara koje je igrač igrao.
Ako $a_n = b_n = n \log_2(n)$ uvrstimo u (2.1) tada

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n\log_2(n)} - 1\right| < \epsilon\right\} \to 1,$$

tj. $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{P} 1$.

[14]hrvatsko-američki matematičar
[15]detaljnije u [6]

Definicija 2.6. *Kažemo da niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *konvergira gotovo sigurno (g.s.) prema slučajnoj varijabli* X *na tom istom* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako je*

$$P\{\omega \in \Omega; X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = 1.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{g.s} X$.

Teorem 2.4 (Jaki zakon velikih brojeva). *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz* $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, n \in \mathbb{N})$ *konvergira (g.s.) ako i samo ako* EX_1 *postoji i u tom slučaju je*

$$(g.s) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = EX_1$$

Dokaz teorema može se vidjeti u [18].
Kako je

$$P(X \leq 2^i) = \sum_{j=1}^{i} 2^{-j} = 1 - \frac{1}{2^i}$$

slijedi da je

$$P(X > 2^i) = 1 - P(X \leq 2^i) = \frac{1}{2^i}.$$

Primijetimo da za $c > 1$ imamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(X_n > cn\log_2(n)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{cn\log_2(n)} = \infty \tag{2.2}$$

gdje smo koristili činjenicu da je $P(X > x) = \frac{1}{2^{\log_2(x)}}$ za $x > 1$.
Za općeniti niz događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$ definiramo njegov limes inferior i limes superior na sljedeći način:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Lema 2.2 (Borel-Cantelli). [16] *Neka je* $(A_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Ako je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty,$$

onda je

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

[16] dokaz pogledati u [17]

Borel-Cantellijeva lema i (2.2) impliciraju za $c > 1$ i $n \geq 2$

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} > c\right) = 1.$$

Tada je

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} = \infty\right) = 1 \ i \ P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = \infty\right) = 1.$$

Stoga,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = 1\right) = 0$$

pokazuje da $(X_n, n \in \mathbb{N})$ zadovoljava slabi, ali ne i jaki generalizirani zakon velikih brojeva sa $a_n = b_n = n\log_2(n)$, tj. konvergira po vjerojatnosti, ali ne i gotovo sigurno.

St. Petersburška igra se može generalizirati na slučaj u kojem novčić nije pravilan, neka glava padne s vjerojatnošću p $(0 < p < 1)$. Ako je $0 < p \leq \frac{1}{2}$ paradoks je postojan, tj.

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i p(1-p)^{i-1} \geq \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{p}{2^{i-1}} = \infty.$$

Međutim, ako je $\frac{1}{2} < p < 1$

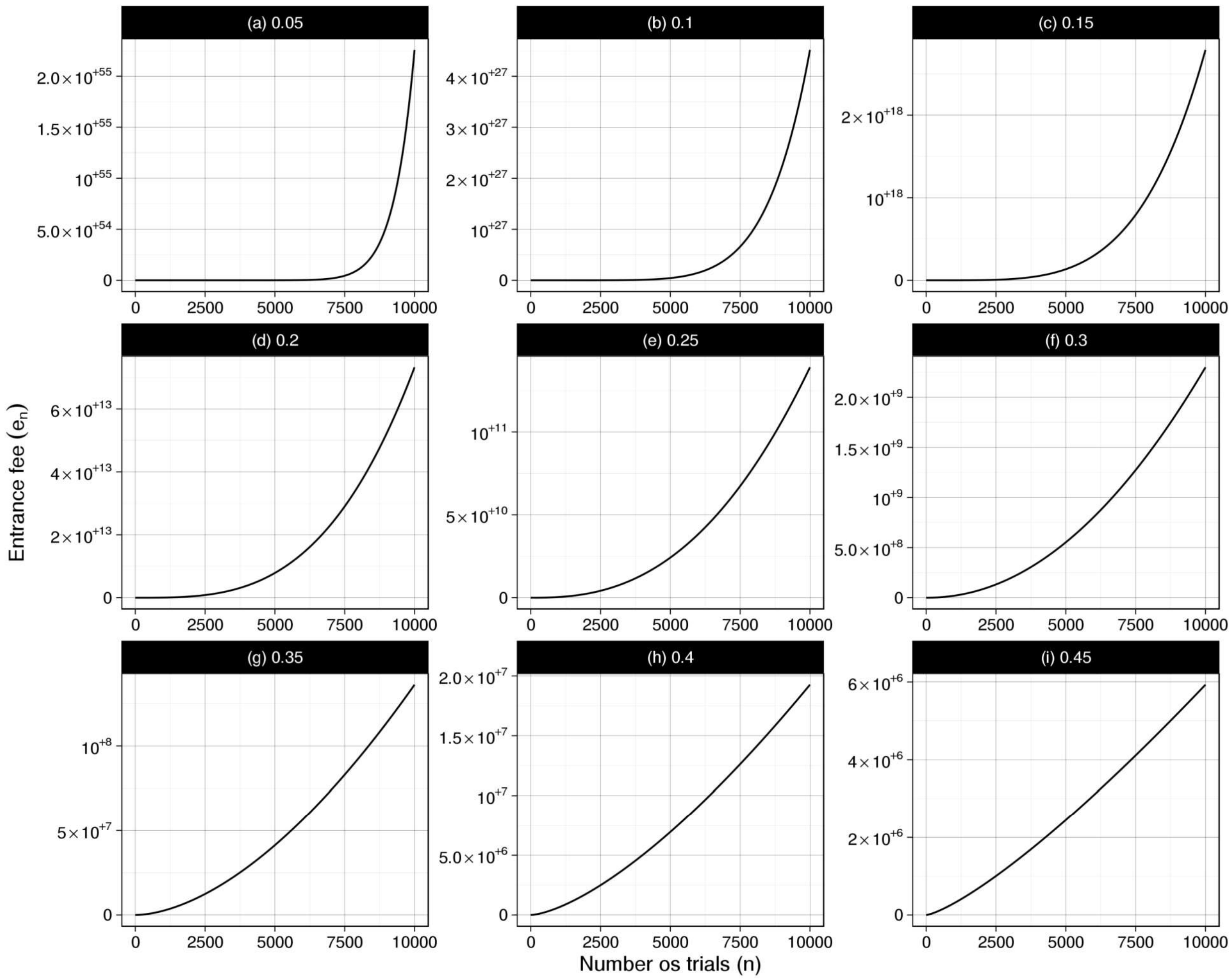
$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i p(1-p)^{i-1} = \frac{2p}{2p-1} < \infty,$$

dakle nema paradoksa. Primjenjujući istu metodu koji je koristio Feller, za igru koja se igra s novčićem vjerojatonsti p $(0 < p < \frac{1}{2})$ da padne glava, cijena ulaska je prikazana u sljedećem teoremu.

Teorem 2.5. *Neka je* $\alpha = \frac{1}{1-p}$. *Ako je* $0 < p < \frac{1}{2}$ *i* $b_n = \frac{2p}{1-2p} n\left(n^{-1+\log_\alpha 2} \log_\alpha n - 1\right)$ *tada za svaki* ϵ

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{b_n} - 1\right| \geq \epsilon\right\} = 0.$$

Dokaz teorema se može vidjeti u [10].
Na slici (2.5) prikazane su vrijednosti ulaznice za odabrane n i p.



Slika 2.5: Cijena ulaznice za različite vrijednosti n i $p \in \{0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45\}$. Na apcisi su pokazane vrijednosti n, a na ordinati vrijednosti b_n, za promatrani p. (preuzeto iz [10])

Uočavamo da kako se vrijednost p smanjuje, cijena ulaznice se povećava za svaki n. Takvo ponašanje je očekivano jer kako vrijednost p opada trebat će duže vremena da se pojavi prva glava te igrač može očekivati da će dobiti više novaca. St. Petersburški paradoks imao je značajan utjecaj u raznim granama ekonomije, statistike, filozofije te teoriji igara.

2.7 Paradoks o Bernoulijevom zakonu velikih brojeva

Prvi slabi zakon velikih brojeva dokazao je Jacob Bernoulli u svojoj knjizi *Ars conjectandi* koja je objavljena nakon njegove smrti 1713. godine. Sam pojam "zakon velikih brojeva" uveo je Poisson[17] 1837. godine.
Bernoullijev zakon velikih brojeva tvrdi sljedeće: Neka je $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, tj. X modelira broj uspjeha događaja A u n nezavisnih pokusa, $P(A) = p$. Tada

$$\frac{X}{n} \xrightarrow{P} p.$$

Navedeni teorem nije tako kompliciran kao što bi se moglo pomisliti iz broja nesporazuma i paradoksa koje je izazvao. Jedan od najtipičnijih je sljedeći.

[17] francuski fizičar i matematičar

Paradoks
Kockari često vjeruju da, prema zakonu velikih brojeva, ako pravilni novčić pada na glavu više puta, vjerojatnost da će pasti pismo nužno se povećava. S druge strane, očito je da novčić nema pamćenje, tj. ne zna koliko je već puta pala glava, a koliko pismo. Iz toga razloga pri svakom bacanju vjerojatnost da padne glava je $\frac{1}{2}$, čak i ako je novčić već tisuću puta zaredom pao na glavu. Nije li to u suprotnosti s zakonom velikih brojeva?

Kockar koji smatra da je razlika između palih glava i palih pisama mora biti vrlo mala je u zabludi, jer zakon velikih brojeva kaže da omjer broja palih glava i ukupnog broja bacanja teži ka $\frac{1}{2}$, kada $n \to \infty$. Ovaj zakon ne podrazumijeva da bi apsolutna razlika između broja palih glava i pisama trebala biti blizu nuli. Čak je tipično za eksperiment bacanja novčića da apsolutna razlika između broja glava i pisama ima tendenciju da postaje sve veća i veća te proporcionalno raste s kvadratnim korijenom broja bacanja. Ako bi razlika bila mala to bi bilo u suprotnosti s nedostatkom memorijskog svojstva novčića. Ovaj zakon ne tvrdi da će oni ishodi, koji se do sada nisu dogodili, češće pojavljivati da bi uravnotežili raspodjelu vjerojatnosti. Treba naglasiti da slabi zakon velikih brojeva ništa ne govori o rezultatima jednog pokusa.

2.8 De Moivreov paradoks

Jedan od najistaknutijih ličnosti u teoriji vjerojatnosti je Abraham de Moivre[18]. Glavno djelo mu je *"The Doctrine of Chances"* objavljeno 1718. godine u kojem se prvi puta spominje funkcija distribucije normalne slučajne varijable i tzv. centralni granični teorem.

Paradoks
Prema Bernoullijevom zakonu velikih brojeva u igri bacanja pravilnog novčića omjer palih glava i pisama teži ka 1, s povećanjem broja bacanja. Dok s druge strane, vjerojatnost da je broj palih glava točno jednak broju palih pisama teži 0.

Bernoullijev zakon velikih brojeva nam tvrdi ako se događaj *"pala je glava"* realizirao m puta, a *"palo je pismo"* n puta u $m+n$ izvođenja pokusa, onda se za veliki broj pokusa broj $\frac{m}{n}$ približava omjeru $\frac{p}{q} = 1$.
Slučajna varijabla X modelira broj palih glava u n bacanja. $X \sim B(n, p = 0.5)$ jer opisuje broj uspjeha (palih glava) u n nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa.
Vjerojatnost da je broj palih glava točno jednak broju palih pisama je

$$P\left(X = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} 0.5^{n/2} 0.5^{n-n/2} = \binom{n}{n/2} 0.5^n = \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2})!} 0.5^n.$$

Korištenjem Stirlingove formule

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

dobivamo

$$P\left(X = \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}}$$

kada n raste, gornji izraz teži ka 0.

[18] francuski matematičar

Ako novčić bacamo $n = 2$ puta onda je prostor elementarnih događaja

$$\Omega = \{(G, G), (G, P), (P, G), (P, P)\},$$

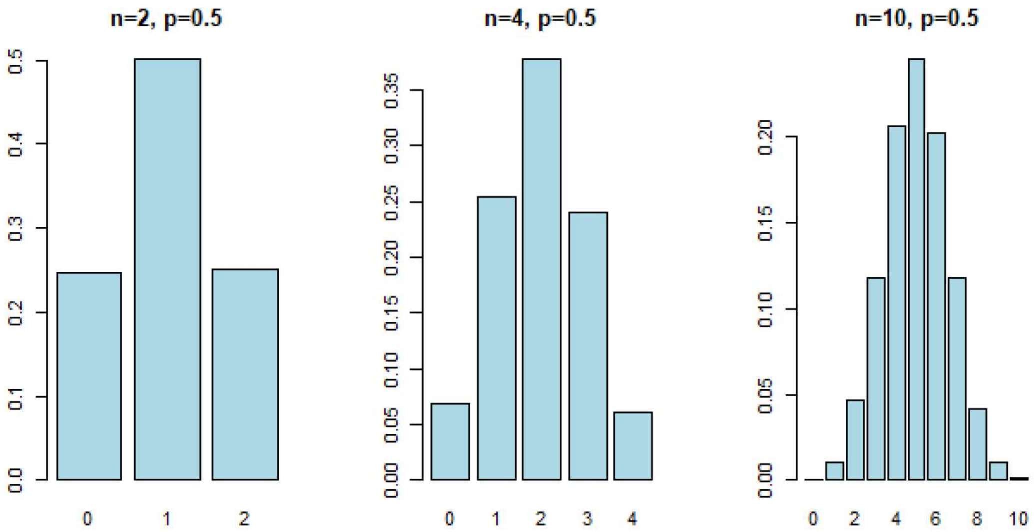
tj. postoji 4 scenarija za okretanje novčića.
Ako je $n = 4$ tada postoji 16 mogućih scenarija, za $n = 8$ je to 256, dok je za $n = 10$ već 1024 kombinacije. Ako bacamo novčić n puta imamo 2^n mogućih kombinacija.
Za $n = 2$, znamo da je vjerojatnost dobivanja jednakog broja glava i pisama (omjer je točno 1) je

$$P(\textit{omjer je točno 1}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Za $n = 4$

$$P(\textit{omjer je točno 1}) = \frac{6}{16} = 0.375$$

kao što je prikazano na slici (2.6).
Općenito, kako n raste, vjerojatnost dobivanja točno istog broja glava i pisama teži ka 0, a to je posljedica činjenice da će biti mnogo više kombinacija gdje broj glava i pisama nije jednak u odnosu na broj kombinacija gdje su jednaki.



Slika 2.6: Binomna slučajna varijabla s parametrima p = 0.5 i n = 2, 4 i 10.

2.9 Rođendanski paradoks

Povijest nastanka rođendanskog paradoksa je nejasna, postoje izvori koji govore da je Harold Davenport[19] prvi bavio ovim problemom, no Richard von Mises[20] je 1930.-ih postavio problem sličan onome kakvim ga mi danas znamo.

Paradoks

Kolika je vjerojatnost da između n osoba, $n \leq 365$, barem dvije osobe imaju rođenadan istoga datuma?

Pretpostavimo da svaka od n osoba može biti rođena s jednakom vjerojatnošću bilo kojeg dana u godini ($\frac{1}{365}$) te zanemarimo postojanje prijestupnih godina i pojavu blizanaca.
Neka je $n = 23$.
Kolika je vjerojatnost da u grupi od 23 osobe barem dvoje njih ima rođendan istoga datuma.
Neka je p tražena vjerojatnost.
Kako je u ovom slučaju jednostavnije računati vjerojatnost suprotnog događaja, tj. vjerojatnost da u grupi od 23 ljudi nema dvoje ljudi s istim rođendanom tu ćemo vjerojatnost označiti s p^c. Kako su navedeni događaji suprotni, vrijedi

$$p = 1 - p^c.$$

U skupu od 23 osobe možemo definirati 23 nezavisna događaja. Označimo ih redom tako da svaki događaj odgovara jednoj osobi koja ne dijeli rođendan ni s jednom osobom koja je ranije analizirana. Za prvi događaj nemamo niti jednu osobu koja je ranije analizirana pa je $P(osoba1) = \frac{365}{365}$. Vjerojatnost za drugi događaj je $P(osoba2) = \frac{364}{365}$ jer smo iz skupa svih dana u godini isključili dan u kojem je prva osoba rođena. Sličnim razmatranjem dobit ćemo da je vjerojatnost da treća osoba nema rođendan kada i prve dvije je $P(osoba3) = \frac{363}{365}$. Nastavimo li iterativnim postupkom dobit ćemo $P(osoba23) = \frac{365-22}{365} = \frac{343}{365}$. Dakle, vjerojatnost p^c možemo opisati kao 23 nezavisna događaja te je izračunati kao umnožak vjerojatnosti svih $P(osobaK)$, $K = 1, \ldots 23$ događaja, tj.

$$p^c = \prod_{K=1}^{23} P(osobaK) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{22}{365}\right) \approx 0.492703.$$

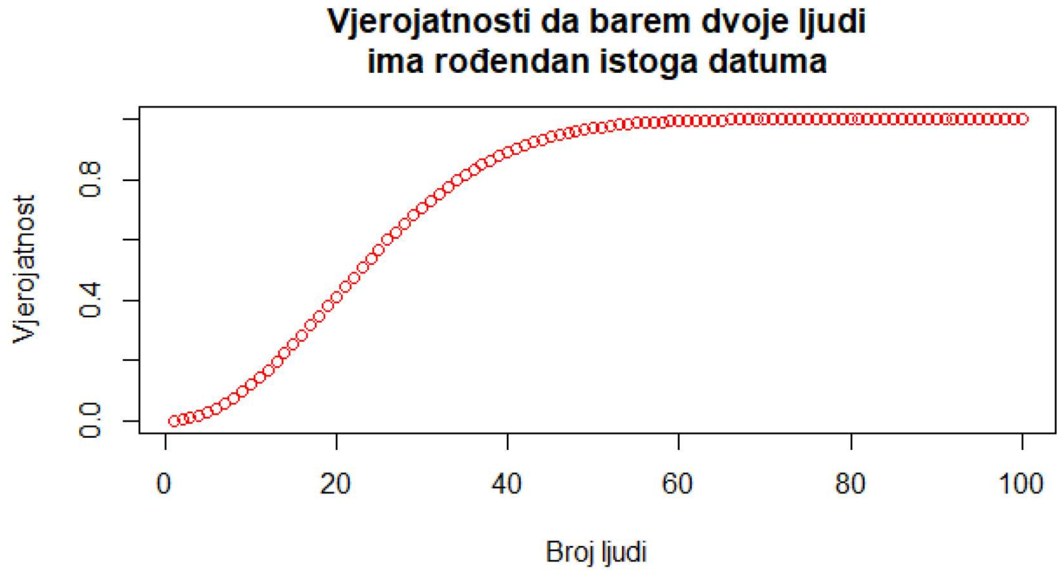
Slijedi da je $p = 0.507297$, tj. vjerojatnost da u grupi od 23 osobe barem dvije osobe imaju rođendan istoga datuma iznosi 50.7297%.
Što je broj osoba (n) veći, to će i tražena vjerojatnost rasti. Na primjer za

$$n = 30 \Longrightarrow p = 70.6\%$$

$$n = 70 \Longrightarrow p = 99.9\%$$

Ovaj rast najbolje prikazuje graf na sljedećoj slici.

[19] engleski matematičar
[20] austrijski matematičar



Slika 2.7: Prikaz izračunate vjerojatnosti da barem dvoje ljudi ima rođendan istoga datuma

Uočimo da p^c možemo zapisati u terminima faktorijela

$$p^c = \frac{1}{365^{23}} \cdot \frac{365!}{(365-23)!}.$$

Općenito,

$$p^c = \frac{d!}{(d-n)!d^n}$$

pri čemu je n broj ljudi, a d broj dana u godini. Slijedi, vjerojatnost da barem dvije osobe u grupi od n ljudi ima rođendan istoga datuma dana je formulom

$$p = 1 - p^c = 1 - \frac{d!}{(d-n)!d^n}.$$

Uočimo da je $p = 1$ za $n \geq 366$. Nevjerojatno je kako velika razlika između broja ljudi može dovesti do tako male razlike između vjerojatnosti 99.9% ($n = 70$) i 100% ($n = 366$). Ovaj paradoksalni fenomen jedan je od glavnih razloga zašto se teorija vjerojatnosti toliko široka u svojoj primjeni. Na primjer, rođendanski paradoks primjenjiv je u informatičkim znanostima koje se bave kriptografijom i kriptoanalizom, tj. kod razbijanja šifra, dekodiranja, zaobilaženja sustava autentifikacije, zapravo za bilo koje provaljivanje kriptiranih podataka.

3 Paradoksi u teoriji slučajnih procesa

U ovom poglavlju definirat ćemo slučajne procese: proces grananja, Brownovo gibanje i proces obnavljanja te paradokse vezane uz njih.

3.1 Paradoks procesa grananja

U prvoj polovici prošlog stoljeća primiješćen je zanimljiv fenomen, a to je postupno izumiranje nekoliko poznatih aristrokratskih obiteljskih prezimena. 1874. godine Galton i Watson objavili su rad od temeljne važnosti za ovu temu i tu počinje teorija o procesima grananja.

Paradoks

Neka su $p_0,\ p_1,\ p_2,\dots$ vjerojatnosti da otac ima 0, 1, 2, ... sina i neka su te vjerojatnosti iste i za njegove sinove i tako nadalje. Muška loza će izumrijeti gotovo sigurno unatoč tome što je očekivani broj potomaka svakog čovjeka jedan.

Neka su $X_0,\ X_1,\ X_2,\dots$ slučajne varijable koje modeliraju broj jedinki (potomaka) populacije u nultoj, prvoj, drugoj, ... generaciji.
Pretpostavimo da je $X_0 = 1$, tj. populacija započinje s jednom jedinkom - predak.
Predak iz nulte generacije reproducira neki broj potomaka X_1, a sam nestaje iz populacije. Svaka jedinka iz prve generacije će nezavisna jedna o drugoj dobiti k potomaka s vjerojatnošću $p_k,\ k \geq 0$, a sama nestati iz populacije, tj. svi članovi $n-$te generacije stvaraju svoje potomke koji čine članove $n+1-$e generacije, a sami umiru i nestaju iz populacije.
X_n je slučajna varijabla koja modelira ukupan broj potomaka koji smo dobili od $n-1-$e generacije i označavamo s

$$X_n = \sum_{r=1}^{X_{n-1}} \xi_{r,n}$$

gdje su $\xi_{r,n}$ $(r \geq 1)$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable koje modeliraju broj članova potomaka koje je stvorila $r-$ta jedinka iz prethodne generacije. Distribucija od $\xi_{r,n}$

$$P(\xi_{r,n} = k) = p_k,\ k = 0, 1, 2, \dots\ i\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Vrijednosti tih slučajni varijabli su nenegativni cijeli brojevi. Dobiveni slučajan proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ nazivamo Galton-Watsonov proces ili jednostavni proces grananja.
Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

$$0 < p_0 < 1 \text{ i } p_0 + p_1 < 1.$$

Definicija 3.1. *Neka je X slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$ i neka je $P(X = k) = p_k$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Funkcija*

$$\varphi(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_k s^k, s \in \mathbb{R}$$

tako da je $|s| \leq 1$ zove se funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable X.

Vrijedi sljedeće:

- $\varphi(0) = p_0$
- $\varphi(1) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 1^k p_k = 1.$

Lema 3.1. *Neka je $\varphi(s)$ funkcija izvodnica vjerojatnosti za $\xi_{r,n}$. Tada su $\varphi(s)$ i $\varphi'(s)$ strogo rastuće za $0 < s < 1$.*

Dokaz. Funkcija izvodnica vjerojatnosti za $\xi_{r,n}$ je

$$\varphi(s) = E[s^{\xi_{r,n}}] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(\xi_{r,n} = k).$$

Deriviranjem dobijemo:

$$\varphi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} P(\xi_{r,n} = k) > 0, \ \ za \ 0 < s < 1$$

jer su svi članovi ≥ 0 i najmanje jedan član > 0 (ako je $P(\xi_{r,n} \geq 2) > 0$). Slično i za

$$\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} P(\xi_{r,n} = k) > 0, \ \ za \ 0 < s < 1.$$

Dakle, $\varphi(s)$ *i* $\varphi'(s)$ su strogo rastuće za $0 < s < 1$. □

Označimo s $\varphi_n(s)$ funkciju izvodnicu vjerojatnosti za X_n, tj.

$$\varphi_n(s) = \varphi_{X_n}(s) = E[s^{X_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) s^k, \ \ n = 0, 1, 2, \dots$$

Koristeći formulu potpune vjerojatnosti (2.1) i činjenicu da su $\xi_{r,n}$ $(r = 1, 2, \dots, j)$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable slijedi

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k | X_n = j) P(X_n = j) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) P(\xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \dots + \xi_{j,n} = k) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \dots + \xi_{j,n} = k) s^k. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Varijable $\xi_{r,n}$ $(r = 1, 2, \dots)$ imaju jednaku funkciju izvodnicu vjerojatnost $\varphi(s)$, a za sumu nezavisnih slučajnih varijabli $S = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \dots + \xi_{j,n}$ je to $[\varphi(s)]^j$. To tvrdimo pošto znamo da vrijedi

$$\varphi_S(s) = \prod_{r=1}^{j} \varphi_{\xi_{r,n}}(s) = \prod_{r=1}^{j} \varphi(s) = [\varphi(s)]^j.$$

Stoga, iz (3.1) dobivamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) [\varphi(s)]^j \\
&= \varphi_n(\varphi(s)) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Pretpostavnimo da $m = E[X_1]$ postoji i da je konačno. Uočimo da vrijedi

$$m = \varphi'(1)$$

tada je

$$E[X_n] = \varphi_n'(1).$$

Deriviranjem (3.2) i postavljanje $s = 1$ daje nam sljedeće

$$\varphi_{n+1}'(1) = \varphi_n'(\varphi(1))\varphi'(1) = \varphi_n'(1)\varphi'(1).$$

Iteracijom i indukcijom slijedi

$$\varphi_{n+1}'(1) = \varphi'(1)\varphi_n'(1) = [\varphi'(1)]^2\varphi_{n-1}'(1) = [\varphi'(1)]^3\varphi_{n-2}(1),\ tj.$$

$$\varphi_{n+1}'(1) = [\varphi'(1)]^n\varphi_1'(1) = [\varphi'(1)]^{n+1},$$

odnosno

$$E[X_{n+1}] = m^{n+1}$$

zato što je $m = E[X_1]$ i $\varphi'(1) = \varphi_1'(1)$.
Označimo s σ^2 varijancu od $\xi_{r,n}$.

Teorem 3.1. *Ako je $\sigma^2 < \infty$, tada je*

$$Var(X_n) = \begin{cases} m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1}\sigma^2 & m \neq 1 \\ n\sigma^2 & m = 1 \end{cases}$$

Dokaz se može vidjeti u [1].

Proces grananja završava u slučaju izumiranja. Kada je $X_n = 0$ onda će i X_{n+1} biti 0 jer kada proces grananja dođe u stanje 0 onda u njemu i ostaje.

Definicija 3.2. *Pod izumiranjem mislimo na događaj da se niz slučajnih varijabli (X_n) sastoji samo od nula osim za konačan broj vrijednosti n.*

Definicija 3.3. *Neka je q vjerojatnost izumiranja, tj.*

$$\begin{aligned} q &= P(X_n = 0 \ za\ neki\ n) \\ &= P\Big((X_1 = 0)\bigcup(X_2 = 0)\bigcup\dots\Big) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X_n = 0\}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\underbrace{P(X_n = 0)}_{označimo\ s\ q_n} = \lim_{n\to\infty} q_n. \end{aligned}$$

Vrijedi

$$q_n = P(X_n = 0) = \varphi_n(0)$$

koristeći svojstvo (3.2) imamo

$$q_n = \varphi_n(0) = \varphi(\varphi_{n-1}(0)) = \varphi(q_{n-1})$$

pa onda vrijedi

$$q_1 = \varphi_1(0) = p_0 > 0,\ q_2 = \varphi(q_1) > \varphi(0) = q_1.$$

Pretpostavimo

$$q_n > q_{n-1},$$

tada je

$$q_{n+1} = \varphi(q_n) > \varphi(q_{n-1}) = q_n.$$

Navedeni rezultati nam pokazuju da $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ monotono rastući niz omeđen s 1. Stoga $\lim_{n\to\infty} q_n$ postoji i njegove granice su $0 < q \leq 1$.

Teorem 3.2. *Ako $m = E[X_1] \leq 1$ vjerojatnost izumiranja q je 1. Ako je $m > 1$, vjerojatnost izumiranja q je jedinstveno nenegativno rješenje jednadžbe*

$$s = \varphi(s)$$

koje je manje od 1.

Dokaz se može vidjeti u [15].

Teorem 3.3. *Ako je $m = 1$ i $0 < \sigma^2 < \infty$ tada je*

$$P(X_n > 0) = \frac{2}{n\sigma^2}(1 + o(1))$$

i

$$E[X_n | X_n > 0] = \frac{n\sigma^2}{2}(1 + o(1))$$

Dokaz. Kako je $\sigma^2 < \infty$ vrijedi $\sigma^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$.[21]
Prema Taylorovom teoremu

$$\varphi(1-u) = \varphi(1) + \varphi'(1)(-u) + \frac{\varphi''(1)}{2}u^2 - o(u^2),$$

kako je $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 1, \varphi''(1) = \sigma^2$ dobivamo

$$\varphi(1-u) = 1 - u + \frac{\sigma^2}{2}u^2 - o(u^2).$$

Označimo s $u_n := P(X_n > 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \varphi_n(0)$ tada je

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= P(X_{n+1} > 0) = 1 - P(X_{n+1} = 0) = 1 - \varphi_{n+1}(0) \\
&= 1 - \varphi(\varphi_n(0)) \\
&= 1 - \varphi(1 - u_n) \\
&= 1 - 1 + u_n - \frac{\sigma^2}{2}u_n^2 + o(u_n^2) \\
&= u_n - \frac{\sigma^2}{2}u_n^2 + o(u_n^2)
\end{aligned}$$

[21] dokaz se može vidjeti u [1]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \\
&= \frac{\frac{\sigma^2}{2} u_n^2 - o(u_n^2)}{u_n^2 - \frac{\sigma^2}{2} u_n^2 + o(u_n^3)} \\
&= \frac{\frac{\sigma^2}{2} - o(1)}{1 - \frac{\sigma^2}{2} u_n + o(u_n)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} + o(1)
\end{aligned}
$$

gdje $o(1) \to 0$ kada $n \to \infty$. Stoga,

$$
\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{i+1}} - \frac{1}{u_i} \right) = \frac{\sigma^2}{2} n + o(n) = \frac{\sigma^2 n}{2} (1 + o(1))
$$

gdje $o(1) \to 0$ kada $n \to \infty$, dobivamo

$$
P(X_n > 0) = \frac{2}{n\sigma^2} (1 + o(1)).
$$

Dok je

$$
E[X_n | X_n > 0] = \frac{E[X_n \mathbb{1}_{\{X_n > 0\}}]}{P(X_n > 0)} = \frac{EX_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} = \frac{n\sigma^2}{2} (1 + o(1))
$$

□

Korolar 3.1. *Ako je $m = 1$ i $\sigma^2 < \infty$ tada je $ET = \infty$, gdje je $T = inf\{n : X_n = 0\}$ vrijeme izumiranja.*

Dokaz. Ako je $\sigma^2 = 0$ tada je $p_1 = 1$, dakle $T = \infty$ gotovo sigurno. Pretpostavimo da je $\sigma^2 > 0$. Ako je $T = \mathbb{1}_{\{X_0 > 0\}} + \mathbb{1}_{\{X_1 > 0\}} + \dots$, onda je

$$
E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n > 0).
$$

Kako je prema prethodnom teoremu

$$
P(X_n > 0) = \frac{2}{n\sigma^2} (1 + o(1)),
$$

onda $E[T] = \sum_n P(X_n > 0)$ divergira, tj. $ET = \infty$.

□

Izumiranje je sigurno ako očekivani broj potomaka po jedinki nije veći od 1. Paradoks se može naslutiti u slučaju kada je $m = 1$. Ako pretpostavimo da je očekivani broj potomka svakog čovjeka jedan ($m = 1$) vjerojatnost izumiranja je i dalje 1. Stoga, unatoč činjenici da prosječan broj muškog potomstva ostaje nepromijenjen tijekom generacije, izumiranja je neizbježno iako je očekivano vrijeme koje prođe do izumiranja beskonačno.

3.2 Paradoks o Brownovom gibanju

Škotski botaničar Robert Brown je 1820. godine otkrio da se čestice peludi raspšene u tekućini nasumično gibaju pa je ta pojava i dobila naziv Brownovo gibanje.

Definicija 3.4. *$(B_t,\ t \geq 0)$ na (Ω, F, P) je slučajan proces u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja koji ima sljedeća svojstva:*

1. *$B_0 = 0$ gotovo sigurno, tj. $P(B_0 = 0) = 1$*
2. *za proizvoljne $t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0$ tako da je $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ slučajne varijable $B_{t_1} - B_{t_0}$, $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su nezavine*
3. *za proizvoljne $s, t \geq 0$ tako da $0 \leq s < t$ je $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*

Definicija 3.5. *Funkciju koja za fiksirani $\omega \in \Omega$ svakom elementu $t \in T$ pridružuje realizaciju $X_t(\omega)$ nazivamo trajektorijom slučajnog procesa $\{X_t, t \in T\}$.*

Dakle, možemo reći da je Brownovo gibanje slučajan proces koji kreće iz 0, ima nezavisne i normalno distribuirane priraste te mu je trajektorija neprekidna i nigdje diferencijabilna.

Paradoks

Trajektorija Brownovog gibanja je jednodimenzionalna krivulja, no može se pokazati da je u određenom smislu i dvodimenzionalna.

Topološka dimenzija svima nam je intuitivno poznata, tj. najbliža je prirodnom shvaćanju dimenzije. Odnosno, broj smjerova u kojima bismo mogli ići da smo u određenom objektu. Prije same definicije objasnit ćemo pojmove koji su važni za njezino razumijevanje. Za početak ćemo definirati topološki prostor.

Definicija 3.6. *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je uređeni par skupa X i topologije $\mathcal{T}$ na X, gdje je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X za koji vrijede sljedeći uvjeti:*

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
- $U_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in J \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$

gdje je J proizvoljan skup indeksa.

Elemente topologije $\mathcal{T}$ nazivamo otvorenim skupovima u X.

Definicija 3.7. *Neka je A proizvoljan podskup topološkog prostora X. Otvoreni pokrivač od A je proizvoljna familija $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ otvorenih skupova koji pokrivaju A, tj. za koje vrijedi:*

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq A, \textit{gdje je } J \textit{ proizvoljni skup indeksa.}$$

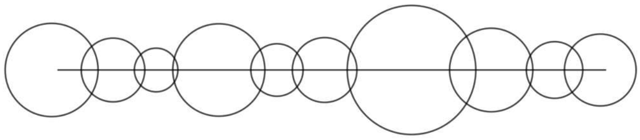
Promotrimo sada otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ topološkog prostora X. Ako fiksiramo točku $x \in X$ i prebrojimo elemente pokrivača koji sadrže x dobivamo broj koji nazivamo multiplicitet pokrivača $\mathcal{U}$ prostora X u točki $x \in X$ i označavamo sa $M(\mathcal{U}, x) \in [1, +\infty]$, tj. broj

$$M(\mathcal{U}) = \sup_{x \in X} M(\mathcal{U}, x) \in [1, +\infty]$$

nazivamo multiplicitet pokrivača $\mathcal{U}$ skupa X te je on prirodan broj koji može biti namanje 1 jer se svaka točka skupa mora nalaziti u barem jednom elementu pokrivača da bi on uopće bio pokrivač tog skupa.

Definicija 3.8. *Topološka dimenzija $M(X)$ prostora X je minimalna vrijednost $k \in \mathbb{N}_0$ takva da za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreno profinjenje*[22] $\mathcal{U}'$ *takvo da je $M(\mathcal{U}') \leq k+1$. Ako takav k ne postoji, smatramo da je $M(X) = \infty$*

Primjer 3.1 (Topološka dimenzija dužine)**.** Za proizvoljan otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ postoji lančasto profinjenje s kuglama (tako da se nikoje 3 ne sijeku) sa središtem na danoj dužini. Jedno od takvih profinjenja dano je na slici (3.1). Uočimo da se točke dužine nalaze u najviše dvije kugle istovremeno. S druge strane, nismo mogli odabrati profinjenje u kojem se kugle ne presijecaju jer neke točke ne bi bile pokrivene pa je najbolje profinjenje multipliciteta 2. Iz toga slijedi da je topološka dimenzija dužine jednaka 1.



Slika 3.1: Lančasti pokrivač dužine

Krivulje, površine i tijela redom su jednodimnzinalne, dvodimenzionalne i trodimenzionalna. Prema topološkoj definiciji Brownovo gibanje je jednodimenzionalno. S druge strane, neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dijametar od $\mathcal{U}$ je definiran

$$\operatorname{diam} \mathcal{U} = \sup\{|x-y| : x, y \in \mathcal{U}\},$$

odnosno najveća udaljenost između bilo kojega para točaka iz $\mathcal{U}$.
Ako je U_α konačna familija skupova $\mathbb{R}^n$ dijametra najviše ϵ koja sadrži F, tj.

$$F \subset \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} U_\alpha,$$

gdje je

$$0 < \operatorname{diam} U_\alpha \leq \epsilon, \ \textit{za svaki } i$$

kažemo da je $\{U_\alpha\}$ $\epsilon-$pokrivač od F. Pretpostavimo da je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ i s nenegativan broj. Označimo s $h_\epsilon^s(F)$ izraz

$$h_\epsilon^s(F) = \inf\left\{\sum_{\alpha=1}^{\infty} \operatorname{diam}\ (U_\alpha)^s : \{U_\alpha\}\ \epsilon - \textit{pokrivač od } F\right\}$$

za bilo koji $\epsilon > 0$.
Puštajući $\epsilon \to 0$ dobivamo $s-$dimenzionalnu Hausdorffovu mjeru skupa F

$$h^s(F) = \lim_{\epsilon \to 0} h_\epsilon^s(F).$$

[22]profinjenje pokrivača je familija koja je i dalje pokrivač danog skupa, a čiji je svaki element podskup nekog elementa pokrivača koji profinjujemo

Definicija 3.9. *Hausdorffova dimenzija skupa F je vrijednost*

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : h^s_\infty(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : h^s_\infty(F) > 0\}$$

Teorem 3.4. *S vjerojatnošću 1, trajektorija Brownovog gibanja u $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ima Hausdorffovu dimenziju jednaku 2.*

Dokaz teorem može se vidjeti u [13].
B. Mandelbrot[23] je razvio granu matematike koja proučava neregularne i fragmetirane uzorke, odnosno fraktale. Mandelbrot je fraktal definirao kao skup za koji je Hausdorffova dimenzija strogo prelazi topološku. Fraktali igraju temeljnu ulogu u opisivanju nepravilnih oblika u prirodi.

3.3 Paradoks vremena čekanja

Pretpostavimo da imamo beskonačnu zalihu baterija čija su trajanja modelirana nezavisnim jednako distribuiranim slučajnim varijablama. Pretpostavimo da koristimo jednu po jednu bateriju, a kad jedna pregori automatski ju zamijenimo novom. Pod tim uvjetima $\{N(t), t \geq 0\}$ je proces obnavljanja gdje $N(t)$ predstavlja broj baterija koje su pregorjele zaključno s trenutkom t.

Neka je $\{X_n, n \geq 0\}$ niz nenegativnih nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te je njihova distribucija dana funkcijom

$$F(x) = P(X_n \leq x), n \geq 0.$$

Definicija 3.10. *Proces obnavljanja je slučajni proces $\{S_n : n \geq 0\}$ definiran sa*

$$S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n, n \geq 0,$$

gdje je $(X_n : n \geq 1)$ niz nenegativnih nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

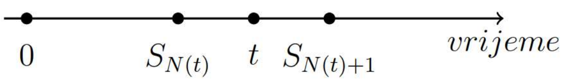
Relacije koje povezuju proces obnavljanja $\{S_n, n \geq 0\}$ i pripadajući brojeći proces $\{N(t), t \geq 0\}$:

$$\{N(t) \leq n\} = \{S_n > t\}, n \geq 0,$$
$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}, n \geq 1,$$
$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1} \text{ na } \{N(t) \geq 1\}.$$

Fiksirajmo neki trenutak t i promotrimo ukupan životni vijek baterije koja radi u trenutku t. Označimo s F funkciju distribucije vremana između dva uzastopna obnavljanja (međuvremena) te neka je $\lambda = E[X_n], n \geq 1$, očekivano vrijeme između dva uzastopna obnavljanja.
Sa $S(t)$ označimo duljinu intervala obnavljanja koji sadrži vremenski trenutak t, tj.

$$S(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$$

gdje je $S_{N(t)}$ vrijeme zadnjeg obnavljanja do ili u trenutku t. Ako je $N(t) = n$ onda je $S(t) = X_{n+1}$, općenito $S(t) = X_{N(t)+1}$.



[23] francuski matematičar poljskog podrjetla

Paradoks
Duljina intervala obnavljanja koji sadrži trenutak t veći je od prvog (općeg) intervala obnavljanja.

Objašnjenje paradoks je dano u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.1. *Za svaki fiksan* $t \geq 0$ *vrijedi*

$$P(S(t) > x) \geq P(X > x)$$

Dokaz. Označimo s $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x), x \geq 0$

$$\begin{aligned} P(S(t) > x | N(t) = n, S_n = s) &= P(X_{n+1} > x | X_{n+1} > t - s) \\ &= \frac{P(X_{n+1} > x, X_{n+1} > t - s)}{P(X_{n+1} > t - s)} \\ &= \frac{\overline{F}(\max(x, t - s))}{\overline{F}(t - s)} \\ &\geq \overline{F}(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nejednakost (3.3) vrijedi jer ako je $x > t - s$ onda je $\max(x, t - s) = x$ pa je

$$\frac{\overline{F}(\max(x, t - s))}{\overline{F}(t - s)} = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t - s)} \geq \overline{F}(x)$$

jer je $\overline{F}(t - s) \leq 1$. Ako je $x \leq t - s$ onda je $\max(x, t - s) = t - s$ pa je

$$\frac{\overline{F}(\max(x, t - s))}{\overline{F}(t - s)} = \frac{\overline{F}(t - s)}{\overline{F}(t - s)} = 1 \geq \overline{F}(x).$$

Tako smo pokazali da je $P(S(t) > x | N(t), S_{N(t)}) \geq \overline{F}(x)$. Računanjem očekivanja dobivamo

$$P(S(t) > x) = E[P(S(t) > x | N(t), S_{N(t)})] \geq \overline{F}(x).$$

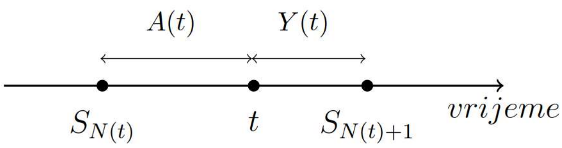
□

Znači da baterija koja se koristi u trenutku t ima duži životni vijek od prosječne baterije.

$X_{N(t)+1}$ možemo zapisati i na sljedeći način

$$X_{N(t)+1} = A(t) + Y(t),$$

gdje $A(t)$ označava vrijeme od posljednjeg obnavljanja do t, a $Y(t)$ označava vrijeme od t do sljedećeg obnavljanja, tj.



$A(t)$ je dob procesa u trenutku t (npr. životna dob baterije koja se koristi u trenutku t), a $Y(t)$ će biti ostatak života procesa obnavljanja u trenutku t (npr. preostalo vrijeme od trenutka t pa do trenutka kada će se baterija potrošiti). Vrijedi sljedeće

$$A(t) = t - S_{N(t)}$$

$$Y(t) = S_{N(t)+1} - t.$$

Propozicija 3.2. [24]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t A(s)ds = \frac{E[X^2]}{2E[X]}\ g.s.$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Y(s)ds = \frac{E[X^2]}{2E[X]}\ g.s.$$

Iz prethodne propozicije slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)ds = \frac{E[X^2]}{E[X]}\ g.s.$$

U našem primjeru s baterijom, to znači da promatrana baterija ima životni vijek s očekivanjem $\frac{E[X^2]}{E[X]}$, a ne $E[X]$. Kako je $E[X^2] > (E[X])^2$, osim kada je X konstanta, zaključujemo da je

$$\frac{E[X^2]}{E[X]} > E[X],$$

tj. očekivani životni vijek promatrane baterije je veći od očekivanog životnog vijeka prosječne baterije.

Primjer 3.2. Pretpostavimo da autobusi voze po Poissonovom procesu s parametrom $\lambda > 0$.

Definicija 3.11. *Proces $(N_t, t \geq 0)$ sa skupom stanja $\mathbb{N}_0$ je Poissonov proces ako zadovoljava sljedeća svojstva*

1. $N_0 = 0$
2. $(N_t, t \geq 0)$ *ima nezavisne prirasta*
3. *broj događaja u bilo kojem intervalu duljine t modeliran je slučajnom varijablom N_t koja ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem λt, tj. za sve $s, t > 0$ vrijedi:*

$$P(N_{t+s} - N_s = n) = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Definicija 3.12. *Proces $(N_t, t \geq 0)$ sa skupom stanja $\mathbb{N}_0$ je Poissonov proces ako zadovoljava sljedeća svojstva*

1. $N_0 = 0$
2. $(N_t, t \geq 0)$ *ima nezavisne i stacionarne priraste*
3. $P(N_t \geq 2) = o(t),\ \ t \to 0$
4. $P(N_t = 1) = \lambda t + o(t),\ \ t \to 0.$

Napomena 3.1. *Ove dvije definicije Poissonovog procesa su ekvivalentne .*

[24]Dokaz se može vidjeti u [19]

Izbor Poissonovog procesa za brojeći proces eksplicitno određuje svojstvo niza međuvremena, o čemu govori sljedeći teorem (za dokaz vidjeti primjerice [12]).

Teorem 3.5. *Ako je* $\{N_t, t \geq 0\}$ *homogeni Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$*, tada niz međuvremena* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *čine nezavisne, eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom* λ*.*

To znači da za svaki $n \geq 1$ vrijeme između $n-1-$og i $n-$tog autobusa eksponencijalno s parametrom λ

$$E[X_n] = \frac{1}{\lambda},\ Var(X_n) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ako je $E[X] = 15$ prema gornjem računu očekivano vrijeme između autobusa koji vam je pobjegao i autobusa koji ćete uhvatiti je

$$\frac{E[X^2]}{E[X]} = \frac{2 \cdot 15^2}{15} = 30$$

što je dvostruko više od očekivanog vremena između dva fiksna autobusa.

Literatura

[1] P. BALISTER, *Branching processes.*
`http://web0.msci.memphis.edu/~pbalistr/papers/Branch.pdf`

[2] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] M. BRNETIĆ, *Bertrandov paradoks*, Matka 27 (2018/2019), 2-5.

[4] M. CHANG, *Paradoxes in scientific inference*, Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, 2013.

[5] M. CLARK, *Paradoxes from A to Z*, Routledge, London i New York, 2007.

[6] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume I. John Wiley & Sons, 1957.

[7] G. R. GRIMMETT, D. R. STIRZAKER, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press Inc., New York, 2001.

[8] T. E. HARRIS, *The theory of branching processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[9] D. KRIZMANIĆ, H. RIZVIĆ, *Zamijeniti ili ne zamijeniti vrata?*, Matematičko fizički list, 64 (2013), 40-43.

[10] D. MARCONDES, C. PEIXOTO, K. SOUZA, S. WECHSLER, *Entrance Fees and a Bayesian Approach to the St. Petersburg Paradox*, Philosophies 2017, 2, 11.
`https://www.mdpi.com/2409-9287/2/2/11/htm|`

[11] J. MATOTEK, I. STIPANČIĆ-KLAIĆ, *Rođendanski paradoks*, Poučak 70 (2017), 36-45.

[12] T. MIKOSCH, *Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process*, Springer, Berlin, 2009.

[13] P. MÖRTERS, *Sample path properties of Brownian motion.*
`http://math-berlin.de/images/stories/lecnotes_moerters.pdf`

[14] Y. PESIN i V. CLIMENHAGA, *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 2009.

[15] S.I. RESNICK, *Adventures in stochastic processes*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[16] S. M. ROSS, *Introduction to Probability Models, Ninth Edition*,Academic Press is an imprint of Elsevier, 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA 01803, USA, 2007.

[17] N. SANDRIĆ, Z. VONDRAČEK, *Vjerojatnost predavanja.*
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf`

[18] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[19] K. SIGMAN, *Introduction to Renewal Theory.*
`http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I-RRT.pdf`

[20] J. M. STOYANOV, *Counterexamples in Probability*, John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, West Sussex POI9 IUD, England, 1997.

[21] G. J. SZÉKELY, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

Sažetak

U ovom radu su opisani neki paradoksi iz teorije vjerojatnosti i slučajnih procesa. Za početak objašnjeni su najstariji paradoksi, potom poznati paradoksi poput paradoks Montyja Halla i St. Petersburški paradoks. Navedeni su paradoksi koji su vezani uz slabi i jaki zakon velikih brojeva. Na posljetku, opisana su tri paradoksa iz teorije slučajnih procesa, paradoksi koji su vezani uz proces grananja, Brownovo gibanje i proces obnavljanja.

Ključne riječi: paradoks kockica, paradoks podjele, paradoksi nezavisnosti, paradoks Montyja Halla, Bertrandov paradoks, St. Petersburški paradoks, paradoks o Bernoulijevom zakonu velikih brojeva, De Moivreov paradoks, rođendanski paradoks, paradoks procesa grananja, paradoks o Brownovom gibanju, paradoks vremena čekanja.

Summary

This paper describes certain paradoxes in probability theory and random processes. To begin with, the oldest paradoxes are explained, followed by well-known paradoxes such as the Monty Hall and St. Petersburg paradoxes. The paradoxes that are connected with the weak and strong law of large numbers are presented. Finally, three paradoxes from the theory of random processes and paradoxes related to the branching process, Brownian motion, and the renewal process are described.

Keywords: The paradox of dice, The division paradox, The paradox of independence, St. Petersburg paradox, The paradox of Bernoulli's law of large numbers, De Moivre's paradox, Bertrand's paradox, The birthday paradox, The Monty Hall problem, The paradox of branching processes, The paradox of Brownian motion, The paradox of waiting times.

Životopis

Rođena sam 9. prosinca 1994. godine u Slavonskom Brodu. Obrazovanje sam započela 2001. godine u Osnovnoj školi Đure Pilara u Slavonskom Brodu. 2009. godine upisujem Gimnaziji "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu koju završavam 2013. godine. Nakon završene srednje škole, 2013. godine odlučujem upisati Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, gdje 2017.godine stječem akademski naziv *prvostupnice matematike* uz završni rad *Pozitivno definitne matrice* pod mentorstvom doc. dr. sc. Ivanom Kuzmanović Ivičić i komentorstvom dr.sc. Marijom Miloloža Pandur. Iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike također na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studija odradila sam stručnu praksu u Privrednoj banci Zagreb d.d. u Slavonskom Brodu.