Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu

Popović, Ana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ana Popović

Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ana Popović

Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Andrej Andrejevič Markov je ruski matematičar poznat po svom radu na stohastičkim procesima. Glavni predmet njegovih istraživanja kasnije je poznat kao Markovljev lanac. Markovljev lanac predstavlja niz stanja sustava. Sustav u svakome trenutku može ili ostati u istome stanju ili preći u neko novo stanje. Ako niz stanja zadovoljava Markovljevo svojstvo to znači da je buduće stanje neovisno o prošlom stanju.

Markovljevi lanci imaju mnoge primjene kao statistički modeli procesa u stvarnome svijetu kao što su proučavanje sustava tempomata u vozilima, novčani tečajevi, dinamika populacije životinja te u područjima poput statistike, fizike, kemije, biologije, medicine, glazbe i sporta. Markovljevi procesi su baza za osnove stohastičkih simulacijskih metoda kao što su Monte Carlo simulacije, koji se koriste za simuliranje uzoraka iz kompleksne vjerojatnosne distribucije.

Markovljeve lance s obzirom na skup indeksa dijelimo na Markovljeve lance u diskretnom vremenu i Markovljeve lance u neprekidnom vremenu. U ovom radu ćemo se baviti Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu.

Kako bismo mogli definirati Markovljeve lance u neprekidnom vremenu u prvom poglavlju ćemo definirati i objasniti neke osnovne pojmove. U drugom poglavlju ćemo prijeći na samu definiciju i konstrukciju gdje navodimo Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu, upoznajemo se s pojmom regularnosti procesa te dokazujemo kada je proces reguralan. Nadalje, dajemo uvjet da ako je proces regularan tada je ujedno i Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. Na kraju poglavlja upoznajemo se s $Q-$matricama odnosno generatorskim matricama koje će nam biti potrebne kod analize Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu. U trećem poglavlju se bavimo primjerima Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu kao što su Poissonov proces i proces rađanja te u četvrtom poglavlju pokazujemo da vrijedi jednadžba unaprijed i unatrag. U zadnjem poglavlju promatrat ćemo svojstva i strukturu Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu kao što su apsorpcijske vjerojatnosti, povratnost i prolaznost, stacionarna distribucija, granična distribucija te ćemo na kraju navesti i dokazati Ergodski teorem.

1 Osnovni pojmovi

Kako bi bolje shvatili Markovljeve lance u neprekidnom vremenu najprije ćemo definirati osnovne pojmove. Na početku ćemo navesti osnovne informacije koje su neovisne jedna o drugoj, zatim ćemo obraditi neka svojstva eksponencijalne distribucije koja su nam potrebna za razumijevanje Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu.

Definicija 1.1. *Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $(X_t, t \in T)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je $T \subseteq \mathbb{R}$.*

Skup vrijednosti slučajnih varijabli X_t naziva se skup stanja slučajnog procesa $(X_t, t \in T)$ i označava se s I, $I \subset \mathbb{R}$. Elemente skupa I nazivamo stanjima slučajnog procesa $(X_t, t \in T)$. S obzirom na skup I, razlikujemo sljedeće kategorije slučajnih procesa: ako je I diskretan skup, govorimo o slučajnom procesu s diskretnim skupom stanja i ako I nije diskretan skup, govorimo o slučajnom procesu s neprekidnim skupom stanja. Elementi skupa indeksa $T \subset \mathbb{R}$ najčešće se interpretiraju kao vremenski trenutci. S obzirom na skup indeksa T, razlikujemo sljedeće kategorije slučajnih procesa: ako je T diskretan skup, govorimo o slučajnom procesu u diskretnom vremenu i ako T nije diskretan skup, govorimo o slučajnom procesu u neprekidnom vremenu.

Trajektorija slučajnog procesa $(X_t, t \in T)$ je funkcija definirana na T, $t \mapsto X_t(\omega)$ koja opisuje kretanje (evoluciju) slučajnog procesa $(X_t, t \in T)$ kroz vrijeme. Kako nas zanimaju Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu najprije ćemo proučiti slučajne procese u neprekidnom vremenu.

1.1 Slučajni procesi u neprekidnom vremenu

Definicija 1.2. *Neka je I prebrojiv skup. Slučajni proces u neprekidnom vremenu $(X_t, t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u I je familija slučajnih varijabli $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Razmotrit ćemo načine na koje možemo opisati vjerojatnosno ponašanje od $(X_t, t \geq 0)$. Ovo nam omogućuje pronaći neku vjerojatnost povezanu s procesom, primjerice $\mathbb{P}(X_t = i)$ ili $\mathbb{P}(X_{t_0} = i_0, \cdots, X_{t_n} = i_n)$ ili $\mathbb{P}(X_t = i, \text{ za neki } t)$. U ovome problemu postoje pojedinosti koje nisu prisutne u slučaju diskretnog vremena. One nastaju jer za svaki prebrojivi niz $(A_n, n \in \mathbb{N})$ po parovima disjunktnih događaja $A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n),$$

dok za neprebrojivu uniju $\bigcup_{t \geq 0} A_t$ nema takvog pravila. Kako bi izbjegli to zahtjevat ćemo da procesi $(X_t, t \geq 0)$ imaju zdesna neprekidne trajektorije.

Definicija 1.3. *Neka je $X = (X_t, t \geq 0)$ slučajni proces u neprekidnom vremenu sa skupom stanja I. Kažemo da X ima zdesna neprekidne trajektorije ako je za sve ω funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$ zdesna neprekidna.*

Ako $(X_t, t \geq 0)$ ima zdesna neprekidne trajektorije tada ako za sve $\omega \in \Omega$ i $t \geq 0$ postoji $\epsilon > 0$ takav da vrijedi

$$X_s(\omega) = X_t(\omega), \text{ za } t \leq s \leq t + \epsilon.$$

Vjerojatnost bilo kojeg događaja, vezanog uz proces koji je neprekidan zdesna, može se odrediti iz njegovih konačno-dimenzionalnih distribucija, tj. iz vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n),$$

za $n \geq 0$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ i $i_0, \dots, i_n \in I$.

Svaka trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ zdesna neprekidnog procesa mora ostati konstantna neko vrijeme u svakom novom stanju pa postoje tri mogućnosti koje dobivamo za vrstu trajektorija. U prvom slučaju trajektorija pravi beskonačno puno skokova, ali samo konačno mnogo u bilo kojem intervalu $[0, t]$. Drugi slučaj je gdje trajektorija čini konačno mnogo skokova i tada ostaje u nekom stanju zauvijek. U trećem slučaju proces napravi beskonačno mnogo skokova u završnom intervalu. U tom slučaju nakon eksplozije ζ proces se opet pokreće, može ponovno eksplodirati beskonačno mnogo puta, a ni ne mora.

Označimo s $J_0, J_1, \dots$ vremena skokova i $S_1, S_2, \dots$ vremena čekanja procesa $(X_t, t \geq 0)$.

Definicija 1.4. *Vremena skokova procesa $(X_t, t \geq 0)$ definiramo s:*

$$J_0 = 0, \quad J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$$

za $n = 0, 1, \dots$ gdje $\inf \emptyset = \infty$.

Primjetimo da je $J_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\}$ te $J_0 \leq J_1 \leq J_2 \dots$ te ako je $J_n < \infty$ tada vrijedi $J_n < J_{n+1}$ zbog neprekidnosti zdesna. Ako je $J_{n+1} = \infty$ za neki n, definiramo $X_\infty = X_{J_n}$, inače X_∞ je nedefiniran.

Definicija 1.5. *Vremena čekanja procesa $(X_t, t \geq 0)$ za $n = 1, 2, \dots$ definiramo sa:*

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} \text{ , } J_{n-1} < \infty \\ \infty \text{ , } \textit{inače.} \end{cases}$$

Primjetimo da je $S_n > 0$, za sve n, te $J_n = S_1 + \cdots + S_n$, za sve $n \geq 1$.

Definicija 1.6. *Kažemo da je ζ vrijeme eksplozije slučajnog procesa X ako je*

$$\zeta = \lim_{n \to \infty} J_n = \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Ukoliko je $\zeta < \infty$ slučajni proces će napraviti beskonačno mnogo skokova u konačnom vremenu. Svi pojmovi koje smo dosad definirali nam pomažu da slučajnom procesu u neprekidnom vremenu pridružimo diskretan slučajni proces što ćemo objasniti sljedećom definicijom.

Definicija 1.7. *Proces u diskretnom vremenu $(Z_n, n \geq 0)$ dan sa $Z_n = X_{J_n}$ se zove proces ili lanac skokova slučajnog procesa $(X_t, t \geq 0)$.*

Taj proces bilježi stanja kroz koja prođe proces X sve do vremena eksplozije.
Nećemo razmatrati što se događa s procesom nakon eksplozije. Uobičajeno je pridružiti skupu I novo stanje, recimo ∞, i zahtjevati da je $X_t = \infty$ ako je $t \geq \zeta$. Svaki proces koji zadovoljava ovaj zahtjev se naziva minimalan. Terminologija minimalan se ne odnosi na stanja procesa nego na interval vremena nad kojim je proces aktivan.

1.2 Neka svojstva eksponencijalne distribucije

Eksponencijalna distribucija ima važnu ulogu u definiranju i konstrukciji Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu. Stoga ćemo se u ovome poglavlju baviti svojstvima eksponencijalne distribucije koje su nam potrebne za analizu Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu.

Definicija 1.8. *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \mathbb{R}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ, $0 < \lambda < \infty$ ako je*

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t} 1_{\{t \geq 0\}}.$$

Pišemo $T \sim E(\lambda)$. Ako je $\lambda > 0$, tada T ima funkciju gustoće

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{\{t \geq 0\}}.$$

Funkcija distribucije je dana izrazom

$$F_T(t) = (1 - e^{-\lambda t}) 1_{\{t \geq 0\}}.$$

Očekivanje od T dano je s

$$E(T) = \int_0^\infty f_T(t) dt = \lambda^{-1}.$$

Eksponencijalna distribucija ima značajnu ulogu u Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu zbog sljedećih rezultata.

Teorem 1.1. (Svojstvo zaboravljanja) *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \mathbb{R}$ ima eksponencijalnu distribuciju ako i samo ako zadovoljava svojstvo zaboravljanja:*

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > s) = \mathbb{P}(T > t), \text{ za sve } s, t \geq 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $T \sim E(\lambda)$, tada

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > s) = \frac{\mathbb{P}(T > s + t)}{\mathbb{P}(T > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T > t).$$

Obratno, pretpostavimo da T zadovoljava svojstvo zaboravljanja za $\mathbb{P}(T > s) > 0$. Tada $g(t) = \mathbb{P}(T > t)$ zadovoljava

$$g(s + t) = g(s) g(t), \quad \text{za sve} \quad s, t \geq 0.$$

Pretpostavljamo $T > 0$ pa je $g(1/n) > 0$ za neki n. Tada indukcijom dobivamo

$$g(1) = g\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ pribrojnika}}\Bigg) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n > 0 \quad \textit{ili} \quad g\left(\frac{1}{n}\right) = [g(1)]^{\frac{1}{n}}.$$

Stavimo da je $\lambda := -\log g(1) \in (0, \infty)$ pa je $g(1) = e^{-\lambda}$ za neki $0 < \lambda < \infty$. Istim argumentom za $p, g \geq 1$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q}$$

pa $g(r) = e^{-\lambda r}$ za sve racionalne $r > 0$. Za realne $t > 0$, biramo racionalne $r, s > 0$ tako da je $r \leq t \leq s$. Kako je g padajuća funkcija

$$e^{-\lambda r} = g(r) \geq g(t) \geq g(s) = e^{-\lambda s}$$

i budući da možemo izabrati r i s proizvoljno blizu t, iz toga je $g(t) = e^{-\lambda t}$ pa $T \sim E(\lambda)$. $\square$

Sljedeći rezultat prikazuje da suma nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli je ili gotovo sigurno konačna ili beskonačna i daje kriterij za odlučivanje kakva je. Ovo će se koristiti za utvrđivanje mogu li ili ne mogu neki Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu podnijeti neprebrojivo mnogo skokova u konačnom vremenu.

Teorem 1.2. *Neka je $S_1, S_2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $S_n \sim E(\lambda_n)$ i $0 < \lambda_n < \infty$, za sve n.*

i) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ tada je $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty) = 1$.

ii) Ako $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ tada je $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \infty) = 1$.

Dokaz. i) Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Korištenjem teorema o monotonoj konvergenciji može se pokazati da očekivanje nenegativnih slučajnih varijabli zadovoljava $E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} S_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n)$. Tada imamo

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} S_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

pa je $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty) = 1$.

ii) Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Tada $\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{\lambda_n}\Big) = \infty$. Primjenom teorema o monotonoj konvergenciji te zbog nezavisnosti slučajnih varijabli $S_1, S_2, \dots, S_n$ je

$$\begin{aligned} E(e^{-\sum_{n=1}^{\infty} S_n}) &= E(\prod_{n=1}^{\infty} e^{-S_n}) = \prod_{n=1}^{\infty} E(e^{-S_n}) = \prod_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \lambda \int_0^{\infty} e^{-(1+\lambda)t} dt = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{\lambda_n}\Big)^{-1} \\ &= \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{\lambda_n}\Big)} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

pa je $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \infty) = 1$.

□

Teorem 1.3. *Neka je I prebrojiv skup i neka su $T_k, k \in I$, nezavisne slučajne varijable takve da su $T_k \sim E(q_k)$ i $0 < q := \sum_{k \in I} q_k < \infty$. Stavimo $T = \inf_k T_k$. Tada postoji slučajna varijabla K takva da je $\mathbb{P}(T = T_K) = 1$. Nadalje, T i K su nezavisne, $T \sim E(q)$ i $\mathbb{P}(K = k) = q_k / q$.*

Dokaz. Stavimo $K = k$ ako $T_k < T_j$ za sve $j \neq k$, inače neka je K nedefiniran. Tada je za sve $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k, T \geq t) &= \mathbb{P}(T_k \geq t, T_j > T_k \text{ za sve } j \neq k) \\ &= \int_t^{\infty} q_k e^{-q_k s} \mathbb{P}(T_j > s \text{ za sve } j \neq k) ds \\ &= \int_t^{\infty} q_k e^{-q_k s} \prod_{j \neq k} e^{-q_j s} ds \\ &= \int_t^{\infty} q_k e^{-q s} ds = \frac{q_k}{q} e^{-qt}. \end{aligned}$$

Stoga, $\mathbb{P}(K = k \text{ za neki } k) = 1$ iz čega slijedi da je $\mathbb{P}(T = T_K) = 1$. Iz prethodnog računa slijedi nezavisnost slučajnih varijabli T i K kao i njihove distribucije. $\square$

Teorem 1.4. *Za nezavisne slučajne varijable $S \sim E(\lambda)$ i $R \sim E(\mu)$ te za $t \geq 0$ imamo*

$$\mu\mathbb{P}(S \leq t < S + R) = \lambda\mathbb{P}(R \leq t < R + S).$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
\lambda\mathbb{P}(S \leq t < S + R) &= \lambda \int_0^t \int_{t-s}^{\infty} \lambda\mu e^{-\lambda s} e^{-\mu r} dr ds = \lambda\mu \int_0^t e^{-\lambda s} e^{-\mu(t-s)} ds \\
&= \lambda\mu e^{-\mu t} \frac{e^{(\mu-\lambda)t} - 1}{\mu - \lambda} = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu\mathbb{P}(R \leq t < R + S) &= \mu \int_0^t \int_{t-r}^{\infty} \lambda\mu e^{-\lambda s} e^{-\mu r} ds dr = \lambda\mu \int_0^t e^{-\mu r} e^{-\lambda(t-r)} dr \\
&= \lambda\mu e^{-\lambda t} \frac{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda - \mu} = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}.
\end{aligned}$$

$\square$

2 Definicija i konstrukcija Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu

Kako smo u prethodnom poglavlju definirali pojmove i iskazali tvrdnje koje su nam potrebne, sada možemo definirati Markovljeve lance u neprekidnom vremenu. U ovom poglavlju bavit ćemo se najprije konkretnom definicijom Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu te ćemo konstruirati Markovljev lanac u neprekidnom vremenu pomoću lanca skokova. Na kraju ćemo definirati Q-matrice i objasniti kakva je njihova veza s Markovljevim lancima. Stoga, krenimo s definicijom Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu.

Definicija 2.1. *Slučajni proces $X = (X_t, t \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je Markovljev lanac u neprekidnom vremenu s prebrojivim skupom stanja I ako za sve $n \geq 1$, za sva proizvoljna stanja $i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i, j \in I$ i za sve proizvoljne vremenske trenutke $t_1, t_2, \ldots, t_n$, takve da je $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \ldots, X_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i). \tag{2.1}$$

Svojstvo (2.1) naziva se Markovljevo svojstvo.

Riječima, vjerojatnosno ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na sadašnjost i prošlost jednaka je vjerojatnosnom ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti uvjetno samo na sadašnjost.

Definiramo za $i, j \in I$ te $0 \leq s < t$ funkciju prijelaznih vjerojatnosti

$$p(i, s, j, t) = \mathbb{P}_{ij}(s, t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i).$$

Definicija 2.2. *Kažemo da je Markovljev lanac* $(X_t, t \geq 0)$ *homogen ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_{ij}(s,t) = \mathbb{P}_{ij}(0, t-s) \text{ za sve } i, j \in I \text{ i za sve } 0 \leq s < t.$$

Riječima, ako je Markovljev lanac homogen tada funkcija prijelaznih vjerojatnosti ovisi samo o razlici vremena. Nadalje, stavimo $\mathbb{P}_{ij}(t-s) = \mathbb{P}_{ij}(s,t)$. Stoga Markovljevo svojstvo (2.1) pišemo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \ldots, X_{t_1} = i_1) &= \mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i) \\ &= \mathbb{P}_{ij}(t_{n-1}, t_n) = \mathbb{P}_{ij}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Nadalje ćemo u radu promatrati samo homogene Markovljeve lance.
U neprekidnom vremenu, kao i u diskretnom vremenu, funkcija prijelaznih vjerojatnosti zadovoljava sljedeći rezultat.

Teorem 2.1. *Prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca zadovoljavaju Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe, tj. za svaki* $s, t \geq 0$ *vrijedi*

$$\sum_k \mathbb{P}_{ik}(s)\mathbb{P}_{kj}(t) = \mathbb{P}_{ij}(s+t).$$

Kako bi lanac prešao iz i u j u vremenu $s+t$, mora biti u nekom stanju k u vremenu s i Markovljevo svojstvo podrazumijeva da su ta dva dijela putovanja nezavisna.

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ij}(s+t) &= \mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_{s+t} = j, X_s = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_s = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}_{kj}(t)\mathbb{P}_{ik}(s) \end{aligned}$$

□

2.1 Konstrukcija Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu

Sada kada smo definirali Markovljev lanac u neprekidnom vremenu možemo prijeći na konstrukciju.

Počinjemo s Markovljevim lancem u diskretnom vremenu $(Z_n, n \geq 0)$ sa skupom stanja I, njegovom početnom distribucijom $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$ i matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti $\Pi = (\pi_{ij}, i, j \in I)$. Pretpostavimo $\pi_{ii} = 0$ za sve $i \in I$. Pretpostavimo da je niz $(E_n, n \in \mathbb{Z})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrom 1 i pretpostavimo da su eksponencijalne slučajne varijable nezavisne od $(Z_n, n \geq 0)$. Dana je funkcija $q(i)$ definirana na I koja će određivati vremena čekanja. Funkcija zadovoljava $q(i) > 0$ za svaki i. Stavimo $J_0 = 0$ i definiramo $S_1 = \frac{E_0}{q(Z_0)}$, iz čega slijedi

$$\mathbb{P}(S_1 > x | Z_0 = i) = \frac{\mathbb{P}\Big(\frac{E_0}{q(Z_0)} > x, Z_0 = i\Big)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} = \frac{\mathbb{P}\Big(\frac{E_0}{q(Z_0)} > x\Big)\mathbb{P}(Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} = e^{-q(i)x}, \quad x > 0$$

tako da, s obzirom na početno stanje Markovljevog lanca u diskretnom vremenu, S_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $q(i)$. Sada definiramo

$$J_1 = J_0 + S_1 \text{ i } X_t = Z_0, \text{ za } J_0 \leq t < J_1.$$

Nadalje, stavimo $S_2 = \frac{E_1}{q(Z_1)}$ tako da

$$\mathbb{P}(S_2 > x | Z_1 = i) = e^{-q(i)x};$$

definiramo

$$J_2 = J_1 + S_2 \text{ i } X_t = Z_1 \text{ za } J_1 \leq t < J_2.$$

Nastavljajući dalje, pretpostavimo da su $(S_m, 1 \leq m \leq n)$, $(J_m, 0 \leq m \leq n)$ i $(X_t, 0 \leq t < J_n)$ definirane na analogan način. Definiramo

$$S_n = \frac{E_n}{q(Z_n)}, \quad J_{n+1} = J_n + S_{n+1} \quad \text{i} \quad X_t = Z_n, \quad \text{za } J_n \leq t < J_{n+1}.$$

Stavimo $\zeta = J_\infty = \lim_{n\to\infty} J_n$ pa imamo proces definiran na $[0, \zeta)$ i za $t < \zeta$

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n 1_{[J_n, J_{n+1})}(t)$$

i osim toga

$$J_{n+1} - J_n = S_{n+1} = \frac{E_n}{q(Z_n)}.$$

Sada ćemo opisati dva bitna svojstva niza (Z_n, S_n). Prvo svojstvo je da su ovako konstruirane slučajne varijable $(S_m, m \geq 1)$ uvjetno nezavisne i eksponencijalno distribuirane uz dani Z_n, odnosno za $u_m > 0, m = 1, \dots, n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_m > u_m | Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}) &= \mathbb{P}(J_m - J_{m-1} > u_m | Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{E_{m-1}}{q(Z_{m-1})} > u_m | Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}\Big) \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big(\frac{E_{m-1}}{q(Z_{m-1})} > u_m, Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}\Big)}{\mathbb{P}(Z_0 = i_0, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1})} \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{E_{m-1}}{q(i_{m-1})} > u_m\Big) = \prod_{m=1}^{n} e^{-q(i_{m-1})u_m}.
\end{aligned}$$

Drugo svojstvo je distribucijska struktura niza (Z_n, S_n). Pokažimo da su slučajni vektori (Z_{n+1}, S_{n+1}) i σ-algebra $\mathcal{H}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n; S_1, \dots, S_n)$ uvjetno nezavisni uz dani Z_n, odnosno za $u > 0, i_0, \dots, i_{n-1}, i \in I$ te $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{n+1} = j, S_{n+1} > u | Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i, (S_1, \dots, S_n) \in B) \\
&\quad = \mathbb{P}\Big(Z_{n+1} = j, \frac{E_n}{q(Z_n)} > u | Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i, \Big(\frac{E_1}{q(Z_1)}, \dots, \frac{E_n}{q(Z_n)}\Big) \in B\Big) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}\Big(Z_{n+1} = j, \frac{E_n}{q(i)} > u, Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i, \Big(\frac{E_1}{q(Z_1)}, \dots, \frac{E_n}{q(Z_n)}\Big) \in B\Big)}{\mathbb{P}\Big(Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i, \Big(\frac{E_1}{q(Z_1)}, \dots, \frac{E_n}{q(Z_n)}\Big) \in B\Big)} \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(Z_{n+1} = j, Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i)\mathbb{P}\Big(\Big(\frac{E_1}{q(Z_1)}, \dots, \frac{E_n}{q(Z_n)}\Big) \in B\Big)\mathbb{P}\Big(\frac{E_n}{q(i)} > u\Big)}{\mathbb{P}(Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i)\mathbb{P}\Big(\Big(\frac{E_1}{q(Z_1)}, \dots, \frac{E_n}{q(Z_n)}\Big) \in B\Big)} \\
&\quad = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_0 = i_0, \dots, Z_n = i)\mathbb{P}\Big(\frac{E_n}{q(i)} > u\Big) = \pi_{ij} e^{-q(i)u}
\end{aligned}$$

Stoga, vidimo da je

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = j, S_{n+1} > u | \mathcal{H}_n) = \pi_{ij} e^{-q(i)u} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j, S_{n+1} > u | Z_n).$$

U konstrukciji Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu definirali smo $(X_t, t \geq 0)$ samo do vremena $\zeta = J_\infty = \lim_n J_n$. Ako $\zeta < \infty$ kažemo da dolazi do eksplozije jer se dogodio neprebrojiv broj prijelaza u konačnom vremenu.

Definicija 2.3. *Kažemo da je proces $X = (X_t, 0 \leq t < \zeta)$ regularan ako je*

$$\mathbb{P}_i(\zeta = \infty) = 1, \text{ za svaki } i \in I,$$

gdje je $\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = i)$.

Sljedeća propozicija nam daje dovoljan uvjet da je proces X regularan.

Propozicija 2.1. *Za svaki $i \in I$, vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(\zeta < \infty) = \mathbb{P}_i\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} < \infty\Big). \tag{2.2}$$

Slučajni proces X je regularan ako i samo ako

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} = \infty, \ \mathbb{P}_i \text{ gotovo sigurno za svaki } i \in I. \tag{2.3}$$

Posebno, X je regularan ako zadovoljava jedan od sljedećih uvjeta:

1. $\sup_{i \in I} q_i < \infty$*;*
2. *Ako je I konačan skup;*
3. *Ako je $X_0 = i$, i povratno stanje za lanac skokova.*

Dokaz. Imamo

$$\zeta = J_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (J_{n+1} - J_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{q(Z_n)}.$$

Uvjetno na $(Z_n, n \geq 0)$, ζ je suma nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrima $q(Z_n)$. Prema teoremu 1.2 i) imamo

$$\mathbb{P}(\zeta < \infty | Z_0, \dots, Z_n) = \begin{cases} 1 \text{ , ako } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} < \infty \\ 0 \text{ , inače} \end{cases} ,$$

odnosno

$$\mathbb{P}(\zeta > \infty | Z_0, \dots, Z_n) = 1_{\{\sum_n \frac{1}{q(Z_n)} < \infty\}} \text{ gotovo sigurno.}$$

Računanjem uvjetnog očekivanja slijedi (2.2), a (2.3) je neposredna posljedica. Za 1), promatramo da ako je $q(i) < c$, za sve $i \in I$, tada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c} = \infty,$$

što daje regularnost. □

U konstrukciji Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu zahtjevali smo da funkcija $q(i) > 0$, za svaki $i \in I$ te proces u takvom slučaju nazivamo stabilnim. U slučaju da smo dopustili da je $q(i) = 0$ uz dano $\{Z_n = i\}$ vrijeme čekanja bi bilo beskonačno, odnosno $S_n = \frac{E_n}{q(Z_n)} = \infty$ te bi tada $i \in I$ bilo apsorbirajuće stanje za proces X. Osim toga, možemo dopustit da je $q(i) = \infty$ za stanje $i \in I$, tada bi uz dano $\{Z_n = i\}$ vrijeme čekanja bilo 0. U tom slučaju proces odmah napušta stanje te se to stanje naziva trenutnim. Konstrukcija koju smo napravili ne obuhvaća Markovljeve procese u neprekidnom vremenu koji dopuštaju trenutna stanja.
Definiramo vremena skokova procesa X s $\tilde{J}_0 = 0$, $\tilde{J}_{n+1} = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_{\tilde{J}_n}\}$. Vidimo da je $\tilde{J}_n = J_n$ i $X_{J_n} = Z_n$, odnosno Markovljev lanac u diskretnom vremenu Z je proces skokova procesa X.
Nadalje, dokažimo da ukoliko je proces X regularan tada je on Markovljev lanac u neprekidnom vremenu.

Teorem 2.2. *Ako je X regularan, odnosno $\mathbb{P}_i(\zeta = \infty) = 1$ za svaki $i \in I$, tada je X Markovljev lanac u neprekidnom vremenu.*

Dokaz. Pretpostavimo da imamo Markovljev lanac koji smo prethodno konstruirali te pretpostavimo da je regularan. Podsjetimo se da je $\mathbb{P}_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$, no je li proces Markovljev ili nije možemo odrediti iz oblika višedimenzionalnih distribucija. Kako bi proces bio Markovljev nužno je i dovoljno da za svaki $0 < t_1 < \cdots < t_k$ i stanja $i, j_1, \dots, j_k$ vrijedi

$$\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_k} = j_k) = \mathbb{P}_{i,j_1}(t_1)\mathbb{P}_{j_1,j_2}(t_2 - t_1) \dots \mathbb{P}_{j_{k-1},j_k}(t_k - t_{k-1}). \tag{2.4}$$

Iz praktičnih razloga prvo ćemo izvesti formulu za $P_{ij}(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{ij}(t) &= \mathbb{P}_i\Big(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n 1_{[J_n,J_{n+1})} = j\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(Z_n = j, J_n \le t < J_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \mathbb{P}_i(J_n \le t < J_{n+1}, Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \mathbb{P}_i(J_n \le t < J_{n+1} | Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j) \cdots \\
&\quad \cdots \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \mathbb{P}_i\Big(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_l}{q(i_l)} + \frac{E_n}{q(j)}\Big) \cdots \\
&\quad \cdots \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Nadalje, zbog nezavisnosti gustoća slučajnog vektora $(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \frac{E_n}{q(i_n)})$ jednaka je $f(u)q(j)e^{q(j)v}$. Odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i\Big(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_l}{q(i_l)} + \frac{E_n}{q(i_n)}\Big) &= \int\int_{u \le t \le u+v} f(u)q(j)e^{q(j)v} du dv \\
&= \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} f(u)q(j)e^{q(j)v} du dv \qquad (2.6) \\
&= \int_0^t f(u)e^{-q(j)(t-u)} du.
\end{aligned}$$

Sada provjeravamo (2.4) kada je $k = 2$, odnosno

$$\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) = \mathbb{P}_{ij_1}(t_1)\mathbb{P}_{j_1 j_2}(t_2 - t_1).$$

Dokaz za svaki $k > 2$ je sličan.
Za $0 < t_1 < t_2$ i stanja $i, j_1, j_2 \in I$ gdje $j_1 \ne j_2$ imamo

$$\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) = \sum_{n_1 \le n_2} \mathbb{P}_i\big(Z_{n_1} = j_1, J_{n_1} \le t_1 < J_{n_1+1}, Z_{n_2} = j_2, J_{n_2} \le t_2 < J_{n_2+1}\big)$$

$$= \sum_{n_1 \le n_2} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1}, \\ i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1} \\ i_{n_1}=j_1, i_{n_2}=j_2}} \mathbb{P}_i\Big(J_{n_1} \le t_1 < J_{n_1+1}, J_{n_2} \le t_2 < J_{n_2+1}, Z_1 = i_1 \dots, Z_{i_{n_2}} = j_2\Big)$$

$$= \sum_{n_1 \le n_2} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1}, \\ i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1} \\ i_{n_1}=j_1, i_{n_2}=j_2}} \mathbb{P}_i\Big(J_{n_1} \le t_1 < J_{n_1+1}, J_{n_2} \le t_2 < J_{n_2+1} | Z_1 = i_1 \dots, Z_{i_{n_2}} = j_2\Big) \cdots$$

$$\cdots \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1 \dots, Z_{i_{n_2}} = j_2)$$

$$= \sum_{n_1 \le n_2} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1},\\ i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1}\\ i_{n_1}=j_1, i_{n_2}=j_2}} \mathbb{P}_i\Big(\sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \sum_{l=0}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 < \sum_{l=0}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)} | Z_1 = i_1 \dots, Z_{i_{n_2}} = j_2\Big) \cdots$$

$$\cdots \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1 \dots, Z_{i_{n_2}} = j_2).$$

Prije nego što nastavimo izvod, najprije ćemo si olakšati zapis. Neka je $0 \le n_1 < n_2$, $i_0, i_1, \dots, i_{n_2} \in I$, $0 < t_1 < t_2$ i stavimo $f = f^{(0,n_1-1)}_{i_0,\dots,i_{n_1-1}}$ i $g = f^{(n_1+1,n_2-1)}_{i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1}}$.

$$\mathbb{P}_i\Big(\sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \sum_{l=0}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 < \sum_{l=0}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)}\Big)$$

$$= \mathbb{P}_i\Big(\sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_l}{q(i_l)} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 < \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_l}{q(i_l)} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)}\Big)$$

Zbog nezavisnosti komponenata slučajnog vektora $(\sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \frac{E_{n_1}}{q(i_{n_1})}, \sum_{l=0}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \frac{E_{n_2}}{q(i_{n_2})})$ gustoća tog vektora je $f(u_1)q(j_{n_1})e^{-q(i_{n_1})u_2} g(u_3) q(i_{n_2}) e^{-q(i_{n_2})u_4}$. Te zbog (2.6) imamo

$$= \int\int\int\int_{\substack{u_1 \le t_1 < u_1+u_2,\\ u_1+u_2+u_3 \le t_2 < u_1+u_2+u_3+u_4,\\ u_1,u_2,u_3,u_4 \ge 0}} f(u_1)q(j_1)e^{-q(j_1)u_2} g(u_3) q(j_2) e^{-q(j_2)u_4} du_1 du_2 du_3 du_4$$

$$= \int_0^{t_1} \int_{t_1-u_1}^{\infty} f(u_1)q(j_1)e^{-q(j_1)u_2} \Big(\int_0^{t_2-(u_1+u_2)} \int_{t_2-(u_1+u_2+u_3)}^{\infty} g(u_3)q(j_2)e^{-q(j_2)u_4} du_3 du_4\Big) du_1 du_2.$$

Zamijenimo $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2 - t_1$ u integralu

$$= \int_0^{t_1} f(s_1)q(j_1)e^{-q(j_1)(s_2-s_1+t_1)} \Big(\int_0^{t_2-t_1-s_2} \int_{t_2-t_1-s_2-u_3}^{\infty} g(u_3)q(j_2)e^{-q(j_2)u_4} du_3 du_4\Big) ds_1 ds_2$$

$$= \int_0^{t_1} f(s_1)e^{-q(j_1)(t_1-s_1)} ds_1 \int\int\int_{\substack{0 \le s_2+u_3 \le t_2-t_1,\\ t_2-t_1 < s_2+u_3+u_4}} q(j_1)e^{-q(j_1)s_2} g(u_3)q(j_2)e^{-q(j_2)u_4} ds_2 du_3 du_4$$

$$= \int_0^{t_1} f(s_1)e^{-q(j_1)(t_1-s_1)} ds_1 \mathbb{P}\Big(\frac{E_{n_1}}{q(j_1)} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 - t_1 < \frac{E_{n_1}}{q(j_1)} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} + \frac{E_{n_2}}{q(j_2)}\Big)$$

$$= \int_0^{t_1} f(s_1)e^{-q(j_1)(t_1-s_1)} ds_1 \mathbb{P}\Big(\sum_{l=n_1}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 - t_1 < \sum_{l=n_1}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)}\Big).$$

Dakle,

$$\mathbb{P}_i\Big(\sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_l}{q(i_l)}, \sum_{l=0}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 < \sum_{l=0}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)}\Big)$$

$$= \int_0^{t_1} f(s_1)e^{-q(j_1)(t_1-s_1)} ds_1 \mathbb{P}\Big(\sum_{l=n_1}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \le t_2 - t_1 < \sum_{l=n_1}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)}\Big). \tag{2.7}$$

Prisjetimo se da je

$$\mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \dots, Z_{n_2} = j_2) = \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \dots, Z_{n_1} = j_1)\mathbb{P}_{j_1}(Z_1 = i_{n_1+1}, \dots, Z_{n_2-n_1} = j_2). \tag{2.8}$$

Primjenimo sada (2.7) i (2.8) u izvodu te stavimo $m = n_2 - n_1$, $k_1 = i_{n_1+1}, k_2 = i_{n_1+2}, \dots, k_{m-1} = i_{n_2+1}$

$$\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1},\\ i_{n_1}=j_1}} \int_0^{t_1} f^{(0,n_1-1)}_{i,i_1,\dots,i_{n_1-1}}(u) e^{-q(j_1)(t_1-u)} du \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \dots, Z_{n_1} = j_1) \cdots$$

$$\cdots \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1},\\ i_{n_2}=j_2}} \mathbb{P}\Big(\sum_{l=n_1}^{n_2-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \leq t_2 - t_1 < \sum_{l=n_1}^{n_2} \frac{E_l}{q(i_l)} \Big) \mathbb{P}_{j_1}(Z_1 = i_{n_1+1}, \dots, Z_{n_2-n_1} = j_2)$$

$$= P_{ij_1}(t_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{m-1},\\ k_m=j_2}} \mathbb{P}\Big(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{E_l}{q(i_l)} \leq t_2 - t_1 < \sum_{l=0}^{m} \frac{E_l}{q(i_l)} \Big) \mathbb{P}_{j_1}(Z_1 = k_1, \dots, Z_{m-1} = k_{m-1}, Z_m = k_m)$$

$$= P_{ij_1}(t_1) P_{j_1 j_2}(t_2 - t_1),$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (2.5). □

2.2 Q-matrice

U ovom ćemo poglavlju pričati o osnovnim svojstvima Q-matrica i objasniti njihovu vezu s Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu. Općenito, Q-matrice su korisne kod analize Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu te jedna od glavnih primjena Q-matrica je pronalaženje stacionarne distribucije.
Uzmimo Markovljev lanac u neprekidnom vremenu $(X_t, t \geq 0)$ i pretpostavimo da je $X_0 = i$. Lanac će skočiti u sljedeće stanje u trenutku S_1, gdje je $S_1 \sim E(q(i))$. Općenito za jako mali $\delta > 0$, možemo pisati

$$\mathbb{P}(S_1 < \delta) = 1 - e^{-q(i)\delta} \approx 1 - (1 - q(i)\delta) = q(i)\delta.$$

Dakle, u intervalu duljine δ, vjerojatnost napuštanja stanja i je približno $q(i)\delta$. Kako se krećemo iz stanja i u stanje j s vjerojatnošću p_{ij}, stavimo da je $q_{ij} = q(i)p_{ij}$. Stoga, uvodimo generatorsku matricu, odnosno Q-matricu Q, čiji je (i,j)-ti element q_{ij}.

Definicija 2.4. *Neka je I prebrojivi skup. Q-matrica (ili generatorska matrica) od I je matrica $Q = (q_{ij}, i, j \in I)$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. $0 \leq -q_{ii} < \infty$*, za sve* i*;*
2. $q_{ij} \geq 0$*, za sve* $i \neq j$*;*
3. $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0$*, za sve* i*.*

Prema tome, u svakom retku matrice Q možemo odabrati nedijagonalne elemente da budu bilo koji nenegativni realni brojevi, pod uvjetom da je suma nedijagonalnih elemanata u retku konačna:

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty.$$

Dijagonalni element q_{ii} je tada $-q_i$, čineći da je ukupni zbroj elemenata u retku nula.

Možemo razmišljati o diskretnom vremenu $\{0, 1, 2, \dots\}$ kao ugrađenom u neprekidno vrijeme $[0, \infty)$. Za $p \in (0, \infty)$ prirodan način aproksimacije diskretnog niza $(p^n, n = 0, 1, 2, \dots)$ je s funkcijom e^{tq}, $t \geq 0$, gdje je $q = \log p$.
Uzmimo sada konačan skup I i matricu prijelaznih vjerojatnosti $P = (p_{ij}, i, j \in I)$. Pitamo se postoji li prirodan način kako popuniti praznine u diskretnom nizu $(p^n, n = 0, 1, 2, \dots)$. Za svaku matricu $Q = (q_{ij}, i, j \in I)$, niz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{ij}^k}{k!}, \text{ za sve } i, j \in I$$

je konvergentan po komponentama za fiksirane i, j te njegov limes označavamo s e^Q. Štoviše, ako dvije matrice Q_1 i Q_2 komutiraju tada je $e^{Q_1+Q_2} = e^{Q_1}e^{Q_2}$. Pretpostavimo da možemo naći matricu Q za koju vrijedi $e^Q = P$. Tada je

$$e^{nQ} = (e^Q)^n = P^n$$

tako da $(e^{tQ}, t \geq 0)$ popunjava praznine u diskretnom nizu.

Teorem 2.3. *Neka je Q matrica definirana na konačnom skupu I. Ako je $P(t) = e^{tQ}$ tada $(P(t), t \geq 0)$ ima sljedeća svojstva:*

1. *$P(s + t) = P(s)P(t)$ za sve s, t;*
2. *$(P(t), t \geq 0)$ je jedinstveno rješenje jednadžbe unaprijed*
$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I;$$
3. *$(P(t), t \geq 0)$ je jedinstveno rješenje jednadžbe unatrag*
$$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t), \quad P(0) = I;$$
4. *za $k = 0, 1, 2, \dots$, imamo*
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k P(t)\bigg|_{t=0} = Q^k.$$

Prethodni teorem je bio općenito o eksponencijalnim matricama te ćemo u sljedećem teoremu vidjeti što se događa s Q-matricama.

Definicija 2.5. *Matrica $P = (p_{ij}, i, j \in I)$ je stohastička ako zadovoljava:*

1. *$0 \leq p_{ij} < \infty$, za sve i, j*
2. *$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$, za sve i.*

Teorem 2.4. *Matrica Q na konačnom skupu I je Q-matrica ako i samo ako je $P(t) = e^{tQ}$ stohastička matrica, za sve $t \geq 0$.*

Dokaz. Kada $t \to 0$ imamo
$$P(t) = I + tQ + O(t^2)$$
pa $q_{ij} \geq 0$ za $i \neq j$ ako i samo ako $p_{ij}(t) \geq 0$ za sve i, j i $t \geq 0$ dovoljno mali. Kako $P(t) = P(t/n)^n$ za sve n slijedi da je $q_{ij} \geq 0$, za $i \neq j$ ako i samo ako je $p_{ij}(t) \geq 0$, za sve i, j i za sve $t \geq 0$. Ako Q ima sumu redaka 0 tada ima i Q^n za svaki n:
$$\sum_{k \in I} q_{ik}^{(n)} = \sum_{k \in I} \sum_{j \in I} q_{ij}^{(n-1)} q_{jk} = \sum_{j \in I} q_{ij}^{(n-1)} \sum_{k \in I} q_{jk} = 0.$$
Stoga,
$$\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j \in I} q_{ij}^{(n)} = 1.$$
Ovime smo pokazali da je matrica P stohastička matrica.

S druge strane, ako $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$ za sve $t \geq 0$, tada
$$\sum_{j \in I} q_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{j \in I} p_{ij}(t) \Big|_{t=0} = 0.$$
Dakle, matrica Q je Q-matrica. □

3 Primjeri

Nakon što smo definirali i konstruirali Markovljev lanac u neprekidnom vremenu navest ćemo neke primjere. Najpoznatiji primjeri Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu su Poissonov proces i proces rađanja koje ćemo u ovom poglavlju detaljnije objasniti.

3.1 Poissonov proces

Poissonov proces može poslužiti za izgradnju najopćenitijih oblika Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu. Ključni rezultat je teorem 3.3, koji pruža tri različite karakterizacije Poissonovog procesa. Za klasične definicije Poissonovog procesa vidi [4, str. 304,305].

Definicija 3.1. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ proces koji ima zdesna neprekidne trajektorije s vrijednostima u $\{0, 1, 2, \dots\}$. Kažemo da je $(X_t, t \geq 0)$ Poissonov proces s parametrom λ, gdje $0 < \lambda < \infty$, ako su vremena $S_1, S_2, \dots$ nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom λ i njihov proces skokova je dan s $Z_n = n$.*

Pridružena Q-matrica je dana s
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$
Primjenom teorema 1.2 (ili jakog zakona velikih brojeva) imamo $\mathbb{P}(J_n \to \infty) = 1$, pri čemu su $(J_n, n = 0, 1, \dots)$ vremena skokova, odnosno proces će u beskonačnom vremenu iz

nekog stanja skočiti u neko drugo stanje gotovo sigurno. Dakle, nema eksplozija i proces $(X_t, t \geq 0)$ je jedinstveno određen. Jednostavan način za konstrukciju Poissonovog procesa s parametrom λ je uzeti razdiobu nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli $S_1, S_2, \ldots$ s parametrom λ i postaviti $J_0 = 0$, $J_n = S_1 + \cdots + S_n$ te

$$X_t = n \quad \text{ako} \quad J_n \leq t < J_{n+1}. \tag{3.1}$$

Idućim teoremom ćemo pokazati kako svojstvo zaboravljanja eksponencijalnih vremena čekanja $(S_n \sim E(\lambda))$ vodi do svojstva zaboravljanja Poissonovog procesa.

Teorem 3.1. (Markovljevo svojstvo) *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Poissonov proces s parametrom λ. Tada, za svaki $s \geq 0$, $(X_{s+t} - X_s, t \geq 0)$ je također Poissonov proces s parametrom λ, nezavisan od $(X_r, r \leq s)$.*

Dokaz. Stavimo $\widetilde{X_t} = X_{s+t} - X_s$. Dovoljno je dokazati da ako je $(X_t, t \geq 0)$ Poissonov proces s parametrom λ tada je uvjetno na $\{X_s = i\}$, $(\widetilde{X}_t, t \geq 0)$ također Poissonov proces s parametrom λ, za svaki $i \geq 0$. Imamo

$$\{X_s = i\} = \{J_i \leq s < J_{i+1}\} = \{J_i \leq s\} \cap \{S_{i+1} > s - J_i\}.$$

Iz toga je

$$X_r = \sum_{j=1}^{i} 1_{\{S_j \leq t\}}, \text{ za } r \leq s$$

i vremena čekanja $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \ldots$ od $(\widetilde{X}_t, t \geq 0)$ dana su sa

$$\widetilde{S}_1 = S_{i+1} - (s - J_i), \quad \widetilde{S}_n = S_{i+n}, \quad \text{za} \quad n \geq 0.$$

Podsjetimo se da su vremena čekanja $S_1, S_2, \ldots$ nezavisne $E(\lambda)$. Tada zbog svojstva zaboravljanja od S_{i+1} i nezavisnosti slijedi da su $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \ldots$ nezavisne $E(\lambda)$. Stoga, uvjetno na $\{X_s = i\}$, $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \ldots$ su nezavisne $E(\lambda)$ i nezavisni su od $S_1, \ldots, S_i$. Dakle, uvjetno na $\{X_s = i\}$, $(\widetilde{X}_t, t \geq 0)$ je Poissonov proces s parametrom λ nezavisan od $(X_r, r \leq s)$. □

Teorem 3.2. (Jako Markovljevo svojstvo) *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Poissonov proces s parametrom λ i neka je T vrijeme zaustavljanja od $(X_t, t \geq 0)$. Tada, uvjetno na $\{T < \infty\}$, $(X_{T+t} - X_T, t \geq 0)$ je također Poissonov proces s parametrom λ, nezavisan od $(X_s, s \leq T)$.*

Dokaz. Vidi [2, str. 20]. □

Došli smo do ključnog rezultata za Poissonov proces koji nam daje dva uvjeta koja su ekvivalentna karakterizaciji procesa skokova/ vremena čekanja. Stoga imamo tri alternativne definicije istog procesa, no naprije se upoznajmo s terminom funkcija tipa $o(h)$.

Definicija 3.2. *Ako je $lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, tada kažemo da je $f(h) = o(h)$ za $h \to 0$.*

Teorem 3.3. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ rastući slučajni proces koji ima zdesna neprekidne trajektorije s cjelobrojnim vrijednostima kojemu je početno stanje 0. Neka $0 < \lambda < \infty$. Tada su sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne:*

a) (definicija procesa skokova/ vremena čekanja) vremena čekanja $S_1, S_2, \ldots$ procesa $(X_t, t \geq 0)$ su nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom λ i proces skokova je dan s $Z_n = n$ za sve n;

b) (infinitezimalna definicija) $(X_t, t \geq 0)$ ima nezavisne priraste i za $h \to 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \quad \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h);$$

c) (definicija prijelaznih vjerojatnosti) $(X_t, t \geq 0)$ ima stacionarne i nezavisne priraste te, za svaki t, X_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt.

Ako $(X_t, t \geq 0)$ zadovoljava bilo koji od ova tri uvjeta tada ga zovemo Poissonov proces s parametrom λ.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) Pretpostavimo da vrijedi (a), tada po Markovljevom svojstvu za svaki $t, h \geq 0$, prirast $X_{t+h} - X_t$ ima jednaku distribuciju kao X_h i nezavisan je od $(X_s, s \leq t)$. Tada $(X_t)_{t \geq 0}$ ima nezavisne priraste i kada $h \to 0$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 1) = \mathbb{P}(X_h \geq 1) = \mathbb{P}(J_1 \leq h) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h),$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz razvoja Taylorovog reda eksponencijalne funkcije.

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 2) = \mathbb{P}(X_h \geq 2) = \mathbb{P}(J_2 \leq h) \leq \mathbb{P}(S_1 \leq h, S_2 \leq h) = (1 - e^{-\lambda h})^2 = o(h),$$

iz čega slijedi tvrdnja (b).
(b)$\Rightarrow$(c) Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b), tada za $i = 2, 3, \ldots$ imamo $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = i) = o(h)$ za $h \to 0$. Neka je $p_j(t) = \mathbb{P}(X_t = j)$. Stoga, za $j = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} p_j(t+h) &= \mathbb{P}(X_{t+h} = j) = \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = i | X_t = j - i)\mathbb{P}(X_t = j - i) \\ &= (1 - \lambda h + o(h))p_j(t) + (\lambda h + o(h))p_{j-1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + o(h).$$

Kako to uniformno teži u t možemo staviti da je $t = s - h$ pa dobivamo, za sve $s \geq h$,

$$\frac{p_j(s) - p_j(s-h)}{h} = -\lambda p_j(s-h) + \lambda p_{j-1}(s-h) + o(h).$$

Sada pustimo $h \to 0$ kako bi vidjeli da je $p_j(t)$ neprekidna i diferencijabilna i da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$p_j'(t) = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t).$$

Iz toga slijedi da je

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t).$$

Kako je $X_0 = 0$ dobivamo da je početno stanje

$$p_0(0) = 1, \quad p_j(0) = 0, \quad za \quad j = 1, 2, \ldots$$

Sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje koje je dano s

$$p_j(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Stoga, $X_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. Ako $(X_t, t \geq 0)$ zadovoljava (b), tada $(X_t, t \geq 0)$ ima nezavisne priraste, ali $(X_{s+t} - X_s, t \geq 0)$ također zadovoljava (b) pa tako vrijedi i $X_{s+t} - X_s \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, za svaki

s, iz čega slijedi tvrdnja (c).
(c)$\Rightarrow$(a) Ako postoji proces koji zadovoljava tvrdnju (a) pokazali smo da mora zadovoljavati tvrdnju (c). Ali tvrdnja (c) određuje konačno-dimenzionalne distribucije od $(X_t, t \geq 0)$ te stoga i distribucije lanca skokova i vremena čekanja. Tada ako jedan proces zadovoljava (c) također zadovoljava i (a) pa onda svaki proces mora zadovoljavati (c). $\square$

Diferencijalne jednadžbe koje se pojavljuju u dokazu su zapravo jednadžbe unaprijed za Poissonov proces. Stavimo

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j).$$

Proces je prostorno homogen ako prijelazna vjerojatnost između bilo koja dva stanja u dva dana vremena ovisi samo o razlici tih vrijednosti stanja prema tome $p_{ij}(t) = p_{j-i}(t)$ pa možemo postaviti diferencijalne jednadžbe kao

$$p'_{i0}(t) = -\lambda p_{i0}(t), \quad p_{i0}(0) = \delta_{i0},$$

$$p'_{ij}(t) = \lambda p_{i,j-1}(t) - \lambda p_{ij}(t), \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

ili, u matričnom zapisu,

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I.$$

Prethodni teorem sadrži puno informacija o Poissonovom procesu s parametrom λ. To može biti korisno kada odlučujemo je li dani proces Poissonov proces jer daje tri alternativne karakterizacije za provjeru i moguće je da jedna bude lakša za provjeriti od druge.

Teorem 3.4. *Ako su $(X_t, t \geq 0)$ i $(Y_t, t \geq 0)$ nezavisni Poissonovi procesi s parametrom λ i μ, tada $(X_t + Y_t, t \geq 0)$ je Poissonov proces s parametrom $\lambda + \mu$.*

Dokaz. Koristimo tvrdnju (b) iz prethodnog teorema, prema kojem $(X_t, t \geq 0)$ i $(Y_t, t \geq 0)$ imaju nezavisne priraste, kako $h \to 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \quad \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0) = 1 - \mu h + o(h), \quad \mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 1) = \mu h + o(h).$$

Stavimo $Z_t = X_t + Y_t$. Kako su $(X_t, t \geq 0)$ i $(Y_t, t \geq 0)$ nezavisni, $(Z_t, t \geq 0)$ ima nezavisne priraste i, kako $h \to 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{t+h} - Z_t = 0) &= \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0) \\
&= (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)\mathbb{P}(Z_{t+h} - Z_t = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0) + \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 1) \\
&= (\lambda + \mu)h + o(h).
\end{aligned}$$

Dakle, $(Z_t, t \geq 0)$ je Poissonov proces s parametrom $\lambda + \mu$. $\square$

Nadalje ćemo uspostaviti vezu između vremena skokova Poissonovog procesa i uniformne distribucije. Primjetimo da su zaključci neovisni o parametru razmatranog procesa.

Teorem 3.5. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Poissonov proces. Tada, uvjetno na to da proces $(X_t, t \geq 0)$ ima točno jedan skok na intervalu $[s, s+t]$, vrijeme u kojem se skok pojavljuje je uniformno distribuirano na intervalu $[s, s+t]$.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti konačnodimenzionalne distribucije. Kako su prirasti stacionarni dovoljno je razmotriti slučaj $s = 0$. Tada, za $0 \leq u \leq t$ slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(J_1 \leq u | X_t = 1) &= \frac{\mathbb{P}(J_1 \leq u, X_t = 1)}{\mathbb{P}(X_t = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_u = 1, X_t - X_u = 0)}{\mathbb{P}(X_t = 1)} \\
&= \frac{\lambda u e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{u}{t}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Proces rađanja

Proces rađanja je generalizacija Poissonovog procesa u kojem parametar λ smije ovisiti o trenutnom stanju procesa. Podaci za proces rađanja se sastoje od parametara rađanja $0 \leq q_j < \infty$ gdje je $j = 0, 1, 2, \ldots$. Započet ćemo s definicijom u terminima procesa skokova i vremena čekanja.

Definicija 3.3. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ minimalan proces, $X_t = \infty$ za $t \geq \zeta$, koji ima zdesna neprekidne trajektorije s vrijednostima u $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Kažemo da je $(X_t, t \geq 0)$ proces rađanja s parametrima $(q_j, j \geq 0)$ ako su, uvjetno na $\{X_0 = i\}$, njegova vremena čekanja $S_1, S_2, \ldots$ nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima $q_i, q_{i+1}, \ldots$ i njegov proces skokova je dan s $Z_n = i + n$.*

Pridružena Q-matrica je dana s

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -q_1 & q_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -q_2 & q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Teorem 3.6. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ proces rađanja s parametrima $(q_j, j \geq 0)$, gdje je $X_0 = 0$.*

i) Ako $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q_j} < \infty$, tada $\mathbb{P}(\zeta < \infty) = 1$.

ii) Ako $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q_j} = \infty$, tada $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$.

Dokaz. Koristi se teorem 1.2. □

Dokaz Markovljevog svojstva za Poissonov proces je prilagođen da nam da sljedeću generalizaciju.

Teorem 3.7. (Markovljevo svojstvo) *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ proces rađanja s parametrima $(q_j, j \geq 0)$. Tada, uvjetno na $\{X_s = i\}$, $(X_{s+t}, t \geq 0)$ je proces rađanja s parametrima $(q_j, j \geq 0)$ s početnim stanjem i te je nezavisan od $(X_r, r \leq s)$.*

Ubrzo ćemo dokazati teorem o procesima rađanja koji generalizira ključni teorem o Poissonovim procesima. Prvo moramo vidjeti što će zamijeniti Poissonove vjerojatnosti. Oni su u teoremu 3.3. nastali kao jedinstveno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi, za koje

smo pokazali da su to u osnovi jednadžbe unaprijed. Još uvijek možemo zapisati jednadžbu unaprijed kao
$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I,$$
ili po komponentama
$$p'_{i0}(t) = -p_{i0}(t)q_0, \quad p_{i0}(0) = \delta_{i0}$$
i, za $j = 1, 2, \ldots$
$$p'_{ij}(t) = p_{i,j-1}(t)q_{j-1} - p_{ij}(t)q_j, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$
Štoviše, ove jednadžbe i dalje imaju jedinstveno rješenje. Ono što moramo imati je
$$p_{i0}(t) = \delta_{i0}e^{-q_0 t}$$
koje može biti zamijenjeno u jednadžbi
$$p'_{i1}(t) = p_{i0}(t)q_0 - p_{i1}(t)q_1, \quad p_{i1}(0) = \delta_{i1}$$
i ona nam daje
$$p_{i1}(t) = \delta_{i1}e^{-q_1 t} + \delta_{i0}\int_0^t q_0 e^{-q_0 s}e^{-q_1(t-s)}ds.$$
Analogno nastavljamo kako bi pronašli eksplicitni izraz za $p_{i2}(t)$, itd.

Teorem 3.8. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ rastući proces koji ima zdesna neprekidne trajektorije s vrijednostima u $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Neka je $0 \leq q_j < \infty$ za sve $j \geq 0$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) (definicija procesa skokova/ vremena čekanja) Uvjetno na $\{X_0 = i\}$, vremena čekanja $S_1, S_2, \ldots$ su nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima $q_i, q_{i+1}, \ldots$ i proces skokova je dan s $Z_n = i + n$ za sve n;

(b) (infinitezimalna definicija) Za sve $t, h \geq 0$, uvjetno na $\{X_t = i\}$, X_{t+h} je nezavisan od $(X_s, s \leq t)$ i za $h \to 0$
$$\mathbb{P}(X_{t+h} = i | X_t = i) = 1 - q_i h + o(h);$$
$$\mathbb{P}(X_{t+h} = i+1 | X_t = i) = q_i h + o(h);$$

(c) (definicija prijelazne vjerojatnosti) Za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$ i sva vremena $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_{n+1}$ i za sva stanja $i_0, \ldots, i_{n+1}$ vrijedi
$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$$
gdje je $(p_{ij}(t), i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ jedinstveno rješenje jednadžbe unaprijed.

Ako $(X_t, t \geq 0)$ zadovoljava bilo koji od ova tri uvjeta taj proces zovemo proces rađanja s parametrima $(q_j, j \geq 0)$.

Dokaz. (a)⇒(b) Pretpostavimo da vrijedi (a), tada prema Markovljevom svojstvu za svaki $t, h \geq 0$, uvjetno na $\{X_t = i\}$, X_{t+h} je nezavisan od $(X_s, s \leq t)$ i za $h \to 0$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+h} \geq i+1 | X_t = i) &= \mathbb{P}(X_h \geq i+1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(J_1 \leq h | X_0 = i)\\ &= 1 - e^{-q_i h} = q_i h + o(h)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+h} \geq i+2|X_t = i) &= \mathbb{P}(X_h \geq i+2|X_0 = i) = \mathbb{P}(J_2 \leq h|X_0 = i) \\ &\leq \mathbb{P}(S_1 \leq h, S_2 \leq h|X_0 = i) = (1-e^{-q_i h})(1-e^{-q_{i+1}h}) = o(h).\end{aligned}$$

(b)$\Rightarrow$ (c) Pretpostavimo da vrijedi (b), tada sigurno za $k = i+2, i+3, \ldots$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = k|X_t = i) = o(h) \text{ kada } h \to 0.$$

Stavimo $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i)$. Tada za $j = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}p_{ij}(t+h) &= \mathbb{P}(X_{t+h} = j|X_0 = i) = \sum_{k=i}^{j} \mathbb{P}(X_t = k|X_0 = i)\mathbb{P}(X_{t+h} = j|X_t = k) \\ &= p_{ij}(t)(1 - q_j h + o(h)) + p_{i,j-1}(t)(q_{j-1}h + o(h)) + o(h)\end{aligned}$$

pa

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = p_{i,j-1}(t)q_{j-1} - p_{ij}(t)q_j + O(h).$$

Kako je dokazano u teoremu možemo zaključiti da je $p_{ij}(t)$ diferencijabilna i da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$p'_{ij}(t) = p_{i,j-1}(t)q_{j-1} - p_{ij}(t)q_j.$$

Stoga je

$$p'_{i0}(t) = -p_{i0}(t)q_0.$$

Prema tome $(p_{ij}(t), i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ mora biti jedinstveno rješenje jednadžbe unaprijed. Ako $(X_t)_{t\geq 0}$ zadovoljava (b), tada

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1}|X_0 = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1}|X_{t_n} = i_n),$$

ali također $(X_{t_n+t})_{t\geq 0}$ zadovoljava (b) pa

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1}|X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Stoga, $(X_t, t \geq 0)$ zadovoljava (c).
(c)$\Rightarrow$(a) Ovaj smjer se dokazuje pomoću dokaza teorema 3.3. □

4 Jednadžba unaprijed i unatrag

U prethodnim poglavljima definirali smo proces $(X_t, t \geq 0)$ počevši od Markovljevog lanca u diskretnom vremenu $(Z_n, n \geq 0)$ s matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti $\Pi = (\pi_{ij}, i, j \in I)$, funkcijom $q \in (0, \infty)$ te nizom nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli $(E_n, n \geq 0)$. Premda smo opisali karakteristike Π i q Markovljevog lanca X nismo odgovorili na neka osnovna pitanja. Naprimjer, kako izračunati $\mathbb{P}_i(X_t = i)$. U ovom poglavlju ćemo dobiti još dva načina karakterizacije Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu koji nam daju sredstva za pronalaženje $\mathbb{P}_i(X_t = j)$. Kao za Poissonov proces i proces rađanja, prvi korak je izvesti tvrdnju za Markovljevo svojstvo pomoću definicije procesa skokova/ vremena čekanja. Zapravo ćemo dati jako Markovljevo svojstvo kao fundamentalni rezultat. Međutim dokaz oba rezultata doista zahtijeva preciznost teorije mjere. Ako želimo shvatiti što se događa, teorem 3.1. o Poissonovom procesu nam daje glavnu ideju u jednostavnijem kontekstu.
Najprije se podsjetimo što je vrijeme zaustavljanja.

Definicija 4.1. *Slučajna varijabla* $T : \Omega \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ *zove se vrijeme zaustavljanja procesa* $(X_t, t \geq 0)$ *ako je za sve* $t \geq 0$

$$\{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathcal{F},$$

gdje je $\mathcal{F} = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Nadalje, navedimo teorem koji karakterizira jako Markovljevo svojstvo. Prije svega podsjetimo se da je distribucija δ_i dana s

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 \ , i = j \\ 0 \ , \text{inače} \end{cases} .$$

Teorem 4.1. *Neka je* $(X_t, t \geq 0)$ (λ, Q)*-Markovljev lanac te neka je* T *vrijeme zaustavljanja od* $(X_t, t \geq 0)$. *Tada, uvjetno na* $\{T < \infty\}$ *i* $\{X_T = i\}$, $(X_{T+t}, t \geq 0)$ *je* (δ_i, Q)*-Markovljev nezavisan od* $(X_s, s \geq T)$.

Dokaz. Vidi [2]. □

Dolazimo do ključnog rezultata za Markovljeve lance u neprekidnom vremenu. Najprije ćemo predstaviti slučaj konačnog prostora stanja, gdje je jednostavniji dokaz. U ovom slučaju postoje tri alternativne definicije, jednako kao i za Poissonov proces.

Teorem 4.2. *Neka je* $(X_t, t \geq 0)$ *slučajni proces koji ima zdesna neprekidne trajektorije s vrijednostima u konačnom skupu* I. *Neka je* Q *generatorska matrica na* I *s prijelaznom matricom* Π. *Tada su sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne:*

a) (definicija procesa skokova/ vremena čekanja) uvjetno na $\{X_0 = i\}$, *proces skokova* $(Z_n, n \geq 0)$ *procesa* $(X_t, t \geq 0)$ *je* (δ_i, Π)*-Markovljev lanac u diskretnom vremenu i za svaki* $n \geq 1$, *uvjetno na* $\{Z_0, \ldots, Z_{n-1}\}$, *vremena čekanja* $S_1, \ldots, S_n$ *su nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima redom* $q(Z_0), \ldots, q(Z_{n-1})$;

b) (infinitezimalna definicija) za sve $t, h \geq 0$, *uvjetno na* $\{X_t = i\}$, X_{t+h} *je nezavisan od* $(X_s, s \leq t)$ *i kada* $h \to 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h), \ \textit{za svaki } j;$$

c) (definicija prijelaznih vjerojatnosti) za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$, *sva vremena* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1}$ *i sva stanja* $i_0, \ldots, i_{n+1}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \ldots, \ X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Ako proces $(X_t, t \geq 0)$ *zadovoljava bilo koji od ova tri uvjeta tada je on Markovljev lanac s generatorskom matricom* Q. *Kažemo da je* $(X_t, t \geq 0)$ (λ, Q)*-Markovljev lanac, gdje je* λ *distribucija od* X_0.

Dokaz. a)⇒ b) Pretpostavimo da vrijedi a), tada kada $h \to 0$

$$\mathbb{P}_i(X_h = i) \geq \mathbb{P}_i(J_1 > h) = e^{-q_i h} = 1 + q_{ii}h + o(h)$$

i za $j \neq i$ imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(X_h = j) &\geq \mathbb{P}(J_1 \leq h, Z_1 = j, S_2 > h) \\ &= (1 - e^{-q_i h})\pi_{ij} e^{-q_j h} = q_{ij}h + o(h). \end{aligned}$$

Tako za svako stanje j vrijedi nejednakost

$$\mathbb{P}_i(X_h = j) \geq \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$$

i uzimanjem konačne sume po svim j vidimo da u prethodnom izrazu zapravo vrijedi jednakosti. Tada prema Markovljevom svojstvu, za svaki $t, h \geq 0$, uvjetno na $\{X_t = i\}$, X_{t+h} je nezavisan od $(X_s, s \leq t)$ i kada $h \to 0$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \mathbb{P}_i(X_h = j) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h).$$

b) $\Rightarrow$ c) Neka je $p_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$. Pretpostavimo da vrijedi b), tada za sve $t, h \geq 0$ kada $h \to 0$

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \sum_{k \in I} \mathbb{P}_i(X_t = k)\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = k) \\ &= \sum_{k \in I} p_{ik}(t)(\delta_{kj} + q_{kj}h + o(h)). \end{aligned}$$

Kako je I konačan imamo

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \in I} p_{ij}(t)q_{kj} + o(h),$$

pa kada $h \to 0$ vidimo da je $p_{ij}(t)$ diferencijabilna zdesna. Zamijenimo li t s $(t-h)$ te ponovimo za $h \to 0$ vidimo da je $p_{ij}(t)$ neprekidna slijeva pa tako i diferencijabilna slijeva. Stoga $p_{ij}(t)$ je diferencijabilna i zadovoljava jednadžbu unaprijed

$$p'_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik}(t)q_{kj}, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Kako je I konačan tada je $p_{ij}(t)$ jedinstveno rješenje prema teoremu 2.3. Također ako vrijedi b), tada

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n)$$

i, štoviše, b) vrijedi za $(X_{t_n+t})_{t \geq 0}$ pa prema gore navedenom je

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

čime dokazujemo c).
c)$\Rightarrow$ a) vidi dokaz teorema 3.3. □

Iz teorema 2.3. znamo da za konačan I jednadžba unaprijed i unatrag daje isto rješenje. Stoga u uvjetu c) u rezultatu koji smo dokazali možemo samo zamijeniti jednadžbu unaprijed s jednadžbom unatrag. Sada prijeđimo na slučaj kada I nije konačan. Jednadžba unatrag može i dalje biti zapisana u obliku

$$P'(t) = QP(t), \quad P(0) = I$$

samo sada imamo beskonačan sustav diferencijalnih jednadžbi

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in I} q_{ik}p_{kj}(t), \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

i rezultati u poglavlju 2.2 više nisu primjenjivi. Rješenje jednadžbe unatrag je svaka matrica $(p_{ij}, i, j \in I)$ diferencijabilnih funkcija koja zadovoljava ovaj sustav jednadžbi.

Teorem 4.3. *Neka je Q generatorska matrica. Tada jednadžba unatrag*

$$P'(t) = QP(t), \quad P(0) = I$$

ima minimalno nenegativno rješenje $(P(t), t \geq 0)$. Ovo rješenje formira matričnu polugrupu

$$P(s)P(t) = P(s+t), \text{ za sve } s, t \geq 0.$$

Dokazat ćemo ovaj rezultat zajedno sa sljedećim teoremom. Kako je I konačan prema teoremu 2.3. moramo imati $P(t) = e^{tQ}$. Kažemo da je $(P(t), t \geq 0)$ minimalna nenegativna polugrupa povezana s Q ili jednostavno polugrupa od Q. Sljedeći rezultat je ključan za Markovljeve lance s neprebrojivim skupom stanja.

Teorem 4.4. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ minimalan proces koji ima zdesna neprekidne trajektorije s vrijednostima u I. Neka je Q generatorska matrica na I s matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti Π i polugrupom $(P(t), t \geq 0)$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) (definicija procesa skokova/ vremena čekanja) uvjetno na $\{X_0 = i\}$, proces skokova $(Z_n, n \geq 0)$ Markovljevog lanca u diskretnom vremenu (δ_i, Π) $(X_t, t \geq 0)$ i za svaki $n \geq 1$, uvjetno na $\{Z_0, \ldots, Z_{n-1}\}$, vremena čekanja $S_1, \ldots, S_n$ su nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima redom $q(Y_0), \ldots, q(Y_{n-1})$;

b) (definicija prijelazne vjerojatnosti) za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$, sva vremena $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1}$ i sva stanja $i_0, \ldots, i_{n+1}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \ldots, \ X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Ako proces $(X_t, t \geq 0)$ zadovoljava bilo koji od ovih uvjeta tada je on Markovljev lanac s generatorskom matricom Q. Kažemo da je $(X_t, t \geq 0)$ (λ, Q)-Markovljev lanac, gdje je λ distribucija od X_0.

Dokaz. Znamo da postoji proces $(X_t, t \geq 0)$ koji zadovoljava a). Stoga definiramo $P(t)$ s

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 > t) + \mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 \leq t).$$

Prvi korak u dokazu je pokazati da $P(t)$ zadovoljava jednadžbu unatrag.
Uvjetno na $\{X_0 = i\}$ imamo $J_1 \sim E(q_1)$ i $X_{J_1} \sim (\pi_{ik}, k \in I)$. Tada, uvjetno na $\{J_1 = s\}$ i $\{X_{J_1} = k\}$, je $(X_{s+t}, t \geq 0)$ (δ_k, Q)-Markovljev lanac. Stoga,

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_1) = e^{-q_i t}\delta_{ij}$$

i

$$\mathbb{P}_i(J_1 \geq t, X_{J_1} = k, X_t = j) = \int_0^t q_i e^{-q_i s} \pi_{ik} p_{kj}(t-s) ds.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_1) + \sum_{k \neq i} \mathbb{P}_i(J_1 \leq t, X_{J_1} = k, X_t = j) \\ &= e^{-q_i t}\delta_{ij} + \sum_{k \neq i} \int_0^t q_i e^{-q_i s} \pi_{ik} p_{kj}(t-s) ds. \end{aligned}$$

Zamijenimo varijable $u = t - s$ u svakom integralu, zamijenimo sumu i integral prema teoremu o monotonoj konvergenciji i pomnožimo s $e^{q_i t}$ te dobivamo

$$e^{q_i t} p_{ij}(t) = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k \neq i} q_i e^{q_i u} \pi_{ik} p_{kj}(u) du. \tag{4.1}$$

Ova jednadžba pokazuje da je $p_{ij}(t)$ neprekidna u t, za sve i, j. Podintegralna funkcija je definirana kao uniformno konvergentna suma neprekidnih funkcija te je time i ona neprekidna. Stoga je $p_{ij}(t)$ diferencijabilna u t i zadovoljava

$$e^{q_i t}(q_i p_{ij}(t) + p'_{ij}(t)) = \sum_{k \neq i} q_i e^{q_i t} \pi_{ik} p_{kj}(t).$$

Podsjetimo se da je $q_i = -q_{ii}$ i $q_{ik} = q_i \pi_{ik}$, za $k \neq i$. Tada dobivamo

$$p'_{ij}(t) \quad = \quad \sum_{k \in I} q_{ik} p_{kj}(t) \tag{4.2}$$

pa $P(t)$ zadovoljava jednadžbu unatrag. Integralna jednadžba (4.1) se naziva integralna jednadžba unatrag.
Drugi korak u dokazu je pokazati da ako je $\tilde{P}(t)$ neko drugo nenegativno rješenje jednadžbe unatrag, tada $P(t) \leq \tilde{P}(t)$, stoga je $P(t)$ minimalno nenegativno rješenje.
Argument koji smo koristili u dokazu (4.1) također pokazuje da

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_{n+1}) = e^{-q_i t} \delta_{ij} + \sum_{k \neq i} \int_0^t q_i e^{-q_i s} \pi_{ik} \mathbb{P}_k(X_{t-s} = j, t - s < J_n) ds. \tag{4.3}$$

S druge strane, ako $\tilde{P}(t)$ zadovoljava jednadžbu unatrag tada također zadovoljava:

$$\tilde{p}_{ij}(t) = e^{-q_i t} \delta_{ij} + \sum_{k \neq i} \int_0^t q_i e^{-q_i s} \pi_{ik} \tilde{p}_{kj}(t - s) ds. \tag{4.4}$$

Ako $\tilde{P}(t) \geq 0$ tada

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_0) = 0 \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Pretpostavimo induktivno da

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_n) \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Tada usporedbom (4.12) i (4.4) imamo

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_{n+1}) \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Stoga,

$$p_{ij}(t) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_n) \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

U trećem koraku u dokazu zbog Markovljevog svojstva prijelazna funkcija zadovoljava Chapman-Kolomogorovljevu jednakost

$$p_{ij}(s + t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \tag{4.5}$$

prema Markovljevom svojstvu. Stoga, $(P(t), t \geq 0)$ je matrica polugrupe. Ovdje završava dokaz teorema 4.3.
U četvrtom koraku u dokazu pretpostavimo da $(X_t, t \geq 0)$ zadovoljava a). Tada prema Markovljevom svojstvu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) &= \mathbb{P}_{i_n}(X_{t_{n+1}-t_n} = i_{n+1}) \\ &= p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n) \end{aligned} \tag{4.6}$$

pa $(X_t)_{t \geq 0}$ zadovoljava b).
Završavamo dokaz teorema 4.4. s argumentom da b) mora implicirati a) (vidi dokaz teorema 3.3.,c)$\Rightarrow$ a)). □

Dosad nismo ništa rekli o jednadžbi unaprijed u slučaju kada I nije konačan. Jednadžba unaprijed može i dalje biti zapisana u obliku

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I,$$

samo sada imamo beskonačan sustav diferencijalnih jednadžbi

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Rješenje je tada svaka matrica $(p_{ij}, i, j \in I)$ diferencijabilnih funkcija koja zadovoljava ovaj sustav jednadžbi. Pokazat ćemo da polugrupa $(P(t), t \geq 0)$ od Q zadovoljava jednadžbu unaprijed kao u prvom koraku dokaza teorema 4.3. i 4.4. Ovaj put umjesto uvjetovanja na prvi događaj, uvjetovat ćemo na zadnji događaj prije t. Stoga ćemo iskazati sljedeću lemu. Jednostavnija verzija te leme je teorem 1.4.

Lema 4.1. *Vrijedi*

$$\begin{aligned} & q_{i_n} \mathbb{P}(J_n \leq t < J_{n+1} | Z_0 = i_0, Z_1 = i_1, \ldots, Z_n = i_n) \\ = \; & q_{i_0} \mathbb{P}(J_n \leq t < J_{n+1} | Z_0 = i_n, \ldots, Z_{n-1} = i_1, Z_n = i_0) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dokaz. Vidi [2, str. 100] □

Teorem 4.5. *Minimalno nenegativno rješenje $(P(t), t \geq 0)$ jednadžbe unatrag je ujedno i minimalno nenegativno rješenje jednadžbe unaprijed*

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I.$$

Dokaz. Neka je $(X_t, t \geq 0)$ minimalan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q. Primjenom teorema 4.4. imamo

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \mathbb{P}_i(X_t = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \neq j} \mathbb{P}_i(J_n \leq t < J_{n+1}, Z_{n-1} = k, Z_n = j). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Sada primjenom prethodne leme, za $n \geq 1$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(J_n \le t < J_{n+1} | Z_{n-1} = k, Z_n = j) \\
&= \frac{q_i}{q_j}\mathbb{P}_j(J_n \le t < J_{n+1} | Z_1 = k, Z_n = i) \\
&= \frac{q_i}{q_j}\int_0^t q_j e^{q_j s}\mathbb{P}_k(J_{n-1} \le t-s < J_n | Z_{n-1} = i) ds \\
&= q_i \int_0^t e^{q_j s}\frac{q_k}{q_i}\mathbb{P}_i(J_{n-1} \le t-s < J_n | Z_{n-1} = k) ds,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili Markovljevo svojstvo od $(Z_n)_{n\ge 0}$. Stoga,

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= \delta_{ij}e^{-q_i t} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\ne j}\int_0^t \mathbb{P}_i(J_{n-1} \le t-s < J_n | Z_{n-1} = k)\cdots \\
&\quad \cdots \mathbb{P}_i(Z_{n-1} = k, Z_n = j) q_k e^{-q_j s} ds \\
&= \delta_{ij}e^{-q_i t} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\ne j}\int_0^t \mathbb{P}_i(J_{n-1} \le t-s < J_n, Z_{n-1} = k) q_k \pi_{kj} e^{-q_j s} ds \\
&= \delta_{ij}e^{-q_i t} + \int_0^t \sum_{k\ne j} p_{ik}(t-s) q_{kj} e^{-q_j s} ds, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

gdje smo primjenili teorem o monotonoj konvergenciji pri zamjeni sume i integrala u zadnjem koraku. Ovaj integral se naziva integralna jednadžba unaprijed. Sada zamijenimo varijable $u = t - s$ u integralu i pomnožimo s $e^{q_j t}$ pa dobivamo

$$p_{ij}(t)e^{q_j t} = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k\ne j} p_{ik}(u) q_{kj} e^{q_j u} du. \qquad (4.10)$$

Iz jednadžbe (4.1) znamo da je $e^{q_i t} p_{ik}(t)$ rastuća za sve i, k. Stoga ili

$$\sum_{k\ne j} p_{ik}(u) q_{kj} \text{ uniformno konvergira za } u \in [0, t]$$

ili

$$\sum_{k\ne j} p_{ik}(u) q_{kj} = \infty, \text{ za sve } u \ge t.$$

Prethodna jednakost je u suprotnosti s (4.10) s obzirom da je lijeva strana jednakosti konačna za sve t pa zadržavamo taj prvi oblik. Kod jednadžbe unatrag pokazali smo da je $p_{ij}(t)$ neprekidna za sve i, j, stoga prema uniformnoj konvergenciji podintegralna funkcija u (4.10) je neprekidna te je diferencijabilna i dobivamo

$$p'_{ij}(t) + p_{ij}(t) q_j = \sum_{k\ne j} p_{ik}(t) q_{kj}.$$

Dakle, $P(t)$ je rješenje jednadžbe unaprijed.
Kako bi provjerili minimalnost pretpostavimo da je $\tilde{p}_{ij}(t)$ neko drugo rješenje jednadžbe unaprijed, tada imamo

$$\tilde{p}_{ij}(t) = \delta_{ij}e^{-q_i t} + \sum_{k\ne j}\int_0^t \tilde{p}_{ik}(t-s) q_{kj} e^{q_j s} ds.$$

Mala promjena u argumentu dovodi do (4.9) pokazuje da, za $n \geq 0$, vrijedi

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_{n+1}) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{k \neq j} \int_0^t \mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_n) q_{kj} e^{-q_j s} ds. \tag{4.11}$$

Ako je $\tilde{P}(t) \geq 0$ tada

$$\mathbb{P}(X_t = j, t < J_0) = 0 \leq \tilde{p}_{ij}(t) \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Pretpostavimo induktivno da

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_n) \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Tada usporedbom (4.10) i (4.11) imamo

$$\mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_{n+1}) \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Stoga,

$$p_{ij}(t) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(X_t = j, t < J_n) \leq \tilde{p}_{ij}(t), \text{ za sve } i, j \text{ i } t.$$

Dakle, $P(t)$ je minimalno rješenje jednadžbe unaprijed. □

Primjer 4.1. (Dva stanja) Pretpostavimo da imamo Markovljev lanac $(X_t, t \geq 0)$ sa skupom stanja $\{1, 2\}$. U tom slučaju je generatorska matrica dana s

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Želimo izračunati $(P(t), t \geq 0)$. Po diferencijalnoj jednadžbi unatrag vrijedi

$$P'(t) = QP(t), \quad P(0) = I,$$

u matričnom obliku to je

$$\begin{pmatrix} p'_{11}(t) & p'_{12}(t) \\ p'_{21}(t) & p'_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Kako je $p_{i2}(t) = 1 - p_{i1}(t)$ to je dovoljno za računanje $p_{i1}(t)$. Množenjem matrica dobijemo

$$p'_{11}(t) = -\lambda p_{11}(t) + \lambda p_{21}(t) = -\lambda(p_{11}(t) - p_{21}(t))$$

$$p'_{21}(t) = \mu p_{11}(t) - \mu p_{21}(t) = \mu(p_{11}(t) - p_{21}(t)). \tag{4.12}$$

Nadalje, oduzimanjem te dvije jednadžbe dobijemo

$$[p_{11}(t) - p_{21}(t)]' = -(\lambda + \mu)[p_{11}(t) - p_{21}(t)].$$

Kako je $p_{11}(0) = 1$ i $p_{21}(0) = 0$ imamo

$$p_{11}(t) - p_{21}(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Koristeći to u (4.12) i integriranjem dobijemo

$$p_{11}(t) = p_{11}(0) + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)s} \Big|_0^t = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$p_{21}(t) = p_{21}(0) + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)s} \Big|_0^t = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}.$$

Analogno je

$$p_{22}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$p_{12}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}.$$

5 Svojstva i struktura Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu

Prvi korak u analizi Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu $(X_t, t \geq 0)$ je identificirati njegovu strukturu. Treba naglasiti da proučavamo samo minimalne lance, one koji završavaju nakon eksplozije.

Definicija 5.1. *Za stanja $i, j \in I$ kažemo da je j dostižno iz i, oznaka $i \to j$, ako vrijedi da je $\mathbb{P}_i(X_t = j$ za neki $t \geq 0) > 0$.*

Teorem 5.1. *Za različita stanja i, j sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) $i \to j$, $i, j \in I$;

ii) $i \to j$ *za lanac skokova;*

iii) $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} i_n} > 0$ *za neka stanja* $i_0, i_1, \dots, i_n$ *s* $i_0 = i, \quad i_n = j$;

iv) $p_{ij}(t) > 0$ *za sve* $t > 0$;

v) $p_{ij}(t) > 0$ *za neke* $t > 0$.

Dokaz. Implikacije iv) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ ii) su očite.
Ako vrijedi ii) tada postoje stanja $i_0, i_1, \dots, i_n$ gdje je $i_0 = i$, $i_n = j$ i $\pi_{i_0 i_1}, \pi_{i_1 i_2}, \dots, \pi_{i_{n-1} i_n} > 0$ što implicira iii).
Ako $q_{ij} > 0$, tada

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j) \geq \mathbb{P}_i(J_1 \leq t, Z_1 = j, S_2 > t) = (1 - e^{-q_i t})\pi_{ij} e^{-q_j t} > 0$$

za sve $t > 0$, tako da ako vrijedi iii), tada

$$p_{ij}(t) \geq p_{i_0 i_1}(\frac{t}{n}) \dots p_{i_{n-1} i_n}(\frac{t}{n}) > 0,$$

za svaki $t > 0$ te slijedi iv). □

Definicija 5.2. *Stanja $i, j \in I$ komuniciraju, u oznaci $i \leftrightarrow j$, ako je $i \to j$ i $j \to i$.*

Relacija komunikacije K je relacija ekvivalencije na $I \times I$. Relacija K inducira particiju skupa I na tzv. klase komuniciranja. Klasu C_{i_0} čine sva stanja iz I koja međusobno komuniciraju, gdje je i_0 reprezentant klase. Klase su međusobno disjunktne, neprazne i u uniji čine I.

Definicija 5.3. *Markovljev lanac je ireducibilan ako se skup stanja I sastoji samo od jedne klase komuniciranja, tj. ako za svaki $i, j \in I$ vrijedi $i \leftrightarrow j$.*

Označavamo s T_i vrijeme prvog pogotka $(X_t, t \geq 0)$ u stanje i, definirano s

$$T_i(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) = i\}.$$

Definicija 5.4. *Podskup skupa stanja $C \subseteq I$ je zatvoren ako vrijedi $\mathbb{P}(T_{I/C} < \infty | X_0 = i) = 0$, za svaki $i \in C$, odnosno iz zatvorenog podskupa skupa stanja Markovljev lanac ne može izaći, ali u njega može ući. Za $j \in I$ kažemo da je apsorbirajuće stanje ako je j zatvoren podskup skupa I.*

Definicija 5.5. *Ako je $j \in I$ apsorbirajuće stanje Markovljevog lanca tada vjerojatnost $\mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i), i \in I$ zovemo apsorpcijska vjerojatnost. Ako je $B \subset I$ zatvoren podskup skupa stanja I, tada su apsorpcijske vjerojatnosti oblika $\mathbb{P}(T_B < \infty | X_0 = i), i \in I$.*

5.1 Vremena pogotka i apsorpcijske vjerojatnosti

Definicija 5.6. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac s generatorskom matricom Q. Za $A \subseteq I$ definiramo prvo vrijeme pogađanja tog skupa kao*

$$T_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

gdje je $\inf \emptyset = \infty$.

Ako je H_A vrijeme pogađanja skupa A za lanac skokova tada

$$\{H_A < \infty\} = \{T_A < \infty\}$$

i na tom skupu imamo

$$T_A = J_{H_A}.$$

Definicija 5.7. *Vjerojatnost da $(X_t, t \geq 0)$ bilo kada pogodi A počevši u i je*

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(T_A < \infty) = \mathbb{P}_i(H_A < \infty).$$

Kada je A zatvorena klasa, h_i^A se naziva apsorpcijska vjerojatnost.

Teorem 5.2. *Vektor vjerojatnosti pogađanja $h^A = (h_i^A, i \in I)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$h_i^A = \begin{cases} 1 \text{ , za } i \in A \\ \sum_{j \in I} q_{ij} h_j^A = 0 \text{ , za } i \notin A. \end{cases}$$

Dokaz. Vidi [5, poglavlje 4,str. 26]. □

Počevši u i prosječno vrijeme potrebno da $(X_t, t \geq 0)$ dođe do A dano je s

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(T_A).$$

Teorem 5.3. *Pretpostavimo da $q_i > 0$, za sve $i \notin A$. Vektor očekivanja vremena pogađanja $k^A = (k_i^A, i \in I)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$k_i^A = \begin{cases} 0 \text{ , za } i \in A \\ -\sum_{j \in I} q_{ij} k_j^A = 1 \text{ , za } i \notin A \end{cases} . \tag{5.1}$$

Dokaz. Najprije pokažimo da k^A zadovoljava sustav. Ako $X_0 = i \in A$, tada $T_A = 0$ pa $k_i^A = 0$. Ako $X_0 = i \notin A$, tada $T_A \geq J_1$ pa zbog Markovljevog svojstva lanca skokova vrijedi

$$\mathbb{E}_i(T_A - J_1 | Z_1 = j) = \mathbb{E}_j(T_A)$$

pa

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(T_A) = \mathbb{E}_i(J_1) + \sum_{j \neq i} \mathbb{E}(T_A - J_1 | Z_1 = j)\mathbb{P}_i(Z_1 = j) = q^{-1} + \sum_{j \neq i} \pi_{ij} k_j^A.$$

Nakon množenja s q_{ii} dobivamo

$$-\sum_{j \in I} q_{ij} k_j^A = 1.$$

Nadalje pokažimo minimalnost. Pretpostavimo da je $y = (y_i, i \in I)$ drugo rješenje od (5.1). Tada $k_i^A = y_i = 0$ za $i \in A$. Pretpostavimo $i \notin A$, tada

$$y_i = q_i^{-1} + \sum_{j \notin A} \pi_{ij} y_j = q_i^{-1} + \sum_{j \notin A} \pi_{ij} (q_j^{-1} + \sum_{k \notin A} \pi_{jk} y_k)$$

$$= \mathbb{E}_i(S_1) + \mathbb{E}_i(S_2 1_{\{H^A \geq 2\}}) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} \pi_{ij} \pi_{jk} y_k.$$

Nastavljajući tako zamijenom y, u zadnjem izrazu nakon n koraka dobivamo

$$y_i = \mathbb{E}_i(S_1) + \cdots + \mathbb{E}_i(S_n 1_{\{H_A \geq n\}}) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} \pi_{ij_1} \ldots \pi_{j_{n-1} j_n} y_{j_n}.$$

Ako je y nenegativna

$$y_i \geq \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}_i(S_m 1_{\{H_A \geq m\}}) = \mathbb{E}_i\Big(\sum_{m=1}^{H_A \wedge n} S_m \Big),$$

gdje je $H_A \wedge n$ minimum od H_A i n. Sada je

$$\sum_{m=1}^{H_A} S_m = T_A$$

pa primjenom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $y_i \geq \mathbb{E}_i(T_A) = k_i^A$. Dakle, k_i^A je minimalno nenegativno rješnje sustava. $\square$

5.2 Povratnost i prolaznost

U ovom potpoglavlju objasnit ćemo klasifikaciju stanja na povratna i prolazna stanja. Povratno stanje je stanje u koje se Markovljev lanac vraća beskonačno mnogo puta, a prolazno stanje je stanje u koje se Markovljev lanac ne vraća beskonačno mnogo puta.

Definicija 5.8. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i skupom stanja I. Neka je $(X_t, t \geq 0)$ minimalan. Stanje $i \in I$ je povratno ako*

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ je neomeđen }) = 1.$$

Kažemo da je $i \in I$ je prolazno ako

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ je neomeđen }) = 0.$$

Podsjetimo se teorema koji vrijede za Markovljeve lance u diskretnom vremenu koji će nam biti potrebni u analizi povratnosti i prolaznosti.

Teorem 5.4. *Neka je $(Z_n, n \geq 0)$ Markovljev lanac u diskretnom vremenu te T_i vrijeme prvog pogotka u stanje i. Tada vrijedi sljedeće:*

i) Ako je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ tada je i povratno i $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;

ii) Ako je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ tada je i prolazno i $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Teorem 5.5. *Neka je C klasa komuniciranja. Tada su ili sva stanja u C prolazna ili su sva stanja povratna.*

Primjetimo da ukoliko $(X_t, t \geq 0)$ eksplodira počevši u i, tada se i sigurno ne ponavlja. Sljedeći rezultat pokazuje da su povratnost i prolaznost određeni lancem skokova.

Teorem 5.6. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

i) ako je i povratno za lanac skokova $(Z_n, n \geq 0)$, tada je i povratno za $(X_t, t \geq 0)$;

ii) ako je i prolazno za lanac skokova $(Z_n, n \geq 0)$, tada je i prolazno za $(X_t, t \geq 0)$;

iii) svako stanje je ili povratno ili prolazno;

iv) povratnost i prolaznost su svojstva klase komuniciranja.

Dokaz. i) Pretpostavimo da je i povratno za $(Z_n, n \geq 0)$. Ako $X_0 = i$, tada je $(X_t, t \geq 0)$ regularan i $J_n \to \infty$ po propoziciji 2.1. Budući da je $X_{J_n} = Z_n = i$ slijedi da je $\{t \geq 0 : X_t = i\}$ neomeđeno, s vjerojatnošću 1.

ii) Pretpostavimo da je i prolazno za $(Z_n, n \geq 0)$. Ako $X_0 = i$, tada

$$N = \sup\{n \geq 0 : Z_n = i\} < \infty$$

pa je $\{t \geq 0 : X_t = i\}$ omeđen s $J(N+1)$, što je konačno s vjerojatnošću 1, zato $(Z_n, n \leq N)$ ne može uključivati apsorbirajuće stanje.

iii) Koristi teorem 5.4. za lanac skokova.

iv) Koristi teorem 5.5. za lanac skokova.

□

Teorem 5.7. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac u neprekidnom vremenu i neka je T_i vrijeme prvog pogotka $(X_t, t \geq 0)$ u stanje i tada vrijedi sljedeće:*

i) Ako $q_i = 0$ ili $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, tada je i povratno i $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$;

ii) Ako $q_i > 0$ ili $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, tada je i prolazno i $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt < \infty$;

Dokaz. i) Ako je $q_i = 0$, tada $(X_t, t \geq 0)$ ne može napustiti i pa je i povratno, $p_{ii}(t) = 1$, za sve t i $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$. Pretpostavimo tada da je $q_i > 0$. Neka N_i označava vrijeme prvog pogotka lanca skokova $Z = (Z_n, n \geq 0)$ u stanje i. Tada

$$\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$$

pa je i povratno za Z.
Pišemo $\pi_{ij}^{(n)}$ za (i,j) element u Π^n. Možemo pokazati

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \frac{1}{q_i}\sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}. \tag{5.2}$$

Za dokaz koristimo Fubinijev teorem:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p_{ii}(t)dt &= \int_0^\infty \mathbb{E}_i(1_{\{X_t=i\}}dt) = \mathbb{E}_i\int_0^\infty (1_{\{X_t=i\}}dt)\\ &= \mathbb{E}_i\sum_{n=0}^\infty S_{n+1}1_{\{Y_n=i\}} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i(S_{n+1}1_{\{Y_n=i\}})\\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i(S_{n+1}|Y_n=i)\mathbb{P}_i(Y_n=i) = \frac{1}{q_i}\sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}.\end{aligned}$$

ii) Slijedi iz $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ i jednakosti (5.2).

$\square$

Teorem 5.8. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac u neprekidnom vremenu i neka je $Y_n = X_{nh}$, za $h > 0$. Tada vrijedi sljedeće:*

i) Ako je $i \in I$ povratno za $(X_t, t \geq 0)$ tada je i povratno za $(Y_n, n \geq 0)$.

ii) Ako je $i \in I$ prolazno $(X_t, t \geq 0)$ tada je i prolazno za $(Y_n, n \geq 0)$.

Dokaz. Tvrdnja ii) je očigledna.
U dokazu i) za $nh \leq t < (n+1)h$ zbog Markovljevog svojstva slijedi

$$p_{ii}((n+1)h) = \mathbb{P}_i(X_{(n+1)h} = i) \geq \mathbb{P}_i(X_t = i)\mathbb{P}_i(X_{(n+1)h-t} = i) \geq e^{-q_i h} p_{ii}(t).$$

Tada primjenom teorema o monotonoj konvergenciji

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt \leq e^{q_i h} \int_0^\infty p_{ii}((n+1)h)dt = he^{q_i h} \sum_{n=1}^\infty p_{ii}(nh)$$

i rezultat slijedi po teoremu 5.4. i 5.7. $\square$

5.3 Stacionarna distribucija

Kao i u teoriji Markovljevog lanca u diskretnom vremenu, pojmovi stacionarne distribucije i mjere igraju važnu ulogu u učenju o Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu.

Definicija 5.9. *Neka je X Markovljev lanac sa skupom stanja I i generatorskom matricom Q. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i, i \in I)$ na I je stacionarna distribucija (ili invarijantna distribucija) Markovljevog lanca X (odnosno generatorske matrice Q) ako vrijedi*

$$\pi = \pi Q$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in I} \pi_k q_{kj}, \text{ za sve } j \in I.$$

Definicija 5.10. *Niz $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$ naziva se mjera ako je $\lambda_i \in [0, \infty)$ za sve $i \in I$. Mjera λ je netrivijalna ako postoji $i \in I$ takav da je $\lambda_i > 0$. Neka je X Markovljev lanac s generatorskom matricom Q. Netrivijalna mjera na I je invarijantna mjera Markovljevog lanca X (odnosno generatorske matrice Q) ako vrijedi*

$$\lambda = \lambda Q$$

odnosno po komponentama

$$\lambda_j = \sum_{k \in I} \lambda_k q_{kj}, \text{ za sve } j \in I.$$

Teorem 5.9. *Neka je $X = (X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja I i generatorskom matricom Q te $Z = (Z_n, n \geq 0)$ pripadajući lanac skokova s prijelaznom matricom Π. Nadalje neka je λ mjera i $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

i) λ *je invarijantna;*

ii) $\mu\Pi = \mu$ *gdje* $\mu_i = \lambda_i q_i$.

Dokaz. Imamo $q_i(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = q_{ij}$, za sve i, j, pa

$$(\mu(\Pi - I))_j = \sum_{j\in I} \mu_i(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_{j\in I} \lambda_i q_{ij} = (\lambda Q)_j.$$

□

Podsjetimo se teorema za Markovljeve lance u diskretnom vremenu vezane uz stacionarnu distribuciju.

Teorem 5.10. *Ako je* $(Z_n, n \geq 0)$ *Markovljev lanac u diskretnom vremenu koji je ireducibilan i povratan, tada on ima netrivijalnu invarijantnu mjeru koja je jedinstvena do na multiplikativni skalar.*

Teorem 5.11. *Neka je* $(X_t, t \geq 0)$ *Markovljev lanac s generatorskom matricom* Q *koji je ireducibilan i povratan. Tada* X *ima invarijantnu mjeru* λ *koja je jedinstvena do na multiplikativni skalar.*

Dokaz. Isključimo trivijalni slučaj $I = \{i\}$. Kako je proces ireducibilan to povlači $q_i > 0$, za svaki i. Prema teoremima 5.1. i 5.6., Π ima invarijantnu mjeru μ koja je jedinstvena do na multiplikativni skalar. Prema teoremu 5.9. možemo uzeti $\lambda_i = \mu_i/q_i$ da dobivamo invarijantnu mjeru jedinstvenu do na multiplikativni skalar. □

Očekivano vrijeme povratka definiramo s

$$m_i = \mathbb{E}_i(T_i).$$

Podsjetimo se da je stanje i povratno ako $q_i = 0$ ili $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$.

Definicija 5.11. *Ako je* $q_i = 0$ *ili je* $m_i = \mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ *tada kažemo da je i pozitivno povratno. Inače povratno stanje i zovemo nul povratno.*

Kao u slučaju diskretnog vremena pozitivno povratno stanje je vezano s egzistencijom invarijantne distribucije.

Teorem 5.12. *Neka je* $(X_t, t \geq 0)$ *ireducibilan Markovljev lanac s generatorskom matricom* Q*. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

i) svako stanje je pozitivno povratno;

ii) neko stanje i je pozitivno povratno;

iii) X *je regularan i ima invarijantnu distribuciju* λ*.*

Štoviše, kada vrijedi iii) imamo $m_i = \frac{1}{\lambda_i q_i}$*, za sve* i*.*

Dokaz. Isključimo trivijalni slučaj $I = \{i\}$; tada ireducibilnost zahtjeva $q_i > 0$, za sve i. Očito je da i) implicira ii).
Definirajmo $\mu^i = (\mu^i_j, j \in I)$ sa

$$\mu^i_j = \mathbb{E}_i \int_0^{T_i \wedge \zeta} 1_{\{X_s = j\}} ds,$$

gdje $T_i \wedge \zeta$ označuje minimum od T_i i ζ. Primjenom teorema o monotonoj konvergenciji je

$$\sum_{j \in T} \mu^i_j = \mathbb{E}_i(T_i \wedge \zeta).$$

Označimo s N_i vrijeme prvog pogotka lanca skokova u stanje i. Prema Fubinijevom teoremu je

$$\begin{aligned}
\mu^i_j &= \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} 1_{\{Y_n = j, n < N_i\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(S_{n+1} | Y_n = j) \mathbb{E}_i(1_{\{Y_n = j, n < N_i\}}) \\
&= q_j^{-1} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{Y_n = j, n < N_i\}} = q_j^{-1} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{N_i - 1} 1_{\{Y_n = j\}} = \frac{\gamma^i_j}{q_j}
\end{aligned}$$

gdje je γ^i_j očekivano vrijeme koje lanac skokova provede u j prije nego posjeti stanje i, ukoliko lanac prije toga ne eksplodira.
Pretpostavimo da vrijedi ii), tada je i sigurno povratno pa je lanac skokova povratan te je X regularna prema teoremu 2.1. Znamo da je tada $\gamma^i \Pi = \gamma^i$ pa $\mu^i Q = 0$, po teoremu 5.9. Ali kako je

$$\sum_{j \in I} \mu^i_j = \mathbb{E}_i(T_i) = m_i,$$

ako stavimo $\lambda_j = \mu^i_j / m_i$, dobivamo invarijantnu distribuciju λ.
S druge strane, pretpostavimo da vrijedi iii). Za proizvoljan $i \in I$ stavimo $\nu_j = \lambda_j q_j / (\lambda_i q_i)$, tada $\nu_i = 1$ i $\nu \Pi = \nu$ po teoremu 5.9. pa $\nu_j \geq \gamma^i_j$, za sve j. Stoga je

$$\begin{aligned}
m_i &= \sum_{j \in I} \mu^i_j = \sum_{j \in I} \gamma^i_j / q_j \leq \sum_{j \in I} \nu_j / q_j \\
&= \sum_{j \in I} \lambda_j / (\lambda_i q_i) = 1/(\lambda_i q_i) < \infty,
\end{aligned}$$

iz čega vidimo da je i pozitivno povratan. Kako bi dovršili dokaz vraćamo se na prethodni izračun gdje dobivamo da je X povratan pa je $\nu_j = \gamma^i_j$ i $m_i = 1/(\lambda_i q_i)$, za svaki i. $\square$

Sljedeći rezultat dokazuje da je mjera λ s $\lambda Q = 0$ invarijantna.

Teorem 5.13. *Neka je $X = (X_t, t \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i stohastičkom polugrupom $(P(t), t \geq 0)$ te neka je λ mjera. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) $\lambda Q = 0$;

ii) $\lambda P(t) = \lambda$.

Dokaz. U slučaju da je skup stanja konačan: prema jednadžbi unatrag je

$$\frac{d}{ds}\lambda P(s) = \lambda P'(s) = \lambda Q P(s)$$

pa $\lambda Q = 0$ implicira $\lambda P(s) = \lambda P(0) = \lambda$, za sve s.
U slučaju da je skup stanja beskonačan: kako je X povratan, po propoziciji 2.1. je regularan i po teoremu 5.8 je Markovljev lanac u diskretnom vremenu $Z_n = X_{ns}$ s matricom prijelaznih vjerojatnosti $P(s)$ povratan. Stoga, bilo koji λ koji zadovoljava i) ili ii) je jedinstven do na multiplikativni skalar. Prema dokazu teorema 5.12. za proizvoljan $i \in I$ imamo

$$\mu_j = \mathbb{E}_i \int_0^{T_i} 1_{\{X_t = j\}} dt,$$

tada $\mu Q = 0$. Prema tome dovoljno je pokazati $\mu P(s) = \mu$. Upotrebom jakog Markovljevog svojstva na T_i slijedi

$$\mathbb{E}_i \int_0^{s} 1_{\{X_t = j\}} dt = \mathbb{E}_i \int_{T_i}^{T_i + s} 1_{\{X_t = j\}} dt.$$

Stoga, koristeći Fubinijev teorem imamo

$$\begin{aligned}
\mu_j &= \mathbb{E}_i \int_s^{s+T_i} 1_{\{X_t = j\}} dt \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{s+t} = j, t < T_i) dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k \in I} \mathbb{P}_i(X_t = k, t < T_i) p_{kj}(s) dt \\
&= \sum_{k \in I} (\mathbb{E}_i \int_0^{T_i} 1_{\{X_t = k\}} dt) p_{kj}(s) \\
&= \sum_{k \in I} \mu_k p_{kj}(s).
\end{aligned}$$

□

Teorem 5.14. *Ako je $(X_t, t \geq 0)$ (λ, Q)-Markovljev lanac, tada je za svako $s \geq 0$ $(X_{t+s}, t \geq 0)$ također (λ, Q)-Markovljev lanac.*

Dokaz. Prema teoremu 5.13. za svako stanje i vrijedi

$$P(X_s = i) = (\lambda P(s))_i = \lambda_i$$

pa zbog Markovljevog svojstva, uvjetno na $\{X_s = i\}$, $(X_{s+t}, t \geq 0)$ je (λ, Q)-Markovljev lanac. □

Primjer 5.1. (**Dva stanja**) Pretpostavimo kao u Primjeru 4.1. da je skup stanja dan s $\{1, 2\}$, gdje je $q_{12} = \lambda$ i $q_{21} = \mu$, gdje su oba parametra pozitivna. Jednadžba $\lambda Q = 0$ ima matrični oblik

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kada pomnožimo matrice dobijemo

$$-\lambda \pi_1 + \mu \pi_2 = 0.$$

Kako vrijedi $\pi_1 + \pi_2 = 1$ rješavanjem te dvije jednadžbe dobijemo

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \text{ i } \pi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

5.4 Granična distribucija

Proučavamo granično ponašanje od $p_{ij}(t)$ kada $t \to \infty$ i njegov odnos prema invarijantnim distribucijama. Situacija je analogna kao u slučaju diskretnog vremena, samo u slučaju neprekidnog vremena nema periodičnosti.

Definicija 5.12. *Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i, i \in I)$ naziva se granična distribucija Markovljevog lanca $X = (X_t, t \geq 0)$ ako vrijedi:*

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \text{ za sve } i, j \in I.$$

Lema 5.1. *Neka je Q generatorska matrica s polugrupom $P(t)$. Tada, za sve $t, h \geq 0$*

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 1 - e^{-q_i h}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| &= |\sum_{k \in I} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)| \\
&= |\sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - (1 - p_{ii}(h)) p_{ij}(t)| \\
&\leq 1 - p_{ii}(h) \leq \mathbb{P}_i(J_1 \leq h) = 1 - e^{-q_i h}.
\end{aligned}$$

□

Teorem 5.15. ***(Konvergencija prema graničnoj distribuciji)*** *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ ireducibilan i regularan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i polugrupom $P(t)$. Pretpostavimo da X ima invarijantnu distribuciju λ. Tada za sva stanja i, j imamo*

$$p_{ij}(t) \to \lambda_j, \text{ kada } t \to \infty.$$

Dokaz. Neka je $(X_t, t \geq 0)$ (δ_i, Q)-Markovljev lanac. Za proizvoljan $h > 0$ stavimo $Z_n = X_{nh}$. Tada je

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(h)$$

pa je $(Z_n, n \geq 0)$ $(\delta_i, P(h))$-Markovljev lanac u diskretnom vremenu. Prema teoremu 5.1. ireducibilnost povlači $p_{ij}(h) > 0$ za sve i, j pa je $P(h) > 0$ što povlači da je Z ireducibilan i aperiodičan. Prema teoremu 5.9, λ je invarijantna za Z. Stoga, po konvergenciji prema graničnoj distribuciji u slučaju diskretnog vremena, za sve i, j je

$$p_{ij}(nh) \to \lambda_j \text{ kada } n \to \infty.$$

Prema tome, konvergencija je po točkama (oblika nh) te popunjavamo postupak na preostalim točkama. Uzmemo proizvoljno stanje $i \in I$. Za dani $\epsilon > 0$ postoji $h > 0$ takav da

$$1 - e^{-q_i s} \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ za } 0 \leq s \leq h.$$

Nadalje, postoji N takav da

$$|p_{ij}(nh) - \lambda_j| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ za } n \geq N.$$

Neka je $t \geq Nh$. Tada postoji $n \geq N$ takav da je $nh \leq t < (n+1)h$ te iz toga vrijedi

$$|p_{ij}(t) - \lambda_j| \leq |p_{ij}(t) - p_{ij}(nh)| + |p_{ij}(nh) - \lambda_j| \leq \epsilon$$

Dakle,

$$p_{ij}(t) \to \lambda_j \text{ kada } n \to \infty$$

time smo dobili da je λ granična distribucija. □

Potpuni opis graničnog ponašanja za ireducibilne lance u neprekidnom vremenu dan je sljedećim rezultatom.

Teorem 5.16. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i neka je ν bilo koja distribucija na skupu stanja I. Pretpostavimo da je $(X_t, t \geq 0)$ (ν, Q)-Markovljev lanac. Tada*

$$\mathbb{P}(X_t = j) \to \frac{1}{q_j m_j}, \text{ kada } t \to \infty, \text{ za sve } j \in I,$$

gdje je m_j točno vrijeme vraćanja u stanje j.

5.5 Ergodski teorem

Na kraju ovog poglavlja spomenit ćemo Ergodski teorem kao rezultat o graničnom ponašanju srednjih vrijednosti kroz vrijeme.

Teorem 5.17. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i neka je ν bilo koja distribucija na skupu stanja I. Ako je $(X_t, t \geq 0)$ (ν, Q)-Markovljev lanac tada*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=i\}} ds = \frac{1}{m_i q_i}\Big) = 1,$$

gdje je $m_i = \mathbb{E}_i(T_i)$ očekivano vrijeme povratka u stanje i. Povrh toga, u slučaju ako je pozitivno povratan, za bilo koju omeđenu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ imamo

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s) ds = \bar{f}\Big) = 1$$

gdje je $\bar{f} = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$ i gdje je $(\lambda_i, i \in I)$ jedinstvena invarijantna distribucija.

Dokaz. Ako je X prolazan Markovljev lanac tada je ukupno provedeno vrijeme u bilo kojem stanju i konačno pa

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=i\}} ds \leq \frac{1}{t}\int_0^\infty 1_{\{X_s=i\}} ds \to 0 = \frac{1}{m_i}.$$

Pretpostavimo da je tada X povratno i uzmimo proizvoljno stanje $i \in I$. Tada $(X_t, t \geq 0)$ pogodi i s vjerojatnošću 1 i dug period vremena koji proces provede u i jednaka je dugom periodu vremena koje proces provede u i nakon prvog pogotka i. Stoga, prema jakom Markovljevom svojstvu dovoljno je razmotriti slučaj $\nu = \delta_i$.
Označimo s M_i^n duljinu n-tog posjeta i, s T_i^n vrijeme n-tog povratka u i i s L_i^n duljinu n-tog izleta u i. Tako za $n = 0, 1, 2, \dots$, stavimo $T_i^0 = 0$, imamo

$$\begin{aligned} M_i^{n+1} &= \inf\{t > T_i^n : X_t \neq i\} - T_i^n \\ T_i^{n+1} &= \inf\{t > T_i^n + M_i^{n+1} : X_t = i\} \\ L_i^{n+1} &= T_i^{n+1} - T_i^n. \end{aligned}$$

Prema jakom Markovljevom svojstvu za vrijeme zaustavljanja T_i^n, za $n \geq 0$, vidimo da su $L_i^1, L_i^2, \dots$ nezavisne i jednako distribuirane s očekivanjem m_i i tada su $M_i^1, M_i^2, \dots$ nezavisne i jednako distribuirane s očekivanjem $\frac{1}{q_i}$. Stoga, prema jakom zakonu velikih brojeva je

$$\frac{L_i^1 + \cdots + L_i^n}{n} \to m_i \quad \text{kada} \quad n \to \infty$$

$$\frac{M_i^1 + \cdots + M_i^n}{n} \to \frac{1}{q_i} \quad \text{kada} \quad n \to \infty$$

i stoga

$$\frac{M_i^1 + \cdots + M_i^n}{L_i^1 + \cdots + L_i^n} \to \frac{1}{m_i q_i} \quad \text{kada} \quad n \to \infty$$

s vjerojatnošću 1. Imamo da $\frac{T_i^n}{T_i^{n+1}} \to 1$ kada $n \to \infty$ s vjerojatnošću 1. Sada, za $T_i^n \leq t \leq T_i^{n+1}$ imamo

$$\frac{T_i^n}{T_i^{n+1}} \frac{M_i^1 + \cdots + M_i^n}{L_i^1 + \cdots + L_i^n} \leq \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = i\}} ds \leq \frac{T_i^{n+1}}{T_i^n} \frac{M_i^1 + \cdots + M_i^{n+1}}{L_i^1 + \cdots + L_i^{n+1}},$$

pa ako pustimo $t \to \infty$ imamo

$$\frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = i\}} ds \to \frac{1}{m_i q_i},$$

s vjerojatnošću 1. U slučaju kada imamo pozitivnu povratnost možemo pisati

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds - \bar{f} = \sum_{i \in I} f_i \Big(\frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = i\}} ds - \lambda_i \Big)$$

gdje je $\lambda_i = \frac{1}{m_i q_u}$. Zaključujemo da

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \to \bar{f} \text{ kada } t \to \infty$$

s vjerojatnošću 1. □

Primjer 5.2. (**Dva stanja**) Pretpostavimo da imamo Markovljev lanac $(X_t, t \geq 0)$ kao u Primjeru 4.1. sa skupom stanja $\{1, 2\}$. Izračunajmo asimptotsko prosječno vrijeme provedeno u stanjima 1 i 2

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = 1\}} ds = \pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = 2\}} ds = \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Literatura

[1] R. Durret, *Essentials of Stohastic Processes*, Springer text in statistics, Springer, 1999.

[2] J.R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 2004.

[3] S. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston, 2005.

[4] S.M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 2002.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2010.

[7] *Glossary of statistical terms*:
`https://stats.oecd.org/glossary/detail.asp?ID=3674`

[8] *Introduction to Probability, Statistics and Random Processes*:
`https://www.probabilitycourse.com/`

Sažetak

U ovom radu proučavamo Markovljeve lance u neprekidnom vremenu. Kako bi shvatili Markovljeve lance u neprekidnom vremenu najprije smo se upoznali s definicijama slučajnog procesa u neprekidnom vremenu, vremena skokova, vremena čekanja, procesa skokova te naveli neka svojstva eksponencijalne distribucije. Zatim definicija Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu $(X_t, t \geq 0)$ koja nam kaže da je to slučajan proces u neprekidnom vremenu s prebrojivim skupom stanja za koje vrijedi da buduće stanje ne ovisi o prošlom stanju nego samo o sadašnjem. Nadalje, konstruiramo Markovljev lanac u neprekidnom vremenu pomoću Markovljevog lanca u diskretnom vremenu $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ gdje nakon konstrukcije zaključujemo da je $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ proces skokova procesa $(X_t, t \geq 0)$. Pokazali smo da ukoliko je proces regularan tada je ujedno i Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. Primjeri takvih lanaca kojima se bavimo u radu su Poissonov proces i proces rađanja. Na kraju rada se bavimo svojstvima i strukturom Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu, objašnjavamo apsorpcijske vjerojatnosti, povratnost i prolaznost, stacionarne distribucije, granične distribucije te navodimo i dokazujemo Ergodski teorem.

Ključne riječi: Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu, generatorske matrice, Poissonov proces, proces rađanja, jednadžbe unatrag i unaprijed, stacionarna distribucija, granična distribucija, Ergodski teorem.

Summary

In this thesis we study continuous-time Markov chains. To understand continuous-time Markov chains, firstly we need to define terms continuous-time random process, jump times, holding times, jump processes, and introduce some properties of exponential distribution. Then, there is the definition of the continuous-time Markov chain $(X_t, t \geq 0)$ which describes them as a continuous-time random process with a finite state-space for which the future state does not depend on the past state but only on the present one. Furthermore, we construct a continuous-time Markov chain using the discrete-time Markov chain $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ so that $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ is jump process of $(X_t, t \geq 0)$. It has been shown that if a process is regular, then it is a continuous-time Markov chain. Examples of such chains that we deal with in this thesis are the Poisson process and the birth process. At the end of the thesis, we deal with the properties and structure of continuous-time Markov chains, we explain absorption probabilities, recurrence and transience, invariant distributions and limiting distributions, and state and prove the Ergodic theorem.

Keywords: Continuous-time Markov chains, generator matrix, Poisson processes, Birth processes, forward and backward equations, invariant distribution, limiting distribution, Ergodic theorem.

Životopis

Rođena sam 09.05.1994. godine u Osijeku. Osnovnu školu "Vladimir Nazor" u Čepinu pohađala sam u razdoblju od 2001. do 2009. godine. Nastavljam školovanje 2009. godine u I. gimnaziji u Osijeku koju završavam 2013. godine. Nakon završene srednje škole iste godine upisujem Preddiplosmki studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike stječem 2017. godine uz mentorstvo doc. dr. sc. Mirela Jukić Bokun i završni rad "Primitivni korijeni i indeksi". U jeseni iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom diplomskog studija odradila sam stručnu praksu u Hrvatskom zavodu za javno zdravstvo.