Stabilne distribucije

Ivanešić, Matea

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Matea Ivanešić

Stabilne distribucije

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Matea Ivanešić

Stabilne distribucije

Diplomski rad
Mentor: doc. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se stabilnim distribucijama. Stabilne distribucije su posebna klasa distribucija koje uključuju asimetrične distribucije i distribucije s teškim repovima koje se često koriste u primjenama. Karakterizirao ih je Paul Lévy 1920-tih godina. Zbog toga što se funkcija gustoće, osim u iznimnim slučajevima, ne može prikazati u analitičkom obliku, karakteriziramo ih pomoću karakterističnih funkcija. To je jedan od razloga zbog čega se prije nisu često koristile u primjeni. S razvojem računala se sve više primjenjuju za rješavanje praktičnih problema. Primjene stabilnih distribucija nalazimo u fizici te ekonomiji. Koriste se u modeliranju cijene dionica ili pak modeliranju šuma u komunikacijskim sustavima.

U prvom poglavlju upoznat ćemo se sa slučajnim varijablama koje imaju stabilnu distribuciju. Prvo ćemo definirati stabilne distribucije na nekoliko načina. Zatim ćemo navesti neka svojstva stabilnih distribucija slučajnih varijabli. Definirat ćemo i simetrične α-stabilne distribucije.

U drugom poglavlju ćemo se baviti stabilnim distribucijama slučajnih vektora. Prvo ćemo definirati što to znači da slučajni vektor ima stabilnu distribuciju, analogno kao kod slučajnih varijabli. Zatim ćemo definirati karakterističnu funkciju α-stabilnog slučajnog vektora. Definirat ćemo i slučajne vektore koji imaju strogo stabilnu te simetričnu stabilnu distribuciju te reći što je to subgausovski slučajni vektor. Uvest ćemo i neke nove pojmove kao što su kovarijacija, kovarijacijska norma, kodiferentnost te α-slučajna mjera kako bismo mogli opisati strukture zavisnosti stabilnih distribucija.

U posljednjem poglavlju bavit ćemo se strukturama zavisnosti stabilnih distribucija. Vidjet ćemo poveznicu linearne regresije i stabilnih distribucija. Upoznat ćemo se i sa simetričnim uvjetnim distribucijama. Promatrat ćemo što se događa sa stabilnim distribucijama u slučaju linearne ovisnosti. Naći ćemo i sve uvjete kako bi moment slučajnog vektora koji ima stabilnu distribuciju bio konačan. Na kraju ćemo definirati što to znači da su slučajne varijable koje imaju stabilnu distribuciju asocirane.

2 Stabilne distribucije slučajnih varijabli

U ovom poglavlju bavit ćemo se proučavanjem stabilnih distribucija. Stabilne distribucije su klasa neprekidnih distribucija čija su funkcija gustoće i funkcija distribucije neprekidne, ali u većini slučajeva nisu poznate u zatvorenom analitičkom obliku. Prvo ćemo definirati kada slučajna varijabla ima stabilnu distribuciju. Zatim ćemo navesti neka svojstva stabilnih distribucija. Na kraju ovog poglavlja ćemo definirati i simetrične stabilne distribucije.

2.1 Ekvivalentne definicije stabilnih distribucija

U ovom potpoglavlju iskazat ćemo četiri definicije stabilnih distribucija koje su međusobno ekvivalentne. Ekvivalentnosti nećemo dokazivati. Treća definicija temeljena je na centralnom graničnom teoremu, dok se u četvrtoj koristi karakteristična funkcija za definiranje stabilnih distribucija. Većinom ćemo koristiti karakterističnu funkciju jer, kao što smo već rekli u uvodu, funkcija gustoće se ne može prikazati u analitičkom obliku osim u iznimnim slučajevima. Prve dvije definicije temelje se na stabilnosti kao svojstvu.

Definicija 2.1.1. *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima stabilnu distribuciju ako za bilo koje pozitivne brojeve A i B, postoji pozitivan broj C i realan broj D takvi da vrijedi:*

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \tag{2.1.1}$$

gdje su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable kao X i gdje "$\stackrel{d}{=}$" označava jednakost u distribuciji.

Slučajna varijabla X ima *strogo stabilnu* distribuciju ako relacija (2.1.1) vrijedi za $D = 0$. Slučajna varijabla sa stabilnom distribucijom ima *simetričnu stabilnu* distribuciju ukoliko je njena distribucija simetrična, tj. ako vrijedi da X i $-X$ imaju istu distribuciju. Ako slučajna varijabla ima simetričnu stabilnu distribuciju, tada je njena distribucija i strogo stabilna. Obrat ne mora vrijediti. Sada ćemo iskazati jedan teorem koji vrijedi za sve slučajne varijable koje imaju stabilnu distribuciju.

Teorem 2.1.2. *Za bilo koju slučajnu varijablu X koja ima stabilnu distribuciju, postoji broj $\alpha \in (0, 2]$ takav da broj C u (2.1.1) zadovoljava:*

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha. \tag{2.1.2}$$

Broj α zovemo *indeks stabilnosti* ili *karakteristični eksponent*. Za slučajnu varijablu X koja ima stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti α kažemo da ima α-stabilnu distribuciju.

Sada ćemo iskazati drugu definiciju stabilnih distribucija.

Definicija 2.1.3. *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima stabilnu distribuciju ako za bilo koji $n \geq 2$, postoji pozitivan broj C_n i realan broj D_n takvi da vrijedi:*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n, \tag{2.1.3}$$

gdje su X_1, X_2, ..., X_n nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable kao X.

Može se pokazati kako je C_n iz relacije (2.1.3) jednak $n^{1/\alpha}$ za neki $\alpha \in (0, 2]$. Za dokaz ove tvrdnje pogledati ([3], W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, str.170-171, teorem VI.1).

Stabilne distribucije pojavljuju se kao distribucijski limesi niza centriranih i normiranih parcijalnih suma niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje nužno ne moraju imati varijancu. Sljedeća definicija stabilnih distribucija proizašla je iz generaliziranog centralnog graničnog teorema. Prije nego se podsjetimo što je to centralni granični teorem, podsjetit ćemo se i što je to konvergencija po distribuciji.

Definicija 2.1.4. *Kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli X ako je $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ u kojemu je F_X neprekidna funkcija. Pišemo: $X_n \xrightarrow{d} X,\ n \to \infty$.*

Sada ćemo iskazati centralni granični teorem.

Teorem 2.1.5. *(Centralni granični teorem) Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom $\sigma^2 < \infty$. Tada niz slučajnih varijabli $(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma}, n \in \mathbb{N})$ konvergira po distribuciji prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli, tj. vrijedi:*

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1),\ n \to \infty. \tag{2.1.4}$$

Za dokaz pogledati ([8] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, str. 507, teorem 14.1).

Relacija (2.1.4) se može napisati i kao:

$$a_n(X_1 + \cdots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1),\ n \to \infty, \tag{2.1.5}$$

gdje je $a_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}$ i $b_n = \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$.

Sljedeći teorem koji ćemo iskazati je generalizacija centralnog graničnog teorema. On nam kaže da ako izostavimo pretpostavku o konačnom očekivanju i konačnoj varijanci, tada dobijemo da niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli konvergira prema slučajnoj varijabli koja ima α-stabilnu distribuciju.

Teorem 2.1.6. *(Generalizirani centralni granični teorem) Slučajna varijabla Z ima α-stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti $0 < \alpha \leq 2$ ako i samo ako postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gdje je $n \in \mathbb{N}$ i konstante $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi:*

$$a_n(X_1 + \cdots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z. \tag{2.1.6}$$

Dokaz. Neka je X stabilna slučajna varijabla. Neka je $X_1, \ldots, X_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takav da vrijedi da je $F_{X_k} = F_X$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ i neka je zbog jednostavnosti $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Budući da je X stabilna slučajna varijabla, za svaki n postoji $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi da je $\frac{1}{a_n}(S_n - b_n) \stackrel{d}{=} X$. Iz toga slijedi:

$$\frac{1}{a_n}(S_n - b_n) \xrightarrow{d} X,\ n \to \infty.$$

S druge strane, pretpostavimo da je $X_1, \ldots, X_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka vrijedi da je $Y_n = \frac{1}{a_n}(S_n - b_n) \xrightarrow{d} X,\ n \to \infty$. Pretpostavimo da X nije degenerirana slučajna varijabla (ukoliko je, lako je provjeriti da je stabilna). Fiksiramo $n \in \mathbb{N}$ i stavimo:

$$S_n^{(1)} = X_1 + \cdots + X_n,$$

$$S_n^{(2)} = X_{n+1} + \cdots + X_{2n},$$

$$\vdots$$
$$S_n^{(r)} = X_{(r-1)n+1} + \cdots + X_{rn}.$$

$S_n^{(1)}$, ..., $S_n^{(r)}$ su nezavisne. Neka je dalje:

$$Z_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)} - b_n}{a_n},\ k = 1, 2, \ldots, r$$

i neka je onda:

$$W_n^{(r)} = \frac{S_n^{(1)} - b_n}{a_n} + \frac{S_n^{(2)} - b_n}{a_n} + \cdots + \frac{S_n^{(r)} - b_n}{a_n} = Z_n^{(1)} + \cdots + Z_n^{(r)},\ k = 1, 2, \ldots, r$$

pri čemu su $Z_n^{(1)}$, ..., $Z_n^{(r)}$ nezavisne. Očigledno vrijedi da je: $Z_n^{(k)} \stackrel{d}{=} Z_n^{(1)}$ za sve $k = 1, \ldots, r$ pa i stoga vrijedi $Z_n^{(k)} \xrightarrow{d} X$ za sve $k = 1, \ldots, r$. Iz teorema o neprekidnosti slijedi da je $W_n^{(r)} \xrightarrow{d} Z_1 + \cdots + Z_r$, pri čemu su $Z_1, \ldots, Z_r$ nezavisne i $Z_k \stackrel{d}{=} X$ za sve $k = 1, \ldots, r$. Dalje vrijedi:

$$\begin{aligned} W_n^{(r)} &= \frac{X_1 + \cdots + X_{rn} - rb_n}{a_n} \\ &= \frac{a_{rn}}{a_n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{rn} - rb_{rn}}{a_{rn}}\right) + \frac{b_{rn} - rb_n}{a_n} \\ &= \alpha_n^{(r)} Y_{rn} + \beta_n^{(r)}, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

gdje je $\alpha_n^{(r)} = \frac{a_{rn}}{a_n} > 0$. Prema tome, slijedi:

$$Y_{rn} = \frac{1}{\alpha_n^{(r)}}(W_n^{(r)} - \beta_n^{(r)}),\ Y_{rn} \stackrel{d}{=} X \text{ za } n \to \infty$$

i

$$W_n^{(r)} \xrightarrow{d} Z_1 + \cdots + Z_r \text{ za } n \to \infty.$$

Iz ovog slijedi da: $\alpha_n^{(r)} \to \alpha_r > 0$ kada $n \to \infty$, $\beta_n^{(r)} \to \beta_r \in \mathbb{R}$ kada $n \to \infty$ te vrijedi da je: $X \stackrel{d}{=} \frac{1}{\alpha_r}(Z_1 + \cdots + Z_r - \beta_r)$ što znači da je X stabilna slučajna varijabla. $\square$

Treća definicija nam govori kako su stabilne distribucije jedine distribucije koje se mogu dobiti kao limesi normaliziranih suma niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ova definicija proizlazi iz generaliziranog centralnog graničnog teorema.

Definicija 2.1.7. *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima stabilnu distribuciju ako postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli Y_1, Y_2, ..., Y_n te niz pozitivnih brojeva $\{d_n\}$ i niz realnih brojeva $\{a_n\}$ gdje je $n \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi:*

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X,\ n \to \infty. \tag{2.1.8}$$

U zadnjoj definiciji definiramo stabilne distribucije pomoću karakteristične funkcije, stoga ćemo se prvo prisjetiti što je to karakteristična funkcija neke slučajne varijable.

Definicija 2.1.8. *Karakteristična funkcija slučajne varijable X, tj. funkcije distribucije F_X, je funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana s:*

$$\varphi_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta x) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta x) dF_X(x) = \mathrm{E}[e^{i\theta X}], \ \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.1.9}$$

Sada možemo iskazati i posljednju definiciju stabilnih distribucija.

Definicija 2.1.9. *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima stabilnu distribuciju ako postoje parametri $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ i $\mu \in R$ takvi da karakteristična funkcija ima sljedeći oblik:*

$$\mathrm{E}[e^{i\theta X}] = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta (\operatorname{sign} \theta) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\theta\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |\theta| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\operatorname{sign} \theta) \ln |\theta|) + i\mu\theta\}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Znamo da je parametar α indeks stabilnosti te je:

$$\operatorname{sign} \theta = \begin{cases} -1, & \theta < 0 \\ 0, & \theta = 0 \\ 1, & \theta > 0 \end{cases}.$$

Parametri σ, β i μ su jedinstveni.

Budući da je karakteristična funkcija u (2.1.10) karakterizirana s četiri parametra:

$$\alpha \in (0, 2], \ \sigma \geq 0, \ \beta \in [-1, 1], \ \mu \in \mathbb{R},$$

stabilne distribucije ćemo označavati sa $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i pisat ćemo:

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

da bismo naznačili kako X ima stabilnu distribuciju $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Ukoliko X ima simetričnu α-stabilnu distribuciju, pisat ćemo

$$X \sim S\alpha S.$$

Kao što smo već rekli, takve slučajne varijable karakteriziramo pomoću karakteristične funkcije zato što njihove funkcije gustoće nisu poznate u analitičkom obliku osim u nekoliko iznimnih slučajeva. Stabilne distribucije čije funkcije gustoće znamo u eksplicitnom obliku su normalna distribucija, Cauchyjeva distribucija i Lévyjeva distribucija što ćemo vidjeti u sljedećim primjerima.

Primjer 2.1.10. *Neka je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem μ i varijancom σ^2. Funkcija gustoće normalne slučajne varijable je:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \ x \in \mathbb{R}.$$

X ima stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti $\alpha = 2$. To slijedi iz:

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2 + B^2)\sigma^2),$$

tj. (2.1.1) vrijedi s $C = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ i $D = (A + B - C)\mu$. U ovom slučaju parametar β je jednak 0.

Primjer 2.1.11. *(Lévyjeva distribucija) Neka je* $X \sim Levy(\gamma, \delta)$ *s funkcijom gustoće:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)} \right), & \delta < x < \infty \\ 0, \textit{inače.} \end{cases}$$

Lévyjeva distribucija je stabilna s parametrima $\alpha = 1/2$ *i* $\beta = 1$.

Primjer 2.1.12. *(Cauchyjeva distribucija) Neka je* $X \sim Cauchy(\gamma, \delta)$ *s funkcijom gustoće:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

X *ima stabilnu distribuciju s parametrima* $\alpha = 1$ *i* $\beta = 0$.

2.2 Svojstva stabilnih distribucija

U ovom potpoglavlju ćemo iskazati neka osnovna svojstva stabilnih distribucija. To će nam pomoći kako bismo dobili interpretaciju parametara α, σ, β i μ koji karakteriziraju stabilne distribucije. Prvo svojstvo govori o distribuciji sume dviju slučajnih varijabli koje imaju stabilnu distribuciju.

Svojstvo 2.2.1. *Neka su* X_1 *i* X_2 *nezavisne slučajne varijable te* $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. *Tada vrijedi:*

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \tag{2.2.1}$$

gdje su

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2^\alpha\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Dokaz. Dokazat ćemo samo slučaj kada je $\alpha \neq 1$. Zbog nezavisnosti slijedi:

$$\begin{aligned} \ln \mathrm{E} \exp i\theta(X_1 + X_2) &= \ln(\mathrm{E} \exp i\theta X_1) + \ln(\mathrm{E} \exp i\theta X_2) \\ &= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha + i|\theta|^\alpha \operatorname{sign}(\theta)\left(\tan \frac{\pi\alpha}{2} \right)(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) + i\theta(\mu_1 + \mu_2) \\ &= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha \left[1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2^\alpha\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \operatorname{sign}(\theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i\theta(\mu_1 + \mu_2). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Dokaz za slučaj $\alpha = 1$ je analogan. $\square$

Iz ovog svojstva vidimo kako je suma dviju slučajnih varijabli koje imaju stabilnu distribuciju opet slučajna varijabla koja ima stabilnu distribuciju. Sljedeće svojstvo govori o distribuciji sume slučajne varijable sa stabilnom distribucijom i realne konstante. Parametar μ se zove *parametar pomaka* zbog ovog sljedećeg svojstva.

Svojstvo 2.2.2. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *i neka je* a *realna konstanta. Tada vrijedi:*

$$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a). \tag{2.2.3}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti za slučaj kada je $\alpha \neq 1$.

$$\begin{aligned}\ln(\mathrm{E}[\exp i\theta(X+a)]) &= \ln(\mathrm{E}[\exp i\theta X]) + \ln(\mathrm{E}[\exp i\theta a]) \\ &= -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\theta\mu + i\theta a \\ &= -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\theta(\mu + a).\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Dokaz za slučaj kada je $\alpha = 1$ ide analogno. □

Iz ovog svojstva vidimo da ukoliko slučajnoj varijabli koja ima stabilnu distribuciju dodamo realnu konstantu, ona će opet imati stabilnu distribuciju. Ukoliko slučajnu varijablu koja ima stabilnu distribuciju pomnožimo realnom konstantom, rezultat će biti isti. To će opet biti slučajna varijabla koja ima stabilnu distribuciju što se vidi iz sljedećeg svojstva.

Svojstvo 2.2.3. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i neka je $a \neq 0$ realna konstanta. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} &aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \mathrm{sign}(a)\beta, a\mu), && \alpha \neq 1 \\ &aX \sim S_1(|a|\sigma, \mathrm{sign}(a)\beta, a\mu - \tfrac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta), && \alpha = 1.\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti za slučaj kada je $\alpha \neq 1$ pomoću karakteristične funkcije.

$$\begin{aligned}\ln(\mathrm{E}[\exp i\theta(aX)]) &= -\sigma^\alpha|\theta a|^\alpha(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(a\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu(\theta a) \\ &= -(\sigma|a|)^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(a)\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\theta(a\mu).\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Dokaz za slučaj kada je $\alpha = 1$ ide analogno. □

Parametar σ se zove *parametar skaliranja*. Vidimo da kad je $\alpha = 1$, množenje konstantom utječe na parametar pomaka na nelinearan način. Sada ćemo vidjeti što se događa u slučaju kada je $\mu = 0$ u iskazu sljedećeg svojstva.

Svojstvo 2.2.4. *Za bilo koji $0 < \alpha < 2$ vrijedi:*

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Longleftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0) \tag{2.2.7}$$

Tvrdnja slijedi pomoću (2.1.10) i primjene svojstva (2.2.3).

Sljedeće svojstvo karakterizira parametar β kao parametar asimetrije.

Svojstvo 2.2.5. *$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ima simetričnu distribuciju ako i samo ako je $\beta = 0$ i $\mu = 0$. X ima simetričnu distribuciju oko μ ako i samo ako je $\beta = 0$.*

Dokaz. Da bi distribucija neke slučajne varijable bila simetrična, njena karakteristična funkcija mora biti realna i zadovoljavati uvjete tzv. Polya teorema (za detalje vidjeti ([8] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, str.492, teorem 13.23). Iz prikaza karakteristične funkcije (2.1.10) vidimo da to može biti jedino u slučaju kada je $\beta = \mu = 0$.

Druga tvrdnja slijedi iz svojstva (2.2.2). □

Kao što smo već rekli, ako slučajna varijabla ima simetričnu stabilnu distribuciju, ta distribucija je i strogo stabilna, ali ako slučajna varijabla ima strogo stabilnu distribuciju, ona nužno ne mora biti i simetrična. Sada ćemo izreći uvjet kada je stabilna distribucija neke slučajne varijable ujedno i strogo stabilna.

Svojstvo 2.2.6. *Neka vrijedi: $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i $\alpha \neq 1$. Tada X ima strogo stabilnu distribuciju ako i samo ako je $\mu = 0$.*

Dokaz. Neka su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable kao X te neka su A i B proizvoljne konstante. Prema svojstvima (2.2.1) i (2.2.3) slijedi:

$$AX_1 + BX_2 \sim S_\alpha(\sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}), \beta, \mu(A + B)).$$

Zbog (2.1.1) moramo staviti da je $C = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}$. Prema svojstvima (2.2.2) i (2.2.3) vrijedi:

$$CX + D \sim S_\alpha(\sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}), \beta, \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha} + D).$$

Prema prvoj definiciji stabilnih distribucija, znamo da mora vrijediti da je: $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$. Da bi naša tvrdnja bila istinita mora vrijediti da je $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$ s $D = 0$ ako i samo ako je $\mu = 0$. □

Kao što smo vidjeli iz prethodnog svojstva, slučajna varijabla sa stabilnom distribucijom ima strogo stabilnu distribuciju ukoliko je $\mu = 0$. Sljedeći korolar je posljedica ovog svojstva.

Korolar 2.2.7. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i $\alpha \neq 1$. Tada $X - \mu$ ima strogo stabilnu distribuciju.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz svojstava (2.2.2) i (2.2.6). □

Vidjeli smo što se događa u slučaju kada je $\alpha \neq 1$. Što se događa ukoliko je $\alpha = 1$?

Svojstvo 2.2.8. *$X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$ ima strogo stabilnu distribuciju ako i samo ako je $\beta = 0$.*

Dokaz. Neka su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable kao X te neka su $A > 0$ i $B > 0$. Prema svojstvima (2.2.1) i (2.2.3) slijedi:

$$AX_1 + BX_2 \sim S_1\Big((A + B)\sigma, \beta, (A + B)\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A \ln A + B \ln B)\Big)$$

i

$$(A + B)X \sim S_1\Big((A + B)\sigma, \beta, (A + B)\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A + B)\ln(A + B)\Big).$$

U (2.1.1) mora vrijediti da je D=0 da bi distribucija bila strogo stabilna. To vrijedi ako i samo ako je $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} (A + B)X$, tj. ako i samo ako vrijedi da je:

$$\beta(A \ln A + B \ln B) = \beta(A + B)\ln(A + B)$$

za bilo koje $A > 0$ i $B > 0$. Ta relacija slijedi ako i samo ako je $\beta = 0$. □

A što se događa ako imamo niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje imaju stabilnu distribuciju? Sljedeći korolar govori o distribuciji sume tih slučajnih varijabli.

Korolar 2.2.9. *Ako su X_1, X_2, ..., X_n nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable, tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \cdots + X_n &\stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}), \quad \alpha \neq 1 \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_n &\stackrel{d}{=} nX_1 + \tfrac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln n, \qquad \alpha = 1. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti za slučaj kada je $\alpha \neq 1$. Zbog nezavisnosti vrijedi:

$$\begin{aligned} \ln(\mathrm{E}[\exp i\theta(X_1+\dots+X_n)]) &= \ln(\mathrm{E}[\exp i\theta X_1]) + \dots + \ln(\mathrm{E}[\exp i\theta X_n]) \\ &= -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1-i\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\theta\mu + \cdots \\ &+ -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1-i\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\theta\mu \\ &= -n\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1-i\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\theta(n\mu). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Iz ovog vidimo da $X_1+\dots+X_n \sim S_\alpha(n^{1/\alpha}\sigma, \beta, n\mu)$. Primjenom svojstava (2.2.3) i (2.2.2) na $n^{1/\alpha}X_1 + \mu(n - n^{1/\alpha})$ slijedi da je $n^{1/\alpha}X_1 + \mu(n - n^{1/\alpha}) \sim S_\alpha(n^{1/\alpha}\sigma, \beta, n\mu)$. Slijedi tvrdnja.

Dokaz za slučaj kada je $\alpha = 1$ ide analogno. □

Često ćemo zbog jednostavnosti pretpostavljati kako je $\mu = 0$ jer je μ parametar koji utječe samo na pomak, odnosno lokaciju. Dalje ćemo se fokusirati na parametar β. Za distribuciju $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ kažemo da je asimetrična udesno ukoliko je $\beta > 0$, odnosno ulijevo ukoliko je $\beta < 0$. Za distribuciju $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ kažemo da je totalno asimetrična udesno te za distribuciju $S_\alpha(\sigma, -1, 0)$ da je totalno asimetrična ulijevo. Sada ćemo se podsjetiti što je to Laplaceova transformacija.

Definicija 2.2.10. *Neka je dana funkcija $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ako za funkciju f konvergira integral:*

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \ \ s \in \mathbb{R}$$

onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = F$ zove Laplaceov transformat funkcije f, a preslikavanje $\mathcal{L}$ se zove Laplaceova transformacija.

Pod konvergencijom integrala $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ podrazumijevamo da funkcija f mora biti integrabilna na segmentu $[0, a]$ za svaki $a > 0$ te da $\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st}f(t)dt$ mora biti konačan.

U sljedećoj propoziciji ćemo vidjeti Laplaceovu transformaciju slučajne varijable $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$. Bitno je napomenuti kako ćemo Laplaceovu transformaciju promatrati kao funkciju očekivanja.

Propozicija 2.2.11. *Laplaceova transformacija $E[e^{-\gamma X}]$, $\gamma \geq 0$ slučajne varijable $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ jednaka je:*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-\gamma X}] &= \exp\{-\tfrac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\gamma^\alpha\}, \quad \alpha \neq 1 \\ \mathrm{E}[e^{-\gamma X}] &= \exp\{\sigma\tfrac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma\}, \quad\ \ \alpha = 1. \end{aligned}$$

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 15, propozicija 1.2.12)

Na repove distribucije utječe parametar asimetrije β. Sljedeće svojstvo govori o asimptotskom ponašanju repova distribucije $P\{X > \lambda\}$ i $P\{X < -\lambda\}$ kad $\lambda \to \infty$.

Svojstvo 2.2.12. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ s $0 < \alpha < 2$. Tada:*

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X > \lambda\} = C_\alpha \tfrac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha \\ &\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X < -\lambda\} = C_\alpha \tfrac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

gdje je

$$C_\alpha = \Bigg(\int\limits_0^\infty \sin x dx\Bigg)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Za dokaz vidjeti ([3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, str.576-577 , teorem XVII.5.1).

Ponašanje repova distribucije (2.2.10) je svojstvo α-stabilnih distribucija koje se često upotrebljava. Prije nego što iskažemo sljedeće svojstvo, iskazat ćemo jednu propoziciju koja govori o r-tom momentu.

Propozicija 2.2.13. *Neka je X neprekidna i nenegativna slučajna varijabla za koju postoji* $\mathrm{E}[X^r]$*, gdje je $r > 0$. Ako je $F(x)$ funkcija distribucije od X, onda vrijedi:*

$$\int_0^\infty rx^{r-1}(1 - F(x))dx = \mathrm{E}[X^r]. \tag{2.2.12}$$

Dokaz. U dokazu ove propozicije koristit ćemo i sljedeću tvrdnju. Ako je $0 < r < \infty$ i $\mathrm{E}[|X|^r] < \infty$, tada vrijedi da je:

$$\lim_{x\to\infty}(x^r P(|X| \geq x)) = 0.$$

To vrijedi zbog toga što je:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[|X|^r] &= \int_{\mathbb{R}} |t|^r dF_X(t) \\ &= \int_{|t|\geq x} |t|^r dF_X(t) + \int_{|t|\leq x} |t|^r dF_X(t) < \infty. \end{aligned}$$

Slijedi da je i $\int_{|t|\geq x} |t|^r dF_X(t) < \infty$. Promotrimo sada $\{\{|t| \geq x\}, x \in \mathbb{R}\}$. To je familija skupova oblika $(-\infty, x] \cup [x, \infty)$, gdje je $x \in \mathbb{R}$. Kada $x \to \infty$, $\bigcap\limits_x \{t : |t| \geq x\} = \emptyset$. Slijedi:

$$\int_{|t|\geq x} |t|^r dF_X(t) \to 0, \text{ kada } x \to \infty.$$

Vrijedi i:

$$x^r P(|X| \geq x) = x^r \int_{|t|\geq x} dF_X(t) \leq \int_{|t|\geq x} |t|^r dF_X(t),$$

iz čega slijedi da je:

$$\lim_{x\to\infty}(|x|^r P(|X| \geq x)) = 0.$$

Sada možemo dokazati propoziciju.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty rx^{r-1}(1-F(x))dx &= r\int_0^\infty x^{r-1}(1-F(x))dx = \begin{pmatrix} u=1-F(x),\ du=-f(x)dx \\ dv=rx^{r-1}dx,\ v=x^r\end{pmatrix} \\ &= x^r(1-F(x))\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^r f(x)dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(x^r(1-F(x))\Big|_0^t + \int_0^t x^r f(x)dx\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(t^r(1-F(t)) + \int_0^t x^r f(x)dx\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} t^r(1-F(t)) + \int_0^\infty x^r f(x)dx \\ &= \lim_{t\to\infty} t^r P(X\geq t) + \int_0^\infty x^r f(x)dx \\ &= 0 + \int_0^\infty x^r f(x)dx \\ &= \mathrm{E}[X^r].\end{aligned}$$

□

Specijalno vrijedi da je:

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty (1-F(x))dx.$$

Za bilo koju slučajnu varijablu X vrijedi da je slučajna varijabla $|X|^r$ nenegativna pa vrijedi:

$$\mathrm{E}[|X|^r] = \int_0^\infty P\{|X|^r > x\}dx,$$

iz čega proizlazi sljedeće svojstvo.

Svojstvo 2.2.14. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ s $0<\alpha<2$. Tada:*

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[|X|^p] < \infty, \quad 0<p<\alpha \\ &\mathrm{E}[|X|^p] = \infty, \quad p\geq\alpha.\end{aligned}$$

Činjenica da slučajne varijable koje imaju α-stabilnu distribuciju s $\alpha < 2$ imaju beskonačne druge momente znači da mnoge rezultate koje primjenjujemo za normalne ili Gaussove slučajeve ne možemo primjeniti za stabilne distribucije. Dodatna komplikacija je to što je $\mathrm{E}[|X|^\alpha]$ beskonačno. Kada je $\alpha \leq 1$, $\mathrm{E}[|X|] = \infty$.

Svojstvo 2.2.15. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,0)$ s $0<\alpha<2$ i $\beta=0$ u slučaju $\alpha=1$. Tada za svaki $0<p<\alpha$, tada postoji konstanta $c_{\alpha,\beta}(p)$ takva da:*

$$(\mathrm{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} = c_{\alpha,\beta}(p)\sigma. \tag{2.2.13}$$

Konstanta $c_{\alpha,\beta}(p)$ je jednaka $(\mathrm{E}[|X_0|^p])^{\frac{1}{p}}$ gdje je $X_0 \sim S_\alpha(1,\beta,0)$.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz činjenice da je $X \stackrel{d}{=} \sigma X_0$. □

Ako je $X \sim S\alpha S$, gdje je $0 < \alpha \leq 2$, tada moment $\mathrm{E}[|X|^p]$ određuje parametar skaliranja σ od X pa i cijelu distribuciju. Sljedeće svojstvo govori o r-tom momentu.

Svojstvo 2.2.16. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Tada:*

$$\lim_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}[|X|^p] = \alpha C_\alpha \sigma^\alpha, \tag{2.2.14}$$

$$\lim_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}[|X|^{\langle r\rangle}] = \alpha C_\alpha \beta \sigma^\alpha, \tag{2.2.15}$$

gdje je C_α definiran s (2.2.11) i $a^{\langle b\rangle} := |a|^b \operatorname{sign}(a)$.

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 19, svojstvo 1.2.18).

Sljedeće svojstvo govori o parametru pomaka kada je $1 < \alpha \leq 2$.

Svojstvo 2.2.17. *Kada je $1 < \alpha \leq 2$, parametar pomaka μ je jednak očekivanju.*

Dokaz. Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ s $1 < \alpha \leq 2$. Znamo prema svojstvu (2.2.14) da u ovom slučaju slučajna varijabla X ima konačno očekivanje. Nadalje, prema korolaru (2.2.7) znamo da vrijedi da je $X - \mu$ strogo stabilna. Neka su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable kao X. Prema prvoj definiciji stabilnosti vrijedi sljedeća relacija:

$$A(X_1 - \mu) + B(X_2 - \mu) \stackrel{d}{=} (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}(X - \mu),$$

za bilo koje pozitivne brojeve A i B.

Zatim "napadnemo" tu relaciju s očekivanjem i dobijemo sljedeće:

$$A(\mathrm{E}[X] - \mu) + B(\mathrm{E}[X] - \mu) = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}(\mathrm{E}[X] - \mu).$$

Iz ovog slijedi da mora vrijediti da je $E[X] = \mu$. □

2.3 Simetrične α-stabilne distribucije

U ovom poglavlju govorit ćemo se o simetričnim α-stabilnim distribucijama. U prethodnom potpoglavlju smo vidjeli kako je $X \sim S\alpha S$ ako i samo ako je $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Ako je $X \sim S\alpha S$, tada je njena karakteristična funkcija jednaka:

$$\mathrm{E}[e^{i\theta X}] = e^{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha}. \tag{2.3.1}$$

Vidimo da su $S\alpha S$ distribucije karakterizirane samo parametrom skaliranja σ. $S\alpha S$ distribucija slučajne varijable X se naziva *standardnom* $S\alpha S$ ako je $\sigma = 1$. Ukoliko je distribucija slučajne varijable X standardna $S\alpha S$ s $\alpha = 2$, ona je $N(0, 2)$ zato što je $\sigma^2 = \frac{1}{2}Var(X)$ kada je $\alpha = 2$.
Sljedeća propozicija nam pokazuje da uvijek možemo transformirati slučajnu varijablu sa $S\alpha' S$ distribucijom u slučajnu varijablu sa $S\alpha S$ distribucijom za bilo koji $0 < \alpha < \alpha'$.

Propozicija 2.3.1. *Neka je $X \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$ s $0 < \alpha' \leq 2$ i $0 < \alpha < \alpha'$. Neka je A slučajna varijabla sa $\frac{\alpha}{\alpha'}$-stabilnom distribucijom totalno asimetrična udesno s Laplaceovom transformacijom:*

$$\mathrm{E}[\exp(-\gamma A)] = \exp\{-\gamma^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\}, \gamma > 0,$$

tj. $A \sim S_{\frac{\alpha}{\alpha'}}((\cos\frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^{\frac{\alpha'}{\alpha}}, 1, 0)$ i prepostavimo da su X i A nezavisne. Tada vrijedi da je:

$$Z = A^{\frac{1}{\alpha'}} X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0).$$

Dokaz. Za simetrične distribucije mora vrijediti da je karakteristična funkcija realna, stoga za realan θ slijedi iz (2.3.1) da je:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\exp i\theta Z] &= \mathrm{E}[\exp\{i\theta A^{1/\alpha'} X\}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\exp\{i(\theta A^{1/\alpha'})X\}]|A] \\
&= \mathrm{E}[\exp\{-\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'} A\}] \\
&= \exp\{-(\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'})^{\alpha/\alpha'}\} \\
&= \exp\{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\}.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

□

Ovaj rezultat implicira da ukoliko je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 0 i ako je A pozitivna slučajna varijabla sa $\frac{\alpha}{2}$-stabilnom distribucijom nezavisna od X, tada:

$$Z = A^{1/2} X \sim S\alpha S.$$

Rezultat je sličan i za slučaj kad imamo asimetričnu distribuciju slučajne varijable $X \sim S_{\alpha'}(\sigma', \beta', 0)$ ako je $\alpha' \neq 1$:

$$Z = A^{1/\alpha'} X \sim \begin{cases} S_\alpha(\sigma, \beta, 0), & \alpha \neq 1 \\ S_1(\sigma, 0, \mu), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Vidimo da je distribucija slučajne varijable Z asimetrična ako je $\alpha \neq 1$ te ima pomak ukoliko je $\alpha = 1$.

3 Stabilne distribucije slučajnih vektora

U ovom poglavlju upoznat ćemo se sa stabilnim distribucijama slučajnih vektora. Prvo ćemo ih definirati, zatim ćemo vidjeti kako izgleda karakteristična funkcija slučajnog vektora s α-stabilnom distribucijom. Definirat ćemo i kakvi su to slučajni vektori sa strogo stabilnom, odnosno simetričnom stabilnom distribucijom te ćemo vidjeti što je to subgausovski slučajni vektor. Da bismo kasnije mogli opisati strukture zavisnosti stabilnih distribucija, definirat ćemo i neke pojmove poput kovarijacije, kovarijacijske norme te kodiferentnosti. U tu svrhu vidjet ćemo i što to znači da su neki vektori James-ortogonalni. Na kraju ćemo samo definirati α-slučajnu mjeru i stabilne integrale te ćemo iskazati reprezentacijski teorem što će nam biti važno u daljnjem radu.

3.1 Definicija stabilnih distribucija slučajnih vektora

Definicija stabilnih distribucija slučajnih vektora je analogna kao i za stabilne distribucije slučajnih varijabli.

Definicija 3.1.1. *Za slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ kažemo da ima d-dimenzionalnu stabilnu distribuciju ako za bilo koje pozitivne brojeve A i B postoji pozitivni broj C i vektor $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^d$ takav da vrijedi:*

$$A\mathbf{X}^{(1)} + B\mathbf{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} C\mathbf{X} + D, \tag{3.1.1}$$

gdje su $\mathbf{X}^{(1)}$ i $\mathbf{X}^{(2)}$ nezavisni d-dimenzionalni slučajni vektori jednako distribuirani kao $\mathbf{X}$.

Distribucija od $\mathbf{X}$ se naziva strogo stabilnom ako (3.1.1) vrijedi s uvjetom da je $\mathbf{D} = 0$ za bilo koji $A > 0$ i $B > 0$. Prije nego što definiramo kada je distribucija od $\mathbf{X}$ simetrična stabilna, prvo ćemo se podsjetiti što je to Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^d$ te Borelovi skupovi.

Definicija 3.1.2. *Najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^d$, tj. σ-algebra generirana familijom svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}^d$, zove se Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^d$ i označava se s $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Skupove iz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nazivamo Borelovim skupovima.*

Distribucija od $\mathbf{X}$ se naziva simetričnom stabilnom ako je stabilna i ako zadovoljava sljedeću relaciju:

$$P\{\mathbf{X} \in A\} = P\{-\mathbf{X} \in A\}$$

za bilo koji skup A iz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Analogno kao u $\mathbb{R}$, simetrična stabilna distribucija je strogo stabilna.

Ako je distribucija od $\mathbf{X}$ stabilna, imaju li komponente slučajnog vektora stabilnu distribuciju? A što je s linearnim kombinacijama komponenti vektora? Imaju li one onda stabilnu distribuciju? Sljedeći teorem daje nam odgovor na to pitanje.

Teorem 3.1.3. *Neka je distribucija od $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ stabilna (strogo stabilna, simetrična stabilna) u $\mathbb{R}^d$. Tada postoji konstanta $\alpha \in (0, 2]$ takva da u (3.1.1), vrijedi $C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$. Nadalje, svaka linearna kombinacija komponenti od $\mathbf{X}$ oblika $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ ima α-stabilnu (strogo α-stabilnu, simetričnu α-stabilnu) distribuciju.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati za slučaj kada $\mathbf{X}$ ima stabilnu distribuciju.

Neka su $\mathbf{X}^{(1)}$ i $\mathbf{X}^{(2)}$ nezavisni i jednako distribuirani slučajni vektori kao $\mathbf{X}$. Neka je $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ vektor iz $\mathbb{R}^d$.

Definiramo slučajne varijable Y_1 i Y_2 kao:

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k^{(1)}$$

i

$$Y_2 = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k^{(2)}.$$

Slučajne varijable Y_1 i Y_2 su nezavisne i jednako distribuirane kao Y.

Fiksiramo brojeve $A > 0$ i $B > 0$. Budući da je distribucija od $\mathbf{X}$ stabilna, prema (3.1.1) slijedi da postoji $C > 0$ i $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_d)$ takav da vrijedi:

$$A\mathbf{X}^{(1)} + B\mathbf{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} C\mathbf{X} + D.$$

Za dva vektora kada vrijedi da je $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}$, tada vrijedi da su i distribucije njihovih komponenata jednake, što se može vidjeti usporedbom njihovih karakterističnih funkcija.

Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} AY_1 + BY_2 &= \sum_{k=1}^{d} b_k (AX_k^{(1)} + BX_k^{(2)}) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{d} b_k (CX_k + D_k) \\ &= C\sum_{k=1}^{d} b_k X_k + \sum_{k=1}^{d} b_k D_k \\ &= CY + (\mathbf{b}, \mathbf{D}), \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

gdje je $(\mathbf{b}, \mathbf{D})$ oznaka za skalarni produkt vektora $\mathbf{b}$ i $\mathbf{D}$ na $\mathbb{R}^d$. Iz ovog slijedi da je distribucija od Y stabilna. Prema teoremu (2.1.2) postoji konstanta $\alpha = \alpha(\mathbf{b}) \in (0, 2]$ takva da je $C = (A + B)^{1/\alpha}$.

U stvari, vrijedi da je α nezavisna od $\mathbf{b}$. Kada bi imali npr. α' te vektor $\mathbf{b}'$, moralo bi vrijediti da je: $(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha} = (A^{\alpha'} + B^{\alpha'})^{1/\alpha'}$ za sve $A > 0$ i $B > 0$, što je moguće jedino u slučaju kada je $\alpha = \alpha'$. □

Također kao u jednodimenzionalnom slučaju, vrijedi i sljedeće:

Definicija 3.1.4. *Slučajni vektor $\mathbf{X}$ ima stabilnu distribuciju ako za bilo koji $n \geq 2$, postoji $\alpha \in (0, 2]$ i vektor $\mathbf{D}$ takav da vrijedi:*

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha}\mathbf{X} + \mathbf{D}_n, \tag{3.1.3}$$

gdje su $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ nezavisni i jednako distribuirani kao $\mathbf{X}$.

Drugi dio teorema (3.1.3) kaže da ako je distribucija od $\mathbf{X}$ α-stabilna, tada sve linearne kombinacije $(b, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{d} b_i X_i$ imaju α-stabilnu distribuciju. Vrijedi li obrat? Ako sve linearne kombinacije komponenti slučajnog vektora $\mathbf{X}$ imaju α-stabilnu distribuciju, je li nužno i vektor $\mathbf{X}$ ima stabilnu distribuciju? Odgovor je nažalost ne. To vrijedi samo u slučaju kada sve linearne kombinacije imaju strogo stabilnu distribuciju ili ako je $1 \leq \alpha \leq 2$. Sljedeći teorem govori o tome.

Teorem 3.1.5. *Neka je* $\mathbf{X}$ *slučajni vektor u* $\mathbb{R}^d$ *te* $\mathbf{b}$ *vektor iz* $\mathbb{R}^d$.

(a) Ako sve linearne kombinacije $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ *imaju strogo stabilne distribucije, tada je distribucija od* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ *strogo stabilna.*

(b) Ako sve linearne kombinacije $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ *imaju simetričnu stabilnu distribuciju, tada je distribucija od* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ *simetrična stabilna.*

(c) Ako sve linearne kombinacije $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ *imaju stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti većim ili jednakim* 1, *tada je distribucija od* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ *stabilna.*

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnje (a) i (b). Za dokaz tvrdnje (c) vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, 1994., str.59-62, teorem 2.1.5).

(a) Prvo ćemo pokazati da ako su sve distribucije linearnih kombinacija od $Y_\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k = (\mathbf{b}, \mathbf{X})$ stabilne, tada one koje su nedegenerirane imaju isti indeks stabilnosti.

Pretpostavimo suprotno. Neka postoje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ i $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ takvi da su $Y_\mathbf{b} = (\mathbf{b}, \mathbf{X})$ i $Y_\mathbf{c} = (\mathbf{c}, \mathbf{X})$ nedegenerirane slučajne varijable takve da $Y_\mathbf{b}$ ima indeks stabilnosti α_1 i $Y_\mathbf{c}$ ima indeks stabilnosti α_2 takve da je $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2$. Neka su ρ_1, ρ_2 realni brojevi različiti od 0 i neka je $\mathbf{a} = \rho_1 \mathbf{b} + \rho_2 \mathbf{c}$. Promatramo slučajnu varijablu $Y_\mathbf{a}$. Prema našim prepostavkama, ona mora imati stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti α_3. Tada za bilo koji $\lambda > 0$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
P(|Y_\mathbf{a}| > \lambda) &= P(|(\mathbf{a}, \mathbf{X})| > \lambda) \\
&= P(|\rho_1(\mathbf{b}, \mathbf{X})| + \rho_2(\mathbf{c}, \mathbf{X})| > \lambda) \\
&= P(|\rho_1 Y_\mathbf{b} + \rho_2 Y_\mathbf{c}| > \lambda) \\
&\geq P(|\rho_1 Y_\mathbf{b}| > 2\lambda) - P(|\rho_2 Y_\mathbf{c}| > 2\lambda) \\
&\sim u\lambda^{-\alpha_1} - v\lambda^{-\alpha_2} \\
&\sim u\lambda^{-\alpha_1},
\end{aligned}
\tag{3.1.4}
$$

kada $\lambda \to \infty$ gdje su u i v konstante. To implicira da je $\alpha_3 \leq \alpha_1 = min(\alpha_1, \alpha_2)$. Budući da su $Y_\mathbf{b}$ i $Y_\mathbf{c}$ nedegenerirane, slijedi da postoji niz realnih brojeva različitih od 0 (A_n), $n = 1, 2, \ldots$ koji konvergiraju ka 0 kad $n \to \infty$ takvi da za sve n, $Z_n = A_n Y_\mathbf{b} + Y_\mathbf{c}$ ne konvergiraju po distribuciji ka 0. Neka su $Z_n \sim S_\alpha(\sigma_n, \beta_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Vrijedi sljedeće:

$$\alpha(n) \leq \alpha_1 < \alpha_2, n = 1, 2, \ldots.$$

Očito, $Z_n \xrightarrow{d} Y_\mathbf{c}$ kada $n \to \infty$. Konvergencija realnog dijela karakteristične funkcije od Z_n prema $Y_\mathbf{c}$ implicira sljedeće:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{\alpha(n)} |\theta|^{\alpha(n)} = \sigma_2^{\alpha_2} |\theta|^{\alpha_2}, \ \theta \in \mathbb{R},$$

gdje σ_2 je parametar skaliranja od $Y_\mathbf{c}$. Stoga, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{\alpha(n)} |\theta|^{\alpha(n)-\alpha_2} = \sigma_2^{\alpha_2}, \theta \neq 0$ zajedno s $\alpha(n) \leq \alpha_1 - \alpha_2 < 0$ implicira da je $\sigma_2 = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $Y_\mathbf{c}$ nedegenerirana. Slijedi da sve nedegenerirane linearne kombinacije oblika $(\mathbf{b}, \mathbf{X})$

moraju imati isti indeks stabilnosti. Da bismo dokazali (a), pretpostavimo da sve linearne kombinacije $(\mathbf{b}, \mathbf{X})$ imaju strogo stabilne distribucije s indeksom stabilnosti α. Neka su brojevi $A > 0$ i $B > 0$ fiksni. Neka je $\mathbf{Z} = A\mathbf{X}_1 + B\mathbf{X}_2$ i $\mathbf{W} = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}\mathbf{X}$, gdje su $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ nezavisni i jednako distribuirani kao $\mathbf{X}$. Želimo pokazati da vrijedi: $\mathbf{Z} \stackrel{d}{=} \mathbf{W}$. Za bilo koji vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ vrijedi:

$$(\mathbf{b}, \mathbf{Z}) = A(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(1)}) + B(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(2)}) \stackrel{d}{=} (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}(\mathbf{b}, \mathbf{X}) = (\mathbf{b}, \mathbf{W}).$$

Slijedi da za bilo koji vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ vrijedi:

$$\mathrm{E}[\exp i(\mathbf{b}, \mathbf{Z})] = \mathrm{E}[\exp i(\mathbf{b}, \mathbf{W})].$$

Stoga, vrijedi sljedeće: $\mathbf{Z} \stackrel{d}{=} \mathbf{W}$, tj. $A\mathbf{X}^{(1)} + B\mathbf{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}\mathbf{X}$. Iz toga slijedi da je distribucija od $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ strogo stabilna.

(b) Pretpostavimo da sve linearne kombinacije $(\mathbf{b}, \mathbf{X})$ imaju simetrične stabilne distribucije. Budući da je svaka simetrična stabilna distribucije ujedno i strogo stabilna, možemo zaključiti kako je distribucija od $\mathbf{X}$ strogo stabilna. Sada još samo trebamo pokazati kako je ona i simetrična.

Neka je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ proizvoljan vektor. Budući da je distribucija od $(\mathbf{b}, \mathbf{X})$ simetrična, slijedi:

$$\mathrm{E}[\exp i(\mathbf{b}, \mathbf{X})] = \mathrm{E}[\exp\{-i(\mathbf{b}, \mathbf{X})\}] = \mathrm{E}[\exp i(\mathbf{b}, -\mathbf{X})],$$

tj. karakteristična funkcija od $\mathbf{X}$ je jednaka onoj od $-\mathbf{X}$. Slijedi da je: $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} -\mathbf{X}$.

□

Može se konstruirati protuprimjer za $\alpha < 1$ koji pokazuje da stabilna distribucija svih linearnih kombinacija $(\mathbf{b}, \mathbf{X})$ ne osigurava stabilnost distribucije vektora $\mathbf{X}$. Za detalje vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, 1994., str.63-65, poglavlje 2.2).

3.2 Karakteristična funkcija slučajnog vektora s α-stabilnom distribucijom

U ovom potpoglavlju ćemo vidjeti kako izgleda karakteristična funkcija slučajnog vektora s α-stabilnom distribucijom te ćemo pokazati dva primjera. Prvo ćemo definirati karakterističnu funkciju slučajnog vektora.

Definicija 3.2.1. *Neka je $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ slučajni vektor u $\mathbb{R}^d$ s α-stabilnom distribucijom. Tada je njegova karakteristična funkcija jednaka:*

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) = \mathrm{E}[\exp\{i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X})\}] = \mathrm{E}\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k X_k\right\}\right]. \tag{3.2.1}$$

Izraz za Φ_α dan u sljedećem teoremu uključuje integraciju po jediničnoj sferi u $\mathbb{R}^d$: $S_d = \{s : \|s\| = 1\}$.

Teorem 3.2.2. *Neka je $0 < \alpha < 2$. Slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ ima α-stabilnu distribuciju ako i samo ako postoji konačna mjera Γ na jediničnoj sferi S_d u $\mathbb{R}_d$ i vektor $\boldsymbol{\mu}^0 \in R^d$ takvi da vrijedi:*

(a) Ako je $\alpha \neq 1$,

$$\Phi_\alpha(\theta) = \exp\Big\{ - \int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|^\alpha \big(1 - i \operatorname{sign}((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\big) \Gamma(ds) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}^0) \Big\}. \tag{3.2.2}$$

(b) Ako je $\alpha = 1$,

$$\Phi_\alpha(\theta) = \exp\Big\{ - \int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})| \big(1 + i\frac{2}{\pi} \operatorname{sign}((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})) \ln |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|\big) \Gamma(ds) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}^0) \Big\}. \tag{3.2.3}$$

Par $(\Gamma, \boldsymbol{\mu}^0)$ je jedinstven.

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.66, napomena 3.)

Za vektor $\mathbf{X}$ se kaže da ima spektralnu reprezentaciju $(\Gamma, \boldsymbol{\mu}^0)$. Mjera Γ se naziva *spektralnom mjerom slučajnog vektora* $\mathbf{X}$ s α-stabilnom distribucijom. Sada ćemo navesti dva primjera.

Primjer 3.2.3. *Pretpostavimo da je $d = 1$. Tada se naša jedinična sfera sastoji od samo dvije točke $\{-1\}$ i $\{1\}$. Pišemo sljedeće:*

$$\Gamma(1) = \Gamma(\{1\}) \ i \ \Gamma(-1) = \Gamma(\{-1\}).$$

U slučaju kada je $\alpha \neq 1$, $\Phi_\alpha(\theta)$ jednaka je:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\exp i\theta\mathbf{X}] &= \exp\{-|\theta 1|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}(\theta 1) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(1) \\
&\quad - |\theta(-1)|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}(\theta(-1)) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(-1) + i\mu^0\theta\} \\
&= \exp\{-|\theta|^\alpha \big[(\Gamma(1) + \Gamma(-1)) - i \operatorname{sign}(\theta)(\Gamma(1) + \Gamma(-1)) \tan \frac{\pi\alpha}{2})\big] + i\mu^0\theta\}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

To je zapravo karakteristična funkcija slučajne varijable $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ s paramterima:

$$\sigma = (\Gamma(1) + \Gamma(-1))^{1/\alpha}, \ \beta = \frac{\Gamma(1) - \Gamma(-1)}{\Gamma(1) + \Gamma(-1)}, \ \mu = \mu^0.$$

Parametar asimetrije β je jednak 0 ako je spektralna mjera Γ simetrična. Raspis za slučaj kada je $\alpha = 1$ ide analogno.

Primjer 3.2.4. *Neka je $\mathbf{X}$ slučajni vektor s α-stabilnom distribucijom. Neka je njegova karakteristična funkcija dana kao u teoremu (3.2.2). Znamo prema teoremu (3.1.5) svaka linearna kombinacija $Y_{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ ima α-stabilnu distribuciju $S_\alpha(\sigma_{\mathbf{b}}, \beta_{\mathbf{b}}, \mu_{\mathbf{b}})$. Da bismo odredili parametre koji karakteriziraju ovu distribuciju, postavit ćemo da je γ bilo koji realni broj i da je $\boldsymbol{\theta} = \gamma\mathbf{b}$. Karakteristična funkcija za slučaj kada je $\alpha \neq 1$ jednaka je:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\exp\{i\gamma Y_{\mathbf{b}}\}] &= \mathrm{E}[\exp\{i(\gamma\mathbf{b}, \mathbf{X})\}] \\
&= \exp\{- \int_{S_d} |(\gamma\mathbf{b}, \mathbf{s})|^\alpha (1 - i[\operatorname{sign}(\gamma\mathbf{b}, \mathbf{s})])(\tan \frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(ds) + i(\gamma\mathbf{b}, \boldsymbol{\mu}^0)\} \\
&= \exp\{-|\gamma|^\alpha [\int_{S_d} |(\mathbf{b}, \mathbf{s})|^\alpha \Gamma(ds) - i(\operatorname{sign}\gamma)(\tan \frac{\pi\alpha}{2}) \int_{S_d} |(\mathbf{b}, \mathbf{s})|^\alpha \operatorname{sign}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) \Gamma(ds)] \\
&\quad + i\gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\mu}^0)\}.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Za $\alpha \neq 1$ parametri su:

$$\sigma_{\mathbf{b}} = \left(\int_{S_d} |(\mathbf{b}, \mathbf{s})|^{\alpha} \Gamma(ds) \right)^{1/\alpha},$$

$$\beta_{\mathbf{b}} = \frac{\int_{S_d} |(\mathbf{b}, \mathbf{s})|^{\alpha} \operatorname{sign}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) \Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(\mathbf{b}, \mathbf{s})|^{\alpha} \Gamma(ds)},$$

$$\mu_{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\mu}^0).$$

3.3 Strogo stabilne i simetrične stabilne distribucije slučajnih vektora

U ovom poglavlju ćemo naći uvjete za Γ i μ^0 koji zadovoljavaju da je $\Phi_{\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ karakteristična funkcija slučajnog vektora sa strogo stabilnom, odnosno simetričnom stabilnom distribucijom.

Prvo ćemo naći uvjete za strogo stabilne distribucije. Znamo prema teoremu (3.1.3) da je nužno i dovoljno da $Y_b = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k$ ima strogo α-stabilnu distribuciju za bilo koji $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Kada je $\alpha \neq 1$, to se svodi na uvjet da je $0 = \mu_{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\mu}^0)$ za bilo koji $\mathbf{b}$, tj. da je $\boldsymbol{\mu}^0 = 0$. Kada je $\alpha = 1$, uvjet za strogu stabilnost je da je $\beta_{\mathbf{b}} = 0$, za bilo koji $\mathbf{b}$, tj:

$$0 = \int_{S_d} |(\mathbf{b}, \mathbf{s})| \operatorname{sign}((\mathbf{b}, \mathbf{s})) \Gamma(ds) = \int_{S_d} (\mathbf{b}, \mathbf{s}) \Gamma(ds)$$

za bilo koji $\mathbf{b}$, tj. $\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0$, za $k = 1, 2, \ldots, d$. Nema uvjeta na $\boldsymbol{\mu}^0$. Posljedica cijele ove priče je sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1. *Slučajni vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ ima strogo α-stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti $0 < \alpha \leq 2$ ako i samo ako:*

(a) za $\alpha \neq 1$:

$$\boldsymbol{\mu}^0 = 0,$$

(b) za α = 1:

$$\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0, \ \ k = 1, 2, \ldots, d. \tag{3.3.1}$$

A što je sa simetričnim stabilnim distribucijama? Nužan i dovoljan uvjet je da $\mu^0 = 0$ i da je Γ simetrična mjera na S_d, tj. mora vrijediti da je $\Gamma(A) = \Gamma(-A)$ za bilo koji Borelov skup A na S_d. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 3.3.2. *Slučajni vektor $\mathbf{X}$ ima simetričnu α-stabilnu distribuciju u $\mathbb{R}^d$ s indeksom stabilnosti $0 < \alpha < 2$ ako i samo ako postoji jedinstvena simetrična konačna mjera Γ na jediničnoj sferi S_d takva da vrijedi:*

$$\mathrm{E}[\exp\{i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X})\}] = \exp\Big\{ \int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|^{\alpha} \Gamma(ds) \Big\}. \tag{3.3.2}$$

Γ je spektralna mjera slučajnog vektora $\mathbf{X}$ sa simetričnom α-stabilnom distribucijom.

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 73-74, teorem 2.4.3).

Kao što smo u prethodnom poglavlju slučajnu varijablu sa simetričnom stabilnom distribucijom označavali sa $S\alpha S$, slučajni vektor sa simetričnom stabilnom distribucijom ćemo također označavati sa $S\alpha S$.

3.4 Subgausovski slučajni vektori

Vidjeli smo ranije da slučajna varijabla $X = A^{1/2}G$ ima $S\alpha S$ distribuciju s indeksom $\alpha < 2$, ako je $G \sim N(0, \sigma^2)$ i ako je A slučajna varijabla s totalno asimetričnom udesno $\alpha/2$-stabilnom distribucijom i nezavisna od G. Ovaj rezultat proširuje se i na slučajne vektore $\mathbf{X}$. Izaberimo:

$$A \sim S_{\alpha/2}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}, 1, 0\right) \tag{3.4.1}$$

s $\alpha < 2$, pa je njegova Laplaceova transformacija:

$$\mathrm{E}[e^{-\gamma A}] = e^{-\gamma^{\alpha/2}}, \gamma > 0, \tag{3.4.2}$$

Neka je $\mathbf{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_d)$ normalan slučajni vektor s očekivanjem 0 u $\mathbb{R}^d$ nezavisan od A. Tada slučajni vektor:

$$\mathbf{X} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2, \ldots, A^{1/2}G_d) \tag{3.4.3}$$

ima $S\alpha S$ distribuciju u $\mathbb{R}^d$ zato što, za bilo koje realne brojeve b_1, b_2, ..., b_d, linearna kombinacija $\sum_{k=1}^{d} b_k A^{1/2} G_k = A^{1/2} \sum_{k=1}^{d} b_k G_k$ je $S\alpha S$ slučajna varijabla. Prema tome slijedi da $\mathbf{X}$ ima $S\alpha S$ distribuciju.

Definicija 3.4.1. *Bilo koji vektor $\mathbf{X}$ distribuiran kao u (3.4.3) se naziva subgausovski slučajni vektor sa $S\alpha S$ distribucijom u $\mathbb{R}^d$ s odgovarajućim normalnim vektorom $\mathbf{G}$.*

Karakteristična funkcija subgausovskog slučajnog vektora ima posebnu strukturu što ćemo iskazati u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.4.2. *Subgausovski slučajni vektor $\mathbf{X}$ sa simetričnom α-stabilnom distribucijom definiran u (3.4.3) ima karakterističnu funkciju oblika:*

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k X_k\right\}\right] = \exp\left\{-\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\theta_i\theta_j R_{ij}\right|^{\alpha/2}\right\}, \tag{3.4.4}$$

gdje su $R_{ij} = EG_iG_j$, $i, j = 1, \ldots, d$ kovarijance odgovarajućeg slučajnog vektora $\mathbf{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_d)$.

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.78, propozicija 2.5.2).

3.5 Kovarijacija

U ovom potpoglavlju uvest ćemo pojam kovarijacije. Prvo ćemo se podsjetiti što je to kovarijanca.

Definicija 3.5.1. *Kovarijanca slučajnih varijabli X i Y je definirana s:*

$$Cov(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])],$$

ako gornje očekivanje postoji.

Kod višedimenzionalnih stabilnih distribucija, kovarijanca nije definirana za $\alpha < 2$. Iz tog razloga uvodimo pojam kovarijacije. Kovarijacija nema sva svojstva kao i kovarijanca, ali će nam biti korisna kada se budemo bavili strukturama zavisnosti stabilnih distribucija u sljedećem poglavlju. Prvo ćemo definirati pojam: "signed power".

Definicija 3.5.2. *Neka su a i p realni brojevi. "Signed power" je jednaka:*

$$a^{<p>} = |a|^p \operatorname{sign} a = \begin{cases} a^p, & \text{ako je } a \geq 0 \\ -|a|^p, & \text{ako je } a < 0. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Sada možemo definirati kovarijaciju.

Definicija 3.5.3. *Neka je zajednička distribucija od X_1 i X_2 simetrična stabilna s $\alpha > 1$ i neka je Γ spektralna mjera slučajnog vektora (X_1, X_2). Kovarijacija X_1 na X_2 je realan broj definiran s:*

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \Gamma(ds). \tag{3.5.2}$$

Kovarijaciju možemo definirati i bez korištenja spektralne mjere.

Definicija 3.5.4. *Neka je zajednička distribucija od X_1 i X_2 simetrična stabilna s $1 < \alpha \leq 2$. Razmotrimo slučajnu varijablu sa $S\alpha S$ distribucijom:*

$$Y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2,$$

gdje su θ_1 i θ_2 realni brojevi. Neka je $\sigma(\theta_1, \theta_2)$ parametar skaliranja slučajne varijable Y. Kovarijacija $[X_1, X_2]_\alpha$ od (X_1, X_2) je jednaka:

$$[X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\bigg|_{\theta_1=0, \theta_2=1}. \tag{3.5.3}$$

Kao posljedica prethodne definicije, vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.5.5. *Neka je distribucija od $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ simetrična stabilna s $\alpha > 1$ i sa spektralnom mjerom $\Gamma_{\mathbf{X}}$. Neka je $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ i $Z = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k$. Tada vrijedi:*

$$[Y, Z]_\alpha = \int_{S_n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k s_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k s_k \right)^{<\alpha-1>} \Gamma_{\mathbf{X}}(ds).$$

Dokaz. Parametar skaliranja $\sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)$ linearne kombinacije $\theta_1 Y + \theta_2 Z$ je jednak:

$$\left(\int_{S_n} \left| \sum_{k=1}^{n} (\theta_1 a_k + \theta_2 b_k) s_k \right|^\alpha \Gamma_{\mathbf{X}}(ds) \right)^{1/\alpha}.$$

To vrijedi zbog:

$$\begin{aligned} \exp\{-\sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)\} &= \mathrm{E}[\exp\{i(\theta_1 Y + \theta_2 Z)\}] \\ &= \mathrm{E}[\exp\{i \sum_{k=1}^{n} (\theta_1 a_k + \theta_2 b_k) X_k\}] \\ &= \exp\left\{ - \int_{S_n} \left| \sum_{k=1}^{n} (\theta_1 a_k + \theta_2 b_k) s_k \right|^\alpha \Gamma_{\mathbf{X}}(ds) \right\}. \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Korištenjem prethodne definicije slijedi lema. □

Sada ćemo navesti neka osnovna svojstva kovarijacije.

Svojstvo 3.5.6. *(a) (Aditivnost na prvom argumentu) Neka je $1 < \alpha \leq 2$ i neka je distribucija od (X_1, X_2, Y) $S\alpha S$. Tada vrijedi:*

$$[X_1 + X_2, Y]_\alpha = [X_1, Y]_\alpha + [X_2, Y]_\alpha.$$

(b) Općenito, kovarijacija nije linearna na drugom argumentu. To ne vrijedi za sljedeći slučaj. Neka je zajednička distribucija od (X, Y_1, Y_2) $S\alpha S$ s $\alpha > 1$. Ako su Y_1 i Y_2 nezavisni, tada vrijedi:

$$[X, Y_1 + Y_2]_\alpha = [X, Y_1]_\alpha + [X, Y_2]_\alpha.$$

(c) (Skaliranje) Neka je $1 < \alpha \leq 2$, a i b realni brojevi i neka je distribucija od (X, Y) $S\alpha S$. Tada vrijedi:

$$[aX, bY]_\alpha = ab^{<\alpha-1>}[X, Y]_\alpha.$$

(d) Općenito, kovarijacija nije simetrična, tj. ne mora vrijediti da je:

$$[X, Y]_\alpha \neq [Y, X]_\alpha.$$

(d) Neka je zajednička distribucija od X i Y $S\alpha S$. Ako su X i Y nezavisni, tada je

$$[X, Y]_\alpha = 0.$$

(e) Neka je zajednička distribucija od X i Y $S\alpha S$ s $\alpha > 1$. Tada za sve $1 < p < \alpha$ vrijedi:

$$[X, Y]_\alpha = \frac{\mathrm{E}\, XY^{<p-1>\|Y\|_\alpha^\alpha}}{\mathrm{E}\,|Y|^p},$$

gdje $\|Y\|_\alpha$ označava parametar skaliranja od Y.

Dokaz. Dokazat ćemo samo neka svojstva. Za ostale dokaze pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.87-95, poglavlje 2.7)

(b) Da bismo dokazali da općenito kovarijacija nije linearna na drugom argumentu, navest ćemo jedan protuprimjer. Trebamo provjeriti da vrijedi sljedeće:

$$[X, Y_1 + Y_2]_\alpha \neq [X, Y_1]_\alpha + [X, Y_2]_\alpha.$$

Neka vrijedi da je $X = Y_1 = Y_2$. Tada slijedi:

$$[X, X + X]_\alpha = 2^{\alpha-1}[X, X]_\alpha \neq 2[X, X]_\alpha = [X, X]_\alpha + [X, X]_\alpha$$

za $\alpha < 2$ i $[X, X]_\alpha \neq 0$.

(d) Da bismo dokazali da općenito kovarijacija nije simetrična, navest ćemo jedan protuprimjer. Neka su a i b različiti realni brojevi različiti od 0. Tada vrijedi sljedeće:

$$[aX, bY]_\alpha = ab^{<\alpha-1>}[X, Y]_\alpha \neq a^{<\alpha-1>}b[X, X]_\alpha = [bX, aX]_\alpha,$$

iz čega se vidi kako kovarijacija nije simetrična.

$\square$

3.6 Kovarijacijska norma

U ovom potpoglavlju ćemo definirati kovarijacijsku normu. Kada je $\alpha > 1$, kovarijacija inducira normu na prostoru S_α gdje je S_α normiran vektorski prostor slučajnih varijabli koje imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju.

Definicija 3.6.1. *Kovarijacijska norma od $X \in S_\alpha$ za $\alpha > 1$ je definirana kao:*

$$\|X\|_\alpha = ([X, X]_\alpha)^{1/\alpha}.$$

Sada ćemo se podsjetiti što to znači konvergencija po vjerojatnosti i konvergencija u srednjem reda p.

Definicija 3.6.2. *Kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X na istom vjerojatnosnom prostoru ako $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi da je:*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega| \geq \varepsilon|\}) = 0.$$

Pišemo: $X_n \xrightarrow{P} X$, kada $n \to \infty$.

Definicija 3.6.3. *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koje imaju p-ti moment, tj. $\mathrm{E}[|X_n|^p] < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira u srednjem reda p prema slučajnoj varijabli X na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[|X_n - X|^p] = 0$. Pišemo: $X_n \xrightarrow{m^p} X$, kada $n \to \infty$.*

Sada ćemo navesti nekoliko svojstava kovarijacijske norme.

Svojstvo 3.6.4. *(a) Ako je $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ s $\alpha > 1$, tada je $\|X\|_\alpha = \sigma$.*

(b) Neka je $\|\cdot\|_\alpha$ norma na S_α. Konvergencija u $\|\cdot\|_\alpha$ je ekvivalentna konvergenciji po vjerojatnosti i konvergenciji u srednjem reda p za bilo koji $p < \alpha$.

(c) Neka je $(X, Y) \sim S\alpha S$ s $1 < \alpha \leq 2$. Tada vrijedi:

$$|[X, Y]_\alpha| \leq \|X\|_\alpha \|Y\|_\alpha^{\alpha-1}.$$

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju pod (b). Za ostale dokaze pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.95-97, poglavlje 2.8).

(b) Prvo moramo dokazati da je $\|\cdot\|_\alpha$ norma na S_α. Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$.

(1) $\|X\|_\alpha = 0$ ako i samo ako je $X = 0$ g.s.

(2) $aX \sim S_\alpha(|a|\sigma_X, 0, 0)$ iz čega slijedi: $\|aX\|_\alpha = |a|\sigma_X = |a|\|X\|_\alpha$.

(3) Ako X_1 i X_2 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju sa spektralnom mjerom Γ, tada vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
\|X_1 + X_2\|_\alpha &= \sigma_{X_1} + \sigma_{X_2} \\
&= \left(\int_{S_2} |s_1 + s_2|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{1/\alpha} \\
&\leq \left(\int_{S_2} |s_1|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{1/\alpha} + \left(\int_{S_2} |s_2|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{1/\alpha} \qquad (3.6.1) \\
&= \sigma_{X_1} + \sigma_{X_2} \\
&= \|X_1\|_\alpha + \|X_2\|_\alpha.
\end{aligned}$$

S ovim smo dokazali da je $\|\cdot\|_\alpha$ norma na S_α.

Sljedeći korak je dokazati da je konvergencija po kovarijacijskoj normi jednaka konvrgenciji po vjerojatnosti. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n \in S_\alpha$, $Y \in S_\alpha$. Prema [(a)] slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - Y\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\sigma_{X-Y}) = 0,$$

gdje je σ_{X_n-Y} parametar skaliranja od $X_n - Y$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada, ako je $Z \sim S_\alpha(1,0,0)$, slijedi:

$$P(|X_n - Y| > \epsilon) = P(\sigma_{X_n-Y}|Z| > \epsilon) = P\left(|Z| > \frac{\epsilon}{\sigma_{X_n-Y}}\right) \to 0$$

kada $n \to \infty$ ako i samo ako:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{X_n-Y} = 0.$$

S time smo dokazali da je konvergencija po $\|\cdot\|_\alpha$ ekvivalentna konvergenciji po vjerojatnosti. Još moramo dokazati da je to ekvivalentno konvergenciji u srednjem reda p za $p > \alpha$. Gledamo sljedeće:

$$\mathrm{E}[|X_n - Y|^p] = \mathrm{E}[(\sigma_{X_n-Y}|Z|)^p] = \sigma_{X_n-Y}^p \, \mathrm{E}[|Z|^p] \to 0,$$

kad $n \to \infty$ ako i samo ako $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{X_n-Y} = 0$.

□

Zbog jednostavnosti ćemo ponekad pisati:

$$\|X\|_\alpha = \sigma_{\mathbf{X}}, 0 < \alpha \leq 2,$$

da bismo označili parametar skaliranja slučajne varijable X sa $S\alpha S$ distribucijom.

3.7 Kodiferentnost

U ovom potpoglavlju ćemo definirati kodiferentnost. Kada je $\alpha = 2$, kovarijacija postaje kovarijanca. Kovarijacija nije definirana za $\alpha \leq 1$, ali je zato kodiferentnost definirana za sve $0 < \alpha \leq 2$.

Definicija 3.7.1. *Kodiferentnost dviju slučajnih varijabli X i Y koje imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $0 < \alpha \leq 2$ je jednaka:*

$$\tau_{X,Y} = \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha - \|X - Y\|_\alpha^\alpha, \tag{3.7.1}$$

gdje su $\|X\|_\alpha$, $\|Y\|_\alpha$ i $\|X - Y\|_\alpha$ parametri skaliranja od X, Y i $X - Y$.

Sada ćemo navesti neka svojstva kodiferentnosti.

Svojstvo 3.7.2. *(a) Vrijedi da je : $\tau_{X,Y} = \tau_{Y,X}$.*

(b) Ako je $\alpha = 2$, tada je $\tau_{X,Y} = Cov(X,Y)$.

(c) Ako su X i Y nezavisne, tada je $\tau_{X,Y} = 0$. Obratno, ako je $\tau_{X,Y} = 0$ i $0 < \alpha < 1$, tada su X i Y nezavisni.

(d) Ako je $1 < \alpha \leq 2$, tada $\tau_{X,Y} = 0$ ne implicira da su X i Y nezavisni.

(e) *Vrijedi da je:*

$$\tau_{X,Y} \leq \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha$$

i

$$\tau_{X,Y} \geq \begin{cases} 0, & \textit{ako je } 0 < \alpha \leq 1, \\ (1 - 2^{\alpha-1})(\|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha), & \textit{ako je } 1 \leq \alpha \leq 2. \end{cases}$$

Dokaz. Dokazat ćemo samo neka svojstva. Za preostale pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.103-106, poglavlje 2.10).

(b) Kada je $\alpha = 2$, $\|X\|_2^2 = \frac{1}{2}Var(X)$ i stoga vrijedi da je $\tau_{X,Y} = \frac{1}{2}(Var(X) + Var(Y) - Var(X - Y)) = Cov(X, Y)$.

(c) Ako su X i Y nezavisne, tada je $s_1 s_2 = 0$ g.s. Stoga, slijedi:

$$\begin{aligned} \|X - Y\|_\alpha^\alpha &= \int_{S_2} |s_1 - s_2|^\alpha \Gamma_{X,Y}(ds) \\ &= \int_{S_2} |s_1|^\alpha \Gamma_{X,Y}(ds) + \int_{S_2} |s_2|^\alpha \Gamma_{X,Y}(ds) \\ &= \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha, \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

tj. $\tau_{X,Y} = 0$. Nadalje, ako je $0 < \alpha < 1$, tada $|s_1 - s_2|^\alpha \leq |s_1|^\alpha + |s_2|^\alpha$, gdje vrijedi nejednakost samo u slučaju kada je $s_1 s_2 = 0$ gotovo svugdje. Ako je $\tau_{X,Y} = 0$, tada je $s_1 s_2 = 0$ g.s. i prema tome slijedi da su X i Y nezavisni.

□

3.8 Jamesova ortogonalnost

U ovom potpoglavlju definirat ćemo Jamesovu ortogonalnost te ćemo iskazati propoziciju koja govori o povezanosti stabilnih distribucija, kovarijacije i Jamesove ortogonalnosti.

Neka je sad $1 < \alpha < 2$ i razmotrimo prostor S_α . Znamo da je S_α normiran vektorski prostor s kovarijacijskom normom $\| \cdot \|_\alpha$. Znamo da je $\|X\|_\alpha^\alpha = [X, X]_\alpha$, ali kovarijacija $[X, Y]_\alpha$ ne definira skalarni produkt u S_α. Prostor S_α nije vektorski prostor sa definiranim skalarnim produktom. Neke ortogonalnosti mogu se definirati i u normiranim vektorskim prostorima. Jedna od njih je i Jamesova ortogonalnost koju ćemo mi koristiti u daljnjem dijelu rada. Sada ćemo je definirati.

Definicija 3.8.1. *Neka je E normiran vektorski prostor. Za vektor $x \in E$ se kaže da je James ortogonalan vektoru $y \in E$ ako za bilo koji realan broj λ vrijedi:*

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|. \tag{3.8.1}$$

Pišemo: $x \perp_j y$.

Općenito vrijedi da je $x \perp_j y \neq y \perp_j x$. Relacija (3.8.1) za sve realne brojeve λ znači da vektori $x + \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pripadaju odgovarajućoj hiperravnini sfere $\{s : \|s\| = \|x\|\}$ sa središtem u x.

Neka je sad E prostor S_α s $1 < \alpha < 2$ i kovarijacijskom normom $\| \cdot \|_\alpha$.

Propozicija 3.8.2. *Neka X i Y imaju $S\alpha S$ zajedničku distribuciju s $\alpha > 1$. Tada vrijedi da je $[X,Y]_\alpha = 0$ ako i samo ako je Y James ortogonalan X, tj. ako vrijedi da je*

$$\|\lambda X + Y\|_\alpha \geq \|Y\|_\alpha$$

za svaki realan λ.

Dokaz. Pretpostavimo da je $[X,Y]_\alpha = 0$ i neka je λ proizvoljan. Tada slijedi:

$$|[\lambda X + Y, Y]_\alpha| \leq \|\lambda X + Y\|_\alpha \|Y\|_\alpha^{\alpha-1}.$$

S druge strane, vrijedi i:

$$[\lambda X + Y, Y]_\alpha = \lambda[X,Y]_\alpha + [Y,Y]_\alpha = \|Y\|_\alpha^\alpha,$$

budući da je $[X,Y]_\alpha = 0$. Slijedi,

$$\|Y\|_\alpha^\alpha \leq \|\lambda X + Y\|_\alpha \|Y\|_\alpha^{\alpha-1},$$

tj.

$$\|\lambda X + Y\|_\alpha \|Y\|_\alpha \geq \|Y\|_\alpha.$$

Sada ćemo dokazati obrat. Neka je Y James ortogonalan vektoru X i neka je Γ spektralna mjera vektora (X,Y) koji ima $S\alpha S$ distribuciju. Pretpostavimo da je $[X,Y]_\alpha < 0$. Tada vrijedi:

$$\int_{S_2} s_1 s_2^{\alpha-1} \Gamma(ds) < 0. \tag{3.8.2}$$

Za realan λ definiramo sljedeće:

$$g(\lambda) = \|\lambda X + Y\|_\alpha^\alpha = \int_{S_2} |\lambda s_1 + s_2|^\alpha \Gamma(ds).$$

Očito slijedi:

$$g'(\lambda) = \alpha \int_{S_2} s_1(\lambda s_1 + s_2)^{\alpha-1} \Gamma(ds).$$

Činjenica da je $\alpha > 1$ implicira da je $g'(\lambda)$ neprekidna funkcija od λ. Budući da se (3.8.2) može napisati u obliku da je $g'(\lambda) < 0$, zaključujemo da je $g'(\lambda) < 0$ na nekom intervalu $(0,a)$. Tada za $0 < \lambda < a$ slijedi:

$$\|\lambda X + Y\|_\alpha^\alpha = g(\lambda) < g(0) = \|Y\|_\alpha^\alpha,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je Y James ortogonalan X. Dokaz da slučaj kada je $[X,Y]_\alpha > 0$ ide analogno. □

3.9 α-stabilna slučajna mjera, stabilni integrali i reprezentacijski teorem

U ovom potpoglavlju ćemo definirati α-stabilnu slučajnu mjeru, stabilne integrale te iskazati reprezentacijski teorem jer će nam to biti potrebno u daljnjem radu.

Prvo ćemo definirati α-stabilnu slučajnu mjeru.

Definicija 3.9.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $L^0(\Omega)$ skup svih realnih slučajnih varijabli definiranih na njemu. Neka je (E, ε, m) izmjeriv prostor,*

$$\beta : E \to [-1, 1]$$

izmjeriva funkcija i neka je

$$\varepsilon_0 = \{A \in \varepsilon : m(A) < \infty\}$$

podskup od ε koji sadrži skupove konačne m-mjere. Nezavisno raspršeni σ-aditivni skup funkcija

$$M : \varepsilon_0 \to L^0(\Omega)$$

takvih da za svaki $A \in \varepsilon_0$ vrijedi:

$$M(A) \sim S_\alpha\left((m(A))^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(x) m(dx)}{m(A)}, 0\right)$$

se naziva α-stabilna slučajna mjera na (E, ε) s mjerom m i parametrom asimetrije β.

Nezavisno raspršeni znači da ako A_1, A_2, ..., A_k pripadaju ε_0 i ako su disjunktni, tada su slučajne varijable $M(A_1)$, $M(A_2)$, ..., $M(A_k)$ su nezavisni. σ-aditivni znači da ako A_1, A_2, ... pripadaju ε_0 i ako su disjunktni i $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \varepsilon_0$ tada je:

$$M\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} M(A_j) \text{ g.s.}$$

Parametar pomaka μ je 0 za svaki $M(A)$. To znači da je slučajna mjera M karakterizirana s mjerom m i funkcijom β. M se naziva $S\alpha S$ slučajnom mjerom ako je parametar asimetrije β jednak 0.

Sada prelazimo na definiciju stabilnog integrala. Postoji nekoliko definicija stabilnih integrala. Mi ćemo iskazati konstruktivnu definiciju.

Neka je M α-stabilna slučajna mjera na (E, ε) s mjerom m i parametrom asimetrije β i neka je $\varepsilon_0 = \{A \in \varepsilon : m(A) < \infty\}$. Želimo definirati

$$I(f) = \int_E f(x) M(dx)$$

za sve izmjerive funkcije $f : E \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju uvjet da je

$$\int_E |f(x)|^\alpha m(dx) < \infty, \text{ ako je } \alpha \neq 1 \tag{3.9.1}$$

i

$$\int_E \left| f(x)\beta(x) \ln|f(x)| \right| m(dx) < \infty, \text{ ako je } \alpha = 1. \tag{3.9.2}$$

Neka je:

$$F = \begin{cases} L^\alpha(E, \varepsilon, m), & \text{ako je } \alpha \neq 1 \\ \mathcal{F}(m, \beta), & \text{ako je } \alpha = 1, \end{cases}$$

gdje je:

$$L^\alpha(E, \varepsilon, m) = \{f : \text{ f izmjeriva funkcija, } \int_E |f(x)|^\alpha m(dx) < \infty\}$$

i

$$\mathcal{F}(m,\beta) = \{f : f \in L^1(E,\varepsilon,m) \text{ i } \int_E |f(x)\beta(x)\ln|f(x)||m(dx) < \infty\}.$$

Za jednostavne funkcije oblika $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$ gdje su A_j disjunktni skupovi iz ε_0, definiramo:

$$I(f) = \int_E f(x)M(dx) = \sum_{j=1}^{n} c_j M(A_j). \tag{3.9.3}$$

Budući da je slučajna mjera M nezavisno raspršena, α-stabilne slučajne varijable $M(A_1)$, $M(A_2)$, …, $M(A_n)$ su nezavisne. Dobijemo da je:

$$I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f) \tag{3.9.4}$$

s

$$\sigma_f = \left(\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)\right)^{1/\alpha}, \tag{3.9.5}$$

$$\beta_f = \frac{\int_E f(x)^{<\alpha>}\beta(x)m(dx)}{\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)} \tag{3.9.6}$$

i

$$\mu_f = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\int_E f(x)\beta(x)\ln|f(x)|m(dx), & \text{ako je } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.9.7}$$

Sada ćemo iskazati reprezentacijski teorem. Prvo se prisjetimo da je slučajni vektor s α-stabilnom distribucijom karakteriziran sa spektralnom mjerom Γ na S_d i njegovim vektorom pomaka $\boldsymbol{\mu}^0$. Za zadani slučajni vektor $(X_1,\ldots,X_n)$ sa α-stabilnom distribucijom želimo naći izmjeriv prostor (E,ε), α-stabilnu mjeru M definiranu na njemu, niz izmjerivih funkcija f_1, f_2, …, f_d i konstantni vektor $\boldsymbol{\eta}$ iz $\mathbb{R}^d$ takav da vrijedi:

$$(X_1,X_2,\ldots,X_n) \stackrel{d}{=} \left(\int_E f_1(x)M(dx),\ldots,\int_E f_d(x)M(dx)\right) + \boldsymbol{\eta}. \tag{3.9.8}$$

Reprezentacijski teorem pokazuje kako je to uvijek moguće.

Teorem 3.9.2. *(Reprezentacijski teorem) Neka je* $\mathbf{X} = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$ *slučajni vektor s* α*-stabilnom distribucijom u* $\mathbb{R}^d$.

(a) Neka je $\|\cdot\|$ *proizvoljna norma na* $\mathbb{R}^d$, $S_d^{\|\cdot\|} = \{s : \|s\| = 1\}$ *odgovarajuća jedinična sfera,* $\Gamma_{\|\cdot\|}$ *spektralna mjera i* $\boldsymbol{\mu}^0_{\|\cdot\|}$. *Tada relacija (3.9.8) uvijek vrijedi s:*

- $(E,\varepsilon) = (S_d^{\|\cdot\|}$, *Borelova* σ*-algebra na* $S_d^{\|\cdot\|})$,
- M *ima mjeru* $m = \Gamma_{\|\cdot\|}$ *i parametar asimetrije* $\beta(\cdot) \equiv 1$,
- $f_j : S_d^{\|\cdot\|} \to \mathbb{R}$ *je definirana s* $f_j((s_1,\ldots,s_d)) = s_j, j = 1,\ldots,d$,
- $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^0_{\|\cdot\|}$

tako da vrijedi:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \left(\int_{S_d^{\|\cdot\|}} s_1 M(ds), \int_{S_d^{\|\cdot\|}} s_2 M(ds), \ldots, \int_{S_d^{\|\cdot\|}} s_d M(ds),\right) + \boldsymbol{\eta}^0_{\|\cdot\|}. \tag{3.9.9}$$

(b) *Ako* $\mathbf{X}$ *ima* $S\alpha S$ *distribuciju, tada postoje omeđene izmjerive funkcije* f_1, f_2, $\ldots$, f_d *takve da vrijedi:*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \left(\int_0^1 f_1(x)M(dx), \int_0^1 f_2(x)M(dx), \ldots, \int_0^1 f_d(x)M(dx) \right),$$

gdje je M $S\alpha S$ *slučajna mjera s mjerom* $m(dx) = dx$.

(c) *Ako* $\mathbf{X}$ *ima strogo* α*-stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti* $\alpha \neq 1$*, tada postoje omeđene izmjerive funkcije* f_1, f_2, $\ldots$, f_d *takve da vrijedi:*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \left(\int_0^1 f_1(x)M(dx), \int_0^1 f_2(x)M(dx), \ldots, \int_0^1 f_d(x)M(dx) \right),$$

gdje je M α*-stabilna slučajna mjera s mjerom* $m(dx) = dx$ *i parametrom asimetrije* $\beta(x) \equiv 1$.

(d) *Ako je* $\alpha = 1$*, tada postoje omeđene izmjerive funkcije* f_1, f_2, $\ldots$, f_d *takve da vrijedi:*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \left(\int_0^1 f_1(x)M(dx), \int_0^1 f_2(x)M(dx), \ldots, \int_0^1 f_d(x)M(dx) \right) + \boldsymbol{\eta},$$

gdje je M 1*-stabilna slučajna mjera s mjerom m(dx)=dx, parametrom asimetrije* $\beta(x) \equiv 1$ *i gdje je* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d,)$ *s*

$$\eta_j = \frac{1}{\pi} \int_0^1 f_j(x) \ln\left(\sum_{k=1}^d f_k(x)^2 \right) dx + \mu_j^0, j = 1, 2, \ldots, d.$$

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.131-133, teorem 3.5.6).

4 Strukture zavisnosti stabilnih distribucija

U ovom poglavlju opisat ćemo strukture zavisnosti stabilnih distribucija. Prvo ćemo se baviti regresijom. Vidjet ćemo čemu je jednako uvjetno očekivanje slučajnih varijabli koje imaju zajedničku stabilnu distribuciju te je li regresija i u tom slučaju linearna. Na kraju ćemo karakterizirati sve slučajne vektore koji imaju $S\alpha S$ distribuciju. Zatim ćemo se baviti simetričnim uvjetnim distribucijama te ćemo vidjeti što se događa u slučaju linearne ovisnosti. U četvrtom potpoglavlju ćemo proučavati moment slučajnog vektora sa α-stabilnom distribucijom. Na kraju ćemo definirati asociranost slučajnih varijabli.

4.1 Regresijski model

U ovom potpoglavlju ćemo se baviti regresijskim modelima za α-stabilne distribucije. Prvo ćemo se podsjetiti što je to linearna regresija. Znamo da regresija znači ovisnost jedne varijable o drugoj ili više drugih varijabli, a regresija slučajne varijable X_2 na slučajnu varijablu X_1 je *linearna* ako postoji konstanta c takva da vrijedi da je:

$$\mathrm{E}[X_2|X_1] = cX_1 \ g.s.$$

To znači da je glavna pretpostavka da se uvjetno očekivanje može napisati kao linearna funkcija.

Sljedeća propozicija nam govori kako taj uvjet možemo izraziti korištenjem karakteristične funkcije slučajnog vektora $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$:

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = \mathrm{E}[\exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}].$$

Propozicija 4.1.1. *Pretpostavimo da su* $\mathrm{E}[|X_1|] < \infty$ *i* $\mathrm{E}[|X_2|] < \infty$. *Tada* $\mathrm{E}[X_2|X_1] = cX_1$ *g.s. je ekvivalentno sljedećoj relaciji:*

$$\left.\frac{\partial \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2=0} = c\left.\frac{\partial \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_2=0}. \tag{4.1.1}$$

Za dokaz vidjeti([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 174-175, lema 4.1.1).

Sada se možemo pitati čemu je jednako uvjetno očekivanje kada slučajne varijable imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju. Je li u tom slučaju regresija linearna? Sljedeći teorem nam daje odgovor na to pitanje.

Teorem 4.1.2. *Neka X_1 i X_2 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $1 < \alpha \leq 2$. Tada vrijedi:*

$$\mathrm{E}[X_2|X_1] = \frac{[X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha} X_1 \ g.s. \tag{4.1.2}$$

Dokaz. Da bismo dokazali ovaj teorem, potrebno je provjeriti da relacija (4.1.1) vrijedi za $c = \frac{[X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}$. Karakteristična funkcija od (X_1, X_2) je jednaka:

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = \exp\{-\sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)\},$$

gdje je

$$\sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2) = \int_{S_2} |\theta_1 s_1 + \theta_2 s_2|^\alpha \Gamma(ds)$$

gdje je Γ spektralna mjera. Znamo da je: $[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>}\Gamma(ds)$. Vrijedi da je:

$$\left.\frac{\partial\sigma^\alpha(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\right|_{\theta_2=0} = \alpha\int_{S_2} s_1(\theta_1 s_1)^{\alpha-1}\Gamma(ds)$$
$$= \alpha\theta_1^{<\alpha-1>}\|X_1\|_\alpha^\alpha$$

i

$$\left.\frac{\partial\sigma^\alpha(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right|_{\theta_2=0} = \alpha\int_{S_2} s_2(\theta_1 s_1)^{\alpha-1}\Gamma(ds)$$
$$= \alpha\theta_1^{<\alpha-1>}[X_1, X_2]_\alpha.$$

Ako stavimo da je $c = \frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}$, dobijemo da je:

$$\left.\frac{\partial\sigma^\alpha(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right|_{\theta_2=0} = c\left.\frac{\partial\sigma^\alpha(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\right|_{\theta_2=0}.$$

Slijedi tvrdnja. □

Sada se pitamo što je s višestrukom regresijom? Je li i ona uvijek linearna? Nažalost, odgovor je ne. Nužni uvjeti da bi višestruka regresija bila linearna ako je u pitanju slučaj kada slučajne varijable imaju $S\alpha S$ distribuciju dani su u sljedećem korolaru.

Korolar 4.1.3. *Neka X_1, X_2, ..., X_n imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $1 < \alpha \leq 2$. Ako je*

$$\mathrm{E}[X_n|X_1,\ldots,X_{n-1}] = a_1X_1 + \cdots + a_{n-1}X_{n-1} \text{ g.s.}, \tag{4.1.3}$$

tada koeficijenti a_1, ..., a_{n-1} zadovoljavaju sustav linearnih jednadžbi

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i[X_i, X_j]_\alpha = [X_n, X_j]_\alpha, j = 1,\ldots,n-1. \tag{4.1.4}$$

Nadalje, ako je $n = 3$ i ako su X_1 i X_2 su linearno nezavisni, tada sustav (4.1.4) jedinstveno određuje koeficijente.

Za dokaz pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.176-177, korolar 4.1.3).

Sada smo vidjeli da višestruka regresija nije uvijek linearna kada se radi o simetričnim stabilnim distribucijama. Međutim, ukoliko dodamo pretpostavku da su X_1, X_2, ..., X_{n-1} nezavisne, tada će višestruka regresija biti linearna. O tome nam govori sljedeći korolar.

Korolar 4.1.4. *Neka slučajne varijable X_1, X_2, ..., X_{n-1} imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $n > 2$ i $1 < \alpha < 2$ i pretpostavimo da su X_1, ..., X_{n-1} nezavisne. Tada vrijedi da je:*

$$\mathrm{E}[X_n|X_1,\ldots,X_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n-1} c_kX_k,$$

gdje je $c_k = \frac{[X_n,X_k]_\alpha}{\|X_k\|_\alpha^\alpha}$.

Dokaz. Prema reprezentacijskom teoremu možemo pretpostaviti da je:

$$X_k = \int_E f_k(x) M(dx), \; k = 1, 2, \dots, n,$$

gdje je M $S\alpha S$ slučajna mjera s mjerom m i $f_k \in L^\alpha(E, m)$. Budući da su X_1, X_2, ..., X_{n-1} nezavisne, možemo pretpostaviti kako funkcije f_1, f_2, ..., f_{n-1} imaju disjunktne nosače funkcija gustoće. To znači npr. da ukoliko je $f_1(x_k) = 0$, za taj isti x_k vrijedi da je $f_2(x_k) \neq 0$. Slijedi da postoje disjunktni skupovi A_1, A_2, ..., A_{n-1} takvi da je $f_k(x) = 0$ za bilo koji $x \notin A_k$, $k = 1, \dots, n-1$. S jedne strane, imamo da, za bilo koji $k = 1, \dots, n-1$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\int_{A_k} f_n(x) M(dx) \middle| X_1, \dots, X_n\right] &= \mathrm{E}\left[\int_{A_k} f_n(x) M(dx) \middle| \int_{A_j} f_j(x) M(dx), j = 1, \dots, n-1\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_{A_k} f_n(x) M(dx) \middle| \int_{A_k} f_k(x) M(dx)\right] \text{ nez.} \\
&= c_k \int_{A_k} f_k(x) M(dx) \\
&= c_k X_k
\end{aligned}$$

gdje je (pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.127, propozicija 3.5.2)):

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{\|X_k\|_\alpha^\alpha} \int_{A_k} f_n(x) f_k(x)^{<\alpha-1>} m(dx) \\
&= \frac{1}{\|X_k\|_\alpha^\alpha} \int_E f_n(x) f_k(x)^{<\alpha-1>} m(dx) \\
&= \frac{[X_k, X_k]_\alpha}{\|X_k\|_\alpha^\alpha}.
\end{aligned}$$

S druge strane,

$$\int_{(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)^c} f_n(x) M(dx)$$

je nezavisno od X_1, X_2, ..., X_{n-1} i stoga slijedi:

$$E\left[\int_{(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)^c} f_n(x) M(dx) | X_1, \dots, X_{n-1}\right] = E\left[\int_{(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)^c} f_n(x) M(dx)\right] = 0.$$

Iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
E[X_n | X_1, \dots, X_{n-1}] &= E\left[\sum_{k=1}^{n-1} \int_{A_k} f_n(x) M(dx) + \int_{(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)^c} f_n(x) M(dx) \middle| X_1, \dots, X_{n-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} c_k X_k.
\end{aligned}$$

□

Nakon ovog želimo karakterizirati sve slučajne vektore sa $S\alpha S$ distribucijom koji imaju linearnu ljusku gdje su sve višestruke regresije linearne.

Neka je $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajni vektor sa $S\alpha S$ distribucijom s indeksom stabilnosti $1 < \alpha \leq 2$ i neka je $sp(\mathbf{X})$ linearna ljuska od $\mathbf{X}$, tj. vektorski prostor svih konačnih linearnih kombinacija $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$, gdje je $-\infty < \lambda_1, \dots, \lambda_n < \infty$. Sada možemo definirati što znači da neki vektor ima svojstvo višestruke regresije.

Definicija 4.1.5. *Za vektor $\mathbf{X}$ kažemo da ima svojstvo višestruke regresije ako za sve slučajne varijable Y_1, Y_2, ..., Y_n iz $sp(\mathbf{X})$, vrijedi da je:*

$$\mathrm{E}[Y_n | Y_1, \dots, Y_{n-1}] \in sp\{(Y_1, \dots, Y_{n-1})\}.$$

Sada možemo karakterizirati sve slučajne vektore sa $S\alpha S$ distribucijom koji imaju linearnu ljusku gdje su sve višestruke regresije linearne.

Propozicija 4.1.6. *Neka je $\mathbf{X}$ slučajni vektor sa $S\alpha S$ distribucijom s indeksom stabilnosti $1 < \alpha < 2$ i pretpostavimo da je $dim(sp(\mathbf{X})) \geq 3$. Tada su sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $\mathbf{X}$ *posjeduje svojstvo višestruke regresije.*

(b) $\mathbf{X}$ *je subgausovski slučajan vektor.*

(c) Jamesova ortogonalnost u $sp(\mathbf{X})$ je aditivna slijeva, tj. vrijedi da je:

$$Y_1, Y_2, Y_3 \in sp(\mathbf{X}),\ [Y_3, Y_1]_\alpha = 0,\ [Y_3, Y_2]_\alpha = 0 \Rightarrow [Y_3, Y_1 + Y_2]_\alpha = 0.$$

Dokaz. Za dokaz ekvivalentnosti $(b) \Rightarrow (c)$ pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.180-181, propozicija 4.1.7). Dokazat ćemo da $(a) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo da su Y_1, Y_2 i $Y_3 \in sp(\mathbf{X})$ koji zadovoljavaju sljedeće:

$$[Y_3, Y_1]_\alpha = [Y_3, Y_2]_\alpha = 0.$$

Očito je $[Y_3, Y_1 + Y_2]_\alpha = 0$ ako i samo ako su Y_1 i Y_2 umnošci jedna druge. Ako su Y_1 i Y_2 linearno nezavisni, tada slijedi:

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 = \frac{[Y_3, Y_1 + Y_2]_\alpha}{\|Y_1 + Y_2\|_\alpha^\alpha} &= \mathrm{E}[Y_3 | Y_1 + Y_2] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[Y_3 | Y_1, Y_2] | Y_1 + Y_2] \\ &= \mathrm{E}[a_1 Y_1 + a_2 Y_2 | Y_1 + Y_2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prema korolaru (4.1.3) slijedi da je $a_1 = a_2 = 0$ i onda dobijemo da je $[Y_3, Y_1 + Y_2]_\alpha = 0$.

Sada ćemo dokazati da $(b) \Rightarrow (a)$. Neka je Y_1, ..., $Y_n \in sp(\mathbf{X})$. Budući da je $\mathbf{X}$ subgausovski slučajni vektor, tada je i $(Y_1, \dots, Y_n)$, tj. $Y_j = A^{1/2} G_j$, $j = 1, \dots, n$, gdje je

$A \sim S_{\alpha/2}(\sigma, 1, 0)$ i $(G_1, \ldots, G_n)$ normalan slučajni vektor s očekivanjem 0. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y_n|Y_1, \ldots, Y_{n-1}] &= \mathrm{E}[A^{1/2}G_n|A^{1/2}G_1, \ldots, A^{1/2}G_{n-1}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[A^{1/2}G_n|A, G_1, \ldots, G_{n-1}]|A^{1/2}G_1, \ldots, A^{1/2}G_{n-1}] \\
&= \mathrm{E}[A^{1/2}\,\mathrm{E}[G_n|G_1, \ldots, G_{n-1}]|A^{1/2}G_1, \ldots, A^{1/2}G_{n-1}] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{Cov(G_i, G_n)}{Var(G_i)} A^{1/2}G_i \middle| A^{1/2}G_1, \ldots, A^{1/2}G_{n-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Cov(G_i, G_n)}{Var(G_i)} A^{1/2}G_i \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Cov(G_i, G_n)}{Var(G_i)} Y_i,
\end{aligned}$$

s čime je dokazana tvrdnja. □

4.2 Simetrične uvjetne distribucije

U ovom potpoglavlju bavit ćemo se simetričnim uvjetnim distribucijama. Ukoliko imamo dvije slučajne varijable X_1 i X_2 koje imaju zajedničku $S\alpha S$ stabilnu distribuciju, pitat ćemo se je li uvjetna distribucija od X_2 uz uvjet X_1 simetrična. Odgovor na to pitanje ćemo naći u ovom potpoglavlju.

Nažalost, vidjet ćemo da kada je zajednička distribucija od X_1 i X_2 $S\alpha S$ s indeksom stabilnosti $1 < \alpha < 2$, uvjetna distribucija od X_2 uz uvjet X_1 nije uvijek simetrična oko uvjetnog očekivanja.

Sada pretpostavimo da je zajednička distribucija od X_1 i X_2 $S\alpha S$ s $1 < \alpha < 2$. Znamo da tada postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi: $\mathrm{E}[X_2|X_1] = cX_1$. Ako je uvjetna distribucija od X_2 uz uvjet X_1 simetrična, onda nužno mora biti simetrična oko cX_1, tj. za sve Borelove skupove B_1 i B_2 mora vrijediti da je:

$$P(X_2 - cX_1 \in B_2|X_1 \in B_1) = P(cX_1 - X_2 \in B_2|X_1 \in B_1) \text{ g.s.} \tag{4.2.1}$$

Vrijedi:

$$P(X_2 - cX_1 \in B_2|X_1 \in B_1) = \frac{P(X_1 \in B_1, X_2 - cX_1 \in B_2)}{P(X_1 \in B_1)}$$

te

$$P(cX_1 - X_2 \in B_2|X_1 \in B_1) = \frac{P(X_1 \in B_1, cX_1 - X_2 \in B_2)}{P(X_1 \in B_1)},$$

iz čega slijedi da je:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 - cX_1 \in B_2) = P(X_1 \in B_1, cX_1 - X_2 \in B_2).$$

Iz ovog slijedi da je X_2 uz uvjet X_1 simetrična oko cX_1 ako i samo ako vrijedi:

$$(X_1, X_2 - cX_1) \stackrel{d}{=} (X_1, cX_1 - X_2).$$

A prethodna relacija vrijedi ako i samo ako vrijedi:

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (X_1, 2cX_1 - X_2). \tag{4.2.2}$$

U sljedećoj lemi ćemo iskazati alternativni prikaz karakteristične funkcije slučajnog vektora (X_1, X_2).

Lema 4.2.1. *Neka je zajednička distribucija od X_1 i X_2 $S\alpha S$ s indeksom stabilnosti $0 < \alpha < 2$. Tada postoji jedinstvena konstanta b i mjera σ na $\mathbb{R}$ koja zadovoljava da je $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \sigma(dt) < \infty$, tako da vrijedi da je:*

$$\mathrm{E}\left[\exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}\right] = \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} |\theta_1 + \theta_2 t|^\alpha \sigma(dt) - b|\theta_2|^\alpha\right\}. \tag{4.2.3}$$

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 182-183, lema 4.2.1).

Sada ćemo iskazati teorem koji govori o uvjetu kada je uvjetna distribucija od X_2 uz uvjet X_1 simetrična koristeći pritom alternativni prikaz karakteristične funkcije koji smo iskazali u prethodnoj lemi.

Teorem 4.2.2. *Neka X_1 i X_2 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $1 < \alpha < 2$. Tada je uvjetna distribucija od X_2 uz uvjet X_1 simetrična za neki $c \in \mathbb{R}$ ako i samo ako njen prikaz (4.2.3) uključuje mjeru σ koja je simetrična oko c.*

Dokaz. Koristeći (4.2.3) dobijemo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}] &= \mathrm{E}[\exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2(2cX_1 - X_2))\}] \\
&= \mathrm{E}[\{i(\theta_1 + 2c\theta_2)X_1 - \theta_2 X_2\}] \\
&= \exp\{-\int_{-\infty}^{\infty} |\theta_1 + 2c\theta_2 - \theta_2 t|^\alpha \sigma(dt) - b|\theta_2|^\alpha\} \\
&= \exp\{-\int_{-\infty}^{\infty} |\theta_1 + \theta_2(2c - t)|^\alpha \sigma(dt) - b|\theta_2|^\alpha\} \\
&= \exp\{-\int_{-\infty}^{\infty} |\theta_1 + \theta_2 s|^\alpha \sigma_1(ds) - b|\theta_2|^\alpha\},
\end{aligned}$$

ako postavimo da je $s = h(t) \equiv 2c - t$ i ako stavimo da je σ_1 inducirana mjera $h(\sigma) \equiv \sigma \circ h^{-1}$. Stoga slučajni vektor (X_1, X_2) ima prikaz (4.2.3), ali s mjerom σ_1. Budući da je prikaz jedinstven, (4.2.2) je ekvivaletno tome da je $\sigma = \sigma_1$. Budući da je transformacija $t \to h(t) = 2c - t$ reflektira točke u $\mathbb{R}$ oko c, relacija $\sigma = \sigma_1$ znači da je σ simetrična mjera oko c. □

Sada ćemo iskazati sljedeći korolar u kojem ćemo navesti još jedan uvjet kada je uvjetna distribucija X_2 uz uvjet X_1 simetrična, samo ovaj put nećemo koristiti mjeru σ.

Korolar 4.2.3. *Neka je zajednička distribucija od X_1 i X_2 $S\alpha S$ s indeksom stabilnosti $1 < \alpha < 2$. Tada je uvjetna distribucija od X_2 uz uvjet X_1 simetrična oko cX_1 ako i samo ako vrijedi da je:*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (Y_1, Y_2) + (\widetilde{Y}_1, 2c\widetilde{Y}_1 - \widetilde{Y}_2), \tag{4.2.4}$$

gdje je zajednička distribucija od Y_1 i Y_2 $S\alpha S$ te je slučajni vektor $(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2)$ nezavisan od (Y_1, Y_2) i jednako distribuiran kao i (Y_1, Y_2).

Dokaz. Moramo dokazati kako vektor (X_1, X_2) ima jednako distribuciju kao $(X_1, 2cX_1 - X_2)$:

$$\begin{aligned}
(X_1, X_2) &= (Y_1, Y_2) + (\widetilde{Y}_1), 2c\widetilde{Y}_1 - \widetilde{Y}_2) \\
&= (Y_1 + \widetilde{Y}_1), 2c\widetilde{Y}_1 + Y_2 - \widetilde{Y}_2)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(X_1, 2cX_1 - X_2) &= (Y_1 + \widetilde{Y}_1), 2c(Y_1 + \widetilde{Y}_1) - (2c\widetilde{Y}_1 + Y_2 - \widetilde{Y}_2)) \\ &= (Y_1 + \widetilde{Y}_1, 2cY_1 + \widetilde{Y}_2 - Y_2).\end{aligned}$$

Iz ovog vidimo kako su (X_1, X_2) i $(X_1, 2cX_1 - X_2)$ jednako distribuirani.

Sada ćemo dokazati nužnost.

Neka su (Z_1, Z_2) i $(\widetilde{Z}_1, \widetilde{Y}_2)$ nezavisni i jednako distribuirani slučajni vektori kao (X_1, X_2). Prema definiciji stabilnosti i (4.2.2) slijedi:

$$\begin{aligned}(X_1, X_2) &\stackrel{d}{=} 2^{-1/\alpha}((Z_1, Z_2) + (\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2)) \\ &\stackrel{d}{=} 2^{-1/\alpha}((Z_1, Z_2) + (\widetilde{Z}_1, 2c\widetilde{Z}_1 - \widetilde{Z}_2)) \\ &= (Y_1, Y_2) + (\widetilde{Y}_1, 2c\widetilde{Y}_1 - \widetilde{Y}_2),\end{aligned}$$

gdje je $(Y_1, Y_2) = 2^{-1/\alpha}(Z_1, Z_2)$ i $(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) = 2^{-1/\alpha}(\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2)$. □

4.3 Linearna ovisnost

U ovom poglavlju ćemo proučavati linearnu ovisnost slučajnih varijabli koje imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju. Prvo ćemo definirati što to znači da je jedna slučajna varijabla ovisna o drugoj.

Definicija 4.3.1. *Slučajna varijabla X_2 je linearno ovisna o slučajnoj varijabli X_1 ako postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ i slučajna varijabla Y nezavisna od X_1 takva da vrijedi da je:*

$$X_2 = cX_1 + Y. \tag{4.3.1}$$

Linearna ovisnost kod slučaja $S\alpha S$ distribucija je povezana s simetrijom i stabilnosti uvjetnih distribucija.

Neka X_1 i X_2 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $\alpha < 2$. Ako je X_2 linearno zavisna o X_1, tada sve uvjetne distribucije od X_2 uz uvjet $X_1 = x_1$, gdje je $-\infty < x_1 < \infty$, su simetrične oko cx_1 i α-stabilne.

Sljedeća lema pokazuje da u slučaju kada je $1 < \alpha < 2$, simetričnost i stabilnost uvjetnih distribucija vrijedi samo u slučaju linearne ovisnosti. Slučaj kada je $\alpha \leq 1$ je još uvijek nerazjašnjen.

Lema 4.3.2. *Neka slučajne varijable X_1 i X_2 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $1 < \alpha < 2$. Ako su sve uvjetne distribucije od X_2 uz uvjet X_1 simetrične α-stabilne, tada vrijedi da je:*

$$X_2 = cX_1 + Y$$

za neki realan c i slučajnu varijablu Y sa $S\alpha S$ distribucijom, nezavisnu od X_1.

Dokaz. Budući da su sve uvjetne distribucije od X_2 uz uvjet X_1 α-stabilne i simetrične, karakteristična funkcija od X_2 uz uvjet X_1 je jednaka:

$$\mathrm{E}[\exp(i\theta_2 X_2 | X_1)] = \exp\{-|\theta_2|^\alpha M(X_1) + i\theta_2 N(X_1)\},$$

gdje je $M \geq 0$ izmjeriva funkcija i gdje prema teoremu (4.1.2) vrijedi:

$$N(X_1) = \mathrm{E}[X_2 | X_1] = cX_1, \text{ g.s..}$$

Neka je:

$$Z = cX_1 + (M(X_1))^{1/\alpha} Z_0, \tag{4.3.2}$$

gdje je $Z_0 \sim S_\alpha(1,0,0)$ slučajna varijabla nezavisna od X_1. Budući da sve uvjetne distribucije od Z uz uvjet X_1 se preklapaju s uvjetnim distribucijama od X_2 uz uvjet X_1, imamo da je:

$$(Z, X_1) \stackrel{d}{=} (X_2, X_1). \tag{4.3.3}$$

Iz ovog slijedi da Z i X_1 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju i stoga linearna kombinacija $(M(X_1))^{1/\alpha} Z_0 = Z - cX_1$ ima $S\alpha S$ distribuciju. Stoga, postoji neki σ za realan θ, takav da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\exp\{-|\theta|^\alpha \sigma^\alpha\} &= \mathrm{E}[\exp\{i\theta M(X_1)^{1/\alpha} Z_0\}] \\
&= \mathrm{E}\,\mathrm{E}[\exp\{i\theta M(X_1)^{1/\alpha} Z_0 | Z_0\}] \\
&= \mathrm{E}[\exp\{-|\theta|^\alpha M(X_1)\}].
\end{aligned}$$

$M(X_1) = \sigma^\alpha$ g.s. je jedinstveno rješenje ove jednadžbe. Iz (4.3.2) i (4.3.3) slijedi da je:

$$X_2 \stackrel{d}{=} cX_1 + \sigma Z_0,$$

s čime je dokazana ova lema. □

Znamo da su slučajne varijable koje imaju zajedničku normalnu distribuciju uvijek linearno zavisne, međutim to nije slučaj kada su u pitanju $S\alpha S$ distribucije o čemu nam govori sljedeća propozicija.

Propozicija 4.3.3. *Neka slučajne varijable X_1 i X_2 imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju s $1 < \alpha < 2$. Tada su obje uvjetne distribucije X_2 uz uvjet X_1 i X_1 uz uvjet X_2 simetrične α-stabilne ako i samo ako su ili X_1 i X_2 nezavisne ili proporcionalne jedna drugoj.*

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 186-187, propozicija 4.3.2).

4.4 Moment slučajnog vektora

U ovom poglavlju bavit ćemo se momentom slučajnog vektora. Pokušat ćemo naći uvjet kada taj moment postoji.

Neka je $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajan vektor u $\mathbb{R}^n$ s α-stabilnom distribucijom s indeksom stabilnosti $0 < \alpha < 2$ i neka su $p_1, \ldots, p_n$ nenegativni brojevi. Želimo naći nužan i dovoljan uvjet za $p_1, \ldots, p_n$ kako bi moment slučajnog vektora $\mathrm{E}[|X_1|^{p_1}|X_2|^{p_2}\ldots|X_n|^{p_n}]$ bio konačan.

Znamo da ako su X_j, $j = 1, 2, \ldots$ nezavisne, tada je:

$$\mathrm{E}[|X_1|^{p_1}|X_2|^{p_2}\ldots|X_n|^{p_n}] = \mathrm{E}[|X_1|^{p_1}]\,\mathrm{E}[|X_2|^{p_2}]\ldots\mathrm{E}[|X_n|^{p_n}] < \infty.$$

A to vrijedi ako i samo ako su $p_j < \alpha$, $j = 1, \ldots, n$. Ako su svi X_j, $j = 1, \ldots, n$ jednaki, tada je $\mathrm{E}\,|X_1|^{p_1}|X_2|^{p_2}\ldots|X_n|^{p_n} = \mathrm{E}\,|X_1|^{p_1+\cdots+p_n} < \infty$ ako i samo ako je $p_1 + \cdots + p_n < \alpha$.

Sada ćemo definirati što to znači da su neke slučajne varijable n-terostruko zavisne.

Definicija 4.4.1. *Slučajne varijable X_j, $j = 1, 2\ldots$ su n-terostruko zavisne ako vrijedi da je:*

$$m\{x \in E : f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) \neq 0\} > 0,$$

gdje je m mjera.

n-terostruku zavisnost možemo definirati i preko spektralne mjere o čemu govori sljedeća definicija.

Definicija 4.4.2. *Slučajne varijable X_j, $j = 1, 2, \ldots$ su n-terostruko zavisne ako i samo ako vrijedi da je:*

$$\Gamma\{s \in S_n : s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \ldots, s_n \neq 0\} > 0,$$

gdje je Γ spektralna mjera.

Sada ćemo iskazati lemu koja koristi činjenicu da su X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, koje imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju, n-terostruko zavisne da bismo našli uvjet kada je moment slučajnog vektora $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ konačan.

Lema 4.4.3. *Neka $X_1, \ldots, X_n$ imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju i neka su n-terostruko zavisni. Tada je $\mathrm{E}\,|X_1|^{p_1}|X_2|^{p_2}\ldots|X_n|^{p_n} < \infty$ ako i samo ako vrijedi da je $p_1 + \ldots + p_n < \alpha$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathrm{E}[|X_1|^{p_1}|X_2|^{p_2}\ldots|X_n|^{p_n}] < \infty$ i neka je $A = \{x \in E : f_1(x)\cdots f_n(x) \neq 0\}$. Za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$, definiramo sljedeće:

$$Y_j = \int_A f_j(x)M(dx) \text{ i } Z_j = \int_{A^c} f_j(x)M(dx).$$

Slučajni vektori $(Y_1, \ldots, Y_n)$ i $(Z_1, \ldots, Z_n)$ su nezavisni zato što su A i A^c disjunktni. Neka je:

$$\infty > \mathrm{E}[|X_1|]^{p_1}\cdots\mathrm{E}[|X_n|]^{p_n} = \mathrm{E}[|Y_1 + Z_1 + \eta_1|^{p_1}]\cdots\mathrm{E}[|Y_n + Z_n + \eta_n|^{p_n}].$$

To implicira sljedeće:

$$\begin{aligned}
\infty &> \mathrm{E}[|Y_1 + z_1|^{p_1}\cdots|Y_n + z_n|^{p_n}] \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P(|Y_1 + z_1|^{p_1} > x_1, \ldots, |Y_n + z_n|^{p_n} > x_n)dx_1\cdots dx_n \\
&\geq J(\lambda)
\end{aligned}$$

za bilo koji $\lambda > 0$ gdje je

$$J(\lambda) = \int_{(\frac{1}{2}\lambda)^{p_1}}^{\lambda^{p_1}} \cdots \int_{(\frac{1}{2}\lambda)^{p_n}}^{\lambda^{p_n}} P(|Y_1 + z_1|^{p_1} > x_1, \ldots, |Y_n + z_n|^{p_n} > x_n)dx_1\cdots dx_n. \tag{4.4.1}$$

Vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} J(\lambda) = 0$.

S druge strane, ako zamijenimo svaki x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ u (4.4.1) gornjom granicom λ^{p_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$ dobijemo:

$$\begin{aligned}
J(\lambda) &\geq C\lambda^{p_1+\ldots+p_n}P(|Y_1 + z_1| > \lambda, \ldots, |Y_n + z_n| > \lambda) \\
&\geq C\lambda^{p_1+\ldots+p_n}P(|Y_1| > 2\lambda, \ldots, |Y_n| > 2\lambda)
\end{aligned}$$

za neku pozitivnu konstantu C i dovoljno velik λ. Slijedi da postoji pozitivna konstanta $C_1 < C$ takva da je:

$$J(\lambda) \geq C_1 2^{-\alpha} C_\alpha \lambda^{p_1+\cdots+p_n-\alpha} \int_A (\min_{k=1,\ldots,n} |f_k(x)|^\alpha) m(dx)$$

za dovoljno velik λ. (Za detalje pogledati ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str.194, korolar 4.4.3.) Integral na desnoj strani je pozitivan zato što

n-terostruka zavisnost implicira da je $m(A) > 0$. Budući da $J(\lambda) \to 0$, mora vrijediti da je $p_1 + \cdots + p_n < \alpha$. Dovoljnost slijedi iz Hölderove nejednakosti:

$$E[|X_1|^{p_1} \cdots |X_n|^{p_n}] \leq \prod_{k=1}^{n} (E[|X_k|^{p_1+\cdots+p_n}])^{p_k/(p_1+\cdots+p_n)} < \infty.$$

Slijedi tvrdnja. □

4.5 Asociranost slučajnih varijabli sa stabilnom distribucijom

U zadnjem potpoglavlju ćemo definirati asociranost slučajnih varijabli. Razlikujemo pozitivnu i negativnu asociranost. Iskazat ćemo i uvjete kada su slučajne varijable koje imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju pozitivno, odnosno negativno asocirane. Prvo ćemo definirati kada su slučajne varijable pozitivno asocirane.

Definicija 4.5.1. *Za slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ se kaže da su pozitivno asocirane, ako za bilo koje funkcije, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, koje su nepadajuće, vrijedi da je:*

$$Cov(f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)) \geq 0,$$

kad kovarijanca postoji.

Tada sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete da bi slučajne varijable koje imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti $0 < \alpha < 2$ bile pozitivno asocirane.

Teorem 4.5.2. *Neka slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju s $0 < \alpha < 2$, sa spektralnom mjerom Γ na jediničnoj sferi S_d u $\mathbb{R}^n$. Tada su $X_1, \ldots, X_n$ pozitivno asocirane ako i samo ako spektralna mjera Γ zadovoljava uvjet da je:*

$$\Gamma(S_n^-) = 0, \tag{4.5.1}$$

gdje je

$$S_n^- = \left\{ (s_1, \ldots, s_n) \in S_n : \text{ za neke } i, j \in \{1, \ldots, n\}, s_i > 0 \text{ i } s_j < 0 \right\}.$$

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 204-207, teorem 4.6.1).

Sada ćemo definirati kada su slučajne varijable negativno asocirane.

Definicija 4.5.3. *Za slučajne varijable X_1, …, X_n kažemo da su negativno asocirane ako za bilo koji $1 < k < n$, bilo koje funkcije $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ koje su nepadajuće vrijedi:*

$$Cov(f(\mathbf{Y}), g(\mathbf{Z})) \leq 0$$

kada kovarijanca postoji i gdje su $\mathbf{Y} = (X_1, \ldots, X_k)$ i $\mathbf{Z} = (X_{k+1}, \ldots, X_n)$ slučajni vektori čije su komponente X_1, …, X_k, X_{k+1}, …, X_n komponente slučajnog vektora $\mathbf{X}$.

Sada ćemo iskazati teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete da bi slučajne varijable koje imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti $0 < \alpha < 2$ bile negativno asocirane.

Teorem 4.5.4. *Neka slučajne varijable* $X_1, \ldots, X_n$ *imaju zajedničku* α*-stabilnu distribuciju s* $0 < \alpha < 2$*, sa spektralnom mjerom* Γ *na jediničnoj sferi* S_d *u* $\mathbb{R}^n$*. Tada su* $X_1, \ldots, X_n$ *negativno asocirane ako i samo ako spektralna mjera* Γ *zadovoljava uvjet da je:*

$$\Gamma(S_n^+) = 0, \tag{4.5.2}$$

gdje je

$$S_n^+ = \Big\{(s_1, \ldots, s_n) \in S_n : \text{ za neke } i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}, s_i s_j > 0\Big\}.$$

Za dokaz vidjeti ([7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, str. 208, teorem 4.6.3).

5 Zaključak

U ovom radu smo proučavali stabilne distribucije. Na početku smo se upoznali sa slučajnim varijablama koje imaju stabilne distribucije. Iskazali smo četiri ekvivalentne definicije stabilnih distribucija, a zatim smo iskazali i dokazali njihova svojstva. Stabilne distribucije su karakterizirane sa četiri parametra: indeksom stabilnosti, parametrom asimetrije, parametrom pomaka i parametrom skaliranja. Vidjeli smo i dokazali kako za simetrične stabilne distribucije mora vrijediti da su parametar asimetrije i parametar pomaka jednaki 0 te smo vidjeli da za strogo stabilne distribucije mora vrijediti da je parametar pomaka jednak 0.

U drugom poglavlju smo se bavili slučajnim vektorima koji imaju stabilnu distribuciju. Pri definiranju stabilnih distribucija slučajnih vektora, vidjeli smo da je to analogno onom za slučajne varijable. Dalje smo vidjeli da ukoliko slučajan vektor $\mathbf{X}$ ima stabilnu distribuciju, tada i svaka linearna kombinacija komponenti od $\mathbf{X}$ ima stabilnu distribuciju. Nažalost, obrat vrijedi samo u slučaju kada sve linearne kombinacije imaju strogo stabilne distribucije ili ako je $1 \leq \alpha \leq 2$. Dalje smo definirali karakterističnu funkciju slučajnog vektora te se upoznali sa spektralnom reprezentacijom tog vektora. Također smo našli uvjete kada slučajni vektori imaju strogo stabilnu, odnosno simetričnu stabilnu distribuciju. Budući da za $0 < \alpha < 2$ neki pojmovi, kao što je kovarijanca, ne postoje, uveli smo druge pojmove, kao što je kovarijacija, da bismo mogli dokazati neka svojstva stabilnih distribucija.

Na kraju smo se upoznali sa strukturama zavisnosti stabilnih distibucija. U prvom potpoglavlju bavili smo se regresijskim modelom gdje smo se pitali čemu je jednako uvjetno očekivanje kada slučajne varijable imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju te je li regresija tada linearna. Došli smo do zaključka da je regresija linearna. Dalje smo se bavili simetričnim uvjetnim distribucijama gdje smo vidjeli da ako dvije slučajne varijable imaju zajedničku $S\alpha S$ distribuciju, tada vrijedi da je i uvjetna distribucija simetrična ako i samo ako uključuje mjeru koja je simetrična oko nekog $c \in \mathbb{R}$. Dalje smo proučavali linearnu ovisnost gdje smo zaključili da ako su sve uvjetne distribucije od X_2 uz uvjet X_1 simetrične i α-stabilne, tada je X_2 ovisna o X_1. Zatim smo proučavali kada je moment slučajnog vektora konačan u slučaju kada njegove komponente imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju. Na kraju smo samo definirali pozitivnu i negativnu asociranost slučajnih varijabli koje imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju te smo iskazali nužne i dovoljne uvjete kako bi slučajne varijable, koje imaju zajedničku α-stabilnu distribuciju, bile pozitivno, odnosno negativno asocirane.

Vidjeli smo kako stabilne distribucije dozvoljavaju asimetriju i teške repove. Stoga mnoga svojstva koja vrijede za normalne distribucije, ne vrijede za stabilne distribucije. Vidjeli smo i također da funkcija gustoće stabilnih distribucija (osim u iznimnim slučajevima) ne postoji u zatvorenom analitičkom obliku i zato smo koristili karakterističnu funkciju.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je upoznavanje sa stabilnim distribucijama i strukturama zavisnosti stabilnih distribucija. U radu smo se bavili stabilnim distribucijama slučajnih varijabli, a zatim slučajnih vektora. Na početku smo se upoznali sa stabilnim distribucijama slučajnih varijabli te definirali kada su te distribucije simetrične stabilne, odnosno strogo stabilne. Naveli smo i dokazali neka svojstva stabilnih distribucija. Dalje smo se bavili stabilnim distribucijama slučajnih vektora te uveli pojmove poput kovarijacije, kovarijacijske norme, Jamesove ortogonalnosti, kodiferentnosti, α-slučajne mjere te prikaza slučajnih varijabli preko integrala. Na kraju smo proučavali strukture zavisnosti stabilnih distribucija. Gledali smo poveznicu stabilnih distribucija i linearne regresije, simetričnih uvjetnih distribucija, linearne ovisnosti, momenta slučajnog vektora i asociranosti slučajnih varijabli.

Summary

The aim of this diploma thesis is to introduce stable distributions and dependence structures of multivariate stable distributions. In the beginning we introduced stable distributions of random variables and defined symmetric stable and strictly stable distributions. We stated and proved some properties of stable distributions. Moreover, we were dealing with stable distributions of random vectors and we introduced some new terms like covariation, covariation norm, James orthogonality, codifference, α-stable random measure and integral representation of random variables. In the end we were studying dependence structures of multivariate stable distributions. Furthermore, the relation between stable distributions and linear regression, symmetric conditional laws, linear dependence, joint moments and association of random variables were analysed.

Literatura:

[1] S. Borak, W. Hardle, R. Weron, *Stable Distributions*, Deutsche Forschungsgemeinschaft, Berlin, 2005.

[2] Y.S. Chow, H. Teicher, *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, INC., New York, 1971.

[4] C. Geiss, S. Geiss, *An Introduction to probability theory*, 2004.

[5] J.P. Nolan, *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Birkhauser, 2014.

[6] S.T. Rachev, S. Mittnik, *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, 2000.

[7] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*, Chapman & Hall, 1994.

[8] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[9] R.J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Canada, 1980.

[10] V.V. Uchaikin, V.M. Zolotarev, *Chance and Stability: Stable Distributions and their Application*, VSP, Moskva, 1999.

[11] V.M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distributions*, The American Mathematical Society Moskva, 1983.

Životopis

Zovem se Matea Ivanešić. Rođena sam 13. siječnja 1992. godine u Požegi. Završila sam osnovnu školu Antuna Kanižlića u Požegi. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavila u Gimnaziji Požega u Požegi, opći smjer. Tijekom srednje škole sudjelovala sam na županijskim natjecanjima iz matematike gdje sam osvojila drugo,a zatim treće mjesto. Upisala sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijek 2010. godine te ga završila 2013. godine uz završni rad na temu "Carmichaelovi brojevi" pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Ivana Matića. Školovanje sam nastavila na Odjelu za matematiku u Osijeku te upisala Sveučilišni diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom završne godine diplomskog studija obavila sam stručnu studentsku praksu u tvrtki Farmeron kao podatkovni analitičar i statističar.