Problem dividendi za Brownovo gibanje

Pejić, Ana Maria

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike - smjer Financijska matematika i statistika

Ana Maria Pejić

Problem dividendi za Brownovo gibanje

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike - smjer Financijska matematika i statistika

Ana Maria Pejić

Problem dividendi za Brownovo gibanje

Diplomski rad

Mentor: Doc.Dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Tijekom povijesti, problemom isplate dividendi uglavnom su se bavili aktuari i osiguravajuće kuće. Njihov je fokus više bio na maksimiziranju vrijednosti tvrtke nego na minimiziranju rizika, na što bi se svakako trebalo obratiti više pozornosti. Spominjujući rizik, potrebno je naglasiti kako se teorija rizika kretala oko minimiziranja vjerojatnosti propasti. U klasičnom modelu za određivanje vjerojatnosti propasti, višak novčanih sredstava koji je tvrtka zarađivala mogao je rasti neograničeno, što je svakako nerealno. Rješenje tog problema, s ekonomskog aspekta, ponudio je De Finetti[1] 1957. godine na način da je proučavao optimalnu politiku dividendi, u smislu maksimiziranja očekivane sadašnje vrijednosti zbroja svih budućih dividendi koje bi bile isplaćivane do vremena propasti. Zaključio je kako bi strategija optimalne isplate dividendi bila barijerna strategija te je pokazao na koji se način optimalna barijera može odrediti. Prema barijernoj strategiji za diskretan model, ukoliko je vrijednsot tvrtke prezentirana kao slučajna šetnja s korakom ± 1, onda je optimalan način isplate dividendi taj da postoji konstanta $b^* \geq 0$, takva da se svaki višak realiziran iznad razine b^* isplati kao dividenda. U današnje je vrijeme u mnogim državama aktualna tema smanjenja ili potpunog ukidanja poreza na isplaćene dividende, s ciljem poticanja novih investitora na investiranje ili već postojećih na reinvestiranje sredstava. U ovom radu razmatrat ćemo dio De Finettijevog modela koji se odnosi na model u neprekidnom vremenu te pretpostaviti kako je gore spomenuta vrijednost tvrtke zapravo Brownovo gibanje s pozitivnim driftom. Prednost takvog modela nad klasičnim je u tome što se na taj način mogu napraviti vrlo eksplicitni proračuni. Nadalje, ekonomske se analize rezultata mogu provesti jednostavnije i u većoj mjeri.

[1]Bruno de Finetti (1906.-1985.) - talijanski statističar i aktuar, poznat po "operativnoj subjektivnoj" koncepciji vjerojatnosti

2 Model Brownovog gibanja s driftom

U ovom ćemo poglavlju predstaviti definicije koje će nam biti potrebne te model za vrijednost tvrtke. Budući da se naš rad bazira na problemu isplate dividendi za tvrtke čija je vrijednost modelirana Brownovim gibanjem, prvo ćemo se osvrnuti na skaliranu slučajnu šetnju te ćemo zatim definirati Brownovo gibanje, Brownovo gibanje s driftom te ćemo na kraju predstaviti model. Model koji ćemo promatrati predstavljen je u [7, Chapter 11.6], gdje se može pogledati i postupak aproksimacije klasičnog modela vrijednosti tvrtke Brownovim gibanjem s driftom. U tom se slučaju vjerojatnost propasti kao i distribucija vremena do propasti lako izraze. Više o modelu i pojmovima možete pronaći u [6]. Uvedimo sada osnovne pojmove.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $(X_j,\, j = 1, 2, \dots)$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima ± 1 s parametrom $p = \frac{1}{2}$ definiranih na tom prostoru. **Simetrična slučajna šetnja** je slučajni proces $M = (M_k,\, k = 0, 1, 2, \dots)$ definiran s $M_0 = 0$, te $M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ za $k = 1, 2, \dots$. Slučajna šetnja je martingal te ima nezavisne priraste. Za aproksimaciju Brownovog gibanja trebamo ubrzati vrijeme i smanjiti korak slučajne šetnje. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$, definiramo **skaliranu slučajnu šetnju**

$$W^{(n)}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

ako je $nt \in \mathbb{Z}_+$. Ako nt nije cijeli broj, $W^{(n)}(t)$ definiramo linearnom interpolacijom između dviju najbližih točaka s i u, lijevo odnosno desno, od t za koje su ns i nu cijeli brojevi. Nadalje, $W^{(n)}(t)$ definiramo za svaki realan $t \geq 0$. Brownovo gibanje dobit ćemo kao limes kada $n \to \infty$. Za $n \in \mathbb{N}$, skalirana šetnja je funkcija dvaju argumenata: elementarnog događaja $\omega \in \Omega$ i vremena $t \in \mathbb{R}_+$. Za fiksni $\omega \in \Omega$, $t \mapsto W^{(n)}(t)(\omega)$ je neprekidna funkcija koju nazivamo put skalirane slučajne šetnje. S druge strane, fiksiramo li vrijeme $t \geq 0$, dobivamo slučajnu varijablu $W^{(n)}(t) : \Omega \to \mathbb{R}$. Dakle, za $t \geq 0$ takav da je nt cijeli broj vrijedi:

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j.$$

Nadalje, skalirana slučajna šetnja je također martingal te ima nezavisne priraste. Kako je Brownovo gibanje limes skaliranih slučajnih šetnji $W^{(n)}(t)$ kada $n \to \infty$, onda nasljeđuje svojstva tih skaliranih šetnji. Detaljne rezultate vezane uz svojstva slučajnih šetnji mogu se vidjeti u [8, Poglavlje 4]. Sada možemo definirati Brovnovo gibanje.

Definicija 1 (vidi [7, Chapter 11.6, Definition 11.11])**.** *Stohastički proces u neprekidnom vremenu $\{B_t : t \geq 0\}$ je **Brownovo gibanje** ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

i) $B_0 = 0$,

ii) $\{B_t : t \geq 0\}$ *ima stacionarne i nezavisne priraste,*

iii) za svaki $t > 0$, B_t *je normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom* $\sigma^2 t$.

Brownovo gibanje se još naziva **Wienerov proces**. Ukoliko je $\sigma^2 = 1$, proces nazivamo standardno Brownovo gibanje.

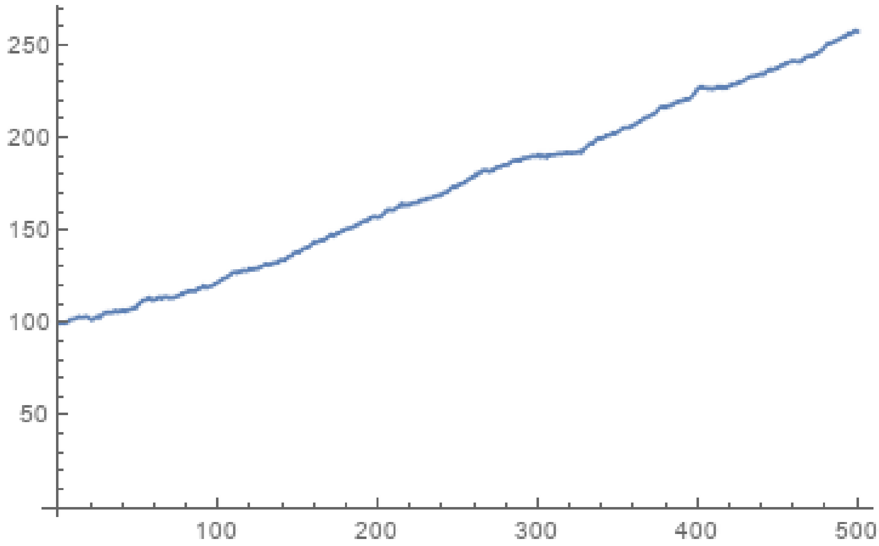
Definicija 2 (vidi [7, Chapter 11.6, Definition 11.12]). *Stohastički proces u neprekidnom vremenu $\{B_t : t \geq 0\}$ zove se **Brownovo gibanje s driftom** ako su zadovoljeni svi uvjeti Brownovog gibanja osim uvjeta za očekivanje od B_t, koje je u ovom slučaju jednako μt.*

Predstavimo sada model za vrijednost tvrtke. Neka je vrijednost tvrtke modelirana procesom $\{X_t : t \geq 0\}$, tako da je

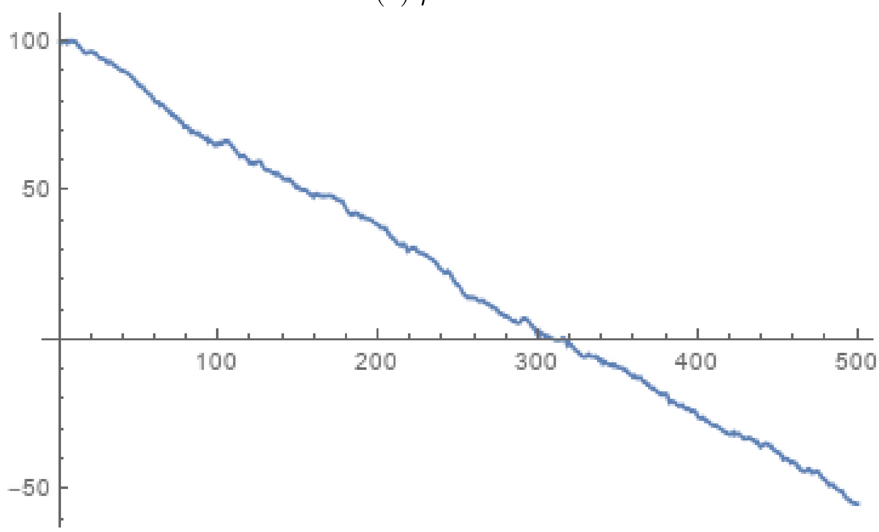
$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t, \qquad t \geq 0,$$

gdje je x početna vrijednost tvrtke, $\{B_t\}$ standardno Brownovo gibanje, μ pomak i $\sigma > 0$ volatilnost. Pogledajmo sada simulaciju procesa X_t.

Primjer 1. *Simulacija procesa X_t uz fiksnu vrijednost parametra $\sigma = 0.5$, početnu vrijednost $x = 100$ i za dane vrijednosti μ.*



(a) $\mu = 0.3$



(b) $\mu = -0.3$

U prethodnom primjeru možemo primijetiti kako predznak pomaka μ utječe na kretanje procesa X_t. Za fiksnu početnu vrijednost $x > 0$, uz pozitivan pomak proces X_t raste neograničeno, dok uz negativan pomak u nekom trenutku pada ispod 0 i nastavlja padati. Vrijednost tvrtke modelirat ćemo Brownovim gibanjem s pozitivnim driftom, odnosno pozitivnim pomakom.

2.1 Vjerojatnost propasti

U ovom potpoglavlju predstavit ćemo vrijeme realizacije propasti i vjerojatnost propasti. Kažemo da propast nastaje kada vrijednost tvrtke padne ispod 0.
Označimo sada s T vrijeme propasti tvrtke, odnosno prvi trenutak kada vrijednost tvrtke padne ispod 0 te neka je ono dano sljedećim izrazom

$$T = \min_{t>0}\{t : X_t < 0\}.$$

Za $T = \infty$ propast se nije realizirala. Nešto ćemo više o distribuciji vremena propasti reći u kasnijim poglavljima.

Neka je dana početna vrijednost tvrtke $x > 0$. Vjerojatnost propasti, odnosno vjerojatnost da se propast realizirala u konačnom vremenu ako je početna vrijednost tvtke dana s x, u oznaci $\psi(x)$, može se izraziti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= 1 - \phi(x) \\
&= P\{T < \infty | X_0 = x\} \\
&= P\{\min_{t>0} X_t < 0 | X_0 = x\} \\
&= P\{\min_{t>o} \sigma B_t + \mu t < -x\},
\end{aligned}$$

gdje je $\sigma B_t + \mu t$ skalirano Brownovo gibanje, odnosno Brownovo gibanje s driftom. Propozicija koja nam slijedi nam prikazuje funkciju vjerojatnosti propasti, a zatim imamo propoziciju koja govori o uvjetnoj distribuciji vremena propasti uz uvjet da se propast realizirala.

Propozicija 1 (vidi [7, Chapter 11.7, Corollary 11.14]). *Vjerojatnost propasti dana je s*

$$\psi(x) = 1 - \phi(x) = P\{T < \infty\} = e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}.$$

Propozicija 2 (vidi [7, Chapter 11.7, Corollary 11.16]). *Funkcija gustoće vremena propasti uz uvjet da se propast realizirala je*

$$f_T(t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad t > 0.$$

Sada prema [7, Chapter 11.7, Equation 11.37] vrijedi

$$E[T | T < \infty] = \frac{x}{\mu}. \tag{1}$$

Možemo uočiti iz prethodnog izraza kako očekivano vrijeme propasti raste s porastom početne vrijednosti tvrtke, dok povećanje pomaka μ smanjuje očekivano vrijeme propasti.

Potrebno je naglasiti kako su prethodne tvrdnje o distribuciji istinite samo uz uvjet da se propast zaista realizirala. U objašnjenju primjera 1 naveli smo tvrdnju, koja je potkrijepljena s [1, Chapter 7.1, Theorem 7.2], a odnosi se na to da za pozitivan pomak μ, vrijednost tvrtke može rasti neograničeno, što znači da će se propast sa sigurnošću realizirati samo u slučaju kada je pomak $\mu < 0$. U dijelu gdje smo predstavili model, spomenuli smo kako ćemo vrijednost tvrtke modelirati Brownovim gibanjem s pozitivnim pomakom pa u je tom slučaju slučajna varijabla T s pozitivnom vjerojatnošću jednaka ∞, odnosno propast se ne mora realizirati. To znači da bi u tom slučaju i očekivanje od T bilo ∞. Takav slučaj je nerealan u stvarnome svijetu te ćemo dalje u radu primijeniti određene radnje kako bismo ograničili takav rast. Zatim ćemo se u kasnijim poglavljima osvrnuti i na distribuciju vremena propasti kada imamo $\mu > 0$.

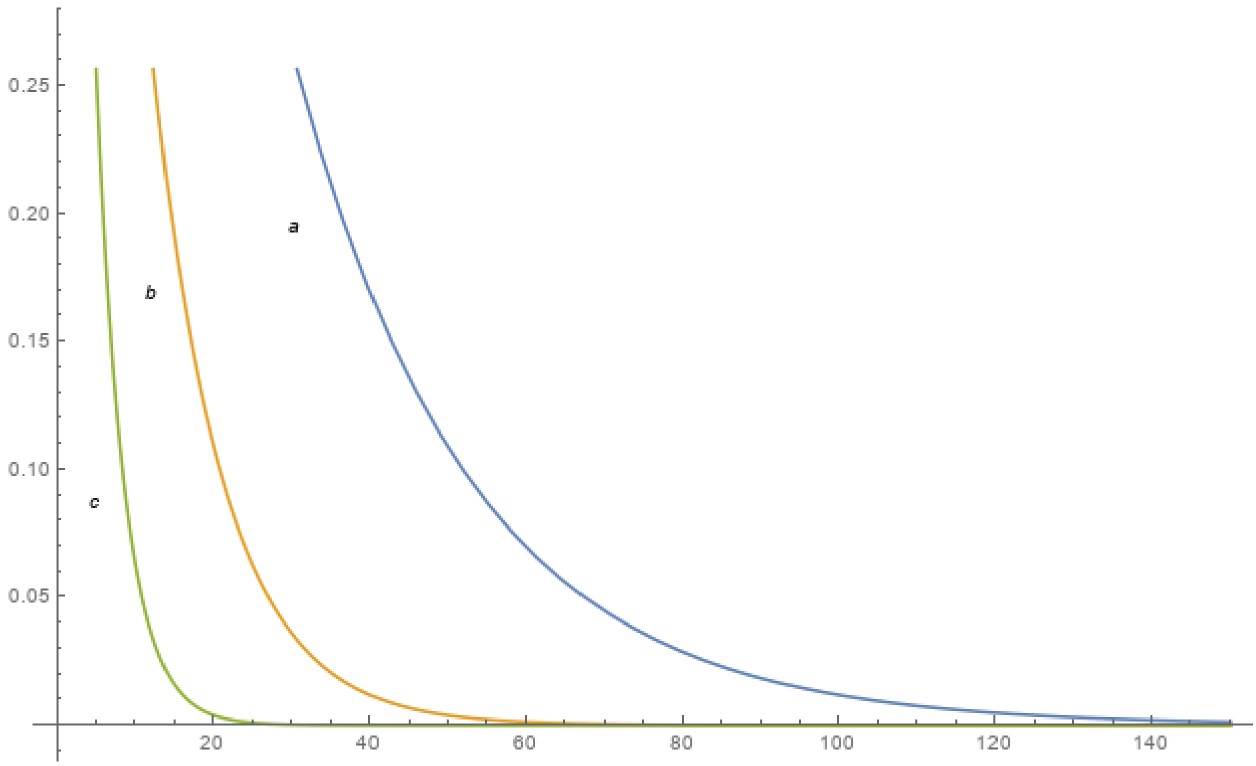
Ostale se rezultate vezane uz vjerojatnost propasti može pronaći u [7, Chapter 11.7]. Promotrimo sljedeći primjer u kojem možemo vidjeti kako pojedini parametri utječu na vjerojatnost propasti.

Primjer 2. *Grafički prikaz vjerojatnosti propasti* $\psi(x) = e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}$ *za sljedeće vrijednosti parametara:*

a) $\mu = 20$ *i* $\sigma = 30$,

b) $\mu = 50$ *i* $\sigma = 30$,

c) $\mu = 20$ *i* $\sigma = 12$.



Slika 2: Vjerojatnost propasti

Iz prethodnog primjera možemo primjetiti kako se za veći parametar μ vjerojatnost propasti brže smanjuje s porastom početne vrijednosti tvrtke. Također, možemo primjetiti kako se za manji parametar σ vjerojatnost propasti brže smanjuje s porastom početne vrijednosti tvrtke.

3 Strategija isplate dividendi

U ovom ćemo poglavlju razmatrati uvođenje strategije isplate dividendi, a zatim specijalno barijerne strategije. Naime, kako smo već vidjeli iz primjera 1, u predstavljenom modelu Brownovog gibanja s pozitivnim driftom kao i u ostalim klasičnim modelima vrijednosti tvrke, vrijednost tvrtke može rasti neograničeno, što nije realno u stvarnome svijetu. Naime, pod uobičajenim pretpostavkama početne vrijednosti tvrtke x i vjerojatnosti propasti $\psi(x)$, koja je inače mala te smo zaključili u prethodnom poglavlju da s porastom x brzo opada, vrijednost tvrtke X_t s vjerojatnošću 1 teži u ∞ kako vrijeme t prolazi. Veliku kritiku na ovaj model pružio je De Finetti, koji je predložio isplatu dividendi kao rješenje ovog problema. Dakle, vrijednost tvrtke X_t bi s vremena na vrijeme trebalo smanjiti po nekom pravilu. Mi ćemo razmatrati rješenje koje je ponudio De Finetti - dividende. Dividenda je dio dobiti, odnosno vrijednosti tvrtke, koja se isplaćuje njezinim dioničarima. Više o ovome problemu može se pročitati u [5, Chapter 6.4].

U svakom trenutku $t \geq 0$, dividende mogu biti isplaćene i time umanjiti vrijednost tvrtke X_t. Pravilo po kojem se dividende isplaćuju naziva se strategija isplate dividendi. Označimo strategiju isplate dividendi s π. Strategija π u ovom slučaju predstavlja pravilo po kojem se neopadajuću funkciju D_t pridružuje svakoj realizaciji vrijednosti tvrtke X_t. D_t predstavlja iznos dividendi isplaćenih do trenutka $t \geq 0$, odnosno akumulirane dividende. Tada je stvarna vrijednost tvrtke u trenutku t nakon što je isplaćena posljednja dividenda, dakle nakon isplate svih akumuliranih dividendi D_t do trenutka t, dana izrazom

$$Z_t = X_t - D_t.$$

Z_t možemo zvati modificirana vrijednost tvrtke.

(Napomena: Radi lakšeg označavanja, umjesto X_t, D_t i Z_t možemo koristiti i oznake $X(t)$, $D(t)$ i $Z(t)$.) Svakako, moramo naglasiti kako iznos isplaćenih dividendi ovisi samo o prošlosti, odnosno ukoliko su za neke dvije tvrtke vrijednosti tvrtki u trenucima prije isplate dividendi bile jednake, tada će i iznos dividendi u istom trenutku za te tvrtke biti jednak. Dakle, za tvrtke a i b vrijedi

$$D_t^a = D_t^b \text{ ako } X_s^a = X_s^b,$$

za sve $s < t$ za koje su D_t^a i D_t^b, tj. akumulirane dividende tvrtke a odnosno b, dodijeljene pravilom π redom vrijednostima tvrtki X_s^a i X_s^b.

Znamo da je propast trenutak kada vrijednost tvrtke dosegne 0. Sada je vrijeme propasti tvrtke, u oznaci T, odnosno prvi trenutak kada vrijednost tvrtke dosegne 0 dan s

$$T = \min\{t \geq 0 : Z_t = 0\}.$$

Sljedeći će nam pojmovi biti korisni za daljnju analizu problema isplate dividendi. Više o tome može se pogledati u [2]. Kamata je naknada koju neka osoba plaća drugoj osobi za korištenje kapitala. Kamata se isplaćuje na kraju fiksiranog perioda. Na investiciju u iznosu 1 uloženu u trenutku t na 1 vremenski period, isplaćuje se u trenutku $t + 1$ iznos $1 + i(t)$, gdje je $i(t) > -1$. Broj $i(t)$ naziva se **(efektivna) kamatna stopa** za jedinični vremenski period $[t, t+1]$.

Za $t_1 \leq t_2$ definiramo veličinu $A(t_1, t_2)$ kao akumulaciju (tj. ukupni kapital) do trenutka t_2 koju proizvodi depozit 1 investiran u trenutku t_1 i zovemo ga **akumulacijski faktor** za period $[t_1, t_2]$. Vrijedi

$$A(t, t+1) = 1 + i(t).$$

Ako je iznos 1 investiran u trenutku t, $A(t, t+h)$ predstavlja njegovu vrijednost u trenutku $t+h$, $h > 0$. Dakle, vrijedi

$$A(t, t+h) = 1 + hi_h(t).$$

Broj $i_h(t)$ definiran ovim izrazom nazivamo **godišnja nominalna kamatna stopa** u periodu $[t, t+h]$ i vrijedi

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}.$$

Za $h = 1$ su nominalna i efektivna kamatna stopa jednake. Ako za neki t postoji

$$\delta(t) := \lim_{h \to 0+} i_h(t),$$

tada se $\delta(t)$ naziva **intenzitet kamate** po jedinici vremena u trenutku t. Za fiksnu kamatnu stopu vrijedi

$$\delta = \delta(t).$$

Ako u trenutku t_1 investiramo depozit u iznosu $c \int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta(s)} ds$, njegova vrijednost u trenutku t_2 naraste do c. Kažemo da je

$$c \int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta(s)} ds$$

diskontirana vrijednost, odnosno vrijednost u trenutku t_1 iznosa c koji dospijeva u t_2. Za $t_1 = 0$, diskontiranu vrijednost zovemo sadašnja vrijednost.

Sadašnju vrijednost sume svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti definiramo kao

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} dD_t,$$

gdje je $\delta > 0$ intenzitet kamate, odnosno fiksna kamatna stopa.

Naš je sljedeći cilj pronaći najbolju strategiju za isplatu dividendi π. Procjenu strategije isplate dividendi π za danu početnu vrijednost tvrtke $X_0 = Z_0 = x$ vršimo na osnovu funkcije

$$V(x; \pi) = E[D | X_0 = x] = E_x[D], \tag{2}$$

gdje nam E_x označava uvjetno očekivanje uvjetno na početnu vrijednost $X_0 = x$.

Strategija koja uzrokuje najveću očekivanu sadašnju vrijednost sume svih dividendi isplaćenih do trenutka T, odnosno najveću očekivanu vrijednost od D, naziva se **optimalna**

strategija isplate dividendi i označavat ćemo ju s π_0. Dakle, optimalna strategija isplate dividendi π_0 maksimizira očekivanu sadašnju vrijednost sume dividendi isplaćenih do trenutka T. Za optimalnu strategiju π_0 vrijedi

$$V(x) = V(x; \pi_0), \tag{3}$$

gdje je

$$V(x) = \sup_{\pi} V(x; \pi), \tag{4}$$

pri čemu je supremum po svim mogućim dozvoljenim strategijama isplate dividendi π.

3.1 Barijerna strategija

Jedan primjer strategije isplate dividendi je barijerna strategija. **Barijerna strategija** je strategija isplate dividendi, kod koje postoji barijera $b > 0$, takva da kad god vrijednost tvrtke dosegne razinu b, višak prihoda iznad te razine se isplaćuje kao dividende dioničarima. Sljedeći teorem je preuzet iz [5, Chapter 6.4], a govori nam o postojanju optimalne barijerne strategije.

Teorem 1. *Postoji broj b takav da je za svaku početnu vrijednost $X_0 = x$, $0 \leq x \leq b$, sljedeća politika dividendi optimalna :*

i) za $X_t > b$: odmah slijedi isplata dividendi u iznosu $X_t - b$.

ii) za $X_t = b$: slijedi isplata svih nadolazećih prihoda kao dividendi.

iii) za $X_t < b$: nema isplate dividendi.

Posljedica prethodnog teorema je ta da za očekivanu sadašnju vrijednost isplaćenih dividendi do trenutka propasti za barijernu strategiju, u oznaci $V(x; b)$, postoji barijera b^*, takva vrijedi

$$V(x; b^*) = \sup_{b} V(x; b), \qquad 0 \leq x \leq b^*,$$

gdje je supremum sada dan po svim mogućim barijernim strategijama s nekom barijerom b. To je sada novi problem koji se tiče određivanja optimalne barijerne strategije, odnosno određivanja optimalne barijere b^*, a tim problemom ćemo se baviti u jednom od sljedećih poglavlja.

Neka očita svojstva koja isplata dividendi pod barijernom strategijom mora zadovoljavati su:

i) $D_0 = 0$,

ii) D_t se ne smanjuje,

iii) $Z_t \in [0, b]$.

Sada ćemo uvesti pojmove potrebne za daljnju analizu primjene barijerne strategije. Neka je sada maksimum procesa $\{X_t\}$ dan s

$$M_t = \max_{0 \leq \tau \leq t} X_\tau.$$

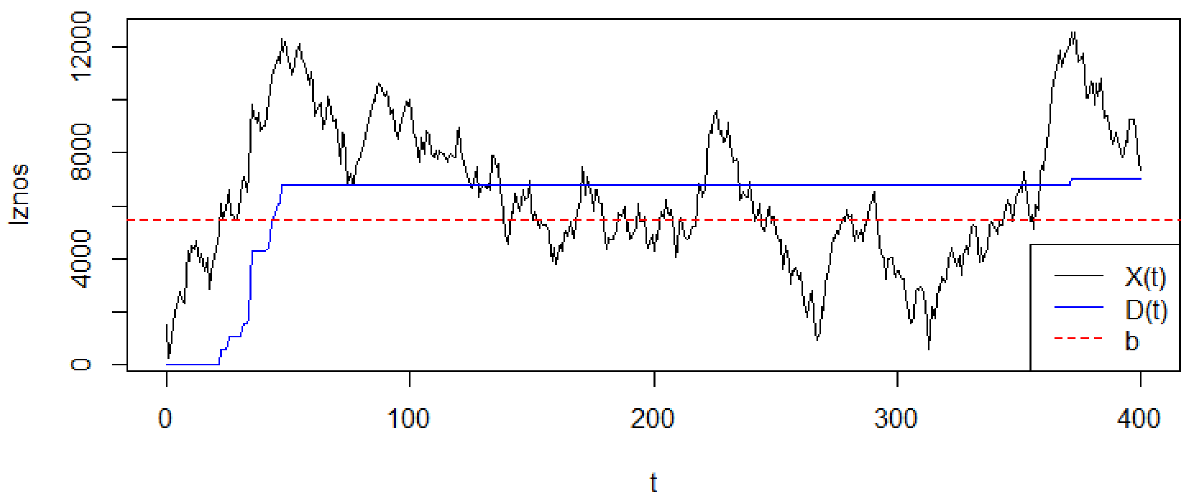
Tada su akumulirane dividende isplaćene do trenutka t, uz barijernu strategiju s barijerom b, dane izrazom

$$D_t = (M_t - b)_+ = \begin{cases} 0 & za\ M_t \leq b, \\ M_t - b & za\ M_t > b. \end{cases} \tag{5}$$

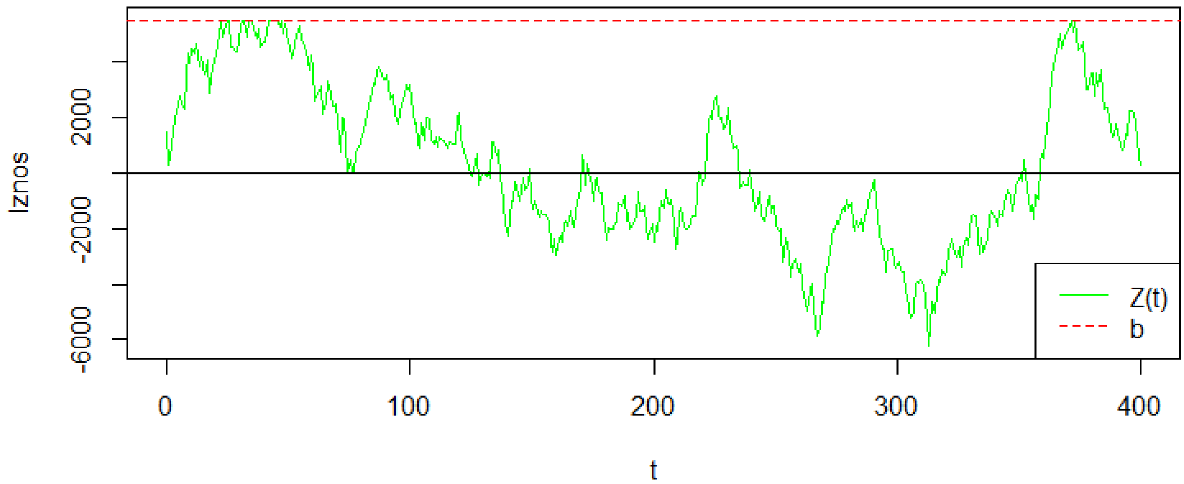
U tom slučaju, akumulirane dividende isplaćene do trenutka propasti T imaju oznaku D_T. Nešto više o distribuciji D_T može se vidjeti u poglavljima koji slijede.

Na sljedećim prikazima može se vidjeti kako za jednu trajektoriju izgledaju vrijednost tvrtke, akumulirane dividende isplaćene do trenutka t nakon uvedene barijerne strategije s barijerom b te modificirana vrijednost tvrtke.

Primjer 3. *Grafički prikaz $X(t)$, $D(t)$ i $Z(t)$ za jednu trajektoriju uz parametre $\mu = 2$, $\sigma = 500$, početnu vrijednost $x = 1500$ te barijeru $b = 5500$.*

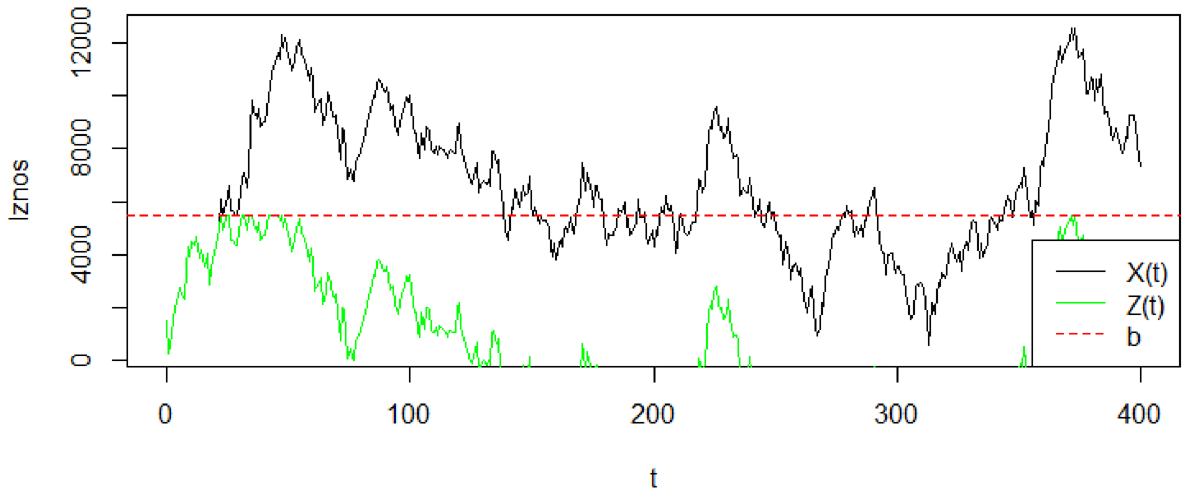


Slika 3: $X(t)$ i $D(t)$ za jednu trajektoriju uz barijeru b



Slika 4: $Z(t)$ za jednu trajektoriju uz barijeru b

Možemo primijetiti kako modificirana vrijednost tvrtke pada ispod 0, odnosno da se propast realizirala.



Slika 5: $X(t)$ i $Z(t)$ za jednu trajektoriju uz barijeru b

3.1.1 Očekivana sadašnja vrijednost sume svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti

Sada nam slijede neki korisni rezultati vezani uz $V(x;b)$, odnosno očekivanu sadašnju vrijednost sume svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti T.

Neka je dana početna vrijednost tvrtke, x, za koju vrijedi $0 < x < b$. Sada nam iz (2) slijede sljedeći rezultati:

$$\begin{aligned} V(x;b) &= E_x\Big[\int_0^T e^{-\delta t} dD_t\Big] = E_x\Big[\int_{dt}^T e^{-\delta t} dD_t\Big] + E_x\Big[\int_0^{dt} e^{-\delta t} dD_t\Big] \\ &= e^{-\delta dt} E_x\Big[\int_{dt}^T e^{-\delta(t-dt)} dD_t\Big] + E_x\Big[\int_0^{dt} e^{-\delta t} dD_t\Big] \\ &= e^{-\delta dt} E_x[V(X(dt);b)] + E_x\Big[\int_0^{dt} e^{-\delta t} dD_t\Big]. \end{aligned}$$

U konačnom vremenskom intervalu od 0 do dt, za dt dovoljno mali, odnosno $dt \to 0$, vrijednost tvrtke s početnom vrijednosti $X(0) = x$, ne dostiže ni 0 ni b, pa time isplate dividendi nije ni bilo. Izraz, koji kada se podijeli s dt ide u 0, imat će notaciju o. Možemo primijetiti ukoliko podijelimo drugi član prethodnog izraza s dt, on bi ide u 0. Dakle, slijedi nam

$$V(x;b) = e^{-\delta dt} E_x[V(X(dt);b] + o(dt).$$

Nakon što prethodni izraz pomnožimo s $e^{\delta dt}$ slijedi

$$E_x[V(X(dt);b] = e^{\delta dt} V(x;b) + o(dt).$$

Sada razvojem $e^{\delta dt}$ u Taylorov red imamo $1 + \delta dt + o(dt)$. Uvrštavanjem u prethodni izraz imamo

$$E_x[V(X(dt);b)] = (1 + \delta dt)V(x;b) + o(dt).$$

Kako općenito vrijedi $dV(X(0);b) = V(X(dt);b) - V(X(0);b)$, za $X(0) = x$ slijedi nam

$$E_x[dV(x;b)] + V(x;b) = V(x;b) + \delta V(x;b)dt + o(dt).$$

Sada konačno imamo

$$E_x[dV(x;b)] = \delta V(x;b)dt + o(dt). \tag{6}$$

Primjenom Itôve formule slijedi nam

$$dV(X(0);b) = V'(x;b)dX_t + \frac{1}{2}V''(x;b)(dX_t)^2.$$

Vrijedi da je $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$ pa uz očekivanje i oznaku o(dt) slijedi

$$E_x[dV(X(0);b)] = \mu V'(x;b)dt + \frac{\sigma^2}{2}V''(x;b)dt + o(dt).$$

Uvrstimo li sada ovaj izraz u (6), uz uvjet $X(0) = x$, dobijemo

$$\mu V'(x;b)dt + \frac{\sigma^2}{2}V''(x;b)dt + 0(dt) = \delta V(x;b)dt + O(dt).$$

Podijelimo li sada prethodni izraz s dt, kada nam $dt \to 0$, slijedi da V kao funkcija početne vrijednosti $X(0) = x$, zadovoljava sljedeću homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\frac{\sigma^2}{2}V''(x;b) + \mu V'(x;b) - \delta V(x;b) = 0, \qquad 0 < x < b, \tag{7}$$

uz granične uvjete

$$V(0;b) = 0, \tag{8}$$

$$V'(b;b) = 1. \tag{9}$$

Uvjet (8) je očit s obzirom da je propast trenutačna za $X(0) = x = 0$ te nije bilo isplaćenih dividendi. Uvjet (9) doalzi od činjenice da ako krenemo od početne vrijednosti $b-\varepsilon$, za $\varepsilon > 0$ i jako mali, odmah bismo se pomakli u vrijednost b, pa bismo imali slučaj ii) iz teorema 1, a ako bismo krenuli od početne vrijednosti b, dividende bi bile za ε veće i tada bismo također imali slučaj ii) iz teorema 1.

Pogledajmo sada mogućnost da krećemo od početne vrijednosti $x > b$. Tada bismo imali slučaj i) iz teorema 1 pa iz (5) slijedi

$$V(x;b) = x - b + V(b;b), \qquad x > b,$$

što znači da ako početna vrijednost tvrtke premašuje b, razlika će automatski biti isplaćena kao dividenda.

Neka je sada dana funkcija

$$g(x) = e^{rx} - e^{sx}, \tag{10}$$

gdje su

$$r = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}, s = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}, \tag{11}$$

rješenja kvadratne jednadžbe

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + \mu\xi - \delta = 0. \tag{12}$$

Iz (10) je vidljivo kako vrijedi $g(0) = 0$.

Rješenje diferencijalne jednadžbe (7), uz uvjete (8) i (9), dano je faktorizacijskom formulom

$$V(x;b) = \frac{g(x)}{g'(b)} = \frac{e^{rx} - e^{sx}}{re^{rb} - se^{sb}}, \qquad 0 \leq x \leq b. \tag{13}$$

Budući da jednadžbu (13) možemo zapisati kao

$$V(x;b) = \frac{g(x)}{g(b)}\frac{g(b)}{g'(b)} = \frac{g(x)}{g(b)}V(b;b), \qquad 0 \leq x \leq b, \tag{14}$$

izraz

$$\frac{g(x)}{g(b)} = \frac{e^{rx} - e^{sx}}{e^{rb} - e^{sb}}, \qquad 0 \leq x \leq b, \tag{15}$$

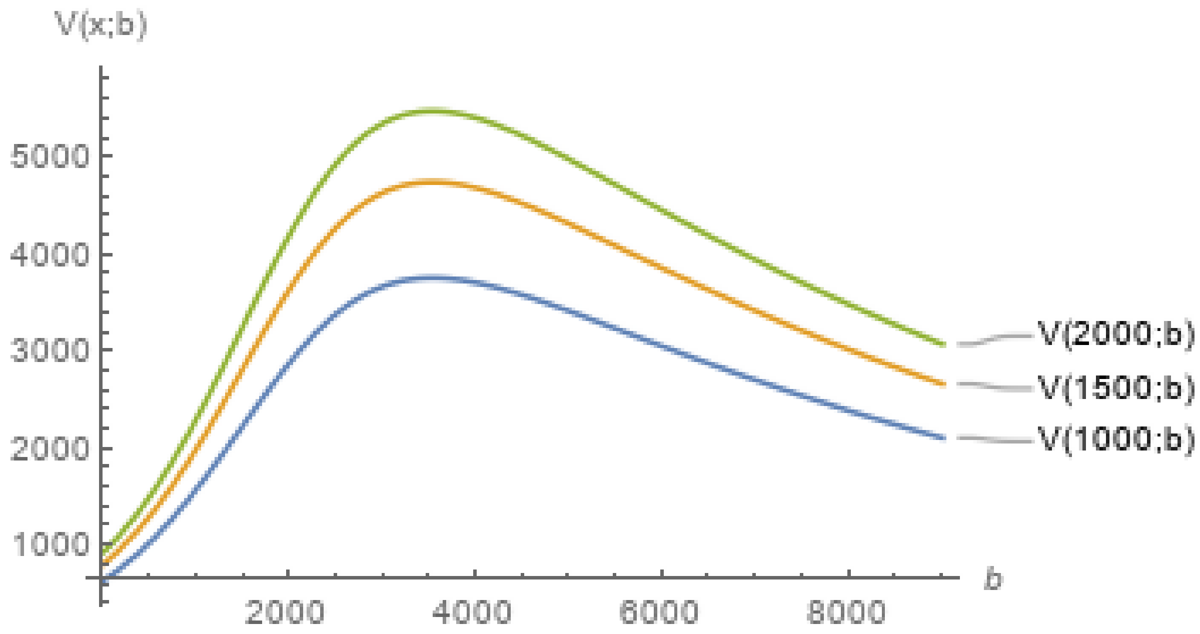
interpretiramo kao očekivanu sadašnju vrijednost uvjetne isplate u iznosu 1, plative čim vrijednost tvrtke dosegne razinu b, uz uvjet da se propast nije realizirala. Ovakav prikaz funkcije V dan je u [6, Chapter 2] i u konačnici možemo reći da zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}V''(x;b) + \mu V'(x;b) - \delta V(x;b) = 0, & 0 < x < b, \\ V(x;b) = x - b + V(b;b), & x > b. \end{cases}$$

Pogledajmo sada na primjeru funkciju V u ovisnosti o barijeri b.

Primjer 4. *Grafički prikaz funkcije V u ovisnosti o barijeri b za dane $\mu = 500$, $\delta = 0.07$, $\sigma = 1000$ i početne vrijednosti*

$$x_1 = 1000,\ x_2 = 1500 \text{ i } x_3 = 2000.$$



Slika 6: Funkcija V u ovisnosti o b

Iz primjera je vidljivo kako s porastom barijere b, veću očekivanu sadašnju vrijednost svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti imamo za veću početnu vrijednost x. Također, primjećujemo kako nakon neke vrijednosti b, očekivana sadašnja vrijednost svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti počinje opadati. Možemo zaključiti kako za barijeru b ne treba uzeti niti premalu vrijednost niti preveliku, odnosno potrebno je pronaći neku optimalnu razinu.

3.1.2 Granični slučaj $\delta = 0$

U ovom ćemo potpoglavlju razmatrati specijalni slučaj kada je kamata jednaka 0, odnosno $\delta = 0$. Takav je slučaj predstavljen u [6, Chapter 2], a analognu primjenu na klasičan model možete pronaći u [3, Chapter 3].

Dakle, pretpostavimo da je $\delta = 0$. Tada je $D = D_t$ te $V(x;b) = E_x[D_t]$. Rješenja jednadžbe (12) u ovom su slučaju $r = 0$ i $s = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$. Stoga,

$$g(x) = 1 - e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}. \tag{16}$$

Iz (13) slijedi da je

$$V(x;b) = \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(e^{\frac{2\mu b}{\sigma^2}} - e^{\frac{2\mu(b-x)}{\sigma^2}}\right), \qquad 0 \le x \le b. \tag{17}$$

Također, vrijedi

$$V(b;b) = \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(e^{\frac{2\mu b}{\sigma^2}} - 1\right).$$

Iz prethodne dvije jednadžbe slijedi da je

$$V(b;b) = V(b-x;b-x) + V(x;b), \qquad 0 \leq x \leq b. \tag{18}$$

Prethodni izraz nam govori da za početnu vrijednost tvrtke $x = b$, ukupne dividende isplaćene do trenutka propasti mogu biti rastavljene na sumu ukupnih dividendi isplaćenih do trenutka kada vrijednost tvrtke prvi puta padne na x i ukupnih dividendi isplaćenih nakon toga sve do propasti. Kada μ teži u nulu, izraz (17) ne ovisi o b i σ te postaje

$$V(x;b) = E_x[D_t] = x, \tag{19}$$

što znači da je sada izraz (18) zapravo $b = (b-x) + x$. Sada iz (15) i (16) slijedi

$$\frac{g(x)}{g(b)} = \frac{1 - e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}}{1 - e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}b}}, \qquad 0 \leq x \leq b.$$

To je zapravo vjerojatnost da proces $\{X_t\}$ s početnom vrijednosti tvrtke x, $0 \leq x \leq b$ dosegne barijeru b prije nego dosegne 0.

4 Vrijeme propasti T

Pretpostavimo sada da se dividende isplaćuju prema barijernoj strategiji s barijerom b. U tom slučaju nas zanima distribucija vremena propasti T te ćemo prvo uvesti pojam Laplaceove transformacije kako bismo mogli reći više o funkciji gustoće varijable T. Krenimo od pojma integralne transformacije. **Integralne transformacije** su izrazi oblika

$$f^*(s) = \int_\alpha^\beta H(s,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

gdje je f originalna funkcija, a f^* transformat funkcije f. Funkcija H je jezgra tranformacije. **Laplaceova transformacija** je poseban slučaj integralne transformacije kod koje su granice $\alpha = 0$ i $\beta = \infty$ te jezgra $H(s,t) = e^{-st}$. Pogledajmo sljedeću definiciju.

Definicija 3. *Neka je dana funkcija $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Ako za funkciju f sljedeći integral konvergira*

$$\mathcal{L}(f)(s) = f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbb{R}$$

onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = f^*$ zove Laplaceov transformat funkcije f, a preslikavanje $\mathcal{L}$ Laplaceova transformacija.

Uzmimo sada da je X neka neprekidna slučajna varijabla i f njezina funkcija gustoće. Laplaceovu transformaciju promatramo kao funkciju očekivanja, odnosno vrijedi

$$f^*(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)\mathrm{d}x.$$

Sada pomoću Laplaceove tranformacije možemo računati matematičko očekivanje slučajne varijable X. Kada deriviramo Laplaceov tranformat slučajne variajble X, slijedi nam sljedeći izraz:

$$f^{*'}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E[e^{-sX}] = E[-Xe^{-sX}].$$

Za $s = 0$ slijedi $f^{*'}(0) = -E[X]$. Dakle, očekivanje slučajne variajble X dano je sljedećim izrazom

$$E[X] = -f^{*'}(0).$$

U ovom ćemo poglavlju promatrati funkciju $L(x;b)$ zadanu izrazom

$$L(x;b) = E[e^{-\delta T}|X_0 = x] = E_x[e^{-\delta T}], \tag{20}$$

gdje je T vrijeme propasti, δ kamata te x početna vrijednost tvrtke. $L(x;b)$ predstavlja očekivanu sadašnju vrijednost isplate dividendi iznosa 1 u trenutku propasti T. Gore navedeni izraz smatramo funkcijom početne vrijednosti tvrtke x. Također, $L(x;b)$ je funkcija kamate δ i kao takva je Laplaceova transformacija funkcije gustoće vremena propasti T, odnosno u terminima definicije Laplaceove tranformacije, $L(x;b)$ je Laplaceov transformat funkcije gustoće slučajne varijable T. Kako su dioničari ti koji profitiraju od isplate dividendi do vremena propasti T, svakako su zainteresirani za određivanje očekivanog vremena propasti

$E[T]$, pa ćemo pomoću Laplaceove tranformacije, na način koji smo prethodno naveli, izračunati očekivanje od T.

Predstavimo prvo familiju funkcija $\{K(x;b)\}$ kojoj pripadaju i $L(x;b)$ i $V(x;b)$. Neka je dana familija funkcija $\{K(x;b)\}$ gdje je

$$K(x;b) = E_x[e^{-\delta\tau}K(X_\tau;b)], \qquad 0 \leq x \leq b, \tag{21}$$

za

$$\tau = \min\{t \geq 0 : X_t = 0 \ \text{ ili } \ X_t = b\}.$$

Izraz τ predstavlja prvi trenutak kada vrijednost tvrtke dosegne razinu b ili 0.

Pogledajmo sada kako funkcije L i V zbilja pripadaju navedenoj familiji $\{K(x;b)\}$. Iz (20) i (21) vidimo kako funkcija $L(x;b)$ pripada navedenoj familiji onda kada je τ prvi trenutak kada je vrijednost tvrtke dosegnula 0, to jest trenutak propasti, odnosno ako vrijedi $\tau = T = \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ te za K takvu da je $K(X_T;b) = 1$. Tvrdnju $\tau = T$ možemo protumačiti na način da se propast dogodila prije nego je vrijednost tvrtke dosegnula b. Dakle, uz navedene uvjete slijedi

$$K(x;b) = E_x\Big[e^{-\delta T}K(X_T;b)\Big] = E_x\Big[e^{-\delta T}\Big] = L(x;b).$$

V pripada familiji $\{K(x;b)\}$ za K takvu da je $K(X_\tau;b) = \int_0^T e^{-\delta(t-\tau)}D_t$. Dakle, prema [6, Chapter 3] i (21) slijedi

$$K(x;b) = E_x\Big[e^{-\delta\tau}\int_0^T e^{-\delta(t-\tau)}D_t\Big] = E_x\Big[\int_0^T e^{-\delta t}D_t\Big] = V(x;b).$$

Postupak kojim smo došli do zaključka kako $V(x;b)$ zadovoljava (7), primjenjujemo analogno i dolazimo do zaključka da $K(x;b)$ zadovoljava homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda danu sljedećim izrazom

$$\frac{\sigma^2}{2}K''(x;b) + \mu K'(x;b) - \delta K(x;b) = 0, \qquad 0 < x < b,$$

gdje je $K(x;b)$ je linearna kombinacija funkcija e^{rx} i e^{sx}, a r i s su dani s (11). Stoga, zaključujemo kako $L(x;b)$ zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\sigma^2}{2}L''(x;b) + \mu L'(x;b) - \delta L(x;b) = 0, \qquad 0 < x < b.$$

s graničnim uvjetima

$$L(0;b) = 1, \tag{22}$$

$$L'(b;b) = 0. \tag{23}$$

Uzmemo li da je u ovom slučaju funkcija g, umjesto izrazom (10) s uvjetom $g(0) = 0$, zadana izrazom

$$h(x) = re^{-s(b-x)} - se^{-r(b-x)}$$

uz uvjet $h'(b) = 0$. Sada uz dane granične uvjete (22) i (23), slijedi

$$L(x;b) = \frac{h(x)}{h(0)} = \frac{re^{-s(b-x)} - se^{-r(b-x)}}{re^{-sb} - se^{-rb}}, \qquad 0 \leq x \leq b.$$

Primjećujemo kako je $\frac{1-L(x;b)}{\delta}$ očekivana sadašnja vrijednost kontinuiranih isplata dividendi iznosa 1 od trenutka 0 do vremena propasti T.

Sada, postupkom koji smo predstavili na početku poglavlja i uz (11), imamo sljedeći izraz za očekivanje vremena propasti

$$E[T] = -\frac{dL(x;b)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} = \frac{\sigma^2}{2\mu^2}\Big[e^{\frac{2\mu b}{\sigma^2}} - e^{\frac{2\mu(b-x)}{\sigma^2}} - \frac{2\mu x}{\sigma^2}\Big], \qquad 0 \leq x \leq b. \tag{24}$$

Ovakav prikaz distribucije vremena propasti T može se vidjeti u [6].

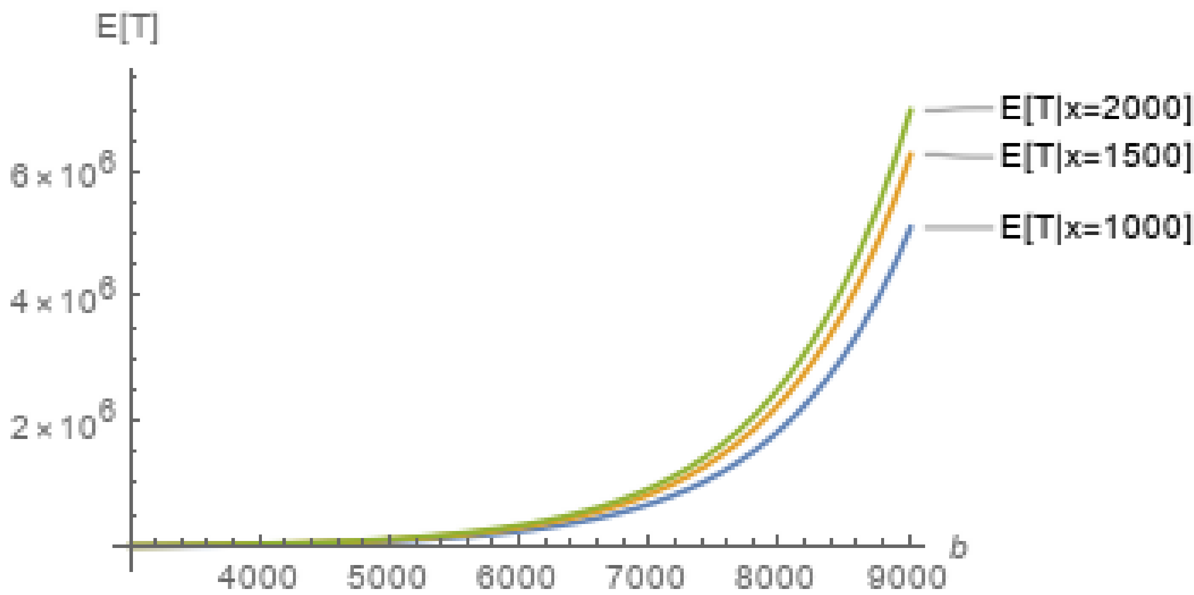
Uzmemo li sada promatrati slučaj kada nema isplate dividendi, odnosno kada barijera $b \to \infty$, kada uzmemo u obzir da promatramo proces s pozitivnim pomakom μ, iz (24) slijedi da je $E[T] \to \infty$, odnosno očekuje se da se propast neće realizirati. To se slaže s tvrdnjama koje smo naveli nakon izraza (1) u poglavlju 2. Promotrimo što se događa s izrazom (24) kada $b \to \infty$ za negativan pomak, odnosno $\mu = -c$, $c > 0$. U tom slučaju imali bismo

$$E[T] = \frac{\sigma^2}{2c^2}\Big[e^{\frac{-2cb}{\sigma^2}} - e^{\frac{-2c(b-x)}{\sigma^2}} + \frac{2cx}{\sigma^2}\Big],$$

pa bi uz $b \to \infty$ slijedio izraz $E[T] = \frac{x}{c}$, odnosno $E[T] = -\frac{x}{\mu}$. Pogledajmo sada na primjeru kako se očekivano vrijeme propasti T, nakon uvođenja barijerne strategije, mijenja ovisno o barijeri b.

Primjer 5. *Grafički prikaz očekivanog vremena propasti, uz barijernu strategiju, u ovisnosti o barijeri b uz vrijednosti parametara $\mu = 500$, $\delta = 0.07$, $\sigma = 1000$ i početne vrijednosti*

$$x_1 = 1000,\ x_2 = 1500 \text{ i } x_3 = 2000.$$



Slika 7: Očekivano vrijeme propasti u ovisnosti o barijeri b

Možemo primijetiti iz prethodnog primjera da s povećanjem barijere b očekivano vrijeme propasti eksponencijalno raste, odnosno očekujemo kako će se propast kasnije realizirati. Također, može se vidjeti kako za veću početnu vrijednost, očekujemo kasniju realizaciju propasti.

4.1 Veza između $V'(0;b)$ i $L(b;b)$

U ovom potpoglavlju promatrat ćemo vezu između derivacije očekivane sadašnje vrijednosti sume svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti T kada je početna vrijednost $x = 0$ i očekivane sadašnje vrijednosti isplate dividendi iznosa 1 u trenutku propasti T za početnu vrijednost tvrtke $x = b$.

Iz (13) i (14) slijedi da je

$$V'(0;b) = \frac{g'(0)g'(b) - g(0)g''(b)}{(g'(b))^2} = \frac{(r-s)(re^{rb} - se^{sb})}{(re^{rb} - se^{sb})^2} = \frac{r-s}{re^{rb} - se^{sb}},$$

dok iz (23) slijedi

$$L(b;b) = \frac{r-s}{re^{-rb} - se^{-sb}} = e^{(r+s)b}\frac{r-s}{re^{rb} - se^{sb}}.$$

Sada vidimo kako nam je

$$L(b;b) = e^{(r+s)b}V'(0;b).$$

Iz (11) slijedi $r + s = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$, što nam daje

$$L(b;b) = e^{\frac{-2\mu b}{\sigma^2}}V'(0;b).$$

Iz prethodnog izraza nam je jasno kako očekivana sadašnja vrijednost isplate dividendi iznosa 1 u trenutku propasti T za početnu vrijednost tvrtke $x = b$ odgovara umnošku $e^{\frac{-\mu b}{\sigma^2}}$ i derivirane očekivane sadašnje vrijednosti sume svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti T kada je početna vrijednost $x = 0$.

4.2 Slučaj kada $\sigma \to \infty$

Budući da je volatilnost, σ, jedna od mjera poslovnog rizika i predstavlja odstupanje slučajne varijable od svog očekivanja, korisno je promotriti slučaj kada takvo odstupanje teži u ∞. Pogledat ćemo kako to utječe na distribuciju vremena propasti T.

Dakle, neka $\sigma \to \infty$. Tada iz (11) slijedi kako r i s teže u 0. Također, možemo primijetiti da kada $\sigma \to \infty$, iz (10) slijedi

$$g(x) \sim (r-s)x \quad \text{i} \quad g'(x) \sim r - s.$$

Uvrstimo li sada prethodne izraze u (13), slijedi da za $0 \le x \le b$ vrijedi da

$$V(x;b) \to x, \quad \text{kada } \sigma \to \infty. \tag{25}$$

Možemo primijetiti kako sada $V(x;b)$ ne ovisi niti o b, niti o μ te niti o δ. Sada možemo zaključiti kako iz (24) slijedi

$$\lim_{\sigma \to \infty} E[T] = 0.$$

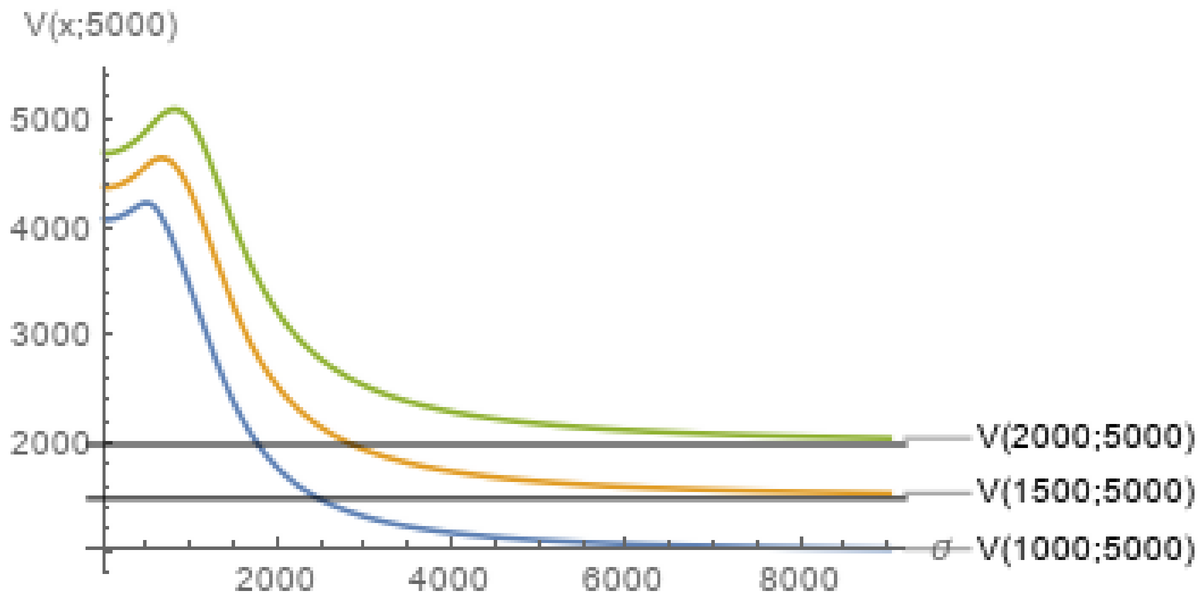
Znamo da je T pozitivna slučajna varijabla, pa tako kažemo da za $\sigma \to \infty$, T ima degeneriranu distribuciju u 0. Ovakav rezultat nam kaže da je u slučaju beskonačnog rizika, propast trenutna. Izraz (25) nam govori kako je u slučaju da $\sigma \to \infty$, očekivana sadašnja vrijednost dividendi isplaćenih do trenutka propasti zapravo teži u početnu vrijednost x.

Pogledajmo na primjeru što se događa s funkcijom V kada $\sigma \to \infty$.

Primjer 6. *Grafički prikaz funkcije V u ovisnosti o σ uz vrijednosti parametara $\mu = 500$, $\delta = 0.07$, $b = 5000$ i početne vrijednosti*

$$x_1 = 1000,\ x_2 = 1500 \text{ i } x_3 = 2000.$$

.



Slika 8: Funkcija V u ovisnosti o volatilnosti

Iz primjera se može vidjeti kako očekivana sadašnja vrijednost svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti, kada volatilnost teži u ∞, teži svojoj početnoj vrijednosti x.

5 Funkcija izvodnica momenata sadašnje vrijednosti dividendi isplaćenih do trenutka propasti

Pretpostavimo kao i u prethodnom poglavlju da smo primijenili barijernu strategiju isplate dividendi s barijerom b. Tada nam je sadašnja vrijednost dividendi isplaćenih do trenutka propasti, u oznaci D, slučajna varijabla. Očekivanje slučajne varijable D već smo predstavili u poglavlju 3 i zadali ga izrazom (2). Već smo spomenuli kako dioničari imaju veliki interes da saznaju nešto više o očekivanom vremenu propasti T, pa tako bi htjeli znati nešto više i o sadašnjoj vrijednosti dividendi isplaćenih prije vremena propasti. U ovom poglavlju predstavit ćemo funkciju izvodnicu momenata od D, s ciljem pružanja informacija o samoj distribuciji slučajne varijable D, budući da funkcija izvodnica jedinstveno određuje distribuciju. Prvo ćemo izraziti funkciju izvodnicu momenata od D, a zatim njome opisati više momente slučajne varijable D. Funkcija izvodnica momenata te izvod izraza može se vidjeti u [6].

Funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable D, u oznaci M, uz uvjet da je početna vrijednost tvrtke $X(0) = x$, definiramo na sljedeći način

$$M(y) = E_x[e^{-yD}].$$

Uzmimo sada da je $0 < x < b$. Funkcija izvodnica momenata od D, u oznaci M, dana je izrazom

$$M(x, y; b) = E[M(X(dt), e^{-\delta dt}y; b)].$$

Pogledamo li izraze (7), (8) i (9) i rezultate vezane uz njih, možemo analogno zaključiti i generalizirati na sljedeći slučaj:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial M}{\partial x} - \delta y\frac{\partial M}{\partial y} = 0. \tag{26}$$

uz uvjete

$$M(0, y; b) = 1, \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial M(x, y; b)}{\partial x}\right|_{x=b} = yM(b, y; b). \tag{28}$$

Uzmimo sada da je

$$V_k(x; b) = E_x[D^k], \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Primijetimo kako je $V_1(x; b) = V(x; b)$ pa onda slijedi

$$M(x, y; b) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{k!}E_x[D^k] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{k!}V_k(x; b). \tag{29}$$

Uvrstimo li prethodni izraz u (26), dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu analognu jednadžbi (7) u sljedećem obliku

$$\frac{\sigma^2}{2}V_k''(x; b) + \mu V_k'(x; b) - \delta k V_k(x; b) = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{30}$$

Budući da vrijede analogni granični uvjeti, slijedi nam da je

$$V_k(0;b) = 0, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{31}$$

$$V_k'(b;b) = kV_{k-1}(b;b), \qquad k = 2,3,4,\ldots \tag{32}$$

Sada za red k, $k = 1,2,3,\ldots$ vrijedi da je

$$g_k(x) = e^{r_k x} - e^{e_k x},$$

gdje su r_k i s_k rješenja jednadžbe

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + \mu\xi - \delta k = 0. \tag{33}$$

Sljedeće ćemo uvesti funkciju koeficijenata $C_k(\cdot)$, takvu da iz (30) i (31) vrijedi

$$V_k(x;b) = C_k(b)g_k(x), \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{34}$$

Iz prethodog izraza vidimo kako je

$$V_1(b;b) = C_1(b)g_1(b)$$

pa slijedi

$$V_1'(b;b) = C_1(b)g_1'(b).$$

Sada iz (28) slijedi $V_1'(b;b) = 1$, što nam daje sljedeći izraz

$$C_1(b) = \frac{1}{g_1'(b)}$$

te tako potvrđuje jednadžbu (13). Deriviramo li sada izraz (34), slijedi nam iz (32) i (34)

$$C_k(b)g_k'(b) = kC_{k-1}(b)g_{k-1}(b), \qquad k = 2,3,4\ldots$$

Dakle,

$$C_k(b) = k!\frac{g_1(b)\cdots g_{k-1}(b)}{g_1'(b)\cdots g_{k-1}'(b)g_k'(b)}$$

te iz (34) slijedi

$$V_k(x;b) = k!\frac{g_1(b)\cdots g_{k-1}(b)g_k(x)}{g_1'(b)\cdots g_{k-1}'(b)g_k'(b)}, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{35}$$

Sada možemo predstaviti funkciju izvodnicu momenata od D,

$$M(x,y;b) = E[e^{yD}|X_0 = x].$$

Dakle iz (29) i (35) slijedi sljedeći izraz

$$E[e^{yD}] = M(x,y;b) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} y^k \frac{g_1(b)\cdots g_{k-1}(b)g_k(x)}{g_1'(b)\cdots g_{k-1}'(b)g_k'(b)}. \tag{36}$$

5.1 Slučaj kada $\sigma \to \infty$

U ovom potpoglavlju, pogledat ćemo što se događa s funkcijom izvodnicom momenata od D ukoliko rizik teži u beskonačnost, odnosno $\sigma \to \infty$. Analogno kao i u potpoglavlju 4.2 slijedi da r_k i s_k teže u 0 te vrijedi

$$g(x)_k \sim (r_k - s_k)x \quad \text{i} \quad g_k'(x) \sim r_k - s.$$

Sada možemo zaljučiti kako iz (36) slijedi da za $\delta \to \infty$ vrijedi

$$E[e^{yD}] \to 1 + \sum_{k=1}^{\infty} y^k b^{k-1} x = 1 + \frac{xy}{1-by} = \left(1 - \frac{x}{b}\right) + \frac{x}{b}\frac{1}{1-by}, \quad y < \frac{1}{b}. \tag{37}$$

Sada vidimo kako je distribucija od D, kada $\sigma \to \infty$, dana mješavinom degenerirane distribucije u 0 i eksponencijalne distribucije s očekivanjem b. Koeficijenti $\frac{b-x}{b}$ i $\frac{x}{b}$ su redom vjerojatnosti da vrijednost tvrtke ne dosegne odnosno dosegne barijeru b prije trenutka propasti.

6 Funkcija izvodnica momenata akumuliranih dividendi isplaćenih do trenutka propasti

U ovom poglavlju bavit ćemo se distribucijom akumuliranih dividendi isplaćenih do trenutka propasti, odnosno distribucijom od D_T, nakon primjene barijerne strategije s barijerom b. Znamo da je ukoliko imamo slučaj bez strategije isplate dividendi, očekivani iznos dividendi isplaćenih do trenutka propasti jednak 0. Investitori bi svakako htjeli znati nešto o iznosu dividendi koji će im biti isplaćen do samog trenutka propasti T. Predstavit ćemo funkciju izvodnicu momenata od D_T. Tijekom ovog poglavlja pretpostavit ćemo da vrijedi granični slučaj iz potpoglavlja 3.1.2, odnosno pretpostavit ćemo da vrijedi $\delta = 0$, $0 < x < b$. Tada su nam izrazi za $V(x;b)$ i $g(x)$ dani s (16) i (17). Kako za $\delta = 0$ vrijedi $D_T = D$, funkciju izvodnicu momenata možemo dobiti iz (36) kao granični slučaj kada pustimo $\delta \to 0$. Ovakav prikaz distribucije od D_T može se vidjeti u [6, Chapter 2]

Dakle, pod gore navedenim predpostavkama, iz izraza (33) slijedi da su $r_k = 0$ i $s_k = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$. U tom slučaju za funkciju g_k imamo sljedeći izraz

$$g_k(x) = g(x) = 1 - e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}}, \qquad \forall k.$$

Sada koristeći izraz (13), iz (36) slijedi da je funkcija izvodnica momenata od D_T dana sljedećim izrazom

$$\begin{aligned} M(x,y;b) &= E[e^{yD_T}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} y^k (V(b;b))^{k-1} V(x;b) = 1 + \frac{V(x;b)y}{1 - V(b;b)y} \\ &= 1 - \frac{V(x;b)}{V(b;b)} + \frac{V(x;b)}{V(b;b)} \frac{1}{1 - V(b;b)y}. \end{aligned} \tag{38}$$

Iz prethodnog izraza može se primijetiti kako je distribucija od D_T kombinacija degenerirane distribucije u 0 i eksponencijalne distribucije s očekivanjem $V(b;b)$. Koeficijenti, koje ćemo označiti s p i q, predstavljaju vjerojatnost da vrijednost tvrtke ne dosegne odnosno dosegne barijeru b prije trenutka propasti. Koeficijent p, koji stoji uz dio izraza (38) koji pripada degeneriranoj distribuciji, dan je s

$$p = 1 - \frac{V(x;b)}{V(b;b)} = 1 - \frac{g(x)}{g(b)}, \tag{39}$$

dok je koeficijent q, koji stoji uz dio koji pripada eksponencijalnoj distribuciji, dan s

$$q = 1 - p = \frac{V(x;b)}{V(b;b)} = \frac{g(x)}{g(b)}.$$

Uočimo iz (2) kako za $\delta = 0$, $V(b;b)$ predstavlja $E[D_T | X_0 = b]$, odnosno očekivanje akumuliranih dividendi isplaćenih do trenutka propasti uz uvjet da je početna vrijednost tvrtke iznosila b.

Uzmemo li sada u obzir trenutke kada modificirana vrijednost tvrtke Z_t dostiže barijeru b, a koji su isprekidani trenucima u kojima Z_t dostiže početnu vrijednost x, možemo uočiti kako D_T ima složenu geometrijsku distribuciju, odnosno da vrijedi

$$D_T = D_1 + D_2 + \cdots + D_N.$$

D_j predstavlja ispaltu dividendi između trenutaka j i $j+1$ u kojima modificirana vrijednost tvrtke dostiže vrijednost x. Dakle, N nam predstavlja broj isplata dividendi.

Zapišimo sada (38) na sljedeći način

$$M(x,y;b) = p\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q}{1-pV(b;b)y}\right)^n. \tag{40}$$

Sada imamo potvrdu kako D_T ima složenu geometrijsku distribuciju te nam slijedi

$$E[N] = \frac{q}{p} = \frac{g(x)}{g(b)-g(x)}.$$

Zajednička distribucija svih D_j je eksponencijalna s očekivanjem

$$pV(b;b) = V(b;b) - V(x;b) = V(b-x;b-x). \tag{41}$$

Uzmemo li u obzir izraz (40) kada barijerna strategija s barijerom b nije primijenjena, odnosno kada $b \to \infty$, može se primijetiti kako je prvi moment, odnosno očekivani iznos akumuliranih dividendi isplaćenih do trenutka T jednak 0. Ovakav nam se rezultat slaže s tvrdnjama o distribuciji akumuliranih dividendi isplaćenih do trenutka T koje smo promatrali prije uvođenja strategije isplate dividendi te je očit sam po sebi: ukoliko nije primijenjena strategija isplate dividendi, očekivani iznos isplaćenih dividendi do trenutka propasti je 0.

Pogledajmo sada rezultate koje imamo u ovisnosti o vrijednosti x, odnosno početne vrijednosti tvrke. Za x vrijedi sljedeće:

i) Što je početna vrijednost x bliža barijeri b, to nam je p, dana s (39), bliže 0, odnosno vjerojatnost da vrijednost tvrtke Z_t ne dosegne barijeru b je sve manja. To nam znači kako je $q = 1-p$, vjerojatnost da Z_t dosegne barijeru b, bliža 1. Samim tim se i broj isplata dividendi N povećaje i postaje beskonačan. Također, iz (41) slijedi kako očekivana isplata dividendi između trenutaka j i $j+1$ u kojima je Z_t bila upravo x, odnosno $E[D_j]$, teži u 0.

ii) Što je početna vrijednost x bliža 0, p nam teži u 1, broj isplata dividendi N se smanjuje i teži u 0, a iz (41) slijedi kako D_j ima eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem $V(b;b)$.

6.1 Slučaj kada $\mu \to 0$

U ovom potpoglavlju promotrit ćemo slučaj kada nam pomak μ teži u 0. Analizirat ćemo povezanost ovog slučaja sa slučajem u potpoglavlju 5.1 kada nam σ teži u ∞.

Neka $\mu \to 0$. Sada imamo slučaj da nam uvrštavanjem izraza (19) u (38) slijedi

$$M(x,y;b) = 1 + \frac{xy}{1-by}, \tag{42}$$

što je jednako izrazu (37). Uz to, vidimo kako nam (42) ne ovisi o σ. Jednakost izraza (42) i (37) možemo objasniti na sljedeći način:
Neka nam je novi vremenski trenutak dan s

$$\bar{t} = \sigma^2 t.$$

Sada u terminima novog vremena slijede oznake za parametre modela

$$\bar{\sigma} = 1, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\sigma^2}.$$

Tako za $\sigma \to \infty$ imamo da

$$\bar{\mu} \to 0 \quad \text{i} \quad \bar{\delta} \to 0.$$

7 Optimalna barijerna strategija

U ovom poglavlju bavit ćemo se određivanjem optimalne barijerne strategije. Optimalnu barijernu strategiju ćemo odrediti na način da odredimo barijeru b^*, odnosno optimalnu vrijednost od b koja maksimizira očekivanu sadašnju vrijednost svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti, odnosno koja maksimizira funkciju V. Već smo ranije naveli kako teorem 1 za posljedicu ima to da za očekivanu sadašnju vrijednost svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti postoji barijera b^* takva da za $0 \leq x \leq b^*$, vrijedi

$$V(x; b^*) = \sup_b V(x; b).$$

Neka je dana početna vrijednost tvrtke x te neka b^* označava optimalnu vrijednost od b. Iz (13) vidimo da se problem maksimiziranja tog izraza svodi na minimiziranje $g'(b)$, a to ćemo učiniti uz uvjet

$$g''(b) = 0. \tag{43}$$

Kako nam je funkcija g dana s (10), jedinstveno rješenje prethodne jednadžbe glasi

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln\left(\frac{s^2}{r^2}\right) = \frac{2}{r-s} \ln\left(\frac{-s}{r}\right),$$

gdje su r i s dani s (11). Vidimo kako b^* ne ovisi o početnoj vrijednosti tvrke x.

Sada nam iz izraza

$$V''(x; b) = \frac{g''(x)}{g'(b)}, \qquad 0 \leq x \leq b,$$

uz uvjet (43), slijedi

$$V''(b^*; b^*) = 0. \tag{44}$$

Uzmimo sada da je $x = b = b^*$. Diferencijalna jednadžba (7) je uz uvjete (44) i (9) sljedećeg oblika:

$$\mu - \delta V(b^*; b^*) = 0.$$

Očito nam sada slijedi izraz

$$V(b^*; b^*) = \frac{\mu}{\delta}. \tag{45}$$

Dakle, očekivana sadašnja vrijednost iznosa svih dividendi isplaćenih do vremena propasti T pod barijernom strategijom s optimalnom barijerom b^*, kada je početna vrijednost tvrtke baš taj b^*, je jednaka kvocijentu pomaka μ i kamate δ. Možemo primijetiti iz (45) kako taj iznos ne ovisi o σ. Bitno je napomenuti kako se uvjet (44) u financijskim literaturama naziva *high contact condition.*

Iz izraza (45) vidimo kako je potrebno da početna vrijednost tvrtke bude optimalna barijera b^*, odnosno $x = b^*$, kako bi se osigurala očekivana sadašnja vrijednost isplata svih dividendi u iznosu $\frac{\mu}{\delta}$. Budući da smo naveli kako (45) ne ovisi o σ, početna vrijednost tvrtke, u ovom slučaju b^*, mora biti funkcija volatilnosti σ kako bi se kompenzirao rizik. Funkcija b^* kao takva predstavljena je u [6, Chapter 7].

Sada ćemo predstaviti tvrdnje vezane uz b^* kao funkcije volatilnosti σ:

i) b^* je rastuća funkcija volatilnosti σ;

ii) b^* teži prema $\frac{\mu}{\delta}$ kada σ teži u ∞;

iii) b^* opada u 0 kada σ teži u 0.

Funkcija b^* kao takva, prema [6, Chapter 7], ima sljedeći izraz:

$$b^* = \frac{\sigma^2}{\mu} z \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{\mu}{2\delta}\left(\frac{1}{z} - z\right) \ln \frac{1+z}{1-z},$$

gdje je

$$z = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}},$$

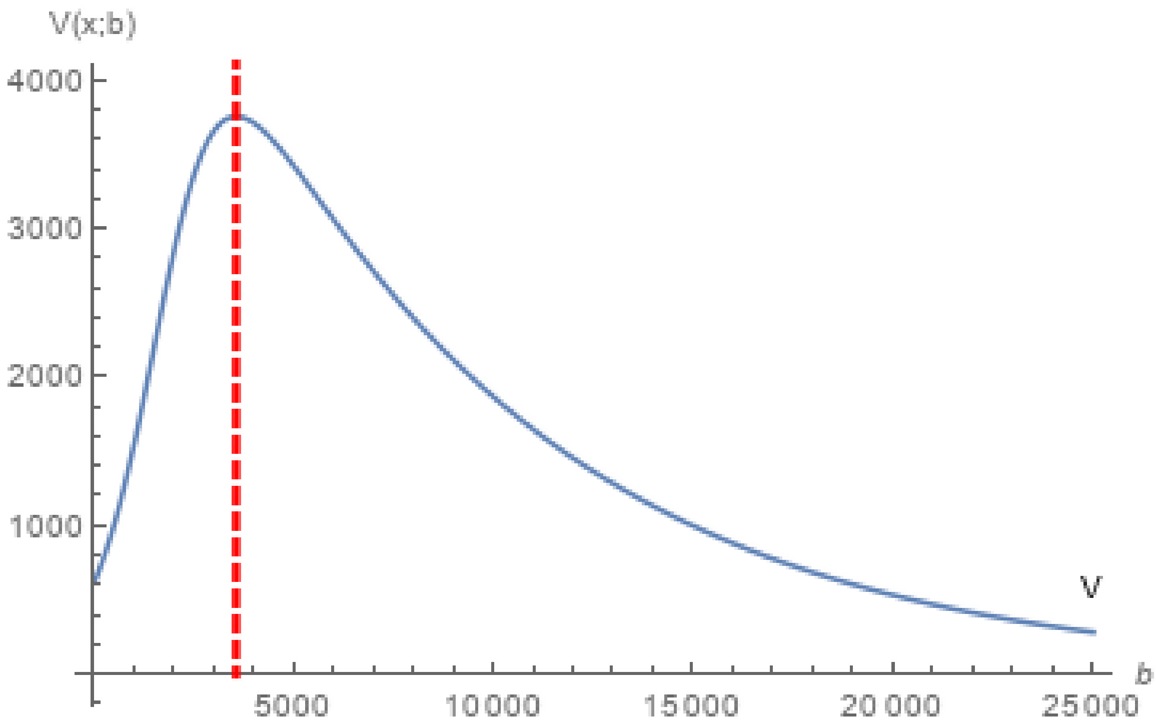
uz uvjet

$$\frac{-s}{r} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Uvjet iii) interpretiramo na način da ako tvrtka posluje bez rizika, tvrtka nema potrebe zadržavati svoju zaradu pa barijera b^* postaje sve manja kako bi isplata dividendi bila veća. Možemo primijetiti kako nam se tvrdnja ii) podudara sa tvrdnjama (25) i (45), odnosno da za beskonačan rizik, očekivana sadašnja vrijednost dividendi isplaćenih do trenutka propasti kada početna vrijednost tvtke $x = b^*$ teži iznosu $\frac{\mu}{\delta}$, teži početnoj vrijednosti tvrtke $x = b^*$. Dokaze prethodno navedenih tvrdnji može se pronaći u [6, Chapter 7].

Označimo sada na jednom od prethodnih primjera optimalnu barijeru b^*.

Primjer 7. *Grafički prikaz funkcije V u ovisnosti o barijeri b, uz vrijednosti parametara $\mu = 500$, $\delta = 0.07$, $\sigma = 1000$, početnu vrijednost $x = 1000$ i označenu optimalnu barijeru b^*, koja za ovaj primjer iznosi* 3524.08.



Slika 9: Očekivano vrijeme propasti u ovisnosti o barijeri b uz oznaku optimalne barijere b^*

Kada se osvrnemo na objašnjenje primjera 4, sada je jasno vidljivo iz prethodnog primjera kako je maksimalna očekivana sadašnja vrijednost dividendi isplaćenih do trenutka propasti upravo ona za optimalnu barijeru b^*.

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznali smo se s problemom isplate dividendi za tvrke čija je vrijednost modelirana Brownovim gibanjem s pozitivnim driftom. U prvom uvodnom poglavlju predstavili smo problem i motive zbog kojih je moralo doći do promjene modeliranja vrijednosti tvtke. U drugom poglavlju prvo smo definirali Brownovo gibanje, zatim ono najvažnije, predstavili model Brownovog gibanja s driftom. Također, u drugom poglavlju smo se upoznali s vjerojatnosti propasti i vremenom propasti. Treće poglavlje temelji se na uvođenju strategija za isplatu dividendi, a detaljnije smo se bavili barijernom strategijom. Osvrnuli smo se i na posljedice koje strategija dividendi ima na definiranje vremena propasti te smo uveli pojam očekivane sadašnje vrijednosti svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti kada se dividende isplaćuju barijernom strategijom. Dalje smo promatrali što se s navedenim očekivanjem događa kada je kamata jednaka 0. Četvrto poglavlje donijelo nam je detaljinije rezultate o vremenu propasti pod barijernom strategijom. Predstavili smo očekivanu sadašnju vrijednost isplate dividendi iznosa 1 u trenutku propasti, koja nas je u konačnici dovela do detaljnijih rezulatata o distribuciji vremena propasti. Zatim smo analizirali, na prvi pogled neočitu, vezu između derivacije očekivane sadašnje vrijednosti svih dividendi isplaćenih do trenutrka propasti pod uvjetom da je početna vrijednost bila 0 te očekivane sadašnje vrijednosti isplate dividendi iznosa 1 u trenutku propasti uz uvjet da je početna vrijednosti tvrtke bila upravo barijera b. Zatim smo se osvrnuli na rezultate koje donosi slučaj kada nam volatilnost teži u beskonačnost. U petom poglavlju smo predstavili funkciju izvodnicu sadašnje vrijednosti dividendi isplaćenih do trenutka propasti te rezultate koji nam slijede kada volatilnost teži u beskonačnost. U šestom poglavlju smo se osvrnuli na funkciju izvodnicu akumuliranih dividendi isplaćenih do trenutka propasti. Za takvu funkciju, promatrali smo i slučaj kada nam pomak teži u 0. Posljednje sedmo poglavlje temelji se na određivanju optimalne barijerne strategije, odnosno optimalne barijere b^*, kojom maksimiziramo očekivanu sadašnju vrijednost svih dividendi isplaćenih do trenutka propasti.

Ključne riječi

Brownovo gibanje s driftom, model vrijednosti tvrtke, vjerojatnost propasti, vrijeme propasti, dividende, strategija isplate dividendi, barijera.

Dividend problem for the Brownian motion

Summary

Within this thesis, the problem of dividend payments for companies whose value is modelled by Brownian motion with a positive drift is investigated. The first introductory chapter presents the problem and the motives for which the modelling of company values was required to change. In the second chapter, we initially defined Brownian motion; then, more importantly, exhibited a model of Brownian motion with drift. Subsequently, the probability of ruin and the time of ruin was introduced. The third chapter encompasses the introduction of dividend payment strategies, as well as examining in further detail the barrier strategy. We also analysed the consequences that result from the effect that the dividend strategy has on defining the time of ruin, and introduced the notion of the expected present value of all dividends paid until the moment of ruin when dividends are paid by the barrier strategy. Furthermore, we observed what happens to the stated expectation when the interest rate is equal to 0. The fourth chapter gave us more detailed results on the time of ruin under the barrier strategy. We described the expected present value of the dividend payment of 1 at the time of ruin, which ultimately led to more specific results on the distribution of the time of ruin. We then further analysed the seemingly unobvious relationship between the derivation of the expected present value of all dividends paid up to the time of failure, provided that the initial value was 0 and the expected present value of the payment of dividends of 1 at the time of ruin provided that the initial value of the company was a barrier b. We then considered the results of a case where volatility tends to infinity. In the fifth chapter, we depict the moment-generating function of the present value of dividends paid until the moment of ruin and the results that ensue when volatility tends to infinity. The sixth chapter pertains to the moment-generating function of accumulated dividends paid up to the time of ruin. For such a function, we also perceived the case when the drift tends to 0. The final chapter is based on determining the optimal barrier strategy, i.e. the optimal barrier b^*, which maximizes the expected present value of all dividends paid until the moment of ruin.

Key words

Brownian motion with a drift, company value model, the probability of ruin, the time of ruin, dividend payment strategy, a barrier.

Životopis

Rođena sam 30. lipnja 1995. godine u Hertenu, SR Njemačka. Pohađala sam Osnovnu školu "Tin Ujević" u Osijeku te zatim upisjem II. gimnaziju Osijek. Preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku upisala sam 2014. godine te završila 2018. godine uz završni rad na temu Rješavanje kongruencija. Potom iste godine upisujem diplomski studij Financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Stručnu praksu sam odradila u Zagrebačkoj banci d.d. U trenutku završenja diplomskog studija, zaposlena sam u Croatia osiguranje društvu za upravljanje dobrovoljnim mirovinskim fondom d.o.o. u Zagrebu, na radnom mjestu Analitičar u Odjelu za upravljanje sredstvima.

Literatura

[1] A. E. Kyprianou, *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer, 2013.

[2] D. Bakić, D. Francišković,*Financijska i aktuarska matematika*, Odjel za matematiku Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2013., skripta

[3] D. C. M. Dickson, H. R. Waters, *Some Optimal Dividends Problem*, The University of Melbourne, Victoria, Australia, 2003.

[4] F. Avram, D. Grahovac, C. Vardar-Acar, *The W,Z scale functions kit for first passage problems of spectrally negative Lévy processes, and applications to control problems*, ESAIM: P&S, 2019.

[5] H. Bühlmann, *Mathematical methods in risk theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1970.

[6] H. U. Gerber, E. S. W. Shiu, *Optimal dividends: Analysis with Brownian motion*, North American Actuarial Journal, 2005.

[7] S. A. Klugman, H. H. Panjer, G. E. Willmot, *Loss models: From data to decisions, 3rd ed.*, John Wiley and sons, New York,

[8] Z. Vondraček,*Financijsko modeliranje, predavanja*, Prirodoslovno matematički fakultet Zagreb, 2008.