Modeli doživljenja i tablice smrtnosti u osiguranju

Barunčić, Iva

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:248145

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-26**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij
Financijska matematika i statistika

Iva Barunčić

Modeli doživljenja i tablice smrtnosti u osiguranju

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij
Financijska matematika i statistika

Iva Barunčić

Modeli doživljenja i tablice smrtnosti u osiguranju

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Svaki pojedinac prema svojim ambicijama i željama pokušava izgraditi svoj životni put. Svakodnevna izloženosti rizicima i mogućim neočekivanim događajima nerijetko promijeni naše životne planove. Svaki takav rizik, ali i neočekivana situacija sa sobom nosi stres i nelagodu, a često i financijske izdatke. Stoga se pojedinac nastoji zaštiti od opasnosti koje mu mogu ugroziti život ili nanijeti štete na imovini, tj. on želi prenijeti rizik sa sebe na osiguravatelja sklapanjem ugovora o osiguranju. Jedna od grana osiguranja je životno osiguranje koje predstavlja ugovor kojim se osiguravatelj, nasuprot plaćenim premijama, obvezuje na isplatu određene sume ili rente osiguraniku u slučaju njegovog doživljenja određene dobi ili smrti. Cijena takvog osiguranja je premija osiguranja koju osiguranik može platiti jednokratno, godišnje ili više puta godišnje, a računa se na temelju vjerojatnosti nastupanja osiguranog slučaja. Temelj životnog osiguranja su dvije matematičke grane, točnije financijska matematika (kroz teoriju složenog ukamaćivanja) i teorija vjerojatnosti (kroz analizu smrtnosti). U radu nećemo napraviti poseban uvod za svaku od spomenutih grana nego ćemo njihove pojmove postepeno uvoditi i objašnjavati.

Na samom početku ovoga rada napravit ćemo uvod u životna osiguranja i uvesti varijable s kojima ćemo raditi u nastavku te ćemo analizirat smrtnost kroz intenzitet smrtnosti, zakone smrtnosti i životne tablice. U glavnom dijelu rada stavit ćemo naglasak na objašnjenje jednostavnih tipova životnog osiguranja te napraviti pregled životnih renti kao posebnog oblika životnog osiguranja. Kroz cijeli rad upotreba teorije bit će ilustrirana korištenjem programskog jezika R tako što ćemo svaku definiciju i formulu popratiti s kratkim primjerom te odgovorajućim kodom i objašnjenjem istoga. Za izračunavanje formula financijske i aktuarske matematike te modeliranje različitih vrsta životnog osiguranja koristit ćemo R paket "*lifecontingencies*" čiji detaljniji opis se može pronaći u [5].

2 Osnovni pojmovi životnog osiguranja

Osnova životnog osiguranja je razmjena - premija koju osiguranik plaća osiguravatelju u zamjenu za kasniju isplatu od osiguravatelja, koja ovisi o smrti ili doživljenju. S obzirom da ne možemo točno odrediti trenutak nečije smrti, životni vijek pojedinca modelirat ćemo slučajnom varijablom. Osiguravatelja zanima i vjerojatnost smrti pojedinca u različitoj dobi, a za to su mu potrebni modeli smrtnosti. U skladu s tim, sav rizik koji nosi polica osiguranja leži u vjerojatnosti smrti osiguranika u određenoj dobi. Stoga ćemo u ovom poglavlju razviti model doživljena, analizirati smrtnost kroz intenzitet smrtnosti i zakone smrtnosti te definirati životne tablice.

2.1 Model doživljenja

Pretpostavimo da promatramo slučajno odabranu osobu u dobi od x godina, prema [1] označavat ćemo ju s (x), tada njezinu preostalu duljinu života modeliramo slučajnom varijablom $T(x)$, tj. T. Neka je T neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije G, te neka je $g(t) = G'(t)$ dobro definirana funkcija gustoće. Tada je funkcija G dana sljedećom formulom:

$$G(t) = P(T \leq t),\, t \geq 0.$$

Vrijednost funkcije distribucije $G(t)$ za svaki fiksan $t \geq 0$ predstavlja vjerojatnost da će (x) umrijeti u sljedećih t godina. Pogledajmo sljedeću jednadžbu:

$$P(t \leq T \leq t + dt) = g(t)dt. \tag{1}$$

Zaključujemo kako je vjerojatnost smrti od (x) u jako malom intervalu od t do $t + dt$ proporcionalna njegovoj duljini dt, a faktor proporcionalnosti je upravo $g(t)$.

2.1.1 Aktuarske oznake

Vjerojatnosti vezane za slučajno varijablu T u aktuarskom svijetu ne označavmo na stanadardan statistički način (pomoću funkcija G i g), nego se uvode posebne oznake koje ćemo i mi koristiti u ovome radu. Stoga, prema [1], uvedimo i interpretirajmo neke od njih.

$${}_tq_x = G(t) \tag{2}$$

$${}_tp_x = 1 - G(t) \tag{3}$$

Primjećujemo kako ${}_tq_x$ predstavlja vjerojatnost da će (x) umrijeti u sljedećih t godina. Suprotno tome, vjerojatnost da će osoba u dobi x živjeti barem sljedećih t godina označava se s ${}_tp_x$. Iz jednadžbi (2) i (3) zaključujemo kako vrijedi sljedeći indetitet:

$${}_tq_x + {}_tp_x = 1$$

Nadalje, vjerojatnost da će (x) doživjeti sljedećih s godina, a umrijeti u naknadnih t godina prikazana je u sljedećoj jednadžbi.

$${}_{s|t}q_x = P(s \leq T \leq s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x$$

Preciznije, simbol ${}_{s|t}q_x$ označava vjerojatnost smrti u intervalu od $x+s$ do $x+s+t$. U slučaju kada je $t=1$ možemo kraće zapisati q_x i p_x. Sljedeće jednadžbe nam prikazuju uvjetne vjerojatnost od T uvjetno na doživljenje dobi s

$$
{}_tp_{x+s} = P(T > s+t|T > s) = \frac{1-G(s+t)}{1-G(s)},
$$

$$
{}_tq_{x+s} = P(T \leq s+t|T > s) = \frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)}.
$$

Simbol ${}_tp_{x+s}$ predstavlja vjerojatnost doživljenja dobi $x+t+s$, ako je osoba doživjela dob $x+s$, dok ${}_tq_{x+s}$ predstavlja vjerojatnost da će osoba koja doživi dob $x+s$, umrijeti u sljedećih t godina. U upotrebi su često i sljedeći izrazi:

$$
{}_{s+t}p_x = 1-G(s+t) = [1-G(S)]\frac{1-G(s+t)}{1-G(s)} = {}_sp_{xt}p_{x+s}, \tag{4}
$$

$$
{}_{s|t}q_x = G(s+t)-G(s) = [1-G(S)]\frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)} = {}_sp_{xt}q_{x+s}.
$$

Jednakost (4) povlači:

$$
{}_tp_x = p_x p_{x+1}\cdots p_{x+t-1}.
$$

Očekivanje slučajne varijable T predstavlja preostali očekivani životni vijek osobe dobi x, a prema [1] označavamo ga s $\mathring{e}_x$. Njegova definicija je sljedeća:

$$
\mathring{e}_x = \int_0^\infty tg(t)dt = \int_0^\infty [1-G(t)]dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt.
$$

2.2 Cjelobrojni budući životni vijek od (x)

Pretpostavili smo kako je T neprekidna slučajna varijabla koja opisuje preostalu duljinu života osobe u dobi x, ali nas zanima slučajna varijabla kojom modeliramo broj budućih godina koje će (x) doživjeti. U tu svrhu, neka je K diskretna slučajna varijabla takva da vrijedi $K = \lfloor T \rfloor$. Zaključujemo kako je vjerojatnost da će se K realizirati s k jednaka vjerojatnošći smrti osobe u intervlu od $x+k$ do $x+k+1$, iz čega slijede sljedeće jednakosti:

$$
\begin{aligned}
P(K=k) &= P(k \leq T < k+1) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_kp_x - {}_kp_x p_{x+k} = {}_kp_x(1-p_{x+k}), \\
&= {}_kp_x q_{x+k},\ k = 0,1,2,...
\end{aligned}
$$

Očekivanje cjelobrojne preostale duljine života označavamo s e_x, a ono iznosi:

$$
e_x = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k{}_kp_x q_{x+k}.
$$

Prednost očekivane cjelobrojne preostale duljine života je u tome što ju je puno lakše izračunati od očekivanja kompletne preostale duljine života, jer sumirati je lakše nego integrirati. Iako slučajne varijable T i K predstavljaju preostalu ukupnu, odnosno cjelobrojnu buduću duljinu života osobe u dobi x, u nastavku rada nećemo eksplicitno naglašvati njihovu ovisnost o x.

2.2.1 Veza između cijele i cjelobrojne preostale duljine života

Neka je S dio godine koji je (x) preživjela u godini smrti, tada vrijedi:

$$T = K + S. \tag{5}$$

Neka je S slučajna varijabla s uniformnom razdiobom na segmentu $[0,1]$, tada njezino očekivanje iznosi $\frac{1}{2}$. Nakon što djelujemo s očekivanjem na jednakost (5) dobivamo sljedeće:

$$\mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}.$$

Pretpostavimo kako su S i K nezavisne slučajne varijable. U tom slučaju, uvjetna distribucija od S, uvjetno na poznati K, nezavisna je od K, tj. sljedeća vjerojatnost

$$P(S \leq u | K = k) = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}} \tag{6}$$

je isključivo funkcija od u, recimo $H(u)$. Stoga, možemo pisati:

$${}_u q_x = H(u) q_{x+k},$$

za $k = 0, 1, \ldots,$ $u \in [0,1]$ te neku funkciju $H(u)$.
Za $m \in \mathbb{N}$ definirajmo slučajnu varijablu $S^{(m)}$ kao

$$S^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor mS \rfloor.$$

Iz gornje pretpostavke o nezavisnosti S i K slijedi nezavisnost od $S^{(m)}$ i K, a distribucija slučajne varijable $S^{(m)}$ zbog uniformne distribuiranosti S na segmentu $[0,1]$ jednaka je

$$S^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{m-1}{m} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

2.3 Intenzitet smrtnosti

Intenzitet smrtnosti neprekidne slučajne varijable T u dobi $x + t$ definiramo na sljedeći način:

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[1 - G(t)].$$

Nakon što smo definirali intenzitet smrtnosti, jednadžbu (1) možemo prikazati na nešto drugačiji način i to kao:

$$P(t \leq T \leq t + dt) = {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Iz čega zaključujemo kako za funkciju gustoće od T i svaki fiksan t vrijedi $g(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$, pa stoga očekivanje slučajne varijable T zapisujemo kao:

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Intenzitet smrtnosti možemo definirati i na sljedeći način:

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x, \tag{7}$$

a integracijom gornjeg izraza dobivamo:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}. \tag{8}$$

2.3.1 Zakoni smrtnosti

U ovom dijelu želimo odrediti eksplicitni izraz za funkciju distribucije slučajne varijable T. Općenito pod zakonom smrtnosti podrazumijevamo matematički izraz za neku od funkcija ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ ili μ_{x+t}, jer razdiobu slučajne varijable T možemo izraziti upravo preko njih. Sada ćemo navesti neke analitičke zakone smrtnosti, pri čemu svaki nosi ime svog "izumitelja".

- **De Moivreov zakon** (1724)
  Neka je $\omega > 0$ maksimalna dob za ljudska bića, te pretpostavimo kako T ima unformnu razdiobu na intervalu od 0 do $\omega - x$. Tada za funkciju gustoće od T vrijedi $g(t) = \frac{1}{\omega - x}, t \in < 0, \omega - x >$. U ovom slučaju intenzitet smrtnosti je rastuća funkcija o t, definirana na sljedeći način:

  $$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t},\ 0 < t < \omega - x$$

- **Gompertz** (1824)
  Pretpostavimo kako je intenzitet smrtnosti rastuća eksponencijalna funkcija, tj. neka vrijedi

  $$\mu_{x+t} = Bc^{x+t},\ t > 0,\ B, c > 0$$

  Ovakav način definiranja intezinteta smrtnosti bolje opisuje proces starenja od onoga u prethodnom zakonu, također primjećujemo kako ovdje ne pretpostavljamo postojanje maksimalne dobi za ljudska bića.

- **Makeham** (1860)
  Neka je za realne parametre $A > 0$, $B \geq 0$ i $c > 0$, intenzitet smrtnosti definiran na sljedeći način:

  $$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t},\ t > 0$$

  Primjetimo kako je ovaj zakon samo generalizacija Gompertzovog zakona, dobivena dodavanjem slobodnog člana A koji je neovisan o dobi. Ukoliko Makehamov intenzitet smrtnosti uvrstimo u jednadžbu (8) te uvedemo oznaku $m = \frac{B}{\ln c}$ za vjerojatnost doživljenja u okviru ovog zakona dobit ćemo sljedeću formulu:

  $${}_tp_x = \exp\Big(- At - mc^x(c^t - 1)\Big)$$

- **Weibull** (1939)
  U okviru ovog zakona pretpostavljamo kako intenzitet smrtnosti raste kao potencija od t, a ne eksponencijalno kao što je slučaj u prethodnim zakonima. Dakle, za realne parametre $k > 0$ i $n > 0$ vrijedi:

  $$\mu_{x+t} = k(x+t)^n$$

  Tada će za vjerojatnost doživljenja vrijediti:

  $${}_tp_x = \exp\Big(- \frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]\Big).$$

2.4 Životne tablice

Zakoni smrtnosti su imali puno veću važnost prije pojave računala, kada je i njihova upotreba bila puno veća. No, oni ne mogu opisati podatke o smrtnosti dovoljno točno za svaku životnu dob, stoga je razvijen drugi način pregleda podataka o smrtnosti tzv. životne tablice, često nazivane i tablice smrtnosti.
Prve takve tablice sastavili su J. Graunt (1662) i Sir E. Halley (1693), a one su danas sveprisutne te se sastavljaju i u Hrvatskoj. Konstrukcija životnih tablica temelji se na prikupljenim statističkim podacima za razne populacijske grupe koje se razlikuju po dobi, spolu, rasi ili tipu osiguranja kojem pristupaju.
Prema [2] definirat ćemo brojeve koje za $k \in \mathbb{N}_0$ obično sadrži tablica smrtnosti:

- ℓ_k = (očekivani) broj osoba u danoj populaciji koji je živ u dobi x
- ℓ_0 = (očekivani) broj novorođenih osoba u danoj populaciji (l_0 nazivamo korijen tablice)
- d_k = (očekivani) broj smrti u intervalu $[k, k+1\rangle = \ell_k - \ell_{k+1}$

Upravo niz $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ predstavlja tablicu smrtnosti. Za cijele brojeve k, zbog neprekidnosti slučajne varijable T vrijedi:

$$ {}_kq_x = P(T < k) = P(T \leq k) = P(K \leq k-1) = \frac{\ell_x - \ell_{x+k}}{\ell_x}, $$

$$ {}_kp_x = P(T > k) = P(T \geq k) = P(K \geq k) = \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x}. $$

U sljedećim primjerima, osim ako nije drugačije naglašeno, koristit ćemo ilustrativnu životnu tablicu izrađenu od strane međunarodnog društva aktuara čiji se detaljniji opis može pronaći u [5], str. 61.. U nastavku rada za ovu tablicu koristimo kraticu ”*SoALt*”.

Primjer 1. *Izračunajte vjerojatnost da će osoba, koja je doživjela dob* 40*,*

a) doživjeti dob 50*,*

c) umrijeti prije dobi 65*,*

b) umrijeti nakon navršene dobi 70*, ali prije dobi* 80*.*

<u>*Rješnje:*</u>

a) ${}_{10}p_{40} = \frac{\ell_{50}}{\ell_{40}} = \frac{89508.99719}{93131.64123} = 0.9611019$

b) ${}_{25}q_{40} = \frac{\ell_{40}-\ell_{65}}{\ell_{40}} = \frac{17792.01}{93131.64} = 0.1910415$

c) ${}_{30|10}q_{40} = \frac{\ell_{70}-\ell_{80}}{\ell_{40}} = \frac{27017.9}{93131.64123} = 0.2901044$

Napomena 1. U R-u ćemo vjerojatnosti doživljenja određene dobi, odnosno njezinog nedoživljenja najjednostavnije izračunati pomoću funkcija pxt i qxt. Njihovi argumenti su sljedeći:

- *object* - opisuje životnu tablicu koju koristimo pri računanju
- x - opisuje dob osobe
- t - razdoblje za koje nas zanima vjerojatnost smrti, odnosno doživljenja
- *fractional* - opisuje vjerojatnost smrti u dijelovima godine

Funkcija koja računa broj smrti u intervalu $[x, x+t\rangle$ je dxt. Sukladno tome, vjerojatnosti iz prethodnog primjera računamo kao:

```
#1. primjer
a) pxt(soa08Act, x=40, t=10)

b) qxt(soa08Act, x=40, t=25)

c) dxt(soa08Act, x=70, t=80)/soa08Act@lx[soa08Act@x==40]
```

Mi pretpostavljamo kako je T neprekidna slučajna varijabla, pa zbog toga vrijedi $P(T=t)=0$ za svaki fiksan t. U tom slučaju, za svaki $k \in \mathbf{N}_0$ imamo:

$$P(K=k)=P(k \leq T < k+1)=P(T \geq k)-P(T \geq k+1)={}_kp_x-{}_{k+1}p_x.$$

No, za $k \geq 1$ vrijedi:

$$P(K \geq k)={}_kp_x=\prod_{l=0}^{k-1} p_{x+l}=\prod_{l=0}^{k-1}(1-q_{x+l}).$$

Zbog toga je zakon razdiobe slučajne varijable K određen izrazom $P(K=k)={}_kp_xq_{x+k}$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Primjer 2. *Izračunajte:*

a) *vjerojatnost da će osoba, koja je doživjela dob 40, doživjeti još 10 godina,*

b) očekivanu cjelobrojnu preostalu duljinu života osobe koja je doživjela dob 40.

Rješenje:

a) *U ovom slučaju nas zanima vjerojatnost da će osoba u dobi* 40 *doživjeti još točno* 10 *godina, tj.*

$$P(10 \leq T < 11)=P(K=10)={}_{10}p_{40}q_{50}=0.9611019 \cdot 0.005919901=0.005689628$$

b) *Sada nas zanima očekivanje slučajne varijable K, pa stoga računamo:*

$$e_{40} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{40} = \sum_{k=1}^{110-40} {}_k p_{40} = 35.36723$$

Napominjeno kako je u ovoj tablici maksimalna dob za ljudska bića jednaka 110*, pa zbog toga sumiramo od* 0 *do* $110 - 40$*. U R-u ćemo ovo očekivanje izračunati pomoću funkcije* exn*, sljedećom linijom koda:*

```
exn(object = soa08Act, x=40, n=110-40, type="curtate")
```

2.5 Tablice s odabirom

Ranije je spomenuto kako osiguravajuća društva dijele klijente po spolu, generaciji i slično, no često se može pretpostaviti kako se pristupnici osiguranju ne razlikuju samo međusobno nego i od ostalog dijela populacije. Razlog tome leži u nastojanju osiguravajućih kuća da se zaštite od gubitka, pa sklapaju ugovore o životnom osiguranju samo s onim klijentima za koje je potvrđeno da zadovoljavaju zdravstvene standarde (primjerice moraju proći medicinski pregled prije sklapanja police). Isto tako osobe koje ugovaraju isplatu životnih renti koja počinje u nekom trenutku njihovog života i traje duži period obično su dobrog zdravlja. U suprotnom, moglo bi doći do ranije smrti što i njima ne ide u korist s financijske strane, jer čim dođe do smrti prestaju uplate na njihov račun. Ovakva selekcija rezultira činjenicom da su stope smrti kod osoba koje su pristupile osiguranju manje od prosječnih stopa smrtnosti ostatka populacije iste dobi. Nakon izvjesnog perioda stvari se vrate u ravnotežu, tj. stope smrtnosti pristupnika postanu jednake stopama u ostatku populacije.
Tablice za ove osobe obično se zovu *select*, tj. tablice s odabirom, a period različitih stopa smrtnosti nazivamo *period odabira* i označavamo ga s $r \in \mathbb{N}$. Kod ovih tablica imamo nešto drugačije oznake za vjerojatnosti. Primjerice, vjerojatnost da će osoba koja je pristupila osiguranju u dobi x, a sada je u dobi $x + t$ umrijeti u sljedećih godinu dana označavamo s $q_{[x]+t}$. Selekcija povlači sljedeće nejednakosti:

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \cdots ,$$

jer kako smo rekli osobe koje su kasnije pristupile osiguranju su boljeg zdravtsvenog stanja, pa su i im i stope smrtnosti manje nego kod osoba koje su osiguranju pristupile nekoliko godina ranije. Nakon prolaska perioda odabira, stope smrtnosti osiguranika i ostatka populacije se izjednačavaju, pa vrijedi:

$$q_{[x]+r} = q_{x+r}, \forall t \geq r.$$

Zaključujemo kako vjerojatnosti smrti i doživljenja ispitanika u tablicama s odabirom ovise o dobi kada osoba pristupa osiguranju i njegovoj trenutnoj dobi, a nakon prolaska perioda odabira navede vjerojatnosti ovise isključivo o dobi ispitanika. Nakon prolaska perioda odabira koriste se *ultimate*, tj. krajnje tablice, a tablice u kojima se potencijalni osiguranici ne razlikuju nazivamo *agregate*, tj. skupne tablice.

Primjer 3. *Prepostavimo da imamo sljedeći izvadak iz tablica smrtnosti s odabirom (select) s periodom odabira 2 godine:*

x	$1000q_{[x]}$	$1000q_{[x]+1}$	$1000q_{x+2}$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	0.222	0.330	0.422	9907	9905	9901	32
31	0.234	0.352	0.459	9903	9901	9897	33
32	0.250	0.377	0.500	9899	9896	9893	34
33	0.269	0.407	0.545	9894	9892	9888	35
34	0.291	0.441	0.596	9889	887	9882	36

Izračunajte sljedeće vjerojatnosti:

a) ${}_3p_{[30]}$,

b) ${}_{1|4}q_{[31]}$,

c) ${}_2q_{[32]+1}$.

Rješenje:

a) U ovom slučaju zanima nas vjerojatnost da će osoba, koja je osiguranju pristupila i prošla selekciju u dobi 30*, doživjeti dob* 33*. Stoga računamo,*
$${}_3p_{[30]} = \frac{\ell_{[30]+3}}{\ell_{[30]}} = \frac{\ell_{30+3}}{\ell_{[30]}} = \frac{9894}{9907} = 0.9986877965$$

b) Sada nas zanima vjerojatnost da će osoba, koja je pristupila osiguranju i prošla selekciju u dobi od 31*, umrijeti poslije dobi* 32*, ali prije dobi* 36*. Stoga računamo sljedeće*
$${}_{1|4}q_{[31]} = \frac{\ell_{[31]+1}-\ell_{[31]+5}}{\ell_{[31]}} = \frac{\ell_{[31]+1}-\ell_{31+5}}{\ell_{[31]}} = \frac{9901-9889}{9903} = 0.001211754$$

c) Sada želimo izračunati vjerojatnost da će osoba, koja je pristupila osiguranju i prošla selekciju u dobi od 32*, a sada je u dobi* 33*, umrijeti prije navršenja dobi* 35*.*
$${}_2q_{[32]+1} = \frac{\ell_{[32]+1}-\ell_{[32]+1+2}}{\ell_{[32]+1}} = \frac{\ell_{[32]+1}-\ell_{32+3}}{\ell_{[32]+1}} = \frac{9896-9894}{9896} = 0.00021019.$$

Select tablica preuzeta je iz [2], str. 44..

2.6 Vjerojatnosti smrti u dijelovima godine

Pomoću životnih tablica zadana je samo distribucija slučajne varijable K i to na sljedeći način:
$$P(K \geq k) = {}_kp_x = p_x p_{x-1} \cdots p_{x-k+1},\ k = 1, 2, 3\ldots$$

Kako bismo mogli izraziti distribuciju od T moramo uvesti neke dodatne pretpostavke o funkcijama ${}_uq_x$ i μ_{x+u} za $u \in \langle 0, 1\rangle$. Najčešće pretpostavke su sljedeće:

- **Linearnost funkcije ${}_u\mathbf{q}_x$**
  Pretpostavimo kako je ${}_uq_x$ linearna funkcija od u, tj. neka vrijedi ${}_uq_x = u\, q_x$. Primjećujemo kako se u okviru ove pretpostavke nalazimo u uvjetima iz poglavlja 2.2.1, kada

su S i K bile nezavisne, a S uniformno distribuirana na intervalu od 0 do 1. Tada vrijedi sljedeća jednakost

$$_{u}p_x = 1 - uq_x \ ,$$

iz koje slijedi

$$\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - uq_x} \ .$$

U tom slučaju distribuciju sl. varijable T zapravo dobijemo linearnom interpolacijom od funkcije distribucije sl. varijable K između cjelobrojnih vjerojatnosti (jer vrijedi $T - K = S \sim \mathcal{U}(0, 1)$).

- **Konstantnost funkcije $\mu_{\mathbf{x+u}}$**
  Neka je μ_{x+u} konstantan tokom godine te označimo njegovu vrijednost s $\mu_{(x+\frac{1}{2})}$. Tada prema jednakosti (7) mora vrijediti:

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x \ ,$$

  što povlači

$$_{u}p_x = \exp\Big(- u\mu_{x+\frac{1}{2}}\Big) = (p_x)^u.$$

  Uvrstimo li gore dobiveno u jednakost (6) dobivamo sljedeće:

$$P(S \leq u|K = k) = \frac{1 - p_{x+k}^u}{1 - p_{x+k}},$$

  iz čega zaključujemo kako je uvjetna distribucija od S, uvjetno na poznati K, ima odrezanu eksponencijalnu distribuciju koja ovisi o k. Dakle, u okviru ove pretpostavke možemo reći kako T ima po dijelovima eksponencijalnu razdiobu.

- **linearnost funkcije $_{\mathbf{1-u}}\mathbf{q}_{\mathbf{x+u}}$ (Balduccijeva pretpostavka)**
  Neka je $_{1-u}q_{x+u}$ linearna funkcija takva da je $_{1-u}q_{x+u} = (1 - u)q_x$.

Nijedna od navednih pretpostavki nije vrlo realistična, intenzitet smrtnosti u sva tri slučaja ima skokove, a u Balduccijevoj pretpostavci je čak padajuća funkcija na intervalima $[k, k+1\rangle$ za $k \in \mathbb{N}$.

Primjer 4. *Izračunajte vjerojatnost da će osoba u dobi od 80 i pol godina, umrijeti u sljedećem kvartalu, uz pretpostavku:*

a) *linearnosti funkcije $_{u}q_x$,*

b) *konstantnosti funkcije μ_{x+u}*

Rješenje:

a) $_{0.25}q_{80.5} = 1 - {}_{0.25}p_{80.5} = 1 - 0.979085 = 0.02091496$

b) $_{0.25}q_{80.5} = 1 - {}_{0.25}p_{80.5} = 1 - 0.9792903 = 0.0207097$

U R-u ćemo ove vjerojatnost izračunati na sljedeći način:

```r
#4. primjer

a)
1-pxt(object=soa08Act,x=80.5,t=0.25, fractional="linear")

b)
1-pxt(object=soa08Act,x=80.5,t=0.25, fractional="constant force")
```

3 Životno osiguranje

U ovom poglavlju izvest ćemo formule za jednostavne tipove osiguranja. Vrijeme i iznos isplate bit će funkcije slučajne varijable T, koju smo definirali kao duljinu preostalog životnog vijeka osiguranika, no i same mogu biti slučajne varijable. Iako smo se u ovom radu ograničili samo na životna osiguranja, ideje i izračuni mogu se primjeniti i na ostale tipove osiguranja - opreme, strojeva, zajmova i slično. Dakle, ovakvi modeli mogu se koristiti u svakoj situaciji u kojoj veličina i vrijeme financijskog učinka mogu biti izraženi isključivo u termininima vremena nekog slučajnog događaja.
Sa Z ćemo označiti sadašnju vrijednost slučajnog toka novca. Ako postoji $E[Z] < \infty$, tada izraz $E[Z]$ možemo uzeti za "fair" cijenu slučajnog toka novca. U tom slučaju, očekivanu sadašnju vrijednost slučajnog toka novca još nazivamo i jednokratna neto premija, a nju osiguravajuća kuća traži u zamjenu za obavezu plaćanja ugovorene svote. Riječ "neto" korištena u nazivu ukazuje na neuračunavanje troškova i naknade osiguranika pri izračunu premije. Uplaćene neto premije osiguravatelj investira kako bi kasnije mogao isplatiti osiguranu svotu, a pri izračunu premije osiguravatelj mora prethodno fiksirati kamatnu stopu. No, kod ovakvog određivanja cijena nužan je oprez jer:

- podrazumijeva neutralan odnos prema riziku, što je nerealno,

- katkada dopušta zaradu bez rizika (arbitražu).

Za opisivanje rizika koji nosi osiguravatelj ne možemo koristiti $E[Z]$, nego je potrebno poznavati nešto više o distribuciji slučajne varijable Z, primjerice njezinu varijancu. Alternativno, koristi se gornji q-kvantil slučajne varijable Z, tj. vrijednost u_q za koje je $P(Z > u_q) = q$, za neki unaprijed određen nivo q (najčešće se koristi $q = 0.05$). Ovakva se mjera rizika u literaturi naziva *value at risk - VaR*.

3.1 Osnove financijske matematike u aktuarstvu

U ovom dijelu definirat ćemo osnovne funkcije financijske matematike koje će nam biti potrebne u nastavku rada. Neka je i konstantna efektivna kamatna stopa koja se isplaćuje na kraju fiksiranog perioda. Uložimo li sada iznos 1 po efektivnoj kamatnoj stopi i za n godina imat ćemo iznos $(1 + i)^n$ koji nazivamo akumulacija od 1 za n godina po kamatnoj stopi i. No, period transakcija može biti i h gdje h nije nužno cijeli broj. Neka je iznos 1 investiran u trenutku t, njegovu vrijednost u trenutku $t + h$ označavamo s $A(t, t + h)$. Tada vrijedi

$$A(t, t + h) = 1 + hi_h(t),$$

gdje broj $i_{(h)}$ zovemo godišnja nominalna kamatna stopa u periodu $[t, t + h]$. Pretpostavimo kako je i ova kamatna stopa neovisna o trenutku t, tj. neka vrijedi $i_h(t) = i_h$. U praksi najinteresantniji je slučaj kada je $h = 1/p$, a tada ovu kamatnu stopu označavamo s $i^{(p)}$ i zovemo godišnja nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje. Veza između nominalne i efektivne kamatne stope dana je sljedećom formulom

$$(1+\frac{1}{p}i^{(p)})^p = 1+i,$$

a primjenom binomne formule dobivamo

$$1+i = (1+\frac{1}{p}i^{(p)})^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{i^{(p)}}{p}\right)^k 1^{p-k} = 1+p\frac{i^p}{p}+\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{i^{(p)}}{p}\right)^k 1^{p-k} \geq 1+i^{(p)}$$

Sljedeća veličina koju ćemo uvesti je δ, koju nazivamo intenzitet kamate po jedinici vremena, a definiramo kao $\ln(1+i)$. Stoga vrijedi sljedeće

$$\delta = \ln(1+i) \Rightarrow 1+i = \mathrm{e}^{\delta}.$$

Budući da računamo s fiksnom kamatnom stopom i, sadašnja vrijednost iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t je jednostavno v^t, pri čemu v zovemo diskontni faktor. Diskontni faktor dan je formulom

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Zaključujemo kako je vrijednost u trenutku investicije iznosa investiranog bilo kada, koji dospijeva t godina kasnije u iznosu 1, jednaka

$$v(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} = v^t.$$

Ukoliko posudimo iznos 1 sada, u trenutku 1 moramo platiti iznos i. No, želimo li platiti naknadu odmah ona iznosi

$$d = vi = \frac{i}{1+i} = 1-v,$$

a njezin iznos nazivamo efektivna diskontna ili anticipativna kamatna stopa po jedinici vremena. Imamo i nominalnu diskontnu kamatnu stopu plativu p puta godišnje:

$$(1-\frac{1}{p}d^{(p)})^p = 1-d.$$

Prethodne definicije preuzeli smo iz [2] gdje se mogu pronaći njihova detaljnija objašnjena.

3.2 Jednostavni tipovi osiguranja

Najčešće vrste životnog osiguranja su osiguranje života u slučaju smrti (privremeno ili doživotno), osiguranje doživljenja, te mješovito osiguranje u slučaju smrti i doživljenja kao kombinacija prethodna dva pa je ono najtraženiji oblik životnog osiguranja. Kod osiguranja u slučaju smrti ugovoreni iznos se isplaćuje osiguranikovoj obitelji nakon njegove smrti, a kod osiguranja doživljenja se osiguraniku isplaćuje naknada samo ako doživi ugovoreni rok. Za svaki od ovih oblika defnirat ćemo slučajne varijable koje predstavljaju sadašnje vrijednosti naknada koje trebaju biti isplaćene osiguraniku.

3.2.1 Doživotno osiguranje života (Whole life insurance)

Pretpostavimo kako se osiguravatelj obvezuje na isplatu fiksnog (unaprijed dogovorenog) iznosa 1 na kraju godine u kojoj je smrt osiguranika nastupila. Trenutak isplate jednak je $K+1$ te kao takav ovisi o realizaciji slučajne varijable K, koju smo opisali kao broj punih godina koje je osiguranik doživio od trenutka sklapanja police (u dobi x) do smrti. Sadašnju vrijednost osiguranog iznosa definiramo kao

$$Z = v^{K+1}, \tag{9}$$

gdje je $v = \frac{1}{1+i}$ za fiksnu kamatnu stopu i.
Za $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$P(Z = v^{k+1}) = P(k \leq T \leq k+1) = P(K = k) = {}_kp_x q_{x+k}.$$

Očekivanu sadašnju vrijednost isplate, tj. jednokratnu neto premiju označavamo s A_x, a ona je jednaka

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x\, q_{x+k}.$$

Napomena 2. *Formule ćemo uvijek računati na osnovu osiguranog iznosa 1, a u praksi će se kod izračuna sadašnje vrijednosti množiti sa iznosom osigurane svote.*

Kao što možemo pronaći u [2] jednokratnu neto premiju možemo izračunati i na temelju podataka iz tablice smrtnosti, pa stoga pogledajmo sljedeću jednakost:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} \frac{d_{x+k}}{\ell_{x+k}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x \ell_x} =: \frac{M_x}{D_x}. \tag{10}$$

Za varijancu slučajne varijable Z vrijedi

$$Var(Z) = E[Z^2] - A_x^2,$$

gdje je

$$E[Z^2] = E[v^{2(K+1)}] = E[\mathrm{e}^{-2\delta(K+1)}]$$

što je jednako izrazu za A_x, ali uz dvostruki intenzitet kamate.

Napomena 3. Kako bismo u narednim primjerima mogli izračunati jednokratnu neto premiju različitih tipova osiguranja, prvo moramo fiksirati kamatnu stopu te iz životne tablice kreirati aktuarsku tablicu sa zamjenskim funkcijama M_x, $D_x, \cdots$. U nastavku rada, osim ako nije drugačije naglašeno, kamatnu stopu fiksiramo na $i = 6\%$. Želimo li iz SoALt (uz $i = 6\%$) kreirati aktuarsku tablicu u obliku data frame objekta možemo iskoristiti sljedeće linije koda:

```r
data("soaLt")
soaAct <- new("actuarialtable", x=soaLt$x, lx=soaLt$Ix, interest=0.06)
soaActDf <- as(soaAct, "data.frame")
```

Sljedeća slika prikazuje nam prvih nekoliko redaka kreirane tablice.

	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000000	10000000	168358017	47263.585	470300.9	12487975
2	1	9949901	9386699	158358017	44588.288	423037.4	12017674
3	2	9899801	8810788	148971318	42064.422	378449.1	11594637
4	3	9849702	8270000	140160530	39683.417	336384.6	11216188
5	4	9799602	7762203	131890531	37437.186	296701.2	10879803
6	5	9749503	7285396	124128328	6191.668	259264.0	10583102

Slika 1

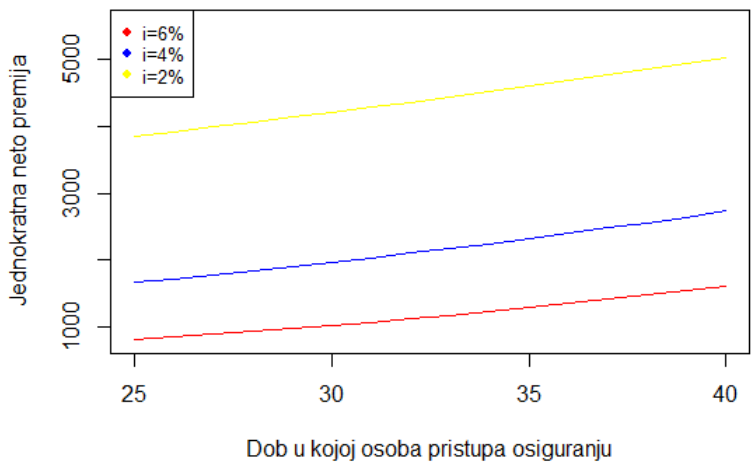
Primjer 5. *Izračunajte iznos koji osiguranik, sada u dobi* 50, *mora uplatiti pri sklapanju police životnog osiguranja u zamjenu za isplatu* 10000 *kuna na kraju godine u kojoj smrt osiguranika nastupi. (SoALt, i=6%)*

Rješenje:

$$A_{50} = 10000 \cdot \frac{M_{50}}{D_{50}} = 10000 \cdot \frac{121019.6}{485929.8} = 2490.475$$

Obveze osiguranika pri sklapanju ugovora pri navedenim uvjetima je uplata jednokratne neto premije od 2490.475 *kuna.*

Primjer 6. *Pretpostavimo kako se osiguravatelj obvezuje na isplatu fiksnog iznosa* 10000*kn na kraju godine smrti osiguranika koji je osiguranju pristupio u dobi između* 25 *i* 40 *godina. Odnos između jednokratne neto premije, tj. iznosa koju osoba mora platiti pri sklapanju ugovora pri navedenim uvjetima i njegove tadašnje dobi prikazali smo na slici 2.*



Slika 2

Primjećujemo kako cijena osiguranja raste s povećanjem dobi u kojoj osiguranik sklapa policu osiguranja, takva veza je i logična, jer tada je veća vjerojatnost smrti osiguranika u skorije vrijeme, a samim time kraći je period koji će proći do isplate osigurane svote osiguravatelja, pa je manja šansa da osiguravajuća kuća zaradi neku korist za sebe. Dakle, što kasnije osiguranik umre, tj. što kasnije osiguravatelj mora isplatiti osiguranu svotu, veća je korist za osiguravatelja, pa je cijena osiguranja manja. Također, vidljivo je kako su obveze osiguranika najniže pri kamatnoj stop 6%, *a najviše pri* 2%.

3.2.2 Privremeno osiguranje života (Term life insurance)

Pojam privremenog životnog osiguranja predstavlja isplatu unaprijed dogovorenog iznosa 1 na kraju godine smrti osiguranika, ali samo ako smrt nastupi unutar ugovorenog roka, recimo od n godina. Ako osiguranik poživi duže od n godina ništa mu neće biti isplaćeno. Tada slučajnu varijablu Z, kojom modeliramo sadašanju vrijednost iznosa 1, definiramo s:

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, \, K \leq n-1 \\ 0, \, K \geq n \end{cases} = v^{(K+1)} \mathcal{I}_{\{K \leq n-1\}}.$$

Sada ćemo jednokratnu neto premiju označavati s $A^1_{x:\overline{n}|}$, a ona iznosi

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K=k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Vrijednost $A^1_{x:\overline{n}|}$ možemo izraziti i pomoću funkcija definiranih u jednadžbi (10), a tada vrijedi

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{11}$$

Varijancu slučajne varijable Z računamo kao

$$Var(Z) = E[Z^2] - (A^1_{x:\overline{n}|})^2,$$

gdje je

$$Z^2 = \begin{cases} v^{K+1}, \; K \leq n-1 \\ 0, \; K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2\delta(K+1)}, \; K \leq n-1 \\ 0, \; K \geq n \end{cases}.$$

Zaključujemo kako je i kod ovakvog tipa osiguranja izraz za $E[Z^2]$ jednak izrazu za $A^1_{x:\overline{n}|}$, ali uz dvostruki intenzitet kamate.

Primjer 7. *Izračunajte iznos koji osiguranik, sada u dobi* 50, *mora uplatiti pri sklapanju police privremenog životnog osiguranja na rok od* 30 *godina u zamjenu za isplatu* 10000 *kuna na kraju godine u kojoj smrt osiguranika nastupi. (SoALt, i=6%)*
Rješenje:

$$A^1_{50:\overline{30}|} = 10000 \cdot \frac{M_{50} - M_{80}}{D_50} = 10000 \cdot \frac{121019.6 - 24632.31}{485929.8} = 1983.564$$

Obveze osiguranika pri sklapanju ugovora pri navedenim uvjetima je uplata jednokratne neto premije od 1983.564 *kuna. Primjećujemo nešto manji iznos premije od onoga u primjeru 5, što je logično jer postoji mogućnost da osiguranik nikada ne dobije osiguranu svotu. Isplata će se dogoditi samo u slučaju smrti prije* 70. *godine, dok je u slučaju doživotnog osiguranja isplata sigurna, samo je trenutak isplate neizvjestan.*

3.2.3 Odgođeno osiguranje života (m-year differed whole life insurance)

Isplata osigurane svote kod odgođenog životnog osiguranja za m godina će se ostvariti samo ako osiguranik preživi tih m godina. Pretpostavimo kako se osiguravatelj obvezuje na isplatu iznosa 1 na kraju godine smrti osiguranika, ali samo ako se ona dogodi nakon m godina od sklapanja ugovora. Tada je sadašanja vrijednost isplate

$$Z = \begin{cases} 0, \ K \leq m-1 \\ v^{K+1}, \ K \geq m \end{cases} = v^{K+1} \cdot \mathcal{I}_{\{K \geq m\}}. \tag{12}$$

Očekivanu sadašnju vrijednost isplate označavamo s ${}_{m|}A_x$, a računamo po formuli

$${}_{m|}A_x = {}_{m}p_x v^m A_{x+m}.$$

Slučajnu varijablu Z možemo zapisati i kao $v^{K+1}(1 - \mathcal{I}_{\{K<m\}})$, pa je tada ${}_{m|}A_x$ jednaka

$${}_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}.$$

Možemo ju izračunati i iz tablica smrtnosti, a tada vrijedi

$${}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}.$$

Napomena 4. Korištenjem R-a jednokratne neto premije, tj. očekivane sadašnje vrijednosti isplate osigurane svote možemo izračunati pomoću funkcije Axn koju pozivamo sljedećom linijom koda:

```
Axn(actuarialtable, x, n, i=actuarialtable@interest, m, type="EV", power =1)
```

Detaljniji opis argumenata ove funkcije sljedeći je:

- *actuarialtable* - aktuarska tablica koju koristimo
- x - dob u kojoj osoba pristupa osiguranju
- n - period trajanja osiguranja (ukoliko nedostaje vrijednost za n podrazumijevamo doživotno osiguranje života, tj. vrijedi $n = \omega - m - x$)
- m - rok odgode osiguranja
- i - fiksirana efektivna kamatna stopa
- *type* - po deafultu jednak je "EV" (očekivana sadašnja vrijednost)
- *power* - pod deafultu jednak je 1

Sukladno tome, vrijednosti jednokratnih neto premija (u oznaci "JNP") iz primjera 5 i 7 računamo kao:

```
#5. primjer

#Izracun jednokratne neto premije pomocu zivotne tablice
JNP<-10000*with(soaActDf, Mx[51]/Dx[51])

#Izracun jednokratne neto premije pomocu funkcije Axn
JNP <- 10000 * Axn(actuarialtable=soaAct, x=50, i=0.06, m=0)

#7. primjer

#Izracun jednokratne neto premije pomocu  zivotne tablice
JNP <- 10000*with(soaActDf,(Mx[51]-Mx[81])/Dx[51])

#Izracun jednokratne neto premije pomocu funkcije Exn
JNP <- 10000 * Axn(actuarialtable=soaAct, x=50, n=30, i=0.06, m=0)
```

3.2.4 Osiguranje doživljenja (Pure Endowment)

Osiguranje doživljenja sastoji se od jednokratne isplate na određeni datum u budućnosti, recimo za n godina, ali samo pod uvjetom da je osiguranik u tom trenutku živ. Pretpostavimo da je osoba pristupila osiguranju u dobi x i da je osigurala iznos 1 na n godina. Sadašanja vrijednost isplate je

$$Z = \begin{cases} 0, & K \leq n-1 \\ v^n, & K \geq n \end{cases} = v^n \cdot \mathcal{I}_{\{K\geq n\}}.$$

Jednokratna neto premija, koju označavamo s $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, jednaka je

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_np_x. \tag{13}$$

Kako je $\mathcal{I}_{\{K\geq n\}}$ Bernoullijeva slučajna varijabla, varijancu od Z izračunamo kao

$$Var(Z) = v^{2n}P(K \geq n)P(K < n) = v^{2n}{}_np_x\,{}_nq_x$$

Vrijedi i sljedeće:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{v^{x+n}\ell_{x+n}}{v^x\ell_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{14}$$

Primjer 8. *Izračunajte iznos koji osiguranik, sada u dobi* 50*, mora uplatiti pri sklapanju police* 30*-godišnjeg osiguranja doživljenja u zamjenu za isplatu* 10000 *kuna na kraju godine u kojoj smrt osiguranika nastupi.(SoALt, i=6%)*

Rješenje:

$$A_{50:\overset{1}{\overline{30}|}} = 10000 \cdot \frac{D_{80}}{D_{50}} = 10000 \cdot \frac{36999.18}{485929.8} = 761.4101$$

Obveze osiguranika pri sklapanju ugovora pri navedenim uvjetima je uplata jednokratne neto premije od 761.4101 *kuna.*

Napomena 5. Vrijednost jednokratne neto premije, tj. iznosa koji osiguranik mora uplatiti pri sklapanju police osiguranja doživljenja u R-u možemo izračunati pomoću funkcije Exn, a zbog toga što su njezini argumenti jednaki argumentima funkcije Axn opisane u napomeni 4 ovdje ih nećemo dodatno objašnjavati. Obveze osiguranika pri sklapanju ugovora prema uvjetima navedenim u primjeru 8, tada pomoću R-a računamo na način:

```
#8. primjer
#Izracun jednokratne neto premije pomocu zivotne tablice
JNP<-10000*with(soaActDf,Dx[81]/Dx[51])

#Izracun jednokratne neto premije pomocu funkcije Exn
JNPF<-10000*Exn(actuarialtable=soaAct, x=50, n=30, i=0.06)
```

3.2.5 Mješovito osiguranje života i doživljenja (Endowment)

Mješovito životno osiguranje istovremeno je i osiguranje i štednja te predstavlja najšešći oblik životnog osiguranja. Ono je kombinacija privremenog osiguranja života od dobi x do dobi $x+n$ te osiguranje doživljenja dobi $x+n$. Preciznije, ono osigurava iznos 1 na kraju godine smrti ukoliko se ona dogodi u prvih n godina, u suprotnom se isti iznos isplaćuje na kraju n-te godine. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = v^{K+1}\mathcal{I}_{\{K<n\}} + v^n\mathcal{I}_{\{K\geq n\}} =: Z_1 + Z_2.$$

Očekivanu sadašnju vrijednost isplate, tj. jednokratnu neto premiju za ovakav ugovor označavamo s $A_{x:\overline{n}|}$, a ona iznosi

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}, \tag{15}$$

što je u kontekstu jednadžbi (11) i (14) jednako

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

U ovom slučaju varijancu slučajne varijable Z računamo kao

$$Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2),$$

gdje zbog $Z_1Z_2 = 0$ vrijedi

$$Cov(Z_1, Z_2) = E[Z_1Z_2] - E[Z_1]E[Z_2] = -A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < 0,$$

što povlači sljedeću nejednakost:

$$Var(Z) < Var(Z_1) + Var(Z_2).$$

Zaključujemo kako je rizik prodaje mješovite police jednom klijentu, mjeren varijancom, manji od rizika prodaje police privremenog osiguranja života jednom klijentu i police osiguranja doživljenja drugom klijentu.

Primjer 9. *Osoba u dobi 40 godina ugovara* 20*-godišnje mješovito osiguranje sa svotom za slučaj smrti* 10000 *kuna i svotom za slučaj doživljenja* 8000 *kuna. Izračunajte iznos koji osiguranik mora platiti pri sklapanju ugovora. (SoALt, i=6%)*

Rješenje:

$$\begin{aligned} A_{40:\overline{20}|} &= 10000 \cdot A^{1}_{40:\overline{20}|} + 8000 \cdot A_{40:\overset{1}{\overline{20}|}} \\ &= 10000 \cdot \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{40}} + 8000 \cdot \frac{D_{60}}{D_{40}} \\ &= 10000 \cdot \frac{146070.4 - 91624.24}{905446.4} + 8000 \cdot \frac{248216}{905446.4} \\ &= 2794.411574 \end{aligned}$$

Napomena 6. U kontekstu napomeni 4 i 5 vrijednost jednokratne neto premije mješovitog osiguranja života i doživljenja sklopljenog prema uvjetima iz primjera 9 u R-u računamo kao:

```
#9. primjer

#Izracun jednokratne neto premije pomocu zivotne tablice
JNP<-10000*with(soaActDf,(Mx[41]-Mx[61])/Dx[41]) + 8000*with(soaActDf,Dx[61]/
    Dx[41])


#Izracun jednokratne neto premije pomocu funkcija Axn i Exn
JNP<-10000*Axn(actuarialtable=soaAct, x=40, n=20, i=0.06)+8000*Exn(
    actuarialtable=soaAct, x=40, n=20, i=0.06)
```

3.3 Osiguranje plativo u trenutku smrti

U prethodnom poglavlju pretpostavili smo kako osiguravatelj isplaćuje ugovoreni iznos na kraju godine smrti osiguranika. Takav pristup u praksi nije realan, ali ima prednost jer se formule za sadašnju vrijednost isplate mogu dobiti direktno iz životnih tablica. Sada ćemo razmotriti situaciju kada se osigurani iznos isplaćuje odmah u trenutku smrti osiguranika, taj trenutak je neizvjestan i ovisi o realizaciji slučajne varijable T koja opisuje preostalu duljinu života osobe koja je osiguranju pristupila u dobi x.

3.3.1 Doživotno osiguranje života

Pretpostavimo kako se osiguravatelj obvezuje na isplatu fiksnog iznosa 1 odmah po smrti osiguranika. Sadašnju vrijednost isplate, koju opisujemo slučajnom varijablom Z, definiramo na sljedeći način:

$$Z = v^T.$$

Očekivanu sadašnju vrijednost isplate, tj. jednokratnu neto premiju označavamo s $\bar{A}_x$ i računamo kao:

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t g(t)dt = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x \mu_{x+t}.$$

U poglavlju 2.2.1 slučajnu varijablu T rastavili smo na njezin cjelobrojni i razlomljeni dio tako da vrijedi

$$T = K + S = (K - 1) - (1 - S)$$

i pretpostavili smo nezavisnost slučajnih varijabli K i S, te uniformnu distribuiranost varijable S na intevralu od 0 do 1. Tada, prema [2], uočavamo sljedeće

$$E[v^{S-1}] = E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^u du = \int_0^1 \mathrm{e}^{\delta u}\, du = \frac{\mathrm{e}^{\delta} - 1}{\delta} = \frac{i}{\delta}. \tag{16}$$

Zbog pretpostavke o nezavisnosti S i K vrijedi sljedeće

$$\bar{A}_x = E[v^{K+1}]E[v^{-(1-S)}] = E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}] = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Dakle, formula za jednokratnu neto premiju doživotnog životnog osiguranja plativog u trenutku smrti samo je proširenje formule za premiju plativu na kraju godine smrti osiguranika.

3.3.2 Privremeno osiguranje života

Pretpostavimo kako se osiguravatelj obvezuje na isplatu ugovorenog iznosa 1 u trenutku smrti osiguranika, ali samo ako se smrt dogodi unutar roka od n godina. Tada je sadašnja vrijednost isplate jednaka

$$Z = \begin{cases} v^T, T \leq n \\ 0, T > n \end{cases} = v^T \mathcal{I}_{\{T \leq n\}}.$$

Dok je očekivana sadašnja vrijednost isplate, koju označavamo s $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$, jednaka

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \int_0^n v^t g(t) dt = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Želimo li povezati izraze za jednokratnu neto premiju privremenog životnog osiguranja plativog odmah po smrti i na kraju godine smrti osiguranika, koristimo pretpostavke poglavlja 2.2.1 i rezultata dobivenog u jednadžbi (16) te dobivamo sljedeću jednakost

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E[v^T \mathcal{I}_{T \leq n}] = E[v^{K+1} \mathcal{I}_{K \leq n-1} v^{S-1} \mathcal{I}_{o \leq S < 1}] = \frac{i}{\delta} E[v^{K+1} \mathcal{I}_{K \leq n-1}] = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}. \tag{17}$$

3.3.3 Mješovito osiguranje života

Pretpostavimo kako je osiguranik u dobi x sklopio policu mješovitog životnog osiguranja prema kojoj se osiguravatelj obvezuje na isplatu iznosa 1 u trenutku smrti osiguranika, ako se ona dogodi u periodu od x do $x+n$, u suprotnom isti iznos isplaćuje na kraju n-te godine. Tada je sadašnja vrijednost isplate definirana kao

$$Z = v^T \mathcal{I}_{\{T \leq n\}} + v^n \mathcal{I}_{\{K \geq n\}},$$

dok je očekivana sadašnja vrijednost, koju označavamo s $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$, jednaka

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}},$$

iz čega, pomoću jednadžbe (15), na jednostavan način možemo doći do sljedeće jednakosti:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + (\frac{i}{\delta} - 1) A^1_{x:\overline{n}|}.$$

3.4 Općeniti tipovi osiguranja

Pretpostavimo kako proučavamo životno osiguranje čija se osigurana svota mijenja iz godine u godinu, a plaća se na kraju godine u kojoj je smrt osiguranika nastupila. Ukoliko s $c_j \geq 0$ označimo osiguranu svotu u j-toj godini, tada je sadašnja vrijednost isplate jednaka

$$Z = c_{K+1}v^{K+1}.$$

Sve momente slučajne varijable Z računamo kao:

$$E[Z^h] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^h v^{h(k+1)} {}_kp_x q_{x+k}. \tag{18}$$

Ako dodatno pretpostavimo $\sum_k c^{k+1}v^{k+1} < \infty$, tada prema [2] sadašnju vrijednost isplate možemo zapisati i na sljedeći način:

$$Z = \sum_{k\geq 0} c_{k+1}v^{k+1}\mathcal{I}_{\{K=k\}} = \sum_{k\geq 0} c_{k+1}v^{k+1}\mathcal{I}_{\{K\geq k\}} - \sum_{k\geq 0} c_{k+1}v^{k+1}\mathcal{I}_{\{K\geq k+1\}},$$

pa očekivanje pronalazimo i kao:

$$E[Z] = c_1A_x + (c_2 - c_1)_{1|}A_x + (c_3 - c_2)_{2|}A_x + \cdots .$$

Iz gornje jednakosti primjećujemo kako jednokratnu neto premiju ovakvog osiguranja možemo zapisati kao sumu jednokratnih neto premija odgođenog životnog osiguranja s fiksnim osiguranim iznosom koji iznosi $(c_{j+1} - c_j)$.
Kod privremenog životnog osiguranja na rok od n godina osiguraniku ništa neće biti isplaćeno ako poživi duže od n godina, pa će vrijediti $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = 0$. Tada, prema [1], jednokratnu neto premiju možemo izračunati i kao

$$E[Z] = c_nA^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n)A^1_{x:\overline{n-1}|} + (c_{n-2} - c_{n-1})A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots .$$

U slučaju osiguranja plativog u trenutku smrti osiguranika, osiguranu svotu zadajemo funkcijom od t tj. kao $c(t)$ za $t \geq 0$. Tada sadašnju vrijednost isplate definiramo kao

$$Z = c(T)v^T,$$

a očekivanu sadašnju vrijednost računamo na sljedeći način

$$E[Z] = \int_0^{\infty} c(t)v^t g(t)dt = \int_0^{\infty} c(t)v^t {}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

Ako slučajnu varijablu T rastavimo na $K + S$, tada jednokratnu neto premiju i u slučaju osiguranja plativog u trenutku smrti osiguranika možemo izračunati prema jednadžbi (18) za $h = 1$, pa dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[Z|K = k]P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[c(k + S)v^{(k+S)}|K = k]P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[c(k + S)(1 + i)^{1-S}|K = K]v^{k+1}P(K = K)
\end{aligned}$$

Označimo li $E[c(k+S)(1+i)^{1-s}|K=k]$ s c_{k+1} vrijedi

$$E[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{(k+1)} P(K=k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{(k+1)} {}_k p_x q_{x+k}.$$

3.5 Varijabilno životno osiguranje (Variable life insurance)

U ovom dijelu definirat ćemo police životnog osiguranja kod kojih se osigurana svota linearno mijenja kroz period trajanja osiguranja. Ovakvi oblici osiguranja najčešće predstavljaju garanciju za otplatu kredita, oni omogućavaju lakše podmirenje kreditnih obaveza osiguranika ili nadoknađuju neplanirani manjak sredstava prouzrokovan smrću osigurane osobe. Promotrimo rastuću policu osiguranja s naknadom $K+1$ plativom na kraju godine smrti ispitanika. Dakle, osigurana svota jednaka je broju godina koje je osiguranik proživio od dobi x do smrti uvećano za 1. Tada sadašnju vrijednost isplate definiramo kao

$$Z = (K+1)v^{K+1}.$$

Jednokratna neto premija, koju označavamo s $(IA)_x$, jednaka je

$$(IA)_x = E[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} P(K=k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

U slučaju rastućeg privremenog životnog osiguranja s periodom n sadašnju vrijednost isplate definiramo kao

$$Z = (K+1)v^{K+1} \mathcal{I}_{\{K \leq n-1\}},$$

a jednokratnu neto premiju označavamo s $(IA)^1_{x:\overline{n}|}$ i računamo kao

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Sada ćemo proučiti policu privremenog životnog osiguranja kod kojeg se osigurana svota linearno smanjuje od n do 0. Tada je sadašnja vrijednost isplate definirana kao

$$Z = (n-K)v^{K+1} \mathcal{I}_{\{K \leq n-1\}},$$

a jednokratna neto premija, koju označavamo s $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$, jednaka je

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

4 Životne rente

U ovom dijelu napravit ćemo pregled životnih renti kao još jednog posebnog oblika osiguranja. Općenito, životna renta niz je periodičnih isplata za vrijeme trajanja života osobe. Iznosi rente unaprijed su određeni, ali je broj isplata slučajan, jer se isplata prekida nakon smrti osiguranika. Zato je sadašnja vrijednost rente slučajna varijabla koju označavamo s Y, a čije očekivanje možemo smatrati "fair" cijenom i zvati jednokratna neto premija.
Rente mogu biti doživotne ili privremene, neposredne ili odgođene, prenumerando (plative unaprijed, tj. na početku intervala (eng. annuity-due)) ili postnumerando (plative unatrag, tj. na kraju intervala (eng. immediate annuity)). Mogu se isplaćivati u jednakim ili nejednakim vremenskim intervalima (u godišnjim, ispodgodišnjim ratama ili kontinuirano). Iznos koji se isplaćuje može biti konstantan ili varijabilan. Ako je konstantan, dovoljno je izvesti izraz za sadašnju vrijednost rente koja se isplaćuje u iznosu 1, a ostale vrijednosti su proporcionalne.

4.1 Jednostavne životne rente

4.1.1 Životna renta

Ugovor o životnoj renti osigurava isplatu iznosa 1 od trenutka potpisivanja ugovora, pa sve do smrti osiguranika. Isplate mogu početi na početku godine (prenumerando renta) ili na kraju godine (postnumerando renta). Odrediti očekivanu sadašnju vrijednost te rente znači pronaći iznos koji bi osoba u dobi x morala uplatiti pri sklapanju police osiguranja da bi joj osiguravatelj mogao isplaćivati rentu do kraja života.

Prenumerando životna renta predstavlja niz isplata u vremenski trenucima $0, 1, 2 \ldots, K$. Sadašnja vrijednost ovakvog niza isplata slučajna je varijabla Y koju definiramo kao

$$Y = 1 + v + v^2 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, \tag{19}$$

njezina distribucija dana je s

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = P(K = k) = {}_k p_x q_{x+k}.$$

Jednokratnu neto premiju, u oznaci $\ddot{a}_x$, računamo na sljedeći način

$$\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} P(K = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k} p_x q_{x+k}.$$

Jednakost (19) možemo prikazati i kao

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathcal{I}_{\{K \geq k\}},$$

odakle slijedi

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(K \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \tag{20}$$

Desna strana prethodne formule ukazuje na vezu s (13); to je kao da promatramo osiguranje doživljenja u trajanju od 1 godine, jer za svaku godinu koju doživimo isplaćuje nam se renta, pa možemo pisati

$$\ddot{a}_x = 1 + A_{x:\overline{1}|}^{\;\;\,1} + A_{x:\overline{2}|}^{\;\;\,1} + A_{x:\overline{3}|}^{\;\;\,1} + \cdots + A_{x:\overline{\omega-x}|}^{\;\;\;\;\;\;\,1}.$$

Kako bismo vrijednost jednokratne neto premije, uz fiksnu kamatnu stopu, mogli izračunati iz tablica smrtnosti prema [2] uvest ćemo još jednu zamjensku funkciju N_x i to na sljedeći način

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} v^{x+k}\ell_{x+k}}{v^x \ell_x} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} D_x}{D_x} =: \frac{N_x}{D_x}.$$

Želimo li povezati izraz za jednokratnu neto premiju prenumerando životne rente i doživotnog osiguranja života slučajnu varijablu Y izrazit ćemo kao

$$Y = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v},$$

gdje prema (9) imamo

$$Y = \frac{1 - Z}{1 - v},$$

djelujemo li s očekivanjem na prethodnu jednadžbu dobivamo

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v} = \frac{1 - A_x}{d}.$$

Dakle, vrijedi sljedeći identitet

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{21}$$

Postnumerando životna renta predstavlja niz isplata u vremenskim trenucima 1, 2, $\ldots, K$. Sadašnja vrijednost svih renti koje će biti isplaćene iznosi

$$Y = v + v^2 + \cdots + v^K = a_{\overline{K}|}, \tag{22}$$

a očekivana sadašnja vrijednost, tj. jednokratna neto premija jednaka je

$$a_x = E[Y] = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1 - A_x}{d} - 1$$

Zapišemo li (22) kao

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(K \geq k)$$

vrijedi sljedeće

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x,$$

pa dobivamo slično kao u prenumerando slučaju

$$
\begin{aligned}
a_x &= A_{x:\overline{1|}}^{\;\;1} + A_{x:\overline{2|}}^{\;\;1} + A_{x:\overline{3|}}^{\;\;1} + \cdots + A_{x:\overline{\omega-x|}}^{\;\;\;\;1} \\
&= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \cdots + \frac{D_\omega}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+1}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Primjer 10. *Osoba u dobi 40 želi osigurati doživotnu osobnu rentu u visini 450 eura godišnje plativo na početku godine. Koliku jednokratnu neto premiju treba uplatiti osiguravatelju u trenutku pristupanja osiguranju? (SoALt, i=6%)*
Rješnje:

$$
\begin{aligned}
450 \cdot \ddot{a}_{40} &= 450 \cdot \ddot{a}_{40} = 450 \cdot \frac{N_{40}}{D_{40}} \\
&= 450 \cdot \frac{13415642}{905446.4} \\
&= 6667.472
\end{aligned}
$$

Osiguranik pri sklapanju ugovora plaća otprilike 6667.472 *eura da bi do kraja života na početku svake godine primao 450 eura.*

$$
450 \cdot a_{40} = 450 \cdot \ddot{a}_{40} - 450 = 6217.472
$$

Primjećujemo kako bi u tom slučaju cijena životne rente bila nešto niža.

4.1.2 Privremena životna renta

Privremena životna renta vrijedi samo kroz unaprijed određeno vrijeme, najdulje do smrti osiguranika ako smrt prije nastupi.

Pretpostavimo kako je osoba u dobi x ugovorila prenumerando privremenu rentu s rokom n koja se sastoji od niza godišnjih uplata u trenucima $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pod pretpostavkom da je osiguranik živ u dobi $x+k$. Sadašnja vrijednost rente je

$$
Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & K \le n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \ge n \end{cases},
$$

odnosno

$$
Y = \ddot{a}_{\overline{\min\{n,K+1\}|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{\min\{n,K+1\}} = \frac{1 - v^{\min\{n,K+1\}}}{d}. \tag{23}
$$

Jednokratnu neto premiju, u oznaci $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$, računamo kao

$$
\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = E[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} P(K=k) + \ddot{a}_{\overline{n|}} P(K \ge n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}\,k} p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n|}\,n} p_x,
$$

ili kao

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(K \geq k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x.$$

Iz prethodne jednakosti uočavamo sljedeće

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + A_{x:\overset{\,1}{\overline{1}|}} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{2}|}} + \cdots + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n-1}|}},$$

a iskoristimo li (14) dobivamo

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Djelujemo li s očekivanjem na (23) dobivamo još jedan izraz za jednokratnu neto premiju ovakve rente

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d},$$

iz čega slijedi identitet

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}.$$

Sada ćemo promotriti privremenu životnu rentu plativu unatrag (postnumerando). Sadašnja vrijednost takve rente dana je s

$$Y = a_{\overline{\min\{n,K\}}|} = v + v^2 + \cdots + v^{\min\{K,n\}},$$

a očekivana sadašnja vrijednost, u oznaci $a_{x:\overline{n}|}$, jednaka je

$$a_{x:\overline{n}|} = E[Y] = vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots v^n{}_np_x = \sum_{k=1}^{n} v^k{}_kp_x.$$

Iz prethodne jednadžbe dobivamo slično kao u prenumerando slučaju

$$a_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{1}|} + A_{x:\overline{2}|} + \cdots + A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Uočavamo kako vrijedi i sljedeće:

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1.$$

4.1.3 Životna renta s odgodom

Polica životne rente s odgodom može se ugovoriti za slučaj kada uplate osobnih renti počinju stizati za m godina pa sve do osiguranikove smrti. Sadašnja vrijednost takve rente u prenumerando slučaju s godišnjim isplatama u iznosu 1 je

$$Y = \begin{cases} 0, \; K \leq m-1 \\ v^m + v^{m+1} + \cdots + v^K, \; K \geq m \end{cases},$$

dok je njezino očekivanje jednako

$$_{m|}\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=m}^{\infty} v^k P(K \geq k) = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_kp_x = v^m {}_mp_x \ddot{a}_{x:\overline{m}|}.$$

Odgođenu životnu rentu možemo promatrati i kao doživotnu rentu od koje se oduzmu uplate koje sjedaju na račun osiguranika tijekom prvih m godina od sklapanja ugovora, pa tada vrijedi

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}.$$

Želimo li jednokratnu neto premiju izraziti u terminima funkcija D_x i N_x dobivamo sljedeće

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x}.$$

Slično, za odgođenu doživotnu godišnju postnumerandu rentu s rokom odgode m godina (u godišnjem iznosu 1) očekivana sadašnja vrijednost je

$$_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}.$$

Primjer 11. *Koji iznos treba uplatiti osoba u dobi* 45*, ako želi da joj se za* 5 *godina krene isplaćivati prenumerando životna renta u iznosu* 100 *eura?*

Rješenje:

$$100 \cdot {}_{5|}\ddot{a}_{45} = 100 \cdot \frac{N_{45+5}}{D_45} = 100 \cdot \frac{6446746}{665769} = 968.3158$$

Osoba je pri sklapanju police odgođene doživotne rente dužna platiti 968.3158 *eura.*

Napomena 7. Želimo li pomoću R-a izračunati očekivanu sadašnju vrijednost niza uplata koje sjedaju na račun osiguranika koji je sklopio policu životnih renti, koristit ćemo funckiju axn. Kako su svi argumenti ove funkcije, osim argumenata *payment* i k, jednaki argumentima funkcije Axn opisane u napomeni 4, nećemo ih dodadno objašnjavati. No, potrebno je naglasiti kako *payment* označava način plaćanja rente i stoga prima vrijednosti "*due*" (ako je renta plativa prenumerando) i "*immediate*" (ako je renta plativa postnumerando). Ukoliko je renta plativa više puta godišnje argument k predstavlja broj uplata u jednoj godini, primjerice za rentu plativu kvartalno $k = 4$. Sukladno tome, rezultate iz primjera 10 i 11 izračunali smo na sljedeći način:

```
#10. primjer

#Izracun jednokratne neto premije pomocu zivotne tablice
JNP<-450*with(soaActDf, Nx[41]/Dx[41])

#Izracun jednokratne neto premije pomocu funkcije axn
JNP<-450*axn(actuarialtable=soaAct, x=40, i=0.06, m=0, k=1, payment="due")

#11. primjer
#Izracun jednokratne neto premije pomocu zivotne tablice
JNP<-100*with(soaActDf, Nx[51]/Dx[46])

#Izracun jednokratne neto premije pomocu funkcije axn
JNP<-100*axn(actuarialtable=soaAct,x=45, m=5, i=0.06, k=1, payment="due")
```

4.2 Životne rente plative više puta godišnje

U prethodnom poglavlju obradili smo vrste životnih renti kod kojih se isplate vrše jednom godišnje, no u praksi je čest slučaj isplata renti više puta godišnje, recimo m puta. Pretpostavimo kako je osoba u dobi x ugovorila policu životnih renti godišnjeg iznosa 1 čije se uplate vrše m puta godišnje u iznosu $\frac{1}{m}$, sve dok je osiguranik živ. Dakle, uplate dospijevaju u dobi osiguranika x, $x+\frac{1}{m}$, $x+\frac{2}{m}, \cdots, x+1+\frac{1}{m}, \cdots$. Sadašnju vrijednost ovakvog niza isplata definiramo kao

$$Y = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m}v^{K+S^{(m)}},$$

a njezino očekivanje računamo kao

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E[Y] \;=\; \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} P(K+S^{(m)} \geq \frac{k}{m}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m}v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x.$$

Vrijedi i sljedeće

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m}v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{\frac{k}{m}+x}\ell_{x+\frac{k}{m}}}{v^x\ell_x} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_{x+\frac{k}{m}}}{D_x},$$

a kako vrijednosti D_x nisu tabelirane za necjelobrojne vrijednosti od x, u praksi za njih moramo korisiti nekakvu aproksimaciju.
Za jednokratnu neto premiju u analogiji s (21) dobivamo izraz

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}. \tag{24}$$

Uz pretpostavke poglavlja 2.2.1 $A_x^{(m)}$ definiramo kao $E[v^{(K+S^{(m)})}]$, a tada slično kao u jednadžbi (16) dobivamo sljedeće

$$A_x^{(m)} = E[v^K v^{S^m}] = E[V^k]E[v^{S^{(m)}}] = \frac{i}{i^{(m)}}A_x. \tag{25}$$

Tada prema jednadžbama (21), (24) te (25) vrijedi

$$\ddot{a}_x^{(m)} \;=\; \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}.$$

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned}\beta(m) &= \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}},\\ \alpha(m) &= \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \tag{26}$$

Prethodne oznake uvedene su prema [1] gdje se može pronaći njihovo detaljnije objašnjenje te najčešća aproksimacija.

Za odgovarajuću postnumerando rentu uplate dospijevaju u trenucima

$$x,\ x+\frac{1}{m},\ x+\frac{2}{m},\cdots,\ x+1+\frac{1}{m},\cdots,$$

pa je tada njihova sadašnja vrijednost definirana kao

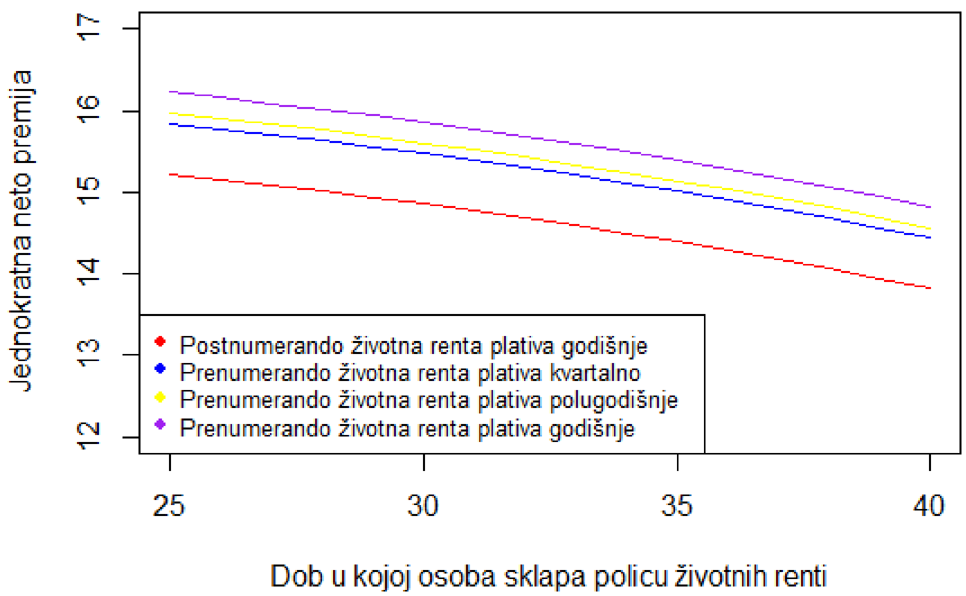
$$Y=\frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}}+\cdots+\frac{1}{m}v^{K+S^{(m)}}.$$

Jednokratnu neto premiju, u oznaci $a_x^{(m)}$, računamo kao

$$a_x^{(m)}=E[Y]=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{x+\frac{k}{m}}}{D_x}.$$

U narednom primjeru usporedit ćemo životne rente prema frekvenciji isplata.

Primjer 12. *Pretpostavimo kako je osoba u dobi između 25 i 40 godina sklopila policu životnih renti u kojoj se osiguravatelj obvezuje na isplatu godišnjeg iznosa 1, a način isplate može biti prenumeradno godišnji, polugodišnji te kvartalni i postnumerando godišnji. Sljedeća slika prikazuje odnos jednokratne neto premije, tj. iznosa koji je osiguranik dužan uplatiti pri sklapanju ugovora i njegove tadašnje dobi.*



Slika 3

Uočavamo kako je u slučaju životnih renti veza jednokratne neto premije i osiguranikove dobi u trenutku sklapanja ugovora suprotna onoj iz primjera 6, što je i logično. Pri sklapanju ugovora doživotnih renti osiguravatelj se obvezuje na isplatu godišnjeg iznosa 1 sve dok je osiguranik živ. Dakle, u što ranijoj dobi osiguranik pristupi osiguranju duži je period isplata

osiguravatelja, a samim time veća je i cijena osiguranja.
Iz slike 3 možemo vidjeti kako vrijedi:

$$a_x < \ddot{a}_x^{(4)} < \ddot{a}_x^{(2)} < \ddot{a}_x$$

Dva su razloga za takav poredak:

- *Renta koja se isplaćuje ranije skuplja je nego renta kod koje se iznos isplaćuje na kraju perioda. Dakle, vrijednosti rente u rastućem su poretku od prosječno najkasnijeg datuma isplate (a_x se isplaćuje na kraju godine) do najranijeg datuma isplate ($\ddot{a}_x$ se plaća na početku svake godine).*

- *U godini u kojoj osiguranik umre bit će isplaćeni različiti iznosi renti. U slučaju godišnje prenumerando rente cijeli osigurani iznos bit će isplaćen, ako je osoba na rok isplate početkom godine živa. Pretpostavljamo da u godini smrti osiguranik nije umro baš na njenom isteku, pa je lako moguće da ugovoreni iznos uopće neće biti isplaćen. Ako se rente isplaćuju više puta godišnje ni tada puni iznos rente neće biti isplaćen. Na primjer, pretpostavimo kako je osoba umrla nakon* 2 *mjeseca. Godišnja prenumerando renta će biti isplaćena u punom iznosu* 1. *U slučaju prenumerando rente koja se isplaćuje kvartalno stigla je jedna uplata na račun osiguranika u iznosu* $\frac{1}{4}$. *Ako je ugovorena prenuemrando renta plativa polugodišnje isplaćen je ukupan iznos* $\frac{1}{2}$*, a ostaka ostaje neisplaćen zbog nedoživljenja početka šestog mjeseca. Do isplate prenumerando godišnje rente nažalost nije ni došlo. Dakle, vidimo da zaključak vrijedi jer je*

$$0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1.$$

4.3 Rastuće životne rente

U ovom dijelu napravit ćemo pregled životnih renti čiji iznos nije uvijek iste visine, nego se s godinama povećava. To povećanje može biti aritmetičko, geometrijsko ili slično, a mi ćemo jednostavnosti radi razmatrati samo aritmetičko povećanje rente s vremenom.
Pretpostavimo kako se iznos $k+1$ isplaćuje u trenucima $k = 0,\ 1,\ 2, \cdots$, sve dok je osiguranik živ. Dakle, uplate stižu u dobi x, $x+1$, $x+2, \ldots$ pod pretpostavkom da je osiguranik živ u dobi $x+k$. Sadašnjašnja vrijednost ove rente dana je s

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k \mathcal{I}_{\{K \geq k\}},$$

a pripadnu očekivanu sadašnju vrijednost označavamo s $(I\ddot{a})_x$ te računamo kao

$$(I\ddot{a})_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_kp_x.$$

U slučaju privremene rastuće životne rente s rokom n godina očekivana sadašnja vrijendost dana je formulom

$$(I\ddot{a})_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^k {}_kp_x.$$

Želimo li da se rente isplaćuju na kraju perioda (tj. postnumerando) u prethodnim formulama krenut ćemo sumirati od $t = 1$, a u slučaju privremene rastuće rente suma ide do indeksa $t = n$.

Sažetak

U ovom radu obrađujemo temu životnih osiguranja, koja su danas od sve većeg značaja, kako za pojedinca, tako i za društvo općenito. Na početku ovoga rada napravili smo uvod u životna osiguranja i analizirali smrtnost, a nakon toga izložili smo osnovne činjenice o strukturi životnih tablica. Sve to bilo je potrebno kako bismo u centralnom dijelu rada izveli formule za neto premije osnovnih oblika životnih osiguranja. Tu podrazumijevamo osiguranje dožzivljenja, životne rente i osiguranje za slučaj smrti. Tijekom cijelog rada, defnicije i formule popraćene su kratkim ilustrativnim primjerima.

Ključne riječi

Model doživljenja, intenzitet smrtnosti, životne tablice, životno osiguranje, životne rente

Summary

In this thesis we are going to elaborate the problem of life insurance. They are very important, not just for an individual, but for society too. In first chapter we are making an introduction to life insurances and analyzing the mortality. Subsequently, basic facts on the structure and construction of mortality tables are presented. All this was necessary to understand and bring out the formula for the net premiums of pure endowments, life annuities and life insurances in the central part of the work. Throughout the work, definitions and formulas are followed by brief illustrative examples.

Key words

Stochastic model in life insurance, the force of mortality, life tables, life insurance, life annuities

Životopis

Rođena sam 24. travnja 1995. godine u Vinkovcima. Nakon završene Osnovne škole "August Cesarec", upisujem Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima. Prediplomski studij matematike upisujem 2015. godine na Odjelu za matematiku u Osijeku te ga završavam 2018. godine s temom Svojstveni problem i metoda potencija. Iste godine u Osijeku upisujem diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku. Stručnu praksu odradila sam u Erste banci pri odjelu za kreditne rizike.

Literatura

[1] Hans U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Swiss Association of Actuaries Zurich, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Berlin, 1997.

[2] Bojan Basrak, *Uvod u aktuarsku matematiku*, skripta, 2012.

[3] N.L.Bowers, Jr, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, *Acturial Mathematics*, The Society of Actuaries, 1997.

[4] Arthur Charpentier , *Computational Acturial Science with R*, University of Québec at Montreal, Canada

[5] https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf (kolovoz, 2020.)