Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Brzić, Lucija

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:235509

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-12**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

zir.nsk.hr

dabar

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lucija Brzić

Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lucija Brzić

Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sažetak

Riješiti sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ znači pronaći vektor $x \in \mathbb{R}^n$ za zadanu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i zadani vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Postoje dva pristupa rješavanju sustava linearnih jednadžbi, direktne i iterativne metode. Direktne metode služe za rješavanje manjih i jednostavnijih sustava, dok iterativne metode služe za sustave velikih dimenzija.
U ovom završnom radu spomenut će se dvije klasične iterativne metode za rješavanje sustava linearnih jednadžbi, a to su Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda.Također bit će implementirani algoritmi u programskom jeziku MATLAB te prikazani načini rješavanja metoda preko primjera.

Ključne riječi: sustav linearnih jednadžbi, iterativne metode, Jacobijeva metoda, Gauss-Seidelova metoda, implementacija metoda

Abstract

Solution of the system of linear equations $Ax = b$ comes down to finding the vector $x \in \mathbb{R}^n$ of the given matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and given vector $b \in \mathbb{R}^n$. There are two approaches to solving the system of linear equations, direct methods and iterative methods. Direct methods are used for solving smaller and simpler systems, while iterative methods are used for more complicated systems.
In this final work there will be discussion of two classic iterative methods for solving the system of linear equations, and they are Jacobi and Gauss-Seidel method. Furthermore, implementations of algorithms will be shown in programming language MATLAB together with examples.

Key words: system of linear equations, iterative methods, Jacobi method, Gauss-Seidel method, implementation of methods

Sadržaj

1 Uvod

Stoljeća su proučavanja dovela do danas poznatoga sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica, oblika $Ax = b$. U sustavu je matrica A kvadratna, regularna i dimenzije $n \times n$, a b je n-dimenzionalni vektor. Razlikuju se različite metode rješavanja sustava linearnih jednadžbi koje se dijele u dvije skupine: direktne i iterativne.

Direktne metode koriste se pri rješavanju manjih sustava linearnih jednadžbi kod kojih se matrica A najčešće faktorizira na produkt trokutastih matrica. Među najpoznatije primjere direktnih metoda ubrajaju se Gaussova eliminacija i LU dekompozicija. Problem ovakvog načina rješavanja javlja se kada je dimenzija sustava linearnih jednadžbi jako velika. Prostorna i vremenska zahtjevnost ozbiljni su nedostatci ovih metoda. Daljnje razmatranje ovih metoda neće biti obrađeno u ovome radu.

Glavna okosnica ovog završnog rada su iterativne metode čije proučavanje će biti pobliže objašnjeno. Iterativne metode koriste se prilikom rješavanja sustava lineranih jedandžbi kada direktne metode nisu dovoljno efikasne. Ideja i način rada iterativnih metoda temelji se na postupnom smanjenju pogreške početne aproksimacije. Nakon određenog broja iteracija zaustavnim kriterijom postupak staje i rješenje je dovoljno dobro aproksimirano. Razvojem računalne tehnologije, a samim time i bržeg načina pronalaska rješenja, iterativne metode doživljavaju svoj zamah i veću primjenu.

Prvo poglavlje obuhvaća opis i proučavanje sustava linearnih jednadžbi koje zauzimaju jedno od glavnih mjesta u matematici. U drugom dijelu bit će predstavljene klasične iterativne metode te detaljno proučavanje Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode. Obje metode imaju široku primjenu u proučavanju kod električnih mreža, kod spline-interpolacija, kod rješavanja rubnih problema za obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe, itd. U trećem i posljednom poglavlju uvest ćemo implementacije iterativnih metoda unutar programskog jezika MATLAB. Radi se o programskom jeziku za tehnička i znanstvena istraživanja gdje se svi podaci ponašaju kao matrice i namijenjen je prvenstveno matričnom izračunavanju. Programski jezik MATLAB smatra se jednim od najpogodnijih alata za implementaciju i vizualizaciju navedenih iterativnih metoda.

1.1 Sustav linearnih jednadžbi

Definicija 1.1. *Neka su m, $n \in \mathbb{N}$. Sustav linearnih jednadžbi sastoji se od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica oblika:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

pri čemu skalare a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, zovemo koeficijentnim sustavima, skalare b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ slobodnim članovima, a x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ nepoznanicama.

Uz sustav (1.1) vežemo sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

koje se, redom, zovu matrica sustava, matrica nepoznanica, matrica slobodnih članova i proširena matrica sustava. Time smo došli do ekvivalentnog zapisa sustava (1.1) kojeg nazivamo matrična jednadžba i označavamo s

$$Ax = b \tag{1.2}$$

Napomena 1.2. *Ako je $m = n$ onda sustav* (1.1) *zovemo kvadratnim, a ako je desna strana sastavljena od samih nula onda sustav* (1.1) *zovemo homogenim, u protivnom, ako je $b_i \neq 0$ za barem jedan i, zovemo ga nehomogenim.*

U daljnjem razmatranju iterativnih metoda bit će korištene kvadratne matrice.
Također pogledajmo što se dešava s rješenjem sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica.

1.2 Egzistencija i broj rješenja sustava linearnih jednadžbi

Definicija 1.3. *Rješenje sustava* (1.1) *je svaka uređena* n*-torka*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

koja ispunjava taj sustav jednadžbi.

Napomena 1.4. *Sustav* (1.1) *i matrična jednadžba* (1.2) *ekvivalentni su i na sljedeći način: uređena* n*-torka* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *zadovoljava* (1.1) *ako i samo ako jednostupčana matrica* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *zadovoljava* (1.2).

Propozicija 1.5. *Uređena* n*-torka* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *je rješenje sustava* (1.1) *ako i samo ako vrijedi*

$$b = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \dots + x_n S_n$$

gdje je $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ *stupčana reprezentacija matrice* A.

Dokaz se može vidjeti u [2].

Za rješenje sustava linearnih jednadžbi mogu biti sljedeći slučajevi:

a) nema rješenja, ako je rang matrice sustava A manji od ranga proširene matrice sustava A_p

b) ima jedinstveno rješenje, ako je rang matrice sustava A jednak rangu proširene matrice sustava A_p i koji je jednak broju nepoznanica n

c) ima beskonačno mnogo rješenja, ako je rang matrice sustava A jednak rangu proširene matrice A_p i koji je manji od n.

Ako sustav ima barem jedno rješenje, onda kažemo da je konzistentan (rješiv); u suprotnom, sustav koji nema rješenja nazivamo nekonzistentnim (nerješivim).

Napomena 1.6. *Homogeni sustav je uvijek rješiv. Svaki homogeni sustav ima barem trivijalno rješenje* $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. *Pitanje koje se postavlja kod rješenja homogenog sustava je postoji li rješenje različito od trivijalnog, tj. netrivijalno rješenje.*

2 Iterativne metode

Radi lakšeg, jednostavnijeg i nadasve bržeg načina pronalaska rješenja uvodimo pojam iterativnih metoda koje do rješenja dolaze postupno (iterativno), a ne direktno. Prilikom traženja rješenja direktnim metodama može doći do poteškoće spremanja velike matrice koeficijenata u memoriju računala. Osnovno svojstvo direktnih metoda jest da je njima za rješenje sustava linearnih jednadžbi potrebno $\Theta(n^3)$ operacija, odnosno zahtijevaju veliki broj aritmetičkih operacija. Prednost iterativnih metoda je u tome što postoji matrica A s posebnom strukturom koja zahtijeva znatno manje operacija od direktnih metoda.
Stacionarne iterativne metode i nestacionarne iterativne metode predstavljaju podjelu iterativnih metoda na dvije osnovne skupine. U skupinu stacionarnih iterativnih metoda spadaju: Jacobijeva metoda, Gauss-Seidelova metoda, SOR metoda, itd. Nestacionarnim iterativnim metodama nećemo se baviti, a jedne od najpoznatijih nestacionarnih metoda su: metoda konjugiranih gradijenata, metoda minimalnog ostatka, itd.

Upoznajmo se prvo s osnovnom metodom razvoja iterativnih metoda.
Neka je zadana matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i neka su $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takve da matricu A možemo zapisati u obliku

$$A = M + N,$$

pri čemu je matrica M izabrana tako da se njezin inverz lakše računa od inverza matrice A. Tada matrični zapis sustava $Ax = b$ prelazi u sustav $(M + N)x = b$, odnosno daljnjim sređivanjem slijedi da je

$$Mx = b - Nx,$$

pri čemu je M regularna matrica. Za zadanu aproksimacija $x^{(k)}$, $(k + 1)$-vu aproksimaciju rješenja $k \in \mathbb{N}$, definiramo s :

$$Mx^{(k+1)} = b - Nx^{(k)}. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo li da vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, za limes x vrijedi

$$Mx = \lim_{k\to\infty} Mx^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} b - Nx^{(k)} = b - Nx.$$

Stoga vidimo da vrijedi $Ax = b$. Tada u slučaju konvergencije niza (2.1) njegov limes predstavlja rješenje sustava linearnih jednadžbi.
U svrhu proučavanja konvergencije iterativne metode bit će proučeno ponašanje pogreške $(k+1)$-ve pogreške $e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x$, pri čemu je x egzaktno rješenje sustava linearnih jednadžbi.
Koristeći navedene oznake imamo:

$$Me^{(k+1)} = Mx^{(k+1)} - Mx = (b - Nx^{(k)}) - (b - N)x = -Ne^{(k)},$$

odnosno $e^{(k+1)} = -M^{-1}Ne^{(k)}$. Dakle, iterativna metoda će konvergirati ako i samo ako $e^{(k)} \to 0$ za $k \to \infty$.
Sada slijedi detaljan pregled Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode te njihov zapis preko specijalne konstrukcije matrica M i N.

2.1 Jacobijeva metoda

Navedimo pretpostavke Jacobijeve metode:

1) Rješenje sustava linearnih jednadžbi je jedinstveno.

2) Matrica A (matrica sustava) na glavnoj dijagonali nema nula. U slučaju da elementi glavne dijagonale nisu svi nula, tada se zamjenom redaka matrice treba postići da elementi glavne dijagonale budu svi različiti od nula.

Jacobijeve iteracije općenito glase:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, \dots n. \tag{2.2}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 \qquad\qquad - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} \qquad\qquad - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \qquad\qquad - \dots - a_{3,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{3n}x_n^{(k)}) \\
&\ \vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})
\end{aligned}$$

Potrebno je odabrati početnu aproksimaciju $\mathbf{x} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$, supstitucijom riješiti sustav i dobiti prvu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(1)}$. Postupak nastavljamo analogno dok ne dođemo do određenog broja koraka ili tražene točnosti
Jacobijeva metoda još se naziva i *metoda istovremenih promjena* jer k-ti korak iterativnog postupka ne ovisi o rezultatima iz tog koraka, već samo o prethodnim koracima i time vidimo da se jednadžbe mogu rješavati bilo kojim redoslijedom.
Kao što je već rečeno, uvest ćemo nove konstrukcije matrica M i N te Jacobijevu metodu zapisati u matričnom obliku.
Za zadanu matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neka su matrice $L, D, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oblika:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricu sustava A tada zapisujemo kao sumu matrica L, D, U, tj.

$$A = L + D + U,$$

pri čemu je L donjetrokutasta matrica s nulama na dijagonali, D dijagonalna matrica, a U predstavlja gornjetrokutastu matricu s nulama na dijagonali. Sustav $Ax = b$ možemo zapisati u obliku

$$(L + D + U)x = b$$

i raspisivanjem te jednadžbe dobit ćemo sljedeće:

$$x = D^{-1}(b - (L + U)x).$$

Iterativna metoda dobivena iz (2.1) za izbor matrica $M = D$ i $N = L + U$, gdje su L, D, U gore definirane matrice naziva se *Jacobijeva metoda*. Tada iterativni postupak, uz ovako definirani izbor matrica, poprima sljedeći oblik:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(k)}), \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je matrica D dijagonalna i s obzirom na pretpostavku koja zahtijeva da matrica A nema nula na glavnoj dijagonali, inverz matrice D računa se trivijalno.

Primjer 2.1. *Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

Ako može, odredite prve tri aproksimacije.

Rješenje:
Radi lakšeg računanja uvedimo oznaku $c_j = -D^{-1} \cdot (L + U)$. Matrice D i $L + U$ sljedećeg su oblika:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad L + U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem u c_j dobije se matrica $c_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

Odredimo još prve tri aproksimacije, odnosno $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$.

$$x^{(1)} = D^{-1}(b-(L+U)x^{(0)}) = D^{-1}b + c_j x^{(0)} = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 7/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = D^{-1}(b-(L+U)x^{(1)}) = D^{-1} + c_j x^{(1)} = \begin{bmatrix} -17/20 \\ 3/8 \\ 61/80 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = D^{-1}(b-(L+U)x^{(0)}) = D^{-1}b + c_j x^{(2)} = \begin{bmatrix} -163/320 \\ 389/400 \\ 179/160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.51 \\ 0.97 \\ 1.12 \end{bmatrix}.$$

2.2 Gauss-Seidelova metoda

Detaljnim proučavanjem Jacobijeve metode uočavamo jedan nedostatak. U Jacobijevoj metodi komponente novog vektora računaju se sekvencionalno, odnosno pri izračunavanju $(k+1)$-ve iteracije Jacobijeva metoda svaku komponentu vektora $x^{(k+1)}$ izračuna pomoću komponente vektora $x^{(k)}$. Time dolazimo do ideje modifikacije metode te poboljšanje Jacobijeve metode nazivamo Gauss-Seidelova metoda. Ova modifikacija smanjuje potreban broj iteracija. Ideja Gauss-Seidelove metode jest ta da prilikom računanja sljedećih komponenti vektora $x^{(k+1)}$ koristimo do tada prethodno izračunate komponente aproksimacije toga vektora.

Gauss-Seidelove iteracije općenito glase:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \qquad i = 1, \ldots n. \tag{2.3}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{3,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{3n}x_n^{(k)}) \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})
\end{aligned}$$

Kao i kod Jacobijeve metode, Gauss-Seidelovu metodu možemo zapisati u matričnom obliku. Ako matricu A rastavimo na donjetrokutastu L, dijagonalnu D i gornjetrokutastu U matricu Gauss-Seidelova metoda ima sljedeći oblik:

$$(L+D)x^{(k+1)} + Ux^{(k)} = b$$

odnosno:

$$(L+D)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}. \tag{2.4}$$

Uočimo da specijalnim odabirom matrica M i N u jednakosti (2.1) takve da je $M = L + D$, a $N = U$ dolazimo do formule iterativnog postupka.Formula iterativnog postupka je oblika:

$$x^{(k+1)} = (L+D)^{-1}b - (L+D)^{-1}Ux^{(k)}.$$

Uočimo da je određivanje inverza matrice D bilo trivijalno, no odrediti inverz matrice $L + D$ nije tako jednostavno. Stoga pomnožimo jednadžbu (2.4) s D^{-1} i dobivamo sljedeći izraz:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}Ux^{(k)} - D^{-1}Lx^{(k+1)}.$$

Primjer 2.2. *Riješite sustav $Ax = b$ Gauss-Seidelovom metodom ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \ x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

te odredite prve tri aproksimacije.

Rješenje:
Matrice $L + D$ i U sljedećeg su oblika:

$$L + D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je izračunati inverz matrice L+D jednom od metoda koje smo naučili tokom studiranja.

$$(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix},$$

Kada smo uveli sve potrebne matrice, prisjetimo se formule te odredimo prve tri aproksimacije:

$$x^{(k+1)} = (L+D)^{-1}b - (L+D)^{-1}Ux^{(k)}.$$

$$x^{(1)} = (L+D)^{-1}b - (L+D)^{-1}Ux^{(0)} = (L+D)^{-1}b = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 7/15 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = (L+D)^{-1}b - (L+D)^{-1}Ux^{(1)} = \begin{bmatrix} 92/45 \\ -113/90 \\ 206/225 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = (L+D)^{-1}b - (L+D)^{-1}Ux^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.057 \\ -1.028 \\ 1.012 \end{bmatrix}$$

Aproksimacije možemo izračunati i na način da koristimo Gauss-Seidelovu metodu na nivou elemenata raspisanu formulom (2.3). *Dakle, zadan je sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3} \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - 2 \\ x_3 &= \frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Koristeći početnu aproksimaciju i formulu (2.3) *prva aproksimacija iznosi:*

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{-1}{3}(0) + \frac{1}{3}(0) + \frac{4}{3} \approx 1.333 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4}(1.333) + \frac{1}{2}(0) - 2 \approx -1.667 \\ x_3^{(1)} &= \frac{2}{5}(1.333) + \frac{2}{5}(-1.667) + \frac{3}{5} \approx 0.467. \end{aligned}$$

Uočimo da prilikom izračunavanje komponente x_2 koristi se prethodno dobivena komponenta x_1, te analogno za izračunavanje iduće komponente x_3 prethodno već dobivene komponente x_1 i x_2. Na ovaj način koristimo prethodno izračunate komponente i došli smo do prve aproksimacije te na analogan način odredimo još potrebne iduće dvije aproksimacije.

2.3 Konvergencija iterativnih metoda

U ovom potpoglavlju razmotrit ćemo konvergenciju Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode. Za proučavanje konvergencije iterativnih metoda potrebno je uvesti nekoliko bitnih pojmova koji će nam poslužiti kao teorijska osnova.

Definicija 2.3. *Spektralni radijus matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiramo sa*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \textit{ svojstvena vrijednost matrice } A\}.$$

Definicija 2.4. *Vektorska norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty\rangle$ koje svakom vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ pridružuje nenegativan realan broj i koje zadovoljava:*

i) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ *i* $\|x\| = 0$ *akko* $x = 0$*;*

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$*;*

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 2.5. *Matrična norma na* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *je preslikavanje* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *za koje vrijedi:*

a) $\|A\| \geq 0,\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *i* $\|A\| = 0$ *akko je* A *nul-matrica;*

b) $\|\lambda A\| = |\lambda|\ \|A\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*;*

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*;*

d) $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*.*

Definicija 2.6. *Neka je zadana vektorska norma* $\|\cdot\|$ *na* $\mathbb{R}^n$*. Inducirana norma* $\|\cdot\|$ *na* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *definira se sa*

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|y\|=1} \|Ay\|, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Teorem 2.7. *Za bilo koju matričnu normu* $\|\cdot\|$*, bilo koju matricu* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *i bilo koji* $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\rho(A)^k \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

Dokaz se može vidjeti u [4].

Teorem 2.8. *Matrična norma inducirana vektorskom normom* ∞ *računa se pomoću jednakosti:*

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Dokaz se može vidjeti u [4].

Teorem 2.9. *Neka je dana matrica* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *i vektori* $e^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *i* $e^{(k)} = C^k e^{(0)} \in \mathbb{R}^n$*, za sve* $k \in \mathbb{N}$*. Tada* $e^{(k)} \to 0$ *za svaki* $e^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *ako i samo ako je* $\rho(C) < 1$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\rho(C) < 1$. Tada možemo naći induciranu matričnu normu takvu da je $\|C\| < 1$ pa slijedi

$$\|e^{(k)}\| = \|C^k e^{(0)}\| \leq \|C\|^k \|e^{(0)}\| \to 0, \text{za } k \to \infty.$$

S druge strane, neka je $e^{(k)} \to 0$. Kada bi $\rho(C) \geq 1$, onda bi postojao barem jedan $e^{(0)} \in \mathbb{R}$ za koji bi vrijedilo da je $Ce^{(0)} = \lambda e^{(0)}$, za $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da $|\lambda| \geq 1$.
Za vektor $e^{(0)}$ dobivamo

$$\|e^{(k)}\| = \|C^k e^{(0)}\| = |\lambda|^k \|e^{(0)}\|$$

iz čega se vidi da $e^{(k)}$ ne konvergira prema 0 za $k \to \infty$, što dovodi do kontradikcije. □

Napomena 2.10. *Po prethodnom teoremu 2.9 iterativni postupak konvergira ako i samo ako je* $\rho(C) < 1$*. Brzina konvergencije je veća što je* $\rho(C)$ *manji. Budući da je* $\rho(C) \leq \|C\|$ *za svaku matričnu normu, dovoljan uvjet za konvergenciju promatrane iterativne metode je* $\|C\| < 1$*, za neku matričnu normu.*

Prilikom postizanja dovoljne točnosti rješenja x, koje ne znamo, koristimo svojstvo da je konvergentan niz Cauchyjev, tj. da susjedni članovi $x^{(k+1)}$ i $x^{(k)}$ zadovoljavaju:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon,$$

gdje je ϵ unaprijed zadana točnost.

Teorem 2.11. *Jacobijeva metoda konvergira za sve matrice A za koje vrijedi:*

1) $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$

pri čemu ovaj uvjet nazivamo stroga dijagonalna dominacija po retcima i

2) $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, n$

pri čemu ovaj uvjet nazivamo stroga dijagonalna dominacija po stupcima.

Dokaz. Dokažimo prvo konvergenciju za strogo dijagonalne dominantne matrice po retcima. Neka su elementi matrice $C = -D^{-1}(L+U)$ oblika

$$c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}.$$

Koristeći teorem 2.8 vidimo da je

$$\|C\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{\|a_{ii}\|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Stoga stroga dijagonalna dominacija po retcima povlači da je $\|C\|_\infty < 1$, što nadalje implicira da je $\rho(C) < 1$, a to prema teoremu 2.9 znači da ova metoda konvergira.
Ako je matrica strogo dijagonalno dominantna po stupcima tj, ako vrijedi

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

onda je matrica A^* (adjungirana matrica matrice A) strogo dijagonalno dominantna po retcima odnosno

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

i metoda konvergira za A^*. Prema teoremu 2.9 to znači da je $\rho((-D^*)^{-1}(L^* + U^*)) < 1$. Budući da za bilo koju matricu C, matrice C, C^* i $D^{-1}C^*D$ imaju iste spektre, zaključujemo da je

$$\rho(-D^{-1}(L+U)) = \rho(-D^{-1}(L+U)D^{-1}D) = \rho(-(L+U)D^{-1}) = \rho((-D^*)^{-1}(L^* + U^*)) < 1$$

što povlači konvergenciju Jacobijeve metode za matricu A. $\square$

Teorem 2.12. *Ako vrijedi da je matrica A strogo dijagonalno dominantna matrica po retcima, tj. A zadovoljava $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$, onda Gauss-Seidelova metoda konvergira.*

Dokaz se može vidjeti u [6].

Teorem 2.13. *Ako je A strogo dijagonalno dominantna matrica po retcima, onde je i Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda konvergentna i vrijedi:*

$$\|C_{GS}\|_\infty \leq \|C_{Jacobi}\|_\infty < 1.$$

Prisjetimo se pojmova hermitske i pozitivno definitne matrice.

Definicija 2.14. *Matrica A je hermitska ako je $A^* = A$.*

Definicija 2.15. *Hermitska matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivno definitna ako vrijedi $x^*Ax > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Teorem 2.16. *Ako je matrica A hermitska i pozitivno definitna, tada Gauss-Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju $x^{(0)}$.*

Ne postoji nikakva generalizacija da je Gauss-Seidelova metoda brža od Jacobijeve, osim pod nekim uvjetima kada će to biti zadovoljeno. Dakle, to ne znači da će Gauss-Seidelova metoda konvergirati brže nego Jacobijeva za bilo koji problem $Ax = b$.

3 Implementacija iterativnih metoda u MATLAB

MATLAB (Matix Laboratory) je programski jezik visokih performansi namijenjen za tehničke proračune, računanje, vizualizaciju i programiranje u lako uporabljivoj okolini u kojoj su i problem i rješenje definirani poznatom matematičkom notacijom. MATLAB se koristi za razvoje algoritama, modeliranje, simulaciju, analizu i obradu podataka, vizualizaciju i razvoj aplikacija. Jedna od prednosti MATLAB-a je da njegov programski jezik omogućava izgradnju vlastitih alata, odnosno sami kreiramo vlastite funkcije i programe unutar njega. Unutar MATLAB-a nalazi se ogromna količina računalnih algoritama, cijeli programski jezik je matrično orijentiran, a grafički prikaz podataka omogućava odličnu 2D i 3D vizualizaciju.
U zadnjem poglavlju bit će predstavljene implementacije Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode unutar programskog jezika MATLAB.

3.1 Implementacija u MATLAB - Jacobijeva metoda

Da bi riješili sustav $Ax = b$ Jacobijevom metodom trebamo odrediti aproksimaciju $x^{(k)}$ tako da $\|\cdot\|$ reziduala u odnosu na točno rješenje bude manja od zadane tolerancije. Zapišimo kod za Jacobijevu metodu u MATLAB:

```
function[br_koraka,spec_rad] =Jacobi(A,b,x,tol)
% A je matrica sustava
% b je vektor slobodnih članova
```

```
% x je početna iteracija
% tol je tolerancija

d=diag(A);
D=diag(d);
N=A-D;
[n,n]=size(A);

for ii=1:n
    for jj=1:n
         C(ii,jj)=-(1/D(ii,ii))*N(ii,jj);
    end
end

e=eig(C);
spec_rad=max(abs(e));
br_koraka=0;
while norm(A*x-b,'inf')>=tol
        for kk=1:n
   x1=(1/D(kk,kk))*(b-N*x);
        end
        x=x1;
        br_koraka=br_koraka+1;
        greska(broj_koraka)=norm(A*x-b,'inf');
end
disp(sprintf('Broj iteracija Jacobijeve metode: %d',br_koraka))
```

Programski kod Jacobijeve metode, radi jednostavnijeg shvaćanja, bit će opisan i riječima. Jabobijeva metoda definirana je kao funkcija kojoj smo predali određene parametre. Matrice D i N predstavljaju rastav matrice A, a matrica C je matrica konvergencije Jacobijeve metode. Metoda konvergira ako je spektralni radijus matrice C manji od 1, odnosno na taj način dobivamo uvid u konvergenciju metode. Iduće na što nailazimo u programskom kodu je while petlja koja provjerava je li njezin uvjet zadovoljen tj. je li norma $\|\cdot\|_\infty$ rezidualan veća ili jednaka zadanoj toleranciji. While petlja se izvršava dokle god je zadovoljen uvjet. Nakon što je zadovoljen uvjet while petlje pokreće se for petlja kojom računamo sljedeću aproksimaciju te tom aproksimacijom brišemo prethodnu, a broj koraka povećavamo za jedan. Na kraju smo dobili aproksimaciju s obzirom na toleranciju i ispisujemo broj koraka.

3.2 Implementacija u MATLAB - Gauss-Seidelova metoda

Da bi riješili sustav $Ax = b$ Gauss-Seidelovom iterativnom metodom trebamo odrediti aproksimaciju $x^{(k)}$ tako da $\|\cdot\|$ reziduala u odnosu na točno rješenje bude manja od zadane tolerancije.Zapišimo kod za Gauss-Seidelovu metodu u MATLAB:

```
function[br_koraka,spec_rad] =gaussseidel(A,b,x,tol)
% A je matrica sustava
```

```
% b je vektor slobodnih članova
% x je početna iteracija
% tol je tolerancija

M=tril(A);
N=A-M;
[n,n]=size(A);
C=zeros(n);

for kk=1:n
    for ii=1:n
         C(kk,ii)=(-N(kk,ii)-M(kk,1:(kk-1))C*(1:(kk-1),ii)/M(kk,kk);
    end
end

e=eig(C);
spec_rad=max(abs(e));
br_koraka=0;
x1=x;
while norm(A*x-b,'inf')>=tol
        for ii=1:n
   x1(ii)=(1/A(ii,ii))*(b(ii)-A(ii,1:n)*x1+A(ii,ii)*x1(ii));
        end
        x=x1;
        br_koraka=br_koraka+1;
        greska(broj_koraka)=norm(A*x-b,'inf');
end
disp(sprintf('Broj iteracija Gauss-Seidelove metode: %d',br_koraka))
```

Gauss-Seidelova metoda također će biti opisana riječima. Definirana je kao funkcija kojoj smo predali određene parametre. Matrica A je rastavljena na donjetrokutastu matricu M i strogo gornjetrokutastu matricu N. Prolaskom kroz dvije for petlje računamo matricu konvergencije C. Ukoliko je njezin spektralni radijus manji od 1 Gauss-Seidelova metoda konvergira. Kao i kod programskog koda Jacobijeve metode i ovdje nailazimo na while petlju i provjeravanje njezinog uvjet. Pomoću for petlje računamo iduću aproksimaciju te vrijednost prošle aproksimacije postaje nova aproksimacija, a broj koraka povećamo za jedan. Dobivamo aproksimaciju uvjetovanu zadanom tolerancijom i ispisujemo broj koraka.

Unatoč tome što je Jacobijeva metoda većinom sporija od Gauss-Seidelove metode, ne postoji nikakva generalizacija te vrste. Brzina konvergencije metode je veća što je spektralni radijus manji.

Literatura

[1] R. Scitovski, Numerička matematika, Sveučilište J.J.Strossmayera, Odjel za Matematiku, Osijek, 2015.

[2] D. Bakić, Linearna algebra, PMF, Matematički odjel, Zagreb, 2008.

[3] M. Rogina, S. Singer, S. Singer, Numerička analiza, PMF, Matematički odjel, Zagreb, 2003.

[4] N. Truhar, Numerička linearna algebra, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[5] Š.Ungar, Ne baš tako kratak Uvod u TEX s naglaskom na LATEX, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2002.

[6] N. Bosner, Iterativne metode za rješavanje linearnih sustava, diplomski rad, PMF, Matematički odjel, Zagreb, 2001.