Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Katarina Kopić

Slučajni vektor

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Katarina Kopić

Slučajni vektor

Završni rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovome radu ćemo generalizirati pojam slučajne varijable na n-dimenzionalan prostor, odnosno promatrat ćemo slučajni vektor. Poznato je da slučajnu varijablu možemo u potpunosti opisati pomoću njezine funkcije distribucije, a također ćemo pomoću odgovarajućeg oblika funkcije distribucije opisati i slučajni vektor te pokazati svojstva navedene funkcije. Definirat ćemo posebno diskretan te posebno neprekidan slučajni vektor i promotriti njihova svojstva. Pogledat ćemo kako zadati diskretan slučajni vektor pomoću tablice distribucije te kako definirati marginalne distribucije. Također ćemo se osvrnuti na zadavanje neprekidnog slučajnog vektora te ćemo definirati marginalne gustoće. Na kraju rada ćemo se baviti numeričkim karakteristikama slučajnog vektora, od kojih su među važnijima očekivanje i kovarijanca te ćemo definirati kovarijacijsku matricu i korelacijsku matricu koje se u praksi često koriste.

Ključne riječi

Slučajni vektor, n-dimenzionalan slučajni vektor, dvodimenzionalan slučajni vektor, diskretan slučajni vektor, neprekidan slučajni vektor, funkcija distribucije, tablica distribucije, marginalne distribucije, marginalne gustoće, očekivanje, momenti, kovarijanca, koeficijent korelacije, kovarijacijska matrica, korelacijska matrica.

Abstract

In the following paper we generalize the notion of a random variable to an n-dimensional space, observing a random vector. Based on the notion that a random variable can be fully described using its distribution function, we use a distribution function to describe a random vector and observe its properties. We separately define a discrete and a continuous random vector and focus on their properties. In addition, we consider the assignment of a discrete random vector using a distribution table and the definition of marginal distributions. Furthermore, we look at how continuous random vectors can be assigned, and how marginal densities can be defined. The paper concludes with numerical characteristics of a random vector, most importantly the expectation and covariance as well as definitions of a covariance matrix and a correlation matrix often used in practice.

Key words

Random vector, n-dimensional random vector, two-dimensional random vector, discrete random vector, continuous random vector, distribution function, distribution table, marginal distributions, marginal densities, expectation, moments, covariance, correlation coefficient, covariance matrix, correlation matrix.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Slučajni vektor **2**
1.1 n-dimenzionalan slučajni vektor . . . 2
1.2 Dvodimenzionalan slučajni vektor . . . 3

2 Diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor **5**
2.1 Tablica distribucije . . . 5
2.2 Marginalne distribucije . . . 6
2.3 Nezavisnost i uvjetne distribucije . . . 8

3 Neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor **11**
3.1 Nezavisnost i uvjetne gustoće . . . 13

4 Numeričke karakteristike slučajnog vektora **15**
4.1 Momenti . . . 15
4.2 Kovarijanca i koeficijent korelacije . . . 15
4.3 Kovarijacijska i korelacijska matrica . . . 22

Literatura **25**

Uvod

Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je osnovni pojam u teoriji vjerojatnosti, koji nam služi kao alat za proučavanje i razumijevanje slučajnih pokusa i realnog svijeta. U slučajnim pokusima najčešće provodimo nekakva mjerenja te svakom ishodu slučajnog pokusa pridružujemo neki realan broj. U tu svrhu uvodimo pojam slučajne varijable, tj. realne funkcije na Ω koja zadovoljava određena svojstva. No, što ako u danom slučajnom pokusu pratimo nekoliko slučajnih varijabli? Veze između njih ne možemo dokučiti ako svaku slučajnu varijablu gledamo zasebno. U tom slučaju izradit ćemo matematički model koji će istovremeno moći opisivati nekoliko slučajnih varijabli. Kao motivaciju za uvođenje pojma slučajnog vektora promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1.
Iz šešira u kojem se nalazi n bijelih i n crnih kuglica izvlačimo dvije kuglice bez vraćanja natrag u šešir. Koristit ćemo slučajne varijable X i Y kako bismo opisali ovaj slučajan pokus. Neka X prima vrijednost 1 ukoliko je prva izvučena kuglica bijela te 0 ukoliko je prva izvučena kuglica crna. Slično, neka Y prima vrijednost 1 ukoliko je druga izvučena kuglica bijela te 0 ukoliko je druga izvučena kuglica crna.

Ako rezultate promatramo kao uređeni par (X,Y), gdje je prva koordinata slučajna varijabla X te druga koordinata slučajna varijabla Y, tada je skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

Korištenjem formule za uvjetnu vjerojatnost $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B),\ \ P(B) > 0$, *lako možemo izračunati vjerojatnosti ovog slučajnog pokusa:*

$$\begin{aligned}
p_{00} &= P(X=0, Y=0) = P((X,Y)=(0,0)) = \tfrac{n}{n+n} \cdot \tfrac{n-1}{n+n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n-1}{2n-1},\\
p_{01} &= P(X=0, Y=1) = P((X,Y)=(0,1)) = \tfrac{n}{n+n} \cdot \tfrac{n}{n+n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n}{2n-1},\\
p_{10} &= P(X=1, Y=0) = P((X,Y)=(1,0)) = \tfrac{n}{n+n} \cdot \tfrac{n}{n+n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n}{2n-1},\\
p_{11} &= P(X=1, Y=1) = P((X,Y)=(1,1)) = \tfrac{n}{n+n} \cdot \tfrac{n-1}{n+n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n-1}{2n-1}.
\end{aligned}$$

■

Također, pojam slučajnog vektora možemo pronaći i u statistici te ga vežemo uz pojam slučajnog uzorka. **Slučajni uzorak** definiramo kao niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Realizaciju slučajnog uzorka (slučajnog vektora) nazivamo **opaženi uzorak** (za više informacija o slučajnom uzorku čitatelj može pogledati [2]).

1 Slučajni vektor

1.1 n-dimenzionalan slučajni vektor

U jednodimenzionalnom prostoru definirali smo slučajnu varijablu pomoću Borelove σ-algebre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ na skupu $\mathbb{R}$, odnosno kao funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$, na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tako da vrijedi $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. U nastavku ćemo, zbog boljeg razumijevanja, ponoviti definiciju Borelove σ-algebre, no najprije ćemo se prisjetiti definicije σ-algebre.

Definicija 1.1. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ prostor elementarnih događaja. Za familiju $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω kažemo da je σ-algebra skupova na Ω ukoliko vrijedi:*

σ1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,

σ2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na komplementiranje),*

σ3. *Za* $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F},\ I \subseteq \mathbb{N}$ *vrijedi* $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na prebrojive unije).*

Iz prethodne definicije možemo lako uočiti sljedeće:

1. $\emptyset \in \mathcal{F} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} \emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$,
2. $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} ({A_i}^c, i \in I) \subseteq \mathcal{F} \overset{\sigma 3}{\Longrightarrow} \bigcup\limits_{i\in I} {A_i}^c \in \mathcal{F}$
$$\underset{\text{i } \sigma_2}{\overset{\text{DeMorgan}}{\Longrightarrow}} \bigcap_{i\in I} ({A_i}^c)^c = \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F},$$
3. *Za* $A, B \in \mathcal{F} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} A^c, B^c \in \mathcal{F} \implies A \setminus B = A \bigcap B^c \in \mathcal{F}$.

Dakle, σ-algebra je zatvorena na sve osnovne skupovne operacije.

Definicija 1.2. *Borelova σ-algebra $\mathcal{B}^n(\mathbb{R})$ je σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ generirana familijom svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}^n$, pri čemu elemente od $\mathcal{B}^n(\mathbb{R})$ zovemo Borelovi skupovi na $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Svaka funkcija $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ za koju je skup $\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in B\}$ događaj u $\mathcal{F}$ tj.*

$$\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},\ \forall B \in \mathcal{B}^n(\mathbb{R}),$$

odnosno $\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}^n(\mathbb{R})$ naziva se n**-dimenzionalan slučajni vektor** *(ili, kraće,* **slučajni vektor***).*

Propozicija 1.1. *Neka je $\mathbb{X} \equiv (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ funkcija. Tada je $\mathbb{X}$ slučajni vektor onda i samo onda ako je X_i slučajna varijabla za svaki $i = 1, 2, ..., n$.*

Dokaz.

$\Longrightarrow$
Neka je $\mathbb{X}$ slučajni vektor. Za proizvoljan $i = 1, 2, ..., n$ te $x_i \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$X_i^{-1}((-\infty, x_i)) = \mathbb{X}^{-1}((-\infty, \boldsymbol{a})) \in \mathcal{F},$$

gdje je $\boldsymbol{a} = (\infty, ..., \infty, x_i, \infty, ..., \infty)$. Teorem 8.1. (*ii*) (vidi [5, str. 235]) tvrdi da je gornji uvjet nužan i dovoljan kako bi X_i bila slučajna varijabla.

$\Longleftarrow$
Neka je X_i slučajna varijabla, za svaki $i = 1, 2, ..., n$ te neka je $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$\mathbb{X}^{-1}((-\infty, \boldsymbol{x}]) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}((-\infty, x_i]) \in \mathcal{F}.$$

Teorem 8.2. (*iii*) (vidi [5, str. 237]) tvrdi da je gornji uvjet nužan i dovoljan kako bi $\mathbb{X}$ bio slučajni vektor.

$\square$

Iz prethodne propozicije slijedi da je n-dimenzionalan slučajni vektor na Ω uređena n-torka slučajnih varijabli na Ω.

Analogno kao kod slučajne varijable, vjerojatnosna svojstva slučajnog vektora opisujemo funkcijom distribucije.

Definicija 1.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor te* $\mathbb{X} \equiv (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *slučajni vektor. Za funkciju* $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$*, definiranu s*

$$F(x_1, ..., x_n) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

kažemo da je **funkcija distribucije slučajnog vektora** $\mathbb{X}$.

U nastavku rada ćemo, zbog jednostavnosti, promatrati dvodimenzionalan slučajni vektor.

1.2 Dvodimenzionalan slučajni vektor

Specijalno, za $n = 2$ govorimo o dvodimenzionalnom slučajnom vektoru, tj. za funkciju $\mathbb{Z} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z} = (X, Y)$, koja zadovoljava Definiciju 1.3. kažemo da je dvodimenzionalan slučajni vektor. Kako bismo preciznije opisali ovakav vektor, potrebno je uvesti pojam funkcije distribucije dvodimenzionalnog slučajnog vektora, koji odmah slijedi iz Definicije 1.4.

Definicija 1.5. *Za funkciju* $F_{\mathbb{Z}} = F_{X,Y} = F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ *definiranu s*

$$F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, x_2) = P(\mathbb{Z} \leq \boldsymbol{x}) = P(X \leq x_1, Y \leq x_2), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

kažemo da je funkcija distribucije slučajnog vektora $\mathbb{Z} = (X, Y)$.

Sljedeći teorem nam govori koja svojstva ima funkcija distribucije slučajnog vektora.

Teorem 1.1. *Neka je $\mathbb{Z} = (X, Y)$ dvodimenzionalan slučajni vektor te F pripadna funkcija distribucije. Tada vrijedi:*

1. *Za realne brojeve x_1, x_2, y takve da je $x_1 < x_2$, vrijedi $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$.*

2. *Za realne brojeve x, y_1, y_2 takve da je $y_1 < y_2$, vrijedi $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$.*

3. $$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = F(-\infty, y) = 0$$
$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty) = 0$$
$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = 1.$$

4. *Neprekidnost zdesna u svakoj varijabli:*
$$\lim_{x \downarrow x_0} F(x, y_0) = \lim_{y \downarrow y_0} F(x_0, y) = F(x_0, y_0).$$

Dokaz.

1. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_1 < x_2$. Tada je $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$. Iz ovoga slijedi
$$\{X \leq x_1\} \cap \{Y \leq y\} \subseteq \{X \leq x_2\} \cap \{Y \leq y\}.$$
Zbog monotonosti vjerojatnosti slijedi: $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$.

2. Dokaz ove tvrdnje je sličan dokazu prethodne tvrdnje.

3. Događaji $\{X \leq -\infty, Y \leq y\} = \emptyset$, $\{X \leq x, Y \leq -\infty\} = \emptyset$ su nemogući događaji. Kako je vjerojatnost nemogućeg događaja jednaka nula ($P(\emptyset) = 0$), slijede prva i druga jednakost.
Događaj $\{X \leq \infty, Y \leq \infty\} = \Omega$ je siguran događaj. Budući da je vjerojatnost sigurnog događaja jednaka jedan ($P(\Omega) = 1$), slijedi posljednja jednakost.

4. Neka je $x > x_0$. Tada je:
$$\begin{aligned} F(x, y_0) - F(x_0, y_0) &= P(X \leq x, Y \leq y_0) - P(X \leq x_0, Y \leq y_0) \\ &= P(\{X \in (-\infty, x]\} \cap \{Y \leq y_0\}) - P(\{X \in (-\infty, x_0]\} \cap \{Y \leq y_0\}) \\ &= P(\{X \in (x_0, x]\} \cap \{Y \leq y_0\}). \end{aligned}$$
Za monotono padajući niz $(a_n, n \in \mathbb{N})$, takav da je $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, vrijedi:
$$\lim_{x \downarrow x_0} (F(x, y_0) - F(x_0, y_0)) = \lim_{n \to \infty} P(\{X \in (x_0, x_0 + a_n]\} \cap \{Y \leq y_0\})$$
$$= P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \in (x_0, x_0 + a_n]\} \cap \{Y \leq y_0\}\right) = P(\emptyset) = 0,$$
odakle slijedi tvrdnja.

$\square$

S obzirom na sliku slučajne varijable ($\mathcal{R}(X)$) razlikovali smo diskretnu i neprekidnu slučajnu varijablu. Stoga ćemo u nastavku promatrati diskretan te neprekidan (dvodimenzionalan) slučajni vektor.

2 Diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor

U ovom poglavlju ćemo proučavati diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor. Diskretan slučajni vektor (X, Y) prima vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa. Dakle, slika od (X, Y) je dana s

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : (i,j) \in I\}, \quad I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \tag{1}$$

Pri tome ćemo poznavati vjerojatnosna svojstva (tj. funkciju distribucije) ukoliko su nam poznate sljedeće vjerojatnosti:

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad (i,j) \in I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

pri čemu mora vrijediti sljedeće:

- $p_{ij} \geq 0$, za sve $(i,j) \in I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1.$

Niz brojeva (p_{ij}) nazivamo **distribucija diskretnog slučajnog vektora** (X, Y).

Za funkciju distribucije diskretnog slučajnog vektora (X, Y), $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, vrijedi:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}. \end{aligned}$$

2.1 Tablica distribucije

U nastavku rada ćemo, zbog jednostavnosti, pretpostaviti da diskretan slučajni vektor prima vrijednosti iz konačnog skupa, tj.

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, ..., n, \ j = 1, 2, ...m\}.$$

Tada se distribucija slučajnog vektora može prikazati tablicom

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\dots$	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_2, y_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$

Tablica 1: Tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora (X, Y) koji prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, ..., n, \ j = 1, 2, ...m\}$.

koju nazivamo **tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora** (X, Y).

Prethodno se može lako generalizirati na slučaj kada slučajni vektor prima vrijednosti iz prebrojivog skupa, tj. ukoliko je slika slučajnog vektora dana s (1) te se tada tablica distribucije zapisuje na sljedeći način:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\dots$
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\dots$	$p(x_1, y_m)$	$\dots$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_2, y_m)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Tablica 2: Tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora (X, Y) koji prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X, Y) = \{(x_i, y_j) : (i, j) \in I\},\ \ I \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2.2 Marginalne distribucije

Marginalnim distribucijama nazivamo distribucije svake komponente (tj. slučajne varijable) slučajnog vektora (X, Y).

Promotrimo kako iz distribucije slučajnog vektora (X, Y) možemo dobiti marginalne distribucije.

Neka je (X, Y) diskretan slučajni vektor koji prima vrijednosti iz konačnog skupa

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m\}$$

te neka je distribucija slučajnog vektora dana s:

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j),\ \ i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m.$$

Kako bismo dobili distribuciju slučajne varijable X, računamo vrijednosti koje predstavljaju sumu i-tog retka u tablici distribucije slučajnog vektora (X, Y):

$$a_i = P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{j=1}^{m} \{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}.$$

Na sličan način dobivamo distribuciju slučajne varijable Y. Međutim, računamo vrijednosti koje predstavljaju sumu j-tog stupca u tablici distribucije slučajnog vektora (X, Y):

$$b_j = P(Y = y_j) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Tablicu distribucije možemo proširiti tako da upisujemo u margine tablice vrijednosti koje smo gore izračunali te se zato distribucije nazivaju marginalne distribucije.

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	a_i
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\dots$	$p(x_1, y_m)$	a_1
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_2, y_m)$	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$	a_n
b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_m	1

Tablica 3: Proširena tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora (X, Y) s marginalnim distribucijama.

Iz Tablice 3. možemo vidjeti kako izgledaju distribucije slučajnih varijabli X i Y s konačnom slikom:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}.$$

Pogledajmo sada na primjeru kako izgleda tablica distribucije slučajnog vektora (X, Y) te distribucije slučajnih varijabli X i Y.

Primjer 2.1.
Slučajni pokus se sastoji od jednog bacanja pravilno izrađenog novčića te jednog izvlačenja kuglice iz šešira. U šeširu se nalaze tri kuglice: jedna kuglica crvene boje, jedna kuglica bijele boje te jedna kuglica plave boje.

Rješenje:

Skup svih elementarnih događaja ovog pokusa jest:

$$\Omega = \{(P, C), (P, B), (P, P), (G, C), (G, B), (G, P)\}.$$

Neka slučajna varijabla X prima vrijednost 0 ako se prilikom bacanja novčića okrenulo pismo, a 1 ako se okrenula glava te neka slučajna varijabla Y prima vrijednost 0 ako je izvučena kuglica crvene boje, 1 ako je izvučena kuglica bijele boje te 2 ukoliko je izvučena kuglica plave boje. Tada je:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ p_{11} &= P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ p_{01} &= P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

odnosno

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{0, 1\}, \; j \in \{0, 1, 2\}.$$

Distribucija slučajnog vektora (X,Y) je dana sljedećom tablicom:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

a proširena tablica distribucije slučajnog vektora (X,Y) s

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Distribucije slučajnih varijabli X i Y dane su s

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

■

2.3 Nezavisnost i uvjetne distribucije

Prilikom proučavanja veza između komponenti slučajnog vektora, ponekad nam nisu dovoljne samo tablica distribucije i marginalne distribucije. Stoga ćemo definirati uvjetne distribucije slučajnog vektora iz razloga što nas zanima distribucija slučajne varijable X s obzirom na poznatu vrijednost slučajne varijable Y.

Definicija 2.1. *Neka je (X,Y) diskretan slučajni vektor. Za slučajne varijable X i Y kažemo da su nezavisne ukoliko vrijedi*

$$p_{ij} = a_i \cdot b_j, \quad i = 1,2,...,n, \; j = 1,2,...,m.$$

Nadalje je:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i, \\ E[Y] &= \mu_2 = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot b_j, \\ \mathrm{Var}(X) &= \sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2 \cdot a_i, \\ \mathrm{Var}(Y) &= \sigma_2^2 = \sum_{j=1}^{m} (y_j - \mu_2)^2 \cdot b_j. \end{aligned}$$

Ukoliko je $b_j > 0$, tada se diskretna distribucija s konačnim skupom vrijednosti

$$\mathcal{R}(X|y_j) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

i pripadnim vjerojatnostima

$$P_{X|Y=y_j}(x_i) = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{b_j}, \quad i = 1,2,...,n,$$

naziva **uvjetna distribucija komponente** *X za fiksan y_j.*

Broj $E[X|y_j] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{p_{ij}}{b_j}$ *se naziva* **uvjetno očekivanje komponente** X *za fiksan* y_j.

Analogno, ukoliko je $a_i > 0$*, tada se diskretna distribucija s konačnim skupom vrijednosti*

$$\mathcal{R}(Y|x_i) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$$

i pripadnim vjerojatnostima

$$P_{Y|X=x_i}(y_j) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{p_{ij}}{a_i}, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

naziva **uvjetna distribucija komponente** Y *za fiksan* x_i.

Broj $E[Y|x_i] = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \cdot \frac{p_{ij}}{a_i}$ *se naziva* **uvjetno očekivanje komponente** Y *za fiksan* x_i.

Pogledajmo na primjeru kako se određuju uvjetne distribucije slučajnog vektora.

Primjer 2.2.
U šeširu se nalazi 25 papirića. Na svakom papiriću je napisan jedan od brojeva $1, 2, ..., 25$. *Nasumce se izvlači jedan papirić iz šešira. Neka slučajna varijabla* X *prima vrijednost 0 ukoliko izvučeni broj nije djeljiv s 3 te 1 ukoliko je izvučeni broj djeljiv s 3. Nadalje, neka slučajna varijabla* Y *prima vrijednost 0 ukoliko je izvučeni broj paran te 1 ukoliko je neparan.*

Odredimo:

a) *distribuciju slučajnog vektora* (X, Y),

b) *marginalne distribucije komponenti* X *i* Y,

c) *vjerojatnost da je izvučeni broj djeljiv s 3, uz uvjet da je paran.*

Rješenje:

a) Slika slučajnog vektora je

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Među brojevima $1, ..., 25$ imamo 8 parnih brojeva koji nisu djeljivi s 3, 9 neparnih brojeva koji nisu djeljivi s 3 te 4 parna i 4 neparna broja koja su djeljiva s 3.

Na temelju klasične definicije vjerojatnosti je tada:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{8}{25},$$

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{9}{25},$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{4}{25},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{25}.$$

Distribuciju diskretnog slučajnog vektora (X, Y) možemo zapisati sljedećom tablicom, iz koje se odmah mogu odrediti i marginalne distribucije komponenti X i Y:

$X \setminus Y$	0	1	
0	$\frac{8}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{17}{25}$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$
	$\frac{12}{25}$	$\frac{13}{25}$	1

b) Marginalne distribucije komponenti X i Y su

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{17}{25} & \frac{8}{25} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{12}{25} & \frac{13}{25} \end{pmatrix}.$$

c) Traži se $P(X = 1|Y = 0)$. Na temelju definicije uvjetne vjerojatnosti proizlazi:

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{1}{3}.$$

■

3 Neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor

Za razliku od diskretnog dvodimenzionalnog slučajnog vektora koji prima vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa, neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor prima vrijednosti u skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Definicija 3.1. *Za dvodimenzionalan slučajni vektor (X, Y) kažemo da je neprekidan ukoliko postoji nenegativna realna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, takva da se funkcija distribucije slučajnog vektora (X, Y) može zapisati u sljedećem obliku*

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv.$$

Pri tome funkciju f nazivamo **funkcija gustoće** *neprekidnog dvodimenzionalnog slučajnog vektora te su njome potpuno određena vjerojatnosna svojstva takvog vektora.*

Ukoliko je slučajni vektor (X, Y) neprekidan s pripadnom funkcijom gustoće f, tada će njegove marginalne distribucije također biti neprekidnog tipa.

Funkcije gustoće marginalnih distribucija možemo izračunati iz funkcije gustoće f slučajnog vektora (X, Y), na sljedeći način:

$$P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, du\, dv = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, dv \right) du.$$

Označimo li s

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)\, dv,$$

tada je f_X funkcija gustoće slučajne varijable X. Također, funkciju f_X zovemo **marginalna funkcija gustoće** slučajne varijable X slučajnog vektora (X, Y).

Na sličan način dobivamo **marginalnu funkciju gustoće** slučajne varijable Y slučajnog vektora (X, Y)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)\, du.$$

Pogledajmo na primjeru kako odrediti marginalne funkcije gustoće komponenti slučajnog vektora.

Primjer 3.1.
Neka je funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) zadana formulom:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & za\ x > 0\ i\ y > 0 \\ 0, & za\ preostale\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Odredimo marginalne funkcije gustoće komponenti X i Y.

Rješenje:

Marginalna funkcija gustoće komponente X slučajnog vektora (X,Y) je

$$f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dy.$$

Uvođenjem supstitucije

$$u = -x(y+1) \to dy = -\frac{1}{x}du$$

$$y \to 0, \;\; u \to -x$$

$$y \to \infty, \;\; u \to -\infty$$

dobivamo

$$f_X(x) = -\int_{-x}^{-\infty} e^u\,du = \int_{-\infty}^{-x} e^u\,du = e^u\Big|_{u=-\infty}^{-x} = e^{-x} - e^{-\infty} = e^{-x}.$$

Marginalna funkcija gustoće komponente Y slučajnog vektora (X,Y) je

$$f_Y(y) = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}\,dx.$$

Integral rješavamo metodom parcijalne integracije te imamo

$$u = x \to du = dx$$

$$dv = e^{-x(y+1)}dx \to v = -\frac{e^{-x(y+1)}}{y+1}.$$

Sada je

$$f_Y(y) = -x\frac{e^{-x(y+1)}}{y+1}\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty \frac{e^{-x(y+1)}}{y+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x(y+1)}}{y+1}\,dx. \tag{2}$$

Uz supstituciju

$$u = -x(y+1) \to dx = \frac{du}{-y-1}$$

$$x \to 0, \;\; u \to 0$$

$$x \to \infty, \;\; u \to -\infty$$

iz (2) slijedi

$$\frac{1}{(y+1)^2}\int_{-\infty}^{0} e^u\,du = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

■

3.1 Nezavisnost i uvjetne gustoće

Kod diskretnog slučajnog vektora imali smo uvjetne distribucije, no kako neprekidan slučajni vektor opisujemo funkcijom gustoće, u tom smislu ćemo ovdje definirati uvjetne gustoće.

Definicija 3.2. *Neka je (X, Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće f te funkcijom distribucije F. Za slučajne varijable X i Y kažemo da su nezavisne ako za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi*

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

gdje su F_X, F_Y marginalne funkcije distribucije slučajnog vektora.

Tada je i

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

pri čemu su f_X, f_Y marginalne funkcije gustoće slučajnog vektora.

Nadalje, ako je y realan broj takav da je $f_Y(y) > 0$, tada funkciju

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

zovemo **uvjetna gustoća komponente** *X za fiksan y.*

Analogno, ako je x realan broj takav da je $f_X(x) > 0$, tada funkciju

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

zovemo **uvjetna gustoća komponente** *Y za fiksan x.*

Brojeve

$$E[X|Y = y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx,$$

odnosno

$$E[Y|X = x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X=x}(y)\, dy$$

zovemo **uvjetno očekivanje komponente** *X za fiksan y, odnosno* **uvjetno očekivanje komponente** *Y za fiksan x.*

Pogledajmo na primjeru kako se određuju uvjetne gustoće neprekidnog slučajnog vektora.

Primjer 3.2.
Ukoliko neprekidnom slučajnom vektoru (X, Y) pripada funkcija gustoće zadana formulom:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)}$$

kažemo da (X, Y) ima dvodimenzionalnu normalnu distribuciju $\mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ s parametrima $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $0 \leq \rho < 1$. Odredimo uvjetne gustoće dvodimenzionalnog normalnog slučajnog vektora.

Rješenje:

Marginalne distribucije komponenti X i Y su normalne distribucije $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Odredimo najprije uvjetnu gustoću komponente X za fiksan $y \in \mathbb{R}$:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \cdot e^{-\frac{\left(x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da je uvjetna gustoća komponente X, uz uvjet $Y = y$, normalna distribucija

$$\mathcal{N}(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)).$$

Analogno, uvjetna gustoća komponente Y, uz uvjet $X = x$, je normalna distribucija

$$\mathcal{N}(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)).$$

Iz danih izraza odmah slijedi:

$$E[X|Y=y] = \mu_1 + \rho\tfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),$$

$$E[Y|X=x] = \mu_2 + \rho\tfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=y) = \sigma_1^2(1-\rho^2),$$

$$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \sigma_2^2(1-\rho^2).$$

■

4 Numeričke karakteristike slučajnog vektora

U ovom poglavlju ćemo definirati momente slučajnog vektora, odnosno osnovne numeričke karakteristike slučajnog vektora. Znamo kako momenti slučajne varijable pobliže opisuju slučajnu varijablu te ćemo u nastavku, zbog moguće kompliciranosti funkcije distribucije, odnosno tablice distribucije ili funkcije gustoće slučajnog vektora, vidjeti kako momenti slučajnog vektora daju dodatne informacije o njemu. Kao i do sada, rezultati se odnose na diskretan te neprekidan slučajni vektor.

4.1 Momenti

Definicija 4.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor te* $\mathbb{Z} \equiv (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *dvodimenzionalan slučajni vektor. Očekivanje slučajnog vektora* (X, Y) *je vektor očekivanja komponenti tog slučajnog vektora*

$$E[\mathbb{Z}] = \begin{bmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{bmatrix}.$$

Definicija 4.2. *Neka je* (X, Y) *slučajni vektor. Očekivanje slučajne varijable* $X^k Y^l$ *(ukoliko postoji) označavamo s*

$$\mu_{kl} = E[X^k Y^l], \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

i nazivamo **ishodišni moment reda** (k, l) *slučajnog vektora* (X, Y)*.*

Centralni moment reda (k, l) *slučajnog vektora* (X, Y) *je očekivanje (ukoliko postoji)*

$$m_{kl} = E[(X - E[X])^k (Y - E[Y])^l].$$

Napomena 4.1. *Ishodišni momenti reda* $(1, 0), (0, 1)$ *te centralni momenti reda* $(2, 0), (0, 2)$ *daju očekivanje te varijancu komponenti slučajnog vektora* (X, Y)*, tj. vrijedi*

$$\begin{aligned}
\mu_{10} &= E[X], \\
\mu_{01} &= E[Y], \\
m_{20} &= E[(X - E[X])^2] = \mathrm{Var}(X), \\
m_{02} &= E[(Y - E[Y])^2] = \mathrm{Var}(Y).
\end{aligned}$$

4.2 Kovarijanca i koeficijent korelacije

U proučavanju slučajnih vektora posebno nam je bitan centralni moment reda $(1, 1)$ kojeg nazivamo **korelacijski moment** ili **kovarijanca** slučajnog vektora (X, Y), a koji je definiran izrazom

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Kako bismo jednostavnije računali kovarijancu možemo ju zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\ &= E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y].\end{aligned}$$

Pogledajmo na primjeru kako se računa kovarijanca slučajnog vektora.

Primjer 4.1.
Slučajni vektor (X,Y) je zadan tablicom distribucije

$X \setminus Y$	*1*	*2*	*5*	
-2	*0.14*	*0.11*	*0.05*	*0.30*
0	*0.15*	*0.10*	*0*	*0.25*
1	*0.10*	*0.10*	*0.25*	*0.45*
	0.39	*0.31*	*0.30*	*1*

Odredimo kovarijancu od (X,Y).

Rješenje:

Distribucije slučajnih varijabli X i Y dane su s

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.30 & 0.25 & 0.45 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0.39 & 0.31 & 0.30 \end{pmatrix}.$$

Lako je izračunati očekivanje slučajne varijable X:
$E[X] = -2 \cdot 0.30 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.45 = -0.15$

te očekivanje slučajne varijable Y:
$E[Y] = 1 \cdot 0.39 + 2 \cdot 0.31 + 5 \cdot 0.30 = 2.51.$

Nadalje, slika slučajne varijable XY je očito $\mathcal{R}(XY) = \{-10, -4, -2, 0, 1, 2, 5\}$.

Iz prethodnih podataka dobivamo da je

$$\begin{aligned} P(XY=-10) &= 0.05, \\ P(XY=-4) &= 0.11, \\ P(XY=-2) &= 0.14, \\ P(XY=0) &= 0.25, \\ P(XY=1) &= 0.10, \\ P(XY=2) &= 0.10, \\ P(XY=5) &= 0.25. \end{aligned}$$

Dakle, tablica distribucije slučajne varijable XY je oblika

$$XY = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0.05 & 0.11 & 0.14 & 0.25 & 0.10 & 0.10 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijable XY je:
$E[XY] = -10 \cdot 0.05 - 4 \cdot 0.11 - 2 \cdot 0.14 + 0 \cdot 0.025 + 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.10 + 5 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.25 = 0.33$

te je tada kovarijanca slučajnog vektora (X, Y):
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.33 - (-0.15) \cdot 2.51 = 0.7065.$

■

Pojam kovarijance vežemo uz pojam nezavisnosti slučajnih varijabli. Stoga ćemo u sljedećem teoremu iskazati i dokazati vezu između kovarijance i nezavisnosti slučajnih varijabli.

Teorem 4.1. *Neka je (X, Y) dvodimenzionalan slučajni vektor te neka postoje $E[X]$ i $E[Y]$. Ukoliko su slučajne varijable X i Y nezavisne, tada je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.*

Dokaz.

Neka su slučajne varijable X i Y nezavisne. Tada vrijedi $E[XY] = E[X]E[Y]$ (vidi [1, str. 147]) te je kovarijanca slučajnog vektora jednaka

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - E[XY] = 0.$$

□

Korolar 4.1. *Ukoliko je kovarijanca slučajnog vektora (X, Y) različita od nule tada su slučajne varijable X i Y nužno zavisne.*

Prethodne tvrdnje u nastavku ćemo ilustrirati na primjerima.

Primjer 4.2. *Iz šešira u kojem se nalaze četiri papirića označena brojevima 1,2,3 i 4 izvlačimo dva papirića tako da prvi izvučeni papirić vratimo u šešir prije izvlačenja drugog papirića. Rezultat izvlačenja modeliran je slučajnim vektorom (X, Y), gdje X predstavlja rezultat prvog izvlačenja, a Y rezultat drugog izvlačenja. Distribucija tog slučajnog vektora dana je sljedećom tablicom:*

$X \setminus Y$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Odredimo jesu li X i Y nezavisne.

Rješenje:

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$$
$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 1) \cdot P(Y = 2)$$
$$\vdots$$

Daljnjim raspisom vidimo da vrijedi $P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$, za $i, j = 1, 2, 3, 4$, što prema Teoremu 3.2. (vidi [1, str. 145]) znači da su X i Y nezavisne te prema Teoremu 4.1. slijedi da je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

■

Primjer 4.3.
Prisjetimo se Primjera 4.1. u kojem smo imali slučajni vektor (X, Y) zadan odgovarajućom tablicom distribucije. U tom primjeru smo odredili da je kovarijanca slučajnog vektora jednaka

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.7065 \neq 0.$$

Budući da je kovarijanca različita od nule, prema Korolaru 4.1. slučajne varijable X i Y iz tog primjera su nužno zavisne.

■

Napomena 4.2. *Općenito, obrat Teorema 4.1. ne vrijedi, tj. ukoliko je kovarijanca slučajnog vektora (X, Y) jednaka nuli, ne znači da su slučajne varijable X i Y nužno nezavisne.*

Primjer 4.4. *Neka je distribucija slučajnog vektora (X, Y) dana sljedećom tablicom:*

$X \setminus Y$	*-1*	*0*	*1*	
0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	*1*

Odredimo kovarijancu od (X, Y) te ispitajmo jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne.

Rješenje:

Marginalne distribucije komponenti slučajnog vektora (X, Y) su:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Očekivanje od X je $E[X] = \frac{1}{5}$, dok je očekivanje od Y jednako $E[Y] = 0$.

Primijetimo da je slika slučajne varijable XY jednaka $\mathcal{R}(XY) = \{-1, 0, 1\}$ te je njezina distribucija dana sljedećom tablicom:

$$XY = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Očekivanje od XY je $E[XY] = 0$ te je kovarijanca slučajnog vektora jednaka

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.$$

Slučajne varijable X i Y očito nisu nezavisne jer je npr.

$$P(X = 1, Y = -1) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = P(X = 1) \cdot P(X = -1).$$

■

Definicija 4.3. *Neka je (X,Y) slučajni vektor tako da je njegova kovarijanca jednaka nuli. Tada kažemo da su slučajne varijable X i Y* **nekorelirane**.

Napomena 4.3. *Nezavisnost komponenti slučajnog vektora povlači njihovu nekoreliranost, dok obrat tvrdnje općenito ne vrijedi.*

Također nam je u praksi, često od interesa promatrati kovarijancu standardiziranog oblika slučajnog vektora (X,Y). Stoga, neka je (X,Y) dvodimenzionalan slučajni vektor. Ako slučajne varijable X i Y imaju varijance $\sigma_X^2 \neq 0$ i $\sigma_Y^2 \neq 0$, tada ih možemo standardizirati (vidi [1, str. 103]).

Označimo li s $\mu_X = E[X]$, $\mu_Y = E[Y]$, postupkom standardizacije dobivamo vektor

$$(X_S, Y_S) = \left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right),$$

gdje σ_X i σ_Y predstavljaju standardne devijacije odgovarajućih komponenti slučajnog vektora.

Kovarijanca slučajnog vektora (X_S, Y_S) je jednaka

$$\operatorname{Cov}(X_S, Y_S) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

te označava **koeficijent korelacije** slučajnog vektora (X,Y) kojeg definiramo izrazom

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uvjete za postojanje kovarijance slučajnog vektora te tvrdi da se koeficijent korelacije uvijek nalazi u segmentu $[-1,1]$.

Teorem 4.2. *Neka je (X,Y) slučajni vektor takav da je $0 < E[X^2] < \infty$ i $0 < E[Y^2] < \infty$. Tada postoji kovarijanca danog slučajnog vektora te vrijede sljedeće nejednakosti:*

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1,$$

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2].$$

Dokaz.

Pretpostavimo da je (X,Y) slučajni vektor takav da su X i Y slučajne varijable s očekivanjem nula ($E[X]=0, E[Y]=0$) i varijancom jedan ($\operatorname{Var}(X)=1, \operatorname{Var}(Y)=1$). Ukoliko postoji kovarijanca tog slučajnog vektora, tada je ona jednaka

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY].$$

Također, varijance slučajnih varijabli X i Y su jednake $\operatorname{Var}(X) = E[X^2]$ i $\operatorname{Var}(Y) = E[Y^2]$.

Dakle, ukoliko postoji $E|XY|$ tada postoji kovarijanca.

Korištenjem nejednakosti $2|xy| \leq x^2 + y^2$ te primjenom monotonosti očekivanja dobivamo:

$$E|XY| \leq \frac{1}{2}(E[X^2] + E[Y^2]) < \infty.$$

Dakle, kovarijanca postoji. Dodatno imamo

$$|E[XY]| \leq E|XY| \leq \frac{1}{2}(E[X^2] + E[Y^2]) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Budući da su varijance slučajnih varijabli X i Y jednake jedan, tada je za ovaj slučajni vektor koeficijent korelacije jednak kovarijanci. Također, uočimo da su tvrdnje teorema ekvivalentne ukoliko je slučajni vektor (X, Y) standardiziran.

Nadalje, pretpostavimo da je (X, Y) bilo koji slučajni vektor. U tom slučaju možemo provesti postupak standardizacije, pri čemu standardizirani vektor (X_S, Y_S) zadovoljava uvjete prvog dijela dokaza. Dakle, postoji kovarijanca od (X_S, Y_S) te vrijedi

$$(E[X_S Y_S])^2 \leq E[{X_S}^2]E[{Y_S}^2] = 1. \tag{3}$$

Uz to vrijedi da je $X = \sigma_X X_S + \mu_X$, $Y = \sigma_Y Y_S + \mu_Y$, gdje su $\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y$ oznake za očekivanje i standardnu devijaciju odgovarajućih slučajnih varijabli.

Kako bismo provjerili postoji li kovarijanca slučajnog vektora (X, Y) trebamo odrediti postoji li očekivanje slučajne varijable XY:

$$\begin{aligned} E|XY| &= E|(\sigma_X X_S + \mu_X)(\sigma_Y Y_S + \mu_Y)| \\ &\leq \sigma_X \sigma_Y E|X_S Y_S| + \sigma_X |\mu_Y| E|X_S| + \sigma_Y |\mu_X| E|Y_S| + |\mu_X \mu_Y|. \end{aligned}$$

Dakle, vidimo da kovarijanca postoji.

Koeficijent korelacije standardiziranih slučajnih varijabli X i Y je jednak koeficijentu korelacije slučajnih varijabli X i Y te je stoga po prvom dijelu dokaza koeficijent korelacije po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak jedan.

Dokažimo sada drugu nejednakost. Primjenom (3), linearnosti očekivanja te znajući da je očekivanje standardizirane slučajne varijable jednako nula dobivamo:

$$\begin{aligned} (E[XY])^2 &= (E[(\sigma_X X_S + \mu_X)(\sigma_Y Y_S + \mu_Y)])^2 \\ &= (E[\sigma_X \sigma_Y X_S Y_S + \mu_Y \sigma_X X_S + \mu_X \sigma_Y Y_S + \mu_X \mu_Y])^2 \\ &= (\sigma_X \sigma_Y E[X_S Y_S] + \mu_Y \sigma_X E[X_S] + \mu_X \sigma_Y E[Y_S] + \mu_X \mu_Y)^2 \\ &= (\sigma_X \sigma_Y E[X_S Y_S] + \mu_X \mu_Y)^2 \\ &= \sigma_X^2 \sigma_Y^2 (E[X_S Y_S])^2 + 2\sigma_X \sigma_Y \mu_X \mu_Y E[X_S Y_S] + \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &\leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + 2\sigma_X \sigma_Y |\mu_X \mu_Y| + \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &\leq (\sigma_X^2 + \mu_X^2)(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) = E[X^2]E[Y^2]. \end{aligned}$$

□

U uvodnom dijelu smo rekli da veze između slučajnih varijabli ne možemo dokučiti ukoliko svaku slučajnu varijablu gledamo zasebno. Između njih može postojati linearna veza, a kako povezati linearnu vezu komponenti slučajnog vektora s koeficijentom korelacije slučajnog vektora promotrit ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 4.3. *Neka je (X,Y) slučajni vektor takav da je $0 < \sigma_X < \infty$ i $0 < \sigma_Y < \infty$. Kažemo da je veza između slučajnih varijabli X i Y linearna, tj. postoje realni brojevi a $(a \neq 0)$ i b takvi da je*

$$Y = aX + b$$

ako i samo ako je koeficijent korelacije po apsolutnoj vrijednosti jednak 1. Ukoliko je $a > 0$ tada je koeficijent korelacije 1, dok je u suprotnom jednak -1.

Dokaz.

Neka je (X,Y) slučajni vektor te neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, takvi da je $Y = aX + b$. Iz pretpostavki teorema možemo vidjeti da postoji kovarijanca te vrijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X])(aX + b - E[aX + b])] \\
&= E[(X - E[X])(aX + b - aE[X] - b)] \\
&= aE[(X - E[X])^2] \\
&= a \operatorname{Var}(X) \\
&= a\sigma_X^2.
\end{aligned}$$

Budući da je $\operatorname{Var}(Y) = a^2 \operatorname{Var}(X)$ (vidi [1, str. 93]) tada je

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a}{|a|}.$$

Dakle, ukoliko je $a > 0$ tada je $\rho_{X,Y} = 1$, a ukoliko je $a < 0$ tada je $\rho_{X,Y} = -1$.

Dokažimo sada obrat tvrdnje.

Pretpostavimo da je $\rho_{X,Y} = 1$ te definirajmo pomoćnu slučajnu varijablu Z s

$$Z = \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y.$$

Varijanca slučajne varijable Z je tada jednaka

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Z) &= E\left[\left(\frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y - E\left[\frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y - \frac{1}{\sigma_X} E[X] + \frac{1}{\sigma_Y} E[Y]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{\sigma_X}(X - E[X]) - \frac{1}{\sigma_Y}(Y - E[Y])\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_X^2} E[(X - E[X])^2] - \frac{2}{\sigma_X \sigma_Y} E[(X - E[X])(Y - E[Y])] + \frac{1}{\sigma_Y^2} E[(Y - E[Y])^2] \\
&= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} - 2\rho_{X,Y} + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2} = 1 - 2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, možemo vidjeti da je Z konstanta pa označimo $Z = c$. Tada vrijedi

$$c = \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y,$$

odnosno

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X - \sigma_Y c$$

te je time dokazano da je veza između X i Y linearna.

Za $\rho_{X,Y} = -1$ se analogno može dokazati linearnost veze slučajnih varijabli X i Y ukoliko definiramo pomoćnu slučajnu varijablu Z kao

$$Z = \frac{1}{\sigma_X} X + \frac{1}{\sigma_Y} Y.$$

□

4.3 Kovarijacijska i korelacijska matrica

Varijance i kovarijancu n-dimenzionalnog slučajnog vektora $\mathbb{X} \equiv (X_1, X_2, ..., X_n)$ zapisujemo u matričnom obliku. Matrica kovarijanci je generalizacija varijance slučajne varijable te se često koristi u praksi.

Definicija 4.4. *Neka je $\mathbb{Z} = (X, Y)$ dvodimenzionalan slučajni vektor.* **Kovarijacijska matrica** *ili* **matrica kovarijanci** *slučajnog vektora $\mathbb{Z}$ je definirana s*

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = E\left[(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}])(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}])^T\right].$$

Radi lakšeg računanja kovarijacijsku matricu možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X, Y) &= E\left[(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}])(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}])^T\right] \\ &= \begin{bmatrix} E[(X - E[X])^2] & E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ E[(Y - E[Y])(X - E[X])] & E[(Y - E[Y])^2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ \mathrm{Cov}(X, Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

U svrhu dokazivanja sljedećeg teorema, u kojem će biti navedena svojstva kovarijacijske matrice, potrebna nam je sljedeća definicija.

Definicija 4.5. *Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivno semidefinitna ukoliko za svaki netrivijalan vektor $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$) vrijedi*

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geq 0.$$

Ukoliko za svaki netrivijalan vektor $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$) vrijedi

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0,$$

tada kažemo da je matrica A pozitivno definitna.

Teorem 4.4. *(***Svojstva kovarijacijske matrice***)*
Kovarijacijska matrica ima sljedeća svojstva:

1. *Kovarijacijska matrica je simetrična.*

2. *Kovarijacijska matrica je pozitivno semidefinitna.*

Dokaz.

1. Budući da je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$ slijedi tvrdnja.

2. Neka je $\mathbb{Z} = (X,Y)$ dvodimenzionalan slučajni vektor. Nadalje, neka je $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ te definirajmo pomoćnu slučajnu varijablu

$$U = \boldsymbol{b}^T(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}]).$$

Tada vrijedi

$$0 \leq E[U^2] = E[UU^T] = \boldsymbol{b}^T E[(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}])(\mathbb{Z} - E[\mathbb{Z}])^T]\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T\,\mathbf{Cov}(X,Y)\boldsymbol{b}.$$

Dakle, kovarijacijska matrica je pozitivno semidefinitna. Dodatno, kovarijacijska matrica je pozitivno definitna ako i samo ako su sve njezine svojstvene vrijednosti pozitivne.

□

U istraživanju nam ponekad nije dovoljno samo poznavati korelaciju između dvije promatrane varijable, već nas zanima kako varijable međusobno utječu jedna na drugu. Stoga se izrađuje matrica korelacije koja nastaje nakon što se promatranjem međusobnog odnosa svih parova dvaju varijabli utvrdi njihova međusobna korelacija. Vrijednost na presjeku i-tog retka i j-tog stupca predstavlja koeficijent korelacije između varijabli u i-tom retku i j-tom stupcu. Dobivena matrica je simetrična, što je posljedica simetričnosti kovarijacijske matrice.

Definicija 4.6. *Neka je $\mathbb{Z} = (X,Y)$ dvodimenzionalan slučajni vektor te neka je $\mathbb{Z}_S$ standardizirani oblik slučajnog vektora $\mathbb{Z}$, tj.*

$$\mathbb{Z}_S = \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right).$$

Kovarijacijsku matricu slučajnog vektora $\mathbb{Z}_S$ nazivamo **korelacijska matrica** *ili* **matrica korelacije** *slučajnog vektora $\mathbb{Z}$ te ju označavamo s* $\mathbf{Corr}(X,Y)$*. Tada vrijedi*

$$\mathbf{Corr}(X,Y) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X,Y} \\ \rho_{X,Y} & 1 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo na primjeru kako dobivamo kovarijacijsku te korelacijsku matricu dvodimenzionalnog slučajnog vektora.

Primjer 4.5.
Neka je $\mathbb{Z} = (X, Y)$ slučajni vektor tako da je

$$\mathrm{Var}(X) = 9$$

$$\mathrm{Var}(Y) = 4$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 1.$$

Izračunajmo kovarijacijsku te korelacijsku matricu.

Rješenje:

Budući da je $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X) = 1$, tada je kovarijacijska matrica oblika

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Koeficijent korelacije slučajnog vektora (X, Y) je jednak

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

Tada je korelacijska matrica oblika

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}.$$

Dodatno, svojstvene vrijednosti kovarijacijske matrice su:

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{29} + 13}{2} \approx 3.81 > 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{29} + 13}{2} \approx 9.19 > 0.$$

Dakle, kovarijacijska matrica je pozitivno definitna.

$\blacksquare$

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] M. Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika*, PMF – Matematički odjel, Zagreb, 2006.

[3] M. Ilijašević, Ž. Pauše, *Riješeni primjeri i zadaci iz vjerojatnosti i statistike s pregledom osnovnih pojmova i formula*, Zagreb – poduzeće za grafičku djelatnost, Zagreb, 1990.

[4] J. D. Mališić, *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[6] Covariance matrix, StatLect. Dostupno na:
`https://www.statlect.com/fundamentals-of-probability/covariance-matrix`
(24. srpanj 2020.)

[7] Moments, The Analysis of Data, volume 1. Dostupno na:
`http://theanalysisofdata.com/probability/4_6.html`
(24. srpanj 2020.)

[8] Random Vectors, Probability Course. Dostupno na:
`https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_1_5_random_vectors.php`
(24. srpanj 2020.)

[9] Random Vectors, StatLect. Dostupno na:
`https://www.statlect.com/fundamentals-of-probability/random-vectors`
(24. srpanj 2020.)