Laplaceova transformacija

Mihalčić, Dominik

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dominik Mihalčić

Laplaceova transformacija

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dominik Mihalčić

Laplaceova transformacija

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s Laplaceovom transformacijom i njenim osnovnim svojstvima. Vidjet ćemo na kakve funkcije je primjenjiva i kako se računa Laplaceova transformacija nekih funkcija. Navest ćemo teoreme koji opisuju njeno djelovanje na derivaciju i integral funkcije te ćemo vidjeti kako pomoću nje odrediti granično ponašanje funkcije. Analizirat ćemo inverznu Laplaceovu transformaciju i upoznati neke metode njezinog određivanja, gdje ćemo se susresti s kompleksnom inverznom formulom. Na kraju ćemo navesti neke od primjena Laplaceove transformacije u matematici. Konkretnije, vidjet ćemo kako se pomoću nje rješavaju diferencijalne (obične i parcijalne) te integralne jednadžbe.

Ključne riječi: integralne transformacije, Laplaceova transformacija, diferencijalne jednadžbe, integralne jednadžbe.

Abstract

In this paper we will be introduced to Laplace transform and its basic properties. We will see to which functions it applies and how Laplace transform of some functions is determined. Theorems that describe its application to derivative and integral of a function will be stated. Also, it will be shown how to determine limiting values of a given function. We will analyse the inverse Laplace transform and introduce some methods of its determination, one of which is complex inversion formula. In the final chapter some applications of Laplace transform in mathematics will be stated. More specifically, it will be shown how to solve differential (ordinary and partial) and integral equations.

Keywords: integral transform, Laplace transform, differential equations, integral equations.

Sadržaj

1 Uvod

Integralne transformacije prvi put se spominju u 18. stoljeću u radovima Leonharda Eulera koji ih je smatrao ključnim oruđem za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi. 1814. godine francuski astronom i matematičar Pierre-Simone Laplace napisao je djelo iz teorije vjerojatnosti *Théory analitique des probabilités.* U njemu je koristio integralnu transformaciju koja će kasnije biti nazvana Laplaceova transformacija. Laplaceovo otkriće nastavili su razvijati Mathias Lerch, Oliver Heaviside i Thomas Bromwich u 19. i 20. stoljeću. Tek nakon Drugog svjetskog rata, prepoznate su prednosti Laplaceove transformacije u primjenama, ponajviše zahvaljujući Gustavu Doetschu koji je navodno predložio ime *Laplaceova transformacija.* Osim Laplaceove, koriste se i druge integralne transformacije, kao što su primjerice Fourierova, Mellinova, Hilbertova, Legendreova, Hankelova i Laguerreova.

Laplaceova transformacija danas predstavlja vrlo snažan alat za rješavanje diferencijalnih i integralnih te diferentnih jednadžbi. Posjeduje važno svojstvo linearnosti zbog čega se njome ne mogu rješavati općenite navedene jednadžbe, nego samo linearne, no u primjenama se to pokazuje i više nego dovoljnim. Osnovna ideja je da se dana jednadžba ovom transformacijom svede na jednadžbu (algebarsku ili diferencijalnu) koju je lakše riješiti od početne. Nakon toga, od rješenja transformirane jednadžbe inverznim postupkom dolazimo do rješenja početne jednadžbe. Na prvi pogled čini se kao jednostavan postupak, no ponekad određivanje inverza Laplaceove transformacije nije lako. Tada je potrebno učiniti određene preinake na funkciji da bismo mogli iz nje "iščitati" rješenje polaznog problema. Prije svega, morat ćemo razjasniti kada i na kakve funkcije je moguće primijeniti Laplaceovu transformaciju te ćemo navesti svojstva koja će nam omogućiti njezino brže izračunavanje. Tek tada ćemo se moći upoznati sa stvarnom veličinom ideje Laplaceove transformacije.

U drugom poglavlju dana je definicija i pokazana su osnovna svojstva Laplaceove transformacije s posebnim naglaskom na djelovanje na konvoluciju funkcija. Navedeni su teoremi koji povezuju deriviranje i integriranje funkcije s Laplaceovom transformacijom te tvrdnje kojima se pomoću nje može odrediti granično ponašanje funkcije.
Treće poglavlje bavi se pitanjem postojanja i metodama pronalaska inverzne Laplaceove transformacije od kojih izdvajamo *kompleksnu invezno formulu.*
U zadnjem dijelu pokazane su neke od primjena Laplaceove transformacije gdje ističemo njezinu korisnost prilikom rješavanja diferencijalnih (običnih i parcijalnih) i integralnih jednadžbi.

2 Osnovni pojmovi

2.1 Definicija Laplaceove transformacije

Neka je dana funkcija f, $p = x + iy$ kompleksni parametar, K funkcija varijable t i parametra p te neka je dan interval $[a, b]$. Promotrimo funkciju definiranu na sljedeći način:

$$F(p) := \int_a^b K(p,t) f(t) dt. \tag{2.1}$$

Ukoliko integral na desnoj strani u (2.1) konvergira, funkcija F naziva se **slikom funkcije** f, a preslikavanje $f \mapsto F$ opisano s (2.1) naziva se **integralnom transformacijom**. Često se sama funkcija F naziva integralnom transformacijom. Oblik i karakter transformacije ovise o izboru granica integracije a i b te o funkciji K koja se naziva **jezgrom transformacije**. Stavimo li u (2.1) $[a, b] = [0, +\infty\rangle$ i $K(t, p) = e^{-pt}$ dobivamo

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \tag{2.2}$$

Time dolazimo do definicije Laplaceove transformacije:

Definicija 2.1.1. *Neka je f funkcija realne varijable $t \geq 0$ te neka je p realan ili kompleksan parametar. Ukoliko integral* (2.2) *konvergira, funkciju $F = \mathcal{L}\{f\}$ zovemo **Laplaceovim transformatom** funkcije f.*
Preslikavanje $f \mapsto F$ opisano jednakošću (2.2) *naziva se **Laplaceovom transformacijom**, a nepravi integral u* (2.2) *naziva se **Laplaceovim integralom**.*

Jednakost (2.2) simbolički se zapisuje na više načina:

$$F = \mathcal{L}\{f\}, \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad F(p) \rightleftarrows f(t), \quad f \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F.$$

Izraz (2.2) ima smisla ako postoji nepravi integral koji se nalazi u tom izrazu. Zbog toga će nas zanimati uvjeti egzistencije Laplaceovog integrala.

Napomena 2.1.1. *U praksi se pojam "Laplaceova transformacija" često koristi za ono što je definirano kao "Laplaceov transformat", tj. za funkciju dobivenu preslikavanjem, a ne sâmo preslikavanje. Ukoliko se u nastavku bude radilo o preslikavanju, bit će posebno naglašeno. Treba napomenuti da je u hrvatskom jeziku uobičajen takav nepravilan način izražavanja.*

Primjer 2.1.1. *Ako je $f(t) = 1, \ t \geq 0$, onda je*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\}(p) = \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = \\ &= \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} e^{-pt} dt = \lim_{\tau \to +\infty} \left(\frac{e^{-pt}}{-p} \bigg|_0^{\tau} \right) = \\ &= \lim_{\tau \to +\infty} \left(\frac{e^{-p\tau}}{-p} + \frac{1}{p} \right).\end{aligned}$$

Uzmemo li da je $p \in \mathbb{R}$, *imamo*

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}, \quad p > 0.$$

Isto tako, uzmemo li da je $p \in \mathbb{C}$ $(p = x + iy)$, *dobivamo*

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0,$$

dok za $\mathrm{Re}(p) \leq 0$ *prethodni integral divergira pa u tim točkama Laplaceova transformacija ne postoji. Naime, vrijedi*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \left| \frac{e^{-p\tau}}{-p} \right| = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{|e^{-x\tau}||e^{-iy\tau}|}{|p|} = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{e^{-x\tau}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

za $x = \mathrm{Re}(p) > 0$.

U nastavku ćemo se baviti pitanjem za koje sve funkcije postoji Laplaceova trasformacija, tj. za koje funkcije integral (2.2) konvergira. Naime, postoje funkcije za koje (2.2) divergira.

Primjer 2.1.2. *Za funkciju* $f(t) = e^{t^2}$ *imamo*

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{t^2} dt = \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} e^{t^2 - pt} dt = +\infty$$

za bilo koji p *jer podintegralna funkcija neograničeno raste kad* $\tau \to +\infty$.
Koristeći činjenicu da $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$ *divergira za svaki* $a > 0$, *lako se vidi da za funkciju* $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $t > 0$, *Laplaceova transformacija ne postoji ni za koji* p.

Uočimo da je u prethodnom primjeru prva funkcija naglog rasta, dok druga nije definirana u $t = 0$ i neograničena je u okolini točke $t = 0$. Naslućujemo da je potrebno na neki način "mjeriti" brzinu rasta funkcije f te tražiti da je ona ograničena u okolini točke prekida. Sljedeća obilježja osigurat će postojanje Laplaceove transformacije funkcije f.

Definicija 2.1.2. *Za funkciju* f *kažemo da je* ***eksponencijalnog reda*** $\alpha \geq 0$ *na* $[0, +\infty\rangle$ *ako postoji konstanta* $M > 0$ *tako da za neki* $t_0 \geq 0$ *vrijedi*

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t \geq t_0. \tag{2.3}$$

Uočimo da ako je f eksponencijalng reda α, onda je i eksponencijalnog reda β, za svaki $\beta > \alpha$. Očito je eksponencijalna funkcija e^{at} eksponencijalnog reda $\alpha = a$. Funkcija t^n je eksponencijalnog reda α za bilo koji $\alpha > 0$ i za bilo koji $n \in \mathbb{N}$. Također, ograničene funkcije, kao što su trigonometrijske, su eksponencijalnog reda $\alpha = 0$.

Definicija 2.1.3. *Za funkciju* f *kažemo da ima* ***prekid prve vrste*** *u točki* t_0 *ako limesi*

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) = f(t_0^-) \quad \textbf{\textit{i}} \quad \lim_{t \to t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$$

postoje (kao konačni brojevi) i vrijedi $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$.

Definicija 2.1.4. *Za funkciju f kažemo da je* ***po dijelovima neprekidna*** *na $[0, +\infty\rangle$ ako vrijedi:*

(i) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ *postoji*

(ii) *f je neprekidna na svakom konačnom intervalu $\langle 0, A\rangle$ osim eventualno u konačno mnogo točaka $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ iz $\langle 0, A\rangle$ u kojima ima prekid prve vrste.*

Uvedimo sada pojmove dva posebna tipa konvergencije Laplaceovog integrala.

Definicija 2.1.5. *Za integral (2.2) kažemo da je* ***apsolutno konvergentan*** *ako postoji*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} |e^{-pt} f(t)| dt.$$

Definicija 2.1.6. *Za integral (2.2) kažemo da* ***konvergira uniformno*** *po varijabli p na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji neki broj τ_0 takav da je*

$$\left| \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \varepsilon$$

za svaki $\tau \geq \tau_0$ te za svaki $p \in \Omega$.

Sada možemo pokazati da postoji velika klasa funkcija koje imaju Laplaceovu transformaciju. Pritom će nam biti koristan sljedeći kriterij čiji se dokaz može pronaći u [1, str. 296.].

Teorem 2.1.1. *Ako je f po dijelovima neprekidna funkcija na $[a, +\infty\rangle$ koja zadovoljava $|f(t)| \leq g(t)$ za $t \geq A$ i ako integral $\int_A^{+\infty} g(t)dt$ konvergira, onda i integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ također konvergira. S druge strane, ako je $f(t) \geq g(t) \geq 0$ za $t \geq A$ i ako integral $\int_A^{+\infty} g(t)dt$ divergira, onda i integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ također divergira.*

Teorem 2.1.2 (o egzistenciji). *Neka je f po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ i eksponencijalnog reda α. Tada Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\{f\}$ definirana s (2.2) postoji za svaki kompleksan broj p za koji vrijedi $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ te pripadni Laplaceov integral konvergira apsolutno.*

Dokaz. Iz činjenice da je f eksponencijalnog reda α slijedi da postoje pozitivne konstante M i t_0 takve da vrijedi

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t \geq t_0.$$

Treba pokazati da nepravi integral u izrazu (2.2) konvergira (apsolutno) za svaki kompleksan broj p za koji vrijedi $\mathrm{Re}(p) > \alpha$. Podijelimo li nepravi integral na dva dijela, imamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \tag{2.4}$$

Kako je f po dijelovima neprekidna na $[0, +\infty\rangle$ prvi integral na desnoj strani izraza (2.4) postoji. Dakle, postojanje $\mathcal{L}\{f\}$ ovisi o konvergenciji drugog integrala. Iz pretpostavke teorema imamo

$$|e^{-pt} f(t)| \leq M e^{\alpha t} e^{-\operatorname{Re}(p)t} = M e^{(\alpha - \operatorname{Re}(p))t}, \quad t \geq t_0.$$

Primjenom Teorema 2.1.1 za $a = 0$ i $A = t_0$ vidimo da nepravi integral u izrazu (2.2) (apsolutno) konvergira ukoliko $\int_{t_0}^{+\infty} e^{(\alpha - \operatorname{Re}(p))t} dt$ konvergira. Sada imamo

$$\lim_{\tau \to +\infty} \int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha - \operatorname{Re}(p))t} dt = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{e^{\tau(\alpha - \operatorname{Re}(p))} - e^{t_0(\alpha - \operatorname{Re}(p))}}{\alpha - \operatorname{Re}(p)}.$$

Očito ovaj nepravi integral konvergira za $\alpha - \operatorname{Re}(p) < 0$ čime je dokazana (apsolutna) konvergencija integrala (2.1.2).

□

Napomena 2.1.2. *Uočimo da ako stavimo* $\alpha_0 := \inf\{\alpha : \alpha \text{ zadovoljava } (2.3)\}$, *onda* $\mathcal{L}\{f\}$ *postoji u svim točkama* p *za koje je* $\operatorname{Re}(p) > \alpha_0$.

Napomena 2.1.3. *Skup svih funkcija koje zadovoljavaju pretpostavke Teorema 2.1.2 označavat ćemo s L, a njegove elemente zvat ćemo* ***originalima***. *Skup svih originala L ima strukturu vektorskog prostora.*

Apsolutna konvergencija nam često nije dovoljna u praktičnom smislu. Primjerice, želimo li izračunati derivaciju Laplaceove transformacije, potrebna nam je uniformna konvergencija Laplaceovog integrala.

Teorem 2.1.3. *Uz pretpostavke Teorema 2.1.2 Laplaceov integral konvergira uniformno u području za koje je* $\operatorname{Re}(p) \geq x_0$, *za proizvoljni* $x_0 > \alpha$.

Dokaz. Kako je f eksponencijalnog reda α, postoji konstanta $M > 0$ i $\tau \geq 0$ takvi da je

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t \geq \tau.$$

Uz pretpostavku da je $p = x + iy$ te $x > \alpha$ imamo

$$\begin{aligned}\left| \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| &\leq \int_{\tau}^{+\infty} |e^{-xt}||e^{-iyt}||f(t)| dt = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_{\tau}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)t} dt = \lim_{A \to +\infty} \frac{M e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} \bigg|_{\tau}^{A} = \\ &= \frac{M e^{-(x-\alpha)\tau}}{x - \alpha}.\end{aligned}$$

Neka je $x \geq x_0 > \alpha$. Tada je

$$\frac{M e^{-(x-\alpha)\tau}}{x - \alpha} \leq \frac{M e^{-(x_0-\alpha)\tau}}{x_0 - \alpha}.$$

Izaberemo li τ dovoljno velik, izraz na desnoj strani prethodne nejednakosti možemo učiniti dovoljno malim. Drugim riječima, za $\varepsilon > 0$ postoji $\tau_0 > 0$ takav da je

$$\left| \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \varepsilon, \quad \forall \tau \geq \tau_0$$

za sve p takve da je $\mathrm{Re}(p) \geq x_0 > \alpha$. To znači da je Laplaceov integral zaista uniformno konvergentan u području $\mathrm{Re}(p) \geq x_0$, za proizvoljni $x_0 > \alpha$. $\square$

U Tablici 1 dan je pregled Laplaceovih transformacija nekih elementarnih funkcija koje će nam biti korisne u nastavku. Opširnija tablica može se pronaći u [7].

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{p}, \quad p > 0$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0$
$t^a, \quad a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, \quad p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}, \quad p > a$
$\sin at$	$\frac{a}{a^2+p^2}, \quad p > 0$
$\cos at$	$\frac{p}{a^2+p^2}, \quad p > 0$
$\mathrm{sh}\, at$	$\frac{a}{p^2-a^2}, \quad p > a$
$\mathrm{ch}\, at$	$\frac{p}{p^2-a^2}, \quad p > a$
$\sin(at+b)$	$\dfrac{p \sin b + a \cos b}{p^2 + a^2}$
$\cos(at+b)$	$\dfrac{p \cos b - a \sin b}{p^2 + a^2}$

Tablica 1: Laplaceova transformacija nekih funkcija

2.2 Svojstva Laplaceove transformacije

U nastavku ćemo promatrati samo funkcije originale, tj. po dijelovima neprekidne funkcije eksponencijalnog reda α, za neki $\alpha \geq 0$. Njihovu Laplaceovu transformaciju označavat ćemo s $\mathcal{L}\{f\} = F$.

Napomena 2.2.1. *Prilikom računanja s konkretnim funkcijama ili u nekim tvrdnjama radi jasnijeg zapisa, umjesto $\mathcal{L}\{f\}$ koristit ćemo oznaku $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Pritom $f(t)$ ne predstavlja vrijednost funkcije f u točki t, već ovisnost funkcije f o varijabli t.*

Sljedeći teorem pokazuje da je Laplaceova transformacija linearan operator na vektorskom prostoru L.

Teorem 2.2.1. *Ako su f_1 i f_2 originali eksponencijalnog reda α, odnosno β, onda je za $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ i funkcija $c_1 f_1 + c_2 f_2$ original eksponencijalnog reda $\max\{\alpha, \beta\}$ te vrijedi*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

za $\mathrm{Re}(p) > \max\{\alpha, \beta\}$.

Dokaz. Ovo svojstvo slijedi iz definicije Laplaceove transformacije i linearnosti integrala:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))dt = \\
&= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t)dt = \\
&= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}, \quad \mathrm{Re}(p) > \max\{\alpha, \beta\}.
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.2.1. *Primjenom svojstva linearnosti i Tablice 1 imamo*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin t + \cos t\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{\cos t\} &= \frac{1}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2} = \\
&= \frac{1+p}{1+p^2}
\end{aligned}$$

Sljedeći teorem govori pod kojim uvjetima se Laplaceova transformacija može primijeniti na beskonačan red izračunavanjem "član-po-član". Dokaz se može pronaći u [6, str. 23.].

Teorem 2.2.2. *Pretpostavimo da red*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

konvergira za $t \geq 0$, pri čemu je

$$|a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!},$$

za sve dovoljno velike n, $\alpha > 0$, $K > 0$. Tada vrijedi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{L}\{t^n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{p^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha.$$

Primjer 2.2.2. *Uz pomoć prethodnog teorema moguće je izračunati Laplaceovu transformaciju za funkciju* $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. *Naime, ova funkcija može se prikazati u obliku reda potencija*

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!},$$

za koji vrijedi

$$|a_{2n}| = \frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{(2n)!}, \quad n = 0, 1, ...$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathcal{L}\{t^{2n}\}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{p}\right), \quad |p| > 1.\end{aligned}$$

Promotrimo sada ponašanje Laplaceove transformacije u slučaju translacije varijable p, odnosno t.

Teorem 2.2.3 (o prigušenju). *Neka je* $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *za* $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ *te* $b \in \mathbb{C}$. *Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} f(t)\} = F(p+b), \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha - \mathrm{Re}(b).$$

Dokaz.

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-bt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+b)t} f(t) dt = F(p+b).$$

Ako je $f(t)$ eksponencijalnog reda α, tada je $e^{-bt} f(t)$ eksponencijalnog reda $\alpha - \mathrm{Re}(b)$. Zbog toga, posljednja jednakost vrijedi ako je $\mathrm{Re}(p) > \alpha - \mathrm{Re}(b)$, tj.

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} f(t)\} = F(p+b), \quad \mathrm{Re}(p+b) > \alpha.$$

□

Primjer 2.2.3. *Koristeći prethodni teorem i Tablicu 1 imamo*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\} &= \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ \mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega t\} &= \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \quad (\mathrm{Re}(p) > a), \\ \mathcal{L}\{e^{-at} \operatorname{sh} \omega t\} &= \frac{\omega}{(p+a)^2 - \omega^2} \quad (\mathrm{Re}(p) > a).\end{aligned}$$

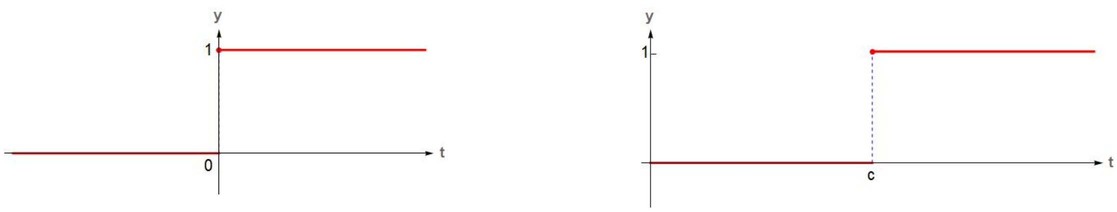
Prije nego što iskažemo sljedeći teorem, potrebno je uvesti pojam step ili Heavisideove[1] funkcije. Ona se najčešće koristi pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi kod kojih funkcija smetnje ima prekid. **Step funkciju**, u oznaci u, definiramo na sljedeći način

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases},$$

odnosno

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}, \quad c \geq 0.$$

Osim oznake u, česte su i oznake σ, s, Y, Θ. Grafovi funkcija u i u_c dani su na Slici 1.



(a) graf funkcije u

(b) graf funkcije u_c

Slika 1: Graf step funkcije

Laplaceova transformacija funkcije u_c lako se da odrediti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_c(t) dt = \int_c^{+\infty} e^{-pt} dt = \\ &= \frac{e^{-pc}}{p}, \quad p > 0 \end{aligned}$$

Teorem 2.2.4 (o pomaku). *Neka je* $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *te* $c \geq 0$. *Tada je*

$$\mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-pc} F(p)$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_c(t) f(t-c) dt = \\ &= \int_c^{+\infty} e^{-pt} f(t-c) dt = \begin{vmatrix} \tau = t - c \\ d\tau = dt \end{vmatrix} = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-p(\tau + c)} f(\tau) d\tau = e^{-pc} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= e^{-pc} F(p). \end{aligned}$$

□

[1] Oliver Heaviside (1850.-1925.), engleski inženjer, matematičar i fizičar

Pretpostavimo sada da je f periodična funkcija temeljnog perioda $T > 0$, tj. da je $f(t) = f(t+T)$ za svaki t. Periodične funkcije su vrlo česte u primjenama, stoga je bitno vidjeti kako Laplaceova transformacija djeluje na ovakve funkcije. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.5. *Ako je f periodična funkcija temeljnog perioda T i $\mathcal{L}\{f(t)\}$ postoji, tada je*

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt. \tag{2.5}$$

Dokaz. Prema definiciji Laplaceove transformacije imamo

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

Uvodeći supstituciju $t = \tau + T$ u drugom integralu, dobiva se

$$\int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(\tau+T)} f(\tau+T)d\tau = e^{-pT} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau)d\tau = e^{-pT} F(p).$$

Dakle, vrijedi

$$F(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT} F(p)$$

iz čega neposredno slijedi (2.5). □

Napomena 2.2.2. *Uvodeći oznaku*

$$F_1(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt,$$

jednakost (2.5) *može se zapisati u obliku*

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} F_1(p).$$

Primjer 2.2.4. *Radi ilustracije, odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t) = \sin \omega t$ koristeći prethodni teorem.*

U ovom slučaju je $T = \frac{2\pi}{\omega}$ pa je

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-\frac{2p\pi}{\omega}}} F_1(p). \tag{2.6}$$

Primjenom parcijalne integracije dva puta dobiva se

$$F_1(p) = \frac{1-e^{-\frac{2p\pi}{\omega}}}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2} F_1(p),$$

odakle slijedi

$$F_1(p) = \frac{1-e^{-\frac{2p\pi}{\omega}}}{\omega} \cdot \frac{1}{1+\frac{p^2}{\omega^2}}$$

Uvrštavanjem u (2.6) *dobiva se već poznata formula*

$$F(p) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{1+\frac{p^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Navedimo još jedno važno svojstvo Laplaceove transformacije koje je korisno za njezino brže računanje.

Teorem 2.2.6 (o sličnosti). *Neka je f original eksponencijalnog reda α i $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f(bt)\} = \frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right),$$

gdje je $b > 0$ i $\mathrm{Re}(p) > \max\{\alpha, b\alpha\}$

Dokaz. Neka je $b > 0$. Tada imamo

$$\mathcal{L}\{f(bt)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(bt)dt = \begin{vmatrix} u = bt \\ du = bdt \end{vmatrix} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{b}u} f(u)\frac{du}{b} =$$
$$= \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{b}u} f(u)du = \frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right).$$

□

Primjer 2.2.5. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $\cos\omega t$ koristeći prethodni teorem.*

Zbog $F(p) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{p}{p^2+1}$ dobivamo

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Neka je H Laplaceova transformacija neke funkcije te neka su f i g originali. Ako je $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$ te $H = F\cdot G$, razumno je pitati se je li H dobivena kao Laplaceova transformacija produkta $f\cdot g$. To općenito ne vrijedi, tj. Laplaceova transformacija, kao operacija, i obično množenje ne komutiraju. Uvodeći poseban oblik množenja funkcija, ta činjenica se mijenja. Time dolazimo do pojma **konvolucije**.

Definicija 2.2.1. *Neka su dane dvije funkcije $f, g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Konvolucija funkcija u oznaci $f * g$ je funkcija*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \tag{2.7}$$

Sljedeća svojstva konvolucije lako se mogu dokazati jednostavnim računom:

(i) kvaziasocijativnost
$$c(f * g) = cf * g, \quad c \in \mathbb{R},$$

(ii) komutativnost
$$f * g = g * f,$$

(iii) asocijativnost
$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

(iv) distributivnost
$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Konvolucija očito ima neka zajednička svojstva s običnim množenjem, ali postoje druga svojstva koja ne vrijede za konvoluciju. Primjerice, lako se vidi da općenito ne vrijedi $f * 1 = f$.

U nastavku ćemo pokazati da je konvolucija funkcija zaista original te opisati kako Laplaceova transformacija djeluje na nju.

Propozicija 2.2.1. *Ako su f i g originali eksponencijalnog reda α, odnosno β, onda je i konvolucija $f * g$ original eksponencijalnog reda* $\max\{\alpha, \beta\} + \varepsilon$*, za svaki* $\varepsilon > 0$.

Dokaz. Kako su f i g po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$, slijedi da je i $(f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$.
Budući da su f i g eksponencijalnog reda α, odnosno β, postoje M_1, $M_2 > 0$ i $t_1, t_2 \geq 0$ takvi da vrijedi
$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, \quad t \geq t_1,$$
odnosno
$$|g(t)| \leq M_2 e^{\beta t}, \quad t \geq t_2,$$
pa imamo
$$|(f * g)(t) = \left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)g(t-\tau)|d\tau \leq \int_0^t |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)|d\tau \leq$$
$$\leq \int_0^t M_1 e^{\alpha t} \cdot M_2 e^{\beta(t-\tau)} d\tau = M_1 M_2 e^{\beta t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau.$$

Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $\alpha \neq \beta$, onda je
$$|(f * g)(t)| \leq M_1 M_2 e^{\beta t} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_0^t = \frac{M_1 M_2}{\alpha - \beta} e^{\beta t}(e^{(\alpha-\beta)t} - 1) =$$
$$= \frac{M_1 M_2}{\alpha - \beta}(e^{\alpha t} - e^{\beta t}) \leq \frac{M_1 M_2}{|\alpha - \beta|} e^{\max\{\alpha,\beta\}t}.$$

- Ako je $\alpha = \beta$, onda imamo

$$|(f * g)(t)| \leq M_1 M_2 \cdot t e^{\beta t}$$

Za identitetu $t \mapsto t$ vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M_\varepsilon > 0), \quad t \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon t},$$

pa slijedi

$$|(f * g)(t)| \leq M_1 M_2 M_\varepsilon e^{(\beta+\varepsilon)t}.$$

□

Teorem 2.2.7 (o konvoluciji). *Neka su f i g po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$ eksponencijalnog reda α, odnosno β. Tada za $p \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(p) > \max\{\alpha, \beta\}$ vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(p) = \mathcal{L}\{f\}(p) \cdot \mathcal{L}\{g\}(p) = F(p)G(p).$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\alpha > \beta$. Tada je i g eksponencijalnog reda α. Neka je

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \quad \text{i} \quad G(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} g(\xi) d\xi.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} g(\xi) d\xi = \\ &= \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Kako drugi integral ne ovisi o varijabli integracije prvog integrala, možemo pisati

$$F(p)G(p) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p(\tau+\xi)} g(\xi) \; d\xi \; d\tau.$$

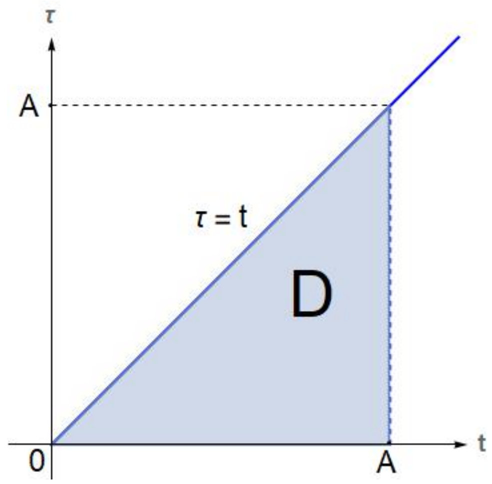
Ako uvedemo supstituciju $t = \tau + \xi$, za fiksni τ, dobivamo

$$F(p)G(p) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} \int_\tau^{+\infty} f(\tau) e^{-pt} g(t - \tau) dt \; d\tau.$$

Integraciju provodimo po području $D = \{(t, \tau) : t \in \langle \tau, +\infty\rangle, \tau \in \langle 0, A\rangle\}$ koje je prikazano na Slici 2. Kako bismo mogli zamijeniti redoslijed integracije, dovoljno je da unutarnji nepravi integral uniformno konvergira te da je podintegralna funkcija po dijelovima neprekidna (vidjeti [7, Theorem A.11.]). Očito je podintegralna funkcija

$$h(\tau, t) := f(\tau) e^{-pt} g(t - \tau)$$

po dijelovima neprekidna pa je dovoljno pokazati da je omeđena nekom funkcijom $H = H(t)$ za koju integral $\int_0^{+\infty} H(t) dt$ konvergira (varijanta Weierstrassovog testa, vidjeti primjerice [4, Theorem 2.8, str. 101.]).



Slika 2: Područje integracije iz dokaza Teorema 2.2.7

Imamo sljedeću ocjenu

$$\begin{aligned}|h(\tau,t)| &= |f(\tau)|\cdot|e^{-pt}|\cdot|g(t-\tau)| \leq \\ &\leq M_1 e^{\alpha\tau}\cdot e^{-\operatorname{Re}(p)t}\cdot M_2 e^{\alpha(t-\tau)} = \\ &= M_1M_2 e^{(\alpha-\operatorname{Re}(p))t} =: H(t).\end{aligned}$$

Preostalo je pokazati da je H integrabilna na $[0,+\infty\rangle$, što je očito, jer vrijedi

$$\int_0^{+\infty} H(t)dt = M_1M_2\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-\operatorname{Re}(p))t}dt = \frac{M_1M_2}{\operatorname{Re}(p)-\alpha}, \quad \operatorname{Re}(p) > \alpha.$$

Sada možemo zamijeniti redoslijed integracije

$$\begin{aligned}F(p)G(p) &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-pt}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt.\end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$F(p)G(p) = \mathcal{L}\{f*g\}(p), \quad \operatorname{Re}(p) > \alpha.$$

□

2.3 Deriviranje i integriranje Laplaceove transformacije

Sljedeća dva teorema opisuju svojstvo Laplaceove transformacije derivacije funkcije f koje se primjenjuje u rješavanju diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetima, tzv. Cauchyjevih zadaća.

Teorem 2.3.1 (o deriviranju originala). *Neka je f neprekidna funkcija na $[0,+\infty\rangle$ i f' original eksponencijalnog reda α. Tada je i f original eksponencijalnog reda $\alpha+\varepsilon$, za svaki $\varepsilon > 0$, te vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0), \quad \operatorname{Re}(p) > \alpha. \tag{2.8}$$

Dokaz. Kako je f' eksponencijalnog reda α, postoje $M > 0$ i $t_0 \geq 0$ takvi da vrijedi

$$|f'(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti, postoji $\tau \leq t$ za koji vrijedi

$$f(t) - f(0) = f'(\tau)(t - 0),$$

tj.

$$f(t) = f(0) + f'(\tau)t.$$

Uzimanjem apsolutne vrijednosti, imamo

$$|f(t)| \leq |f(0)| + |f'(\tau)| \cdot |t|.$$

Funkcija $f(0)$ je konstantna funkcija pa postoji $M_1 > 0$ takav da je $|f(0)| \leq M_1$. Identiteta je eksponencijalnog reda ε, za svaki $\varepsilon > 0$ pa postoje $M_\varepsilon > 0$ i $t_1 \geq 0$ takvi da vrijedi $|t| \leq Me^{\varepsilon t}$, za svaki $t \geq t_1$. Neka je $t_2 := \max\{t_0, t_1\}$. Tada za svaki $t \geq t_2$ vrijedi

$$|f(t)| \leq M_1 + Me^{\alpha\tau} \cdot M_\varepsilon e^{\varepsilon t} \leq M_1 + Me^{\alpha t} \cdot M_\varepsilon e^{\varepsilon t} = M_1 + MM_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)t}.$$

Odabirom dovoljno velike konstante $M_2 > 0$, dobivamo

$$|f(t)| \leq M_2 e^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad t \geq t_2$$

pa je f original eksponencijalnog reda $\alpha + \varepsilon$.

Promotrimo integral

$$\int_0^A e^{-pt} f'(t)dt.$$

Označimo točke prekida od f' na $[0, A]$ s $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Sada imamo

$$\int_0^A e^{-pt} f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-pt} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} f'(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-pt} f'(t)dt.$$

Primjenom parcijalne integracije dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-pt} f'(t)dt &= e^{-pt} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-pt} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-pt} f(t)\Big|_{t_n}^{A} \\ &\quad + p\left[\int_0^{t_1} e^{-pt} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} f(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-pt} f(t)dt\right].\end{aligned}$$

Kako je f neprekidna, prethodnu jednakost možemo pojednostaviti

$$\int_0^A e^{-pt} f'(t)dt = e^{-pA} f(A) - f(0) + p\int_0^A e^{-pt} f(t)dt.$$

Zbog činjenice da je f eksponencijalnog reda α vrijedi

$$|e^{-pA} f(A)| = |e^{(x+iy)A}||f(A)| \leq e^{-xA} \cdot Me^{\alpha A} = Me^{-(x-\alpha)A} \xrightarrow{A\to+\infty} 0$$

pa puštanjem limesa $A \to +\infty$ konačno dobivamo

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt - f(0) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0), \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha.$$

$\square$

Napomena 2.3.1. *Tvrdnja prethodnog teorema, preciznije, jednakost* (2.8) *vrijedi i ukoliko pretpostavimo da je f original eksponencijalnog reda α te da je f' po dijelovima neprekidna.*

Uz određene pretpostavke na glatkoću i brzinu rasta funkcije f, sukcesivnom primjenom prethodnog teorema dolazimo do izraza za Laplaceovu transformaciju n-te derivacije funkcije f koji je dan u idućem korolaru.

Korolar 2.3.1.1. *Neka su $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$ eksponencijalnog reda α i $f^{(n)}$ po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$. Tada Laplaceov transformat od $f^{(n)}$ postoji za $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ i vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha.$$

Sljedeći rezultat govori o Laplaceovoj transformaciji određenog integrala funkcije f, a koristi se pri rješavanju određenih integrala koji se ne mogu odrediti standardnim metodama integracije.

Teorem 2.3.2 (o integriranju originala). *Neka je f original eksponencijalnog reda $\alpha > 0$ te $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Dokaz. Neka je $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du$, za $t \geq 0$. Lako se provjeri da je g po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ eksponencijalnog reda α. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left|\int_0^t f(u)du\right| \leq \int_0^t |f(u)|du \leq \int_0^t Me^{\alpha u}du = \\ &= \frac{M}{\alpha}\, e^{\alpha u}\Big|_0^t = \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{M}{\alpha} \leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Prema tome Laplaceova transformacija funkcije g postoji. Koristeći činjenicu da je $g' = f$ i Teorem 2.3.1, imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g'(t)\} &= p\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = p\mathcal{L}\{g(t)\} - \int_0^0 f(u)du = \\ &= p\mathcal{L}\{g(t)\}, \end{aligned}$$

to jest

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = p\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Prema pretpostavci je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ pa dobivamo

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

□

Uočimo da prema svojstvima iz Teorema 2.3.1 i Teorema 2.3.2, Laplaceova transformacija prevodi deriviranje i integriranje funkcije u množenje, odnosno dijeljenje s p. Kasnije ćemo vidjeti kako pomoću toga diferencijalne i integralne jednadžbe svesti na algebarske.

Sljedeći teorem govori o deriviranju Laplaceovog transformata kao funkcije realne varijable. Može se pokazati da je Laplaceov transformat i **analitička funkcija** ([2, str. 26.]).

Teorem 2.3.3 (o deriviranju slike). *Neka je f original eksponencijalnog reda α i neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Tada za $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \mathbb{R}$, $p > \alpha$, vrijedi*

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo za slučaj $n = 1$. Ostatak slijedi induktivno.
Znamo da integral $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ konvergira uniformno po p, $p \geq x_0 > \alpha$. Slično kao u dokazu Teorema 2.2.7, lako se provjeri da i integral $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}(e^{-pt} f(t)) dt$ konvergira uniformno. Osim toga, funkcija $p \mapsto e^{-pt} f(t)$ je klase C^1 po varijabli p pa je opravdano (vidjeti [7, Theorem A.12.]) zamijeniti redoslijed deriviranja i integriranja u sljedećem računu

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} F(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt &= \\
= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}(e^{-pt} f(t)) dt &= \\
= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t) f(t) dt &= \\
= \mathcal{L}\left\{-t f(t)\right\}.
\end{aligned}$$

□

Za kraj ovog dijela, bez dokaza navodimo svojstvo koje govori o integriranju Laplaceovog transformata. Dokaz se može pronaći u [6, str. 63.].

Teorem 2.3.4 (o integriranju slike). *Neka su f i $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$ i f eksponencijalnog reda α_0, a $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ eksponencijalnog reda α_1. Nadalje, neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ i neka integral $\displaystyle\int_p^{+\infty} F(z) dz$ konvergira za kompleksan broj p takav da je $\mathrm{Re}(p) > \alpha_1$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^{+\infty} F(z) dz.$$

2.4 Teoremi o granicama

U ovom dijelu pokazat ćemo da je ponekad moguće odrediti granično ponašanje funkcije f kad $t \to 0$ ili $t \to +\infty$ čak i ako nam funkcija f nije eksplicitno dana. To se postiže ispitivanjem ponašanja $\mathcal{L}\{f\}$ o čemu nam govore iduća tri teorema.

Teorem 2.4.1 (nužan uvjet egzistencije slike). *Neka je f original eksponencijalnog reda α. Tada je*

$$\lim_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} \mathcal{L}\{f\}(p) = 0.$$

Dokaz. Kako je f eksponencijalnog reda α, postoji pozitivna konstanta M i $t_0 \geq 0$ takvi da vrijedi

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t \geq t_0.$$

Iz dokaza teorema o egzistenciji imamo

$$|\mathcal{L}\{f\}(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \right| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}(p) - \alpha}, \quad \mathrm{Re}(p) > \alpha$$

iz čega neposredno slijedi tvrdnja. □

Teorem 2.4.2 (o početnim vrijednostima). *Neka je f neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ i neka je f' original te $\mathcal{L}\{f\} = F$. Tada je*

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} pF(p).$$

Dokaz. Označimo $\Phi := \mathcal{L}\{f'\}$. Prema teoremu o deriviranju originala imamo

$$\Phi(p) = \mathcal{L}\{f'\}(p) = pF(p) - f(0).$$

Iz nužnog uvjeta egzistencije slike je

$$\lim_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} \Phi(p) = 0,$$

to jest

$$\lim_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} (pF(p) - f(0)) = 0,$$

odakle slijedi $f(0) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} pF(p)$. □

Teorem 2.4.3 (o krajnjim vrijednostima). *Neka je f neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ i neka je f' original eksponencijalnog reda α te $\mathcal{L}\{f\} = F$. Nadalje, neka limes $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ postoji kao konačan broj. Tada $F(p)$ postoji za svaki p za koji je $\mathrm{Re}(p) > 0$, te vrijedi*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} pF(p).$$

Dokaz. Uočimo da uvjet postojanja $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ govori da je funkcija f omeđena. Prema tome, njezin eksponencijalni red jednak je 0. Prema Napomeni 2.3.1 vrijedi

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = pF(p) - f(0), \quad \mathrm{Re}(p) > 0. \tag{2.9}$$

Pustimo li na lijevoj strani od (2.9) da $\mathrm{Re}(p) \to 0+$ dobivamo

$$\lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} f'(t)dt =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} (f(A) - f(0)) = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0).$$

Napravimo li isto za desnu stranu od (2.9) dobivamo

$$\lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} pF(p) - f(0).$$

Sada imamo

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} pF(p) - f(0),$$

tj.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} pF(p).$$

□

Primjer 2.4.1. *(a) Ako je* $F(p) = \dfrac{p+1}{(p-1)(p+2)}$, *onda je prema Teoremu 2.4.2*

$$f(0) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} p\left(\frac{p+1}{(p-1)(p+2)}\right) = 1.$$

(b) Neka je $f(t) = \sin t$. *Tada je*

$$\lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} pF(p) = \lim_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} \frac{p}{p^2+1} = 0,$$

što je prema Teoremu 2.4.3 jednako $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \sin t$, *a to ne postoji.*
Dakle, ako je $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to 0+} pF(p) = L$, *tada je ili* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = L$ *ili ta granična vrijednost ne postoji.*

U ovom poglavlju navedena su osnovna svojstva Laplaceove transformacije, a u sljedećoj tablici napravljen je njihov pregled. Opširnije tablice mogu se pronaći primjerice u [7].

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{p^{n+1}}$
$e^{-bt} f(t)$	$F(p+b)$
$u_c(t) f(t-c)$	$e^{-pc} F(p)$
$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$
$f(bt)$	$\frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right)$
$f(t) * g(t)$	$F(p)G(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(z)dz$

Tablica 2: Svojstva Laplaceove transformacije

3 Invertiranje Laplaceove transformacije

3.1 Pojam i metode traženja inverza

Dosad smo u više navrata pokazali kako od dane funkcije f odrediti njezin Laplaceov transformat F jednostavnim integriranjem. U ovom dijelu ćemo promatrati inverzni problem, tj. kako od danog Laplaceovog transformata F odrediti f. Taj problem je u suštini vezan s pronalaženjem rješenja integralne jednadžbe

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = F(p).$$

U ovom trenutku, takav način pronalaska inverza čini se nepraktičnim. Međutim, u jednostavnijim slučajevima moguće je neposredno, ili uz manje preinake, koristeći Tablice 1 i 2 pročitati odgovarajuću funkciju f. Ako je $\mathcal{L}\{f\} = F$, onda ćemo pripadnu **inverznu Laplaceovu transformaciju** označavati s

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f.$$

Napomena 3.1.1. *Kao i ranije, ukoliko se bude radilo o konkretnim funkcijama, pisat ćemo $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ umjesto $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$. Pritom će $F(p)$ označavati ovisnost funkcije F o varijabli p.*

Postavlja se pitanje postoji li neka druga funkcija $g \neq f$ za koju je $\mathcal{L}^{-1}\{F\} = g$, tj. $\mathcal{L}\{g\} = F$. Preciznije, zanima nas je li preslikavanje $f \mapsto F$ injekcija. Pokažimo primjerom da to ne vrijedi.
Promotrimo funkcije

$$f(t) = \cos t \quad \text{i} \quad g(t) = \begin{cases} \cos t, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Tada je

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \mathcal{L}\{g\}(p) = \frac{p}{1+p^2}$$

jer funkcija koja se razlikuje u jednoj točki (ili konačno mnogo točaka) nema različitu vrijednost Laplaceovog integrala, budući da je to Riemannov integral. Općenito, $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ nije jedinstven ukoliko promatramo funkcije s prekidima. Taj problem se može izbjeći ako promatramo samo neprekidne funkcije.

Teorem 3.1.1 (Lerchov[2] teorem). *Različite neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$ imaju različite Laplaceove transformacije.*

Dokaz. Može se vidjeti u [8, str. 61.]. $\square$

Drugim riječima, ograničimo li se na funkcije koje su neprekidne na $[0, +\infty\rangle$, tada je inverzna Laplaceova transformacija $\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f$ jedinstvena.

Napomena 3.1.2. *Za inverz Laplaceove transformacije vrijede odgovarajući analogoni svojstava Laplaceove transformacije pokazanih u Poglavlju 2 (vidjeti Tablicu 2).*

[2]Mathias Lerch (1860.-1922.), češki matematičar

Osim korištenja Tablica 1 i 2, inverznu Laplaceovu transformaciju možemo odrediti pomoću nekoliko metoda. Prva od njih je **metoda rastava na parcijalne razlomke**. Pretpostavimo da je funkcija F oblika

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad p \in \mathbb{R},$$

gdje su P i Q relativno prosti polinomi, pri čemu je stupanj polinoma P manji od stupnja polinoma Q. Tada F možemo zapisati kao konačnu sumu racionalnih funkcija (parcijalnih razlomaka) za koje vrijedi sljedeće .

(i) Svakom linearnom faktoru $ap + b$ polinoma Q odgovara parcijalni razlomak oblika

$$\frac{A}{ap+b}, \quad A \text{ je konstanta.}$$

(ii) Svakom faktoru oblika $(ap + b)^k, \quad k \geq 2$ polinoma Q odgovara rastav na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{A_1}{ap+b} + \frac{A_2}{(ap+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ap+b)^k}, \quad A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ su konstante.}$$

(iii) Svakom kvadratnom faktoru $ap^2 + bp + c$ odgovara parcijalni razlomak oblika

$$\frac{Mp+N}{ap^2+bp+c}, \quad M, N \text{ su konstante.}$$

Primjer 3.1.1. *Odredimo* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p-3)}\right\}$.
Razlomak $\frac{1}{(p-1)(p-3)}$ *rastavimo na sumu parcijalnih razlomaka*

$$\frac{1}{(p-1)(p-3)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p-3},$$

odakle množenjem sa zajedničkim nazivnikom te izjednačavanjem koeficijenata lijeve i desne strane uz iste potencije od p *dobivamo* $A_1 = -\frac{1}{2}$ *i* $A_2 = \frac{1}{2}$.
Primjenom svojstva linearnosti, a potom teorema o prigušenju dobivamo sljedeće

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p-3)}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-3)}\right\} =$$
$$= -\frac{1}{p}e^t + \frac{1}{2}e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

Neka je sada F oblika

$$F(p) = \frac{P(p)}{(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots(p-\alpha_k)}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j \text{ za } i \neq j,$$

gdje je P polinom stupnja manjeg od k. Brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \mathbb{C}$ zovu se **polovi** funkcije F. Odgovarajući rastav na parcijalne razlomke je oblika

$$F(p) = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_k}{p - \alpha_k}. \tag{3.1}$$

Množenjem obje strane od (3.1) s $p - \alpha_i$, za fiksni i te puštanjem $p \to \alpha_i$, dobivamo

$$A_i = \lim_{p \to \alpha_i} (p - \alpha_i) F(p), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.2}$$

Broj A_i zove se **reziduum** funkcije F u polu α_i.

Koeficijente A_i iz (3.2) možemo odrediti i na drugi način koristeći tzv. *Heavisideovu formulu ekspanzije*. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.1.2 (Heavisideova formula ekspanzije). *Neka je*

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad p \in \mathbb{R},$$

gdje su P i Q relativno prosti polinomi, pri čemu je stupanj polinoma P manji od stupnja polinoma Q. Pretpostavimo da Q ima k međusobno različitih nultočaka α_i, $\quad i = 1, 2, \ldots, k$. Tada je

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(p)}{Q(p)}\right\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Dokaz. Budući da je Q polinom s k različitih nultočaka $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, imamo sljedeći rastav na parcijalne razlomke

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{p - \alpha_i}.$$

Prema (3.2) vrijedi

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{p \to \alpha_i} (p - \alpha_i) \frac{P(p)}{Q(p)} = \lim_{p \to \alpha_i} P(p) \frac{p - \alpha_i}{Q(p)} = R(\alpha_i) \lim_{p \to \alpha_i} \frac{p - \alpha_i}{Q(p) - Q(\alpha_i)} = \\ &= R(\alpha_i) \lim_{p \to \alpha_i} \frac{1}{\frac{Q(p) - Q(\alpha_i)}{p - \alpha_i}} = R(\alpha_i) \cdot \frac{1}{Q'(\alpha_i)}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A_i = \frac{R(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.4}$$

Zbog toga je

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(p)}{Q(p)}\right\} = \sum_{i=1}^{k} A_i e^{\alpha_i t} = \sum_{i=1}^{k} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}, \quad t \geq 0.$$

$\square$

Primjer 3.1.2. *Odredimo* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2p^2-4}{(p+1)(p-2)(p+3)}\right\}$ *koristeći formulu* (3.3).

Imamo $R(p) = 2p^2 - 4$, $Q(p) = (p+1)(p-2)(p+3)$, *te je* $\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. *Dobivamo sljedeći rastav*

$$\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-2)(p+3)} = \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{p-2} + \frac{A_3}{p-3}.$$

Prema (3.4), *imamo* $A_1 = \dfrac{R(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} = \dfrac{R(-1)}{Q'(-1)} = -\dfrac{1}{6}$ *te analogno* $A_2 = -\dfrac{4}{3}$, $A_3 = \dfrac{7}{2}$.
Iz formule (3.3) *je*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-2)(p+3)}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

3.2 Kompleksna inverzna formula

Ponekad je određivanje f kao inverzne Laplaceove transformacije od F vrlo komplicirano, stoga je često potrebno koristiti nestandardne tehnike njezinog izračunavanja. Jedna od takvih je uporaba kompleksne inverzne formule koja se zasniva na računanju krivuljnog integrala kompleksnih funkcija.
Za izvod kompleksne inverzne formule koristit ćemo integralnu transformaciju vrlo sličnu Laplaceovoj transformaciji, tzv. **Fourierovu**[3] **transformaciju**. Koristi se kod rješavanja različitih problema matematičke fizike i mehanike, a posebno je važna u teoriji signala.
Fourierova transformacija funkcije f definirane na $\mathbb{R}$ je preslikavanje $f \mapsto \varphi$, gdje je

$$\varphi(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} f(t)dt, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

pri čemu nepravi integral uzimamo u smislu glavne vrijednosti. Funkcija φ zove se Fourierov transformat od f (spektralna funkcija ili spektar od f). O pitanju konvergencije, svojstvima i primjenama Fourierove transformacije može se više pronaći u [4].

Definicija 3.2.1. *Neka je f po dijelovima neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Kažemo da je f* ***apsolutno integrabilna*** *ukoliko vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty.$$

U nastavku ćemo koristiti sljedeći važan rezultat Fourierove analize čiji se dokaz može pronaći u [4, str. 142.].

Teorem 3.2.1 (Teorem Fourierove inverzije). *Neka je f po dijelovima neprekidna apsolutno integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada je*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}\mathcal{F}\{f\}(y)dy \tag{3.6}$$

u svakoj točki u kojoj je f neprekidna. U točki t u kojoj f nije neprekidna integral u (3.6) *ima vrijednost* $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

[3] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768.-1830.), francuski matematičar i fizičar

Neka je u nastavku f neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ eksponencijalnog reda α te označimo $\mathcal{L}\{f\} = F$. Proširimo ju na cijeli $\mathbb{R}$ tako da stavimo $f(t) = 0$, za $t < 0$. Tada

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-(x+iy)t} f(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$$

konvergira za $x = \mathrm{Re}(p) > \alpha$. Drugim riječima, funkcija $g(t) := e^{-xt} f(t)$ je apsolutno integrabilna pa se na nju može primijeniti Teorem 3.6:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} \mathcal{F}\{g\}(y) dy.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{iyt} \mathcal{F}\{g\}(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\tau} e^{-x\tau} f(\tau) d\tau \; dy = \\ &= \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{(x+iy)t} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-iy\tau} e^{-x\tau} f(\tau) d\tau \; dy \end{aligned}$$

Uvođenjem supstitucije $p = x + iy$, prelazimo na kompleksni integral po p varijabli

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to +\infty} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{tp} \int_0^{\omega} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \; dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{tp} \mathcal{L}\{f\}(p) dp. \end{aligned}$$

Konačno dobivamo

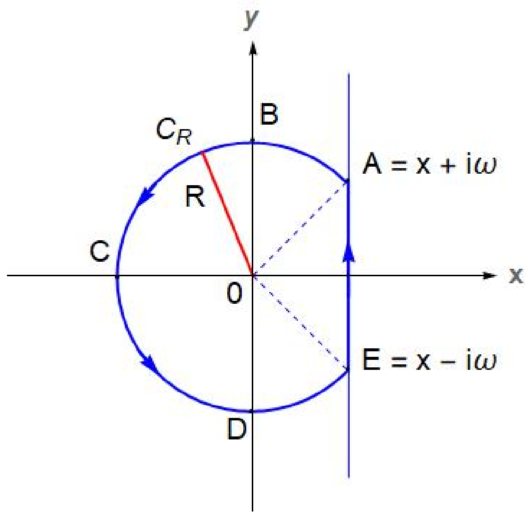
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{tp} F(p) dp. \tag{3.7}$$

što je poznato kao **kompleksna** (ili Fourier-Melinova) **inverzna formula**.
Uočimo da se integracija provodi po pravcu $\{x + i\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$ koji je paralelan s y-osi za fiksan $x > \alpha$. Taj pravac je poznat kao **Bromwicheva**[4] **linija**.
Integral (3.7) računat ćemo kao graničnu vrijednost krivuljnog integrala

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} e^{tp} F(p) dp,$$

gdje je Γ_R krivulja prikazana na Slici 3, a naziva se **Bromwicheva kontura**.

[4] Thomas John I'Anson Bromwich (1875.-1929.), engleski matematičar



Slika 3: Bromwicheva kontura

Sastoji se od dužine EA i luka $C_R = ABCDE$ kružnice sa središtem u ishodištu polumjera R. Zbog toga je

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_R} e^{tp} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} e^{tp} F(p) dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{EA} e^{tp} F(p) dp \tag{3.8}$$

Kako je $F = \mathcal{L}\{f\}$ analitička funkcija za $\mathrm{Re}(p) = x > \alpha$, svi njezini singulariteti (točke u kojima nije analitička ili nije definirana) nalaze se lijevo od Bromwicheve linije.

U nastavku ćemo ukratko opisati postupak računanja $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ u specijalnom slučaju kada F ima konačno mnogo polova. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ polovi od F te neka za $p \in C_R$ vrijedi

$$F(p) \leq \frac{M}{|p|^r}, \quad M > 0,\ r > 0.$$

Uzimanjem dovoljno velikog polumjera $R > R_0$, možemo postići da svi navedeni polovi od F leže unutar Bromwicheve konture Γ_R. Tada prema teoremu o reziduumima (vidi primjerice u [5]) vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} e^{tp} F(p) dp = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(z_i),$$

gdje je $\mathrm{Res}(z_i)$ reziduum funkcije $p \mapsto e^{tp} F(p)$ u polu z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.
Uvrštavanjem u (3.8) dobivamo

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} e^{tp} F(p) dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{tp} F(p) dp = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(z_i). \tag{3.9}$$

Dokaz sljedeće varijante Jordanove leme izostavljamo, a može se pronaći u [6, str. 120.].

Lema 3.2.1. *Neka funkcija F na C_R zadovoljava nejednakost*

$$F(p) \leq \frac{M}{|p|^r},$$

za $r > 0$ i za sve $R > R_0$, gdje je $R_0 \in \mathbb{R}$ fiksan. Tada je

$$\lim_{R \to +\infty} \oint_{C_R} e^{tp} F(p) dp = 0.$$

Ukoliko sada u (3.9) pustimo $R \to +\infty$, primjenom prethodne leme dobivamo konačan zaključak

$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{tp} F(p) dp = f(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(z_i).$$

Time smo problem traženja inverzne Laplaceove transformacije od F sveli na računanje reziduuma funkcije $p \mapsto e^{tp} F(p)$ u polovima od F.

4 Primjene Laplaceove transformacije

Laplaceova transformacija ima vrlo široku primjenu u praktičnim problemima koji se modeliraju difrencijalnim (običnim i parcijalnim), integralnim i diferentnim jednadžbama. Također se koristi pri računanju nekih određenih integrala koji se ne mogu riješiti standardnim metodama integracije.

4.1 Primjena na diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe povezuju neku funkciju s njenim derivacijama. Prirodno se pojavljuju kao modeli koji opisuju različite pojave u fizici, kemiji, biologiji, ekonomiji itd. Ukoliko se radi o funkciji jedne varijable, govorimo o **običnim diferencijalnim jednadžbama**, a u slučaju funkcije više varijabli o **parcijalnim diferencijalnim jednadžbama**. Red diferencijalne jednadžbe jednak je najvišem stupnju derivacije koja se u njoj pojavljuje. U ovisnosti o redu, dijelimo ih na *diferencijalne jednadžbe prvog* ili *višeg reda.*

4.1.1 Obične diferencijalne jednadžbe

Za početak ćemo promatrati *obične diferencijalne jednadžbe.* Općenita obična diferencijalna jednadžba n-tog reda je oblika

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Varijabla t uz y najčešće se izostavlja. Prema karakteru funkcije F, razlikujemo više vrsti diferencijalnih jednadžbi kao što su *jednadžba sa separiranim varijablama*, *linearna*, *homogena*, *Bernoullijeva* i dr. Nas će posebno zanimati jednadžbe oblika

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{4.1}$$

koje nazivamo **linearne diferencijalne jednadžbe**. Funkcija f s desne strane naziva se *funkcija smetnje.* Ako su $a_0, a_1, \dots, a_n$ konstantne funkcije, tada govorimo o **linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima**. Upravo će se pri njihovom rješavanju Laplaceova transformacija pokazati korisnom.
Općenito, jednadžba (4.1) ima beskonačno mnogo rješenja. Pretpostavimo li da y zadovoljava početne uvjete

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-2)}(0) = y_{n-2},\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \tag{4.2}$$

(4.1) zajedno s (4.2) čini *Cauchyjevu* ili *početnu* zadaću koja ima jedinstveno rješenje.
Ako dodatno y zadovoljava pretpostavke Korolara 2.3.1.1 te je f original, ima smisla uzeti Laplaceovu transformaciju lijeve i desne strane jednakosti (4.1). Time dobivamo transformiranu jednadžbu koja je algebarska. Nakon što nađemo njezino rješenje, potrebno je inverznom Laplaceovom transformacijom doći do rješenja polazne diferencijalne jednadžbe. Pokažimo to na jednostavnom primjeru.

Primjer 4.1.1. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y & = e^{3t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Neka je $\mathcal{L}\{y\} = Y$ *(ovu oznaku ćemo koristiti i ubuduće). Primijenimo li Laplaceovu transformaciju na prethodnu jednadžbu, dobivamo*

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{3t}\},$$

odnosno zbog svojstva linearnosti

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{p-3}.$$

Korištenjem teorema o deriviranju originala dobivamo

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - 3pY(p) + 3y(0) + 2Y(p) = \frac{1}{p-3}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta i sređivanjem slijedi

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) - p + 3 = \frac{1}{p-3},$$

odnosno

$$Y(p) = \frac{p^2 - 6p + 10}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)}.$$

Dobili smo transformiranu jednadžbu

$$Y(p) = \frac{p^2 - 6p + 10}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

koja nakon rastava na parcijalne razlomke izgleda ovako

$$Y(p) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p-1} - 2 \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-3}.$$

Djelovanjem inverzne transformacije na prethodnu jednakost i upotrebom Tablice 1 dolazimo do rješenja.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \frac{5}{2}e^{t} - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Uočimo da je za primjenu Laplaceove transformacije potrebno jedino da je funkcija smetnje f u izrazu (4.1) original, što samo po sebi predstavlja prednost u odnosu na ostale metode rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Dakle, pomoću Laplaceove transformacije možemo rješavati diferencijalne jednadžbe kod kojih funkcija smetnje f ima prekid. To ćemo ilustrirati sljedećim primjerom.

Primjer 4.1.2. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} y'' + y = Mu_c(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

gdje je u_c *step funkcija, a* $M > 0$ *konstanta. Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbu dobivamo*

$$\begin{aligned} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) &= M\frac{e^{-cp}}{p} \\ Y(p)(p^2+1) - 1 &= M\frac{e^{-cp}}{p} \\ Y(p) &= \frac{1}{p^2+1} + \frac{Me^{-cp}}{p(p^2+1)}, \end{aligned}$$

odnosno nakon rastava na parcijalne razlomke

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1} + M\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)e^{-cp}.$$

Jednostavnom primjenom Tablica 1 i 2 lako se dobije

$$y(t) = \sin t + Mu_c(t)(1 - \cos(t-c))$$

ili drugačije zapisano

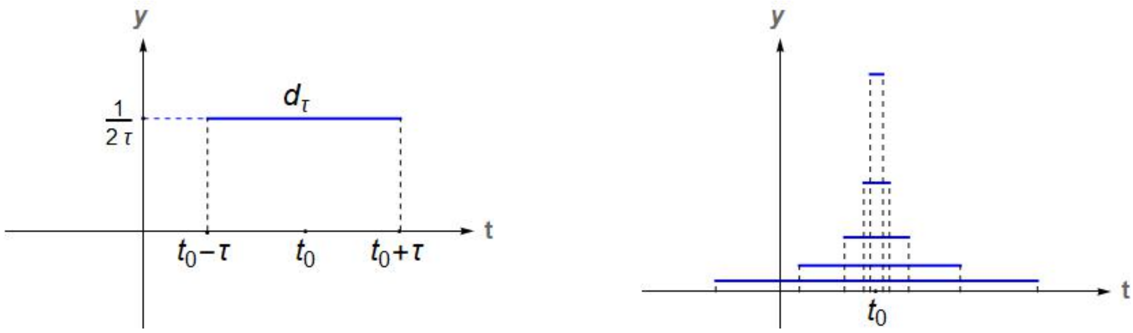
$$y(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < c \\ \sin t + M(1 - \cos(t-a)), & t \ge c. \end{cases}$$

Osim što dozvoljava da funkcija smetnje ima prekid, Laplaceova transformacija također je primjenjiva u rješavanju diferencijalnih jednadžbi kod kojih je funkcija smetnje tzv. **impulsna funkcija**. Takve se funkcije pojavljuju u modelima u kojima sile velike jakosti djeluju kratko na sustav (primjerice udar groma). Jedna od njih je *Diracova*[5] *δ funkcija* koja opisuje djelovanje jediničnog impulsa na sustav u trenutku $t = t_0$. Definira se pomoću sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} \delta_{t_0}(t) = 0, \quad t \ne t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Očito je da niti jedna "obična" funkcija s kakvima smo se dosad susretali ne može posjedovati navedena dva svojstva. Doduše, Diracovu δ funkciju nije niti ispravno zvati funkcijom jer se radi o tzv. *generaliziranoj funkciji*, odnosno *distribuciji*. Nameće se pitanje: kako Laplaceova transformacija može djelovati na nju kada ona očito ne zadovoljava uvjete teorema o egzistenciji? Ideja je zapisati δ funkciju kao graničnu vrijednost funkcije d_τ, koja je dana na Slici 4, na sljedeći način:

[5]Paul A. M. Dirac (1902.-1984), engleski fizičar i nobelovac



(a) graf funkcije d_τ

(b) graf funkcije d_τ kada $\tau \to 0+$

Slika 4

$$\delta_{t_0}(t) = \lim_{\tau \to 0+} d_\tau(t).$$

Sljedeći račun provodimo na formalnoj razini za $t_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{L}\{\delta_{t_0}\}(p)} &= \lim_{\tau \to 0+} \mathcal{L}\{d_\tau\}(p) = \lim_{\tau \to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-pt} d_\tau dt = \\
&= \lim_{\tau \to 0+} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-pt} \cdot \frac{1}{2\tau} dt = \lim_{\tau \to 0+} \frac{1}{2\tau} \left(-\frac{1}{p}\right) e^{-pt} \Big|_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} = \\
&= \lim_{\tau \to 0+} \frac{1}{2\tau} \left(e^{-p(t_0-\tau)} - e^{-p(t_0+\tau)}\right) = \lim_{\tau \to 0+} \frac{e^{-pt_0}}{p\tau} \cdot \frac{e^{p\tau} - e^{-p\tau}}{2} = \\
&= e^{-pt_0} \lim_{\tau \to 0+} \frac{\operatorname{sh}(p\tau)}{p\tau} = \boxed{e^{-pt_0}}.
\end{aligned}$$

Ukoliko pustimo $t_0 \to 0+$ u prethodnoj jednakosti, dobivamo

$$\mathcal{L}\{\delta_0\}(p) = \lim_{t_0 \to 0+} e^{-pt_0} = 1.$$

Zanimljiva je veza Diracove δ funkcije i Heavisideove step funkcije. Naime, može se pokazati da je derivacije Heavisideove step funkcije upravo Diracova δ funkcija [8, str. 59.].

Dosad smo pokazali kako se pomoću Laplaceove transformacije rješavaju linearne jednadžbe s **konstantnim** koeficijentima. Općenita metoda za rješavanje linearnih jednadžbi s nekonstantnim koeficijentima još ne postoji. Međutim, postoje specijalni slučajevi koji se mogu riješiti primjenom Laplaceove transformacije.

Neka se u jednadžbi (4.1) s početnim uvjetima (4.2) koeficijenti $a_j,\ j = 0, 1, \ldots, n$ pojavljuju kao polinomi varijable t:

$$a_j(t) = b_{0j}t^m + b_{1j}t^{m-1} + \cdots + b_{mj}, \quad b_{ij} = \text{const}., \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

pri čemu pretpostavljamo da je $m < n$.

Drugim riječima, lijeva strana jednadžbe (4.1) je linearna kombinacija izraza oblika

$$t^r y^{(k)}(t),$$

gdje su r i k nenegativni cijeli brojevi.
Primijenimo li Laplaceovu transformaciju na takav izraz, koristeći teoreme o deriviranju slike i originala, dobivamo:

$$\begin{aligned} F_k(p) &:= \mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\} = p^k Y(p) - p^{k-1}y_0 - p^{k-2}y_1 - \cdots - py_{k-2} - y_{k-1}, \\ \mathcal{L}\{t^r y^{(k)}(t)\} &= (-1)^r \frac{d^r(\mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\})}{dp^r} = (-1)^r \frac{d^r F_k(p)}{dp^r}. \end{aligned}$$

Korištenjem prethodno dobivene transformacije sumanada jednadžbe (4.1), dolazimo do transformirane jednadžbe koja je također diferencijalna. Uočimo da je njezin red najviše r. Time smo snizili red polazne diferencijalne jednadžbe jer je $r \leq m < n$.

Primjer 4.1.3. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} (2t+1)y'' + (4t-2)y' - 8y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Neka je $\mathcal{L}\{y\} = Y$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty'(t)\} &= -\frac{d}{dp}(pY(p) - 1) = -Y(p) - pY'(p) \\ \mathcal{L}\{ty''(t)\} &= -\frac{d}{dp}(p^2Y(p) - p \cdot 1 - 0) = -2pY(p) - p^2Y'(p) + 1. \end{aligned}$$

Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbu dobivamo

$$-4pY(p) - 2p^2Y'(p) + 2 + p^2Y(p) - p - 4Y(p) - 4pY'(p) - 2pY(p) + 2 - 8Y(p) = 0,$$

odakle je

$$Y'(p) - \frac{p^2 - 6p - 12}{2p(p+2)}Y(p) = \frac{4-p}{2p(p+2)},$$

što je linearna nehomogena diferencijalna jednadžba prvog reda. Za njezino rješavanje možemo koristiti primjerice metodu varijacije konstanti. Nakon dužeg računa dolazimo do rješenja Y *transformirane jednadžbe*

$$Y(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{p(p+2)} + \frac{8}{p^2(p+2)} + \frac{16}{p^3(p+2)}.$$

Rastavom na parcijalne razlomke i sređivanjem dobivamo

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{8}{p^3}.$$

Traženo rješenje polazne jednadžbe je

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^3}\right\},$$

tj.

$$y(t) = 1 + 4t^2.$$

4.1.2 Parcijalne diferencijalne jednadžbe

U mnogim fizikalnim problemima pojavljuju se barem dvije nezavisne varijable pa odgovarajući matematički modeli sadrže parcijalne diferencijalne jednadžbe. Treba istaknuti da je njihovo rješavanja puno zahtjevnije od rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi.
Promatrat ćemo **linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda** koje su oblika

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial t} + fu = g, \tag{4.3}$$

gdje su a, b, c, d, e, f, g funkcije definirane u području $G \subset \mathbb{R}^2$.
Ako je funkcija $g \equiv 0$, govorimo o *homogenoj* jednadžbi, a u protivnom o *nehomogenoj* jednadžbi. U nastavku ćemo promatrati samo one jednadžbe u kojima su a, b, c, d, e, f, g konstantne funkcije.
U ovisnosti o vrijednosti izraza $b^2 - ac$, razlikujemo tri tipa jednadžbi:

- ako je $b^2 - ac > 0$, jednadžba (4.3) je **hiperbolička**,
- ako je $b^2 - ac = 0$, jednadžba (4.3) je **parabolička**,
- ako je $b^2 - ac < 0$, jednadžba (4.3) je **eliptička**.

Neke od najpoznatijih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi su

- **Valna jednadžba**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$
Uočimo da se radi o hiperboličkoj jednadžbi ($b^2 - ac = 1$).
- **Jednadžba provođenja**
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$
Ovo jednadžba je parabolička ($b^2 - ac = 0$).
- **Laplaceova jednadžba**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$
Laplaceova jednadžba je eliptička jednadžba ($b^2 - ac = -1$).

Uz parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (skraćeno PDJ) najčešće se zadaju dodatni uvjeti koji osiguravaju jedinstvenost njezinog rješenja. Razlikujemo *početne* i *rubne* uvjete.
Početni uvjeti su uvjeti oblika $u(x, 0) = f(x)$ i $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, gdje su f i g zadane funkcije. Na ovaj način zadaju se vrijednosti koje traženo rješenje u zadovoljava u početnom trenutku $t = 0$. PDJ zajedno sa početnim uvjetima čini *početnu (Cauchyjevu) zadaću.*
Rubni uvjeti su oblika $u(x, y) = \varphi(x, y),\ (x, y) \in \partial G$, gdje je φ zadana funkcija, a ∂G rub područja G. PDJ zajedno s rubnim uvjetima naziva se *rubna zadaća.*

U modeliranju stvarnih problema, najčešće se pojavljuje *početno-rubna zadaća*, tj. PDJ sa zadanim početnim i rubnim uvjetima.

Neka je $u = u(x,t)$ omeđena funkcija klase C^2. Označimo s $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_t(x;p)$ Laplaceovu transformaciju funkcije $t \mapsto u(x,t)$. Definiramo ju na sljedeći način

$$\mathcal{L}_t\left(x;p\right) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}(p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x,t)dt. \tag{4.4}$$

Napomena 4.1.1. *Prethodno definirano preslikavanje ne treba zamijeniti s Laplaceovom transformacijom funkcije dvije varijable koja se definira kao*

$$\mathcal{L}\{u\}(p,q) := \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(px+qt)} u(x,t)dxdt.$$

Preslikavanje opisano u (4.4) *možemo smatrati Laplaceovom transformacijom funkcije u "po varijabli t".*

Za preslikavanje $\mathcal{L}_t$ vrijede sljedeća svojstva

(i)
$$\lim_{x\to x_0} \mathcal{L}_t\left(x;p\right) = \lim_{x\to x_0} \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x,t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x_0,t)dt = \mathcal{L}_t\left(x_0;p\right),$$

(ii)
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)dt = \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x,t)dt = \frac{d}{dx}\mathcal{L}_t\left(x;p\right),$$

(iii)
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)dt = \frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}_t\left(x;p\right),$$

(iv)
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}(p) = p\mathcal{L}_t\left(x;p\right) - u(x,0),$$

(v)
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}(p) = p^2\mathcal{L}_t\left(x;p\right) - pu(x,0) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,0).$$

Svojstvo (i) posljedica je apsolutne, a svojstva (ii) i (iii) uniformne konvergencije Laplaceovog integrala. Svojstva (iv) i (v) slijede primjenom teorema o deriviranju originala.

Primjer 4.1.4. *Riješimo početno-rubnu zadaću*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & na\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = t, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Primijenimo li Laplaceovu transformaciju po t varijabli na lijevu i desnu stranu dane jednadžbe, imamo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}.$$

Korištenjem svojstava (ii) i (iv) te početnog uvjeta dobivamo

$$\frac{d}{dx}\mathcal{L}_t\left(x;p\right) = p\mathcal{L}_t\left(x;p\right) - x.$$

Dakle, dobili smo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda po funkciji $\mathcal{L}_t$ za fiksan p

$$\frac{d}{dx}\mathcal{L}_t - p\mathcal{L}_t = -x,$$

čije je opće rješenje

$$\mathcal{L}_t\left(x;p\right) = ce^{px} + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}.$$

Uzimajući u obzir rubni uvjet, imamo

$$\mathcal{L}_t\left(0;p\right) = \mathcal{L}\{u(0,t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p^2}$$

iz čega slijedi da je $c = 0$, pa je

$$\mathcal{L}_t\left(x;p\right) = \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}.$$

Preostalo je inverznom transformacijom pronaći rješenje polazne jednadžbe. Lako se dobije da je

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_t\left(x;p\right)\} = x + t.$$

Jedna od najčešćih jednadžbi u primjenama zasigurno je *valna jednadžba*. Otkrio ju je J. L. R. d'Alembert 1746. godine proučavajući titranje žice na glazbalu. Služi za modeliranje mehaničkih valova (npr. zvučni ili seizmički val) te svjetlosnih valova. Neki od najvažnijih problema koji se opisuju valnom jednadžbom su *elongacija titrajuće žice*, *širenje zvučnih valova*, *širenje elektromagnetskih valova u kablovima* i dr. Najjednostavniji oblik valne jednadžbe koji ćemo koristiti je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \langle 0, l\rangle,\ t > 0, \tag{4.5}$$

gdje je $c > 0$ konstanta.

Pretpostavimo da (4.5) opisuje progib (elongaciju) titrajuće žice duljine l učvršćene na krajevima (npr. žice na gitari). Progib žice u točki x u trenutku t dan je s $u(x,t)$. Činjenica da je žica učvršćena na krajevima daje nam sljedeće rubne uvjete koji se nazivaju *Dirichletovi* rubni uvjeti

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{4.6}$$

Da je primjerice desni kraj žice bio slobodan, imali bismo tzv. *Neumannov* rubni uvjet koji je oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t}(l,t)=0, \quad t>0.$$

Pretpostavimo da je oblik žice u početnom trenutku opisan funkcijom u_0, tj.

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,l], \tag{4.7}$$

te da je zadana funkcija v_0 koja opisuje početnu brzinu žice, odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0(x), \quad x\in[0,l]. \tag{4.8}$$

(4.5) zajedno s (4.6), (4.7) i (4.8) čini početno-rubnu zadaću koju možemo riješiti koristeći Laplaceovu transformaciju.
Uzimanjem Laplaceove transformacije po varijabli t u (4.5) dobivamo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}-c^2\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=0$$
$$p^2\mathcal{L}_t\left(x;p\right)-pu(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)-c^2\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}_t\left(x;p\right)=0,$$

odnosno nakon uvrštavanja početnih uvjeta

$$c^2\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}_t\left(x;p\right)-p^2=-pu_0(x)-v_0(x).$$

Dobili smo linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda čije se opće rješenje može zapisati u obliku

$$\mathcal{L}_t\left(x;p\right)=c_1e^{\frac{p}{c}x}+c_2e^{-\frac{p}{c}x}+P(x;p), \tag{4.9}$$

gdje je P partikularno rješenje koje možemo odrediti primjerice *metodom neodređenih koeficijenata.* Ako na rubne uvjete primijenimo Laplaceovu transformaciju, dobivamo

$$\mathcal{L}\{u(0,t)\}=\mathcal{L}_t\left(0;p\right)=0,$$
$$\mathcal{L}\{u(l,t)\}=\mathcal{L}_t\left(l;p\right)=0.$$

Uvrštavanjem dobivenih rubnih uvjeta u (4.9) dobivamo konstante c_1 i c_2, nakon čega primjenom inverzne Laplaceove transformacije dolazimo do traženog rješenja u.

Primjer 4.1.5. *Odredimo rješenje početno-rubne zadaće*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial u^2}{\partial t^2}=0, \quad \text{na } \langle 0,\pi\rangle\times\mathbb{R}^+,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, \quad t\geq 0,\\ u(x,0)=\sin x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad x\in[0,\pi]. \end{cases}$$

Ovdje je $c=1$, $u_0(x)=\sin x$ i $v_0(x)=0$. Primjenom Laplaceove transformacije, na osnovu prethodnog računa, dobivamo

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}_t\left(x;p\right)-p^2\mathcal{L}_t\left(x;p\right)=-p\sin x.$$

Opće rješenje ove jednadžbe je

$$\mathcal{L}_t\,(x;p) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} + P(x;p).$$

Koristeći metodu neodređenih koeficijenata dobivamo partikularno rješenje $\mathcal{L}_t^p$

$$P(x;p) = A\sin x + B\cos x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem partikularnog rješenja u polaznu jednadžbu dobivamo

$$-A\sin x - B\cos x - p^2 A\sin x - p^2 B\cos x = -p\sin x$$

iz čega slijedi

$$A = \frac{p}{p^2+1}, \quad B = 0.$$

Dobili smo opće rješenje

$$\mathcal{L}_t\,(x;p) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} + \frac{p}{p^2+1}\sin x.$$

Primjena Laplaceove transformacije na rubne uvjete daje

$$\mathcal{L}_t\,(0;p) = \mathcal{L}_t\,(\pi;p) = 0$$

čijim uvrštavanjem u opće rješenje slijedi $c_1 = c_2 = 0$*. Dakle,*

$$\mathcal{L}_t\,(x;p) = \frac{p}{p^2+1}\sin x.$$

Primjenom inverzne transformacije, imamo

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_t\,(x;p)\} = \sin x \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\}$$

što daje rješenje početno-rubne zadaće

$$u(x,t) = \sin x \cos t.$$

4.2 Primjena na integralne jednadžbe

Mnogi fizikalni problemi se, osim diferencijalnim, mogu modelirati i integralnim jednadžbama. **Integralne jednadžbe** su jednadžbe u kojima se nepoznata funkcija pojavljuje pod znakom integracije. Dijele se na *linearne* i *nelinearne*, no nas će, kao i u prethodnom dijelu, zanimati samo linearne jednadžbe.

Linearne integralne jednadžbe su jednadžbe oblika

$$y(t) = f(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} K(t,s)y(s)ds, \tag{4.10}$$

gdje je y nepoznata funkcija, f i K zadane funkcije te a i b proizvoljne funkcije. Funkciju K zovemo *jezgrom integralne jednadžbe*, a f *slobodnim članom*. Ako je $f \equiv 0$, govorimo o *homogenoj*, a u protivnom o *nehomogenoj* jednadžbi. Uočimo da se nepoznata funkcija y u (4.10) pojavljuje i pod integralom i izvan njega. Takve jednadžbe zovemo *jednadžbama drugog reda*. Ako se y pojavljuje samo pod znakom integracije, tada govorimo o *jednadžbama prvog reda*.

Ukoliko su K i f neprekidne funkcije te $a, b \in \mathbb{R}$, jednadžbu (4.10) zovemo **Fredholmovom**[6] **jednadžbom**.

Stavimo li u (4.10) $a(t) = 0$ i $b(t) = t$, za svaki t, dobivamo tzv. **Volterrinu**[7] **jednadžbu**

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t, s)y(s)ds. \tag{4.11}$$

Za jezgru $K = K(t, s)$ kažemo da je *diferentna* ako se može zapisati kao funkcija varijable $t - s$. Pretpostavimo li da K ima to svojstvo, (4.11) postaje

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t - s)y(s)ds,$$

što možemo zapisati kao

$$y(t) = f(t) + (K * y)(t). \tag{4.12}$$

Dobivena jednadžba je Volterrina jednadžba *konvolucijskog tipa*.

Pretpostavimo li da su funkcije y, f i K originali, ima smisla primijeniti Laplaceovu transformaciju na (4.12). Zaista, neka je $\mathcal{L}\{y\} = Y$, $\mathcal{L}\{f\} = F$ i $\mathcal{L}\{K\} = \kappa$. Tada, prema teoremu o konvoluciji, imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\}(p) &= \mathcal{L}\{f + (K * y)\}(p) && \Leftrightarrow \\ Y(p) &= F(p) + \mathcal{L}\{K * y\}(p) && \Leftrightarrow \\ Y(p) &= F(p) + \kappa(p)Y(p), \end{aligned}$$

odakle je

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \kappa(p)}.$$

Do konačnog rješenja jednadžbe (4.12) dolazimo pomoću inverzne Laplaceove transformacije.

Primjer 4.2.1. *Pronađimo rješenje integralne jednadžbe*

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t - s)^2 y(s)ds + \sin t.$$

Ovdje je $f(t) = \sin t$ *i* $K(t, s) = \frac{1}{2}(t - s)^2$ *pa je jezgra diferentna. Osim toga,* $a(t) = 0$ *i* $b(t) = t$ *pa se radi o Volterrinoj jednadžbi konvolucijskog tipa koja je drugog reda. Neka je* $\mathcal{L}\{y\} = Y$. *Kako je*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t - s)^2 y(t)ds\right\} = \mathcal{L}\{t^2 * y(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\} \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2}{p^3}Y(p),$$

[6] Erik Ivar Fredholm (1866.-1927.), švedski matematičar

[7] Vito Volterra, (1860.-1940.), talijanski matematičar i fizičar

primjenom Laplaceove transformacije na danu jednadžbu, imamo

$$Y(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^3} Y(p) + \frac{1}{p^2+1}.$$

Sređivanjem dobivamo

$$Y(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+p+1)(p^2+1)},$$

odnosno nakon rastavljanja na parcijalne razlomke

$$Y(p) = \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)}.$$

Primjenom inverzne transformacije, koristeći teorem o pomaku, slijedi

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 3\cos t + 3\sin t - 4e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Literatura

[1] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Seventh edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[2] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[3] N. Elezović, *Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija*, Element, Zagreb, 2007.

[4] A. Jerri, *Integral and Discrete Transforms with Applications to Error Analysis*, Marcel Dekker Inc., 1992.

[5] S. Kurepa, H. Kraljević, *Matematička analiza IV, Funkcija kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[6] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Laplaceova transformacija i primjena*, Tuzla, 2010.

[7] J. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.

[8] D.V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, 1946.