

# Metode rješavanja problemskih zadataka

---

**Paponja, Ivana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:056643>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-24**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Ivana Paponja**

**Metode rješavanja problemskih zadataka**

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Ivana Paponja**

**Metode rješavanja problemskih zadataka**

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2016.

# Sadržaj

Uvod	4
<b>1 Razvoj strategija za rješavanje problema</b>	<b>5</b>
<b>2 Poučavanje o rješavanju problema</b>	<b>7</b>
2.1 Rješavanje problema u četiri koraka . . . . .	7
2.2 Jedanaest strategija za rješavanje problema . . . . .	9
2.3 Pronađi i koristi uzorak . . . . .	10
2.4 Odglumi . . . . .	13
2.5 Napravi model . . . . .	14
2.6 Napravi sliku ili dijagram . . . . .	15
2.7 Napravi tablicu i/ili grafikon . . . . .	16
2.8 Napiši matematički zadatak riječima . . . . .	17
2.9 Pogodi i provjeri, metoda pokušaja i pogrešaka (metoda uzastopnih približavanja) . . . . .	18
2.10 Uključi sve mogućnosti . . . . .	21
2.11 Riješi jednostavniji problem ili razlomi problem u dijelove . . . . .	23
2.12 Počni unatrag (metoda rješavanja unatrag) . . . . .	25
2.13 Prekini skup ili promijeni gledište . . . . .	26
<b>3 Poučavanje za rješavanje problema</b>	<b>28</b>
<b>4 Poučavanje putem rješavanja problema</b>	<b>30</b>
4.1 Što je problem? . . . . .	30
4.2 Obilježja problema . . . . .	31
4.3 Primjeri problema . . . . .	31
4.4 Odabir korisnih zadataka . . . . .	34
4.5 Višestruke točke ulaza i izlaza . . . . .	36
4.6 Relevantni konteksti . . . . .	37
4.7 Upravljanje tijekom rada u razredu . . . . .	40
4.8 Razgovor u razredu . . . . .	40
4.9 Razmatranje pitanja . . . . .	42
4.10 Koliko reći, a koliko ne? . . . . .	44
4.11 Jednakost i poučavanje putem rješavanja problema . . . . .	45

<b>Zaključak</b>	<b>48</b>
<b>Literatura</b>	<b>49</b>
<b>Sažetak</b>	<b>50</b>
<b>Summary</b>	<b>51</b>
<b>Životopis</b>	<b>52</b>

## Uvod

Problemski zadatci jedni su od osnovnih matematičkih nastavnih sadržaja. To su zadatci zadani riječima u kojima je potrebno riješiti određeni problem. Takvi zadatci znatno produbljuju i razvijaju učenikove misaone i stvaralačke sposobnosti. Potiču ih na kreativnost, samostalnost i angažiranost. Osnovni dio problemskog zadatka čine poznate i nepoznate veličine te veze među njima. Kako bismo lakše i brže riješili problemski zadatak, potrebne su nam i metode za rješavanje problema. U radu je opisano jedanaest osnovnih strategija za rješavanje problema. Strategije su alati koje učenici mogu koristiti prilikom rješavanja problema. Pomažu učenicima razumjeti problem, razviti i provesti plan i procjenu razumnosti rješenja. U radu je opisano i rješavanje problema u četiri koraka kako to sugerira poznati matematičar George Polya. Treba ponajprije identificirati problem, napraviti plan, provesti ga te provjeriti i procijeniti rješenje. Dani su neki primjeri problemskih zadataka za osnovnu školu te je objašnjena i uloga učitelja koja je veoma bitna u ovom nastavnom procesu. Učitelj je taj koji organizira, motivira i usmjerava učenike za pravilno korištenje informacija, znanja i pravila. On upravlja tijekom rada u razredu te su stoga bitne i učiteljeve vještine i kompetentnost. Jedno od najvažnijih pitanja suvremene nastave matematike jest pitanje razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika. U mnogim područjima ljudi dolaze svakodnevno do različitih problemskih situacija koje bi trebali znati riješiti. Stoga je veoma važno učenike od samog početka pripremiti za takav rad. Nije dovoljno samo učenicima prenositi znanje, a niti samo snalaženje u problemskim situacijama, već ih osposobiti za rješavanje problema. Tako ćemo stvoriti misaonog i kreativnog pojedinca s razvijenim stvaralačkim sposobnostima. Detaljnije metode pristupa rješavanju problemskih zadataka bit će objašnjene u radu. Problemski zadatci potiču na zdravo i logičko razmišljanje, izuzetno su korisni jer pospješuju učenikovo znanje.

# 1 Razvoj strategija za rješavanje problema

Rješavanje problema bi trebala biti središnja točka poučavanja i učenja matematike. Učenjem kako rješavati probleme u matematici, učenici bi trebali usvojiti način razmišljanja, navike ustrajnosti i znatiželje te steći pouzdanje u nepoznatim situacijama koje će im poslužiti i izvan matematičkog razreda. U svakodnevnom životu i na radnom mjestu možemo imati veliku prednost ako smo dobar rješavač problema. Kao prva sposobnost procesuiranja, rješavanje problema je vrlo bitno za razvijanje drugih sposobnosti i znanja o sadržaju. Učenici koji uče iz perspektive rješavanja problema stvaraju svoje vlastito razumijevanje matematike umjesto da samo memoriziraju pravila koja često ne razumiju. Nekad davno je rješavanje problema u matematici bilo izjednačeno s riječima zadanim problemima na kraju poglavlja. Učenici bi odabrali brojeve iz problema i primijenili ih na netom naučeni izračun. Bez razvijanja sposobnosti rješavanja problema, problemi s riječima postaju izvor frustracija i neuspjeha za većinu djece. Učenici bi bili često zbunjeni kad bi se suočili s realnim problemima i kad bi trebali odrediti koju operaciju koristiti, koje brojeve uključiti i kad bi razmišljali o tome imaju li njihovi odgovori smisla. Danas je rješavanje problema središte poučavanja i učenja matematike. Rješavanje problema nije daleka tema, već proces koji bi trebao prožimati cijeli program i osigurati kontekst u kojem možemo naučiti koncepte i steći vještine. Možemo prepoznati važnost računanja i vitalnost koju rješavanje problema omogućuje učenjem matematike. Učinkoviti učitelji u osnovnoj školi potiču kreativno i kritičko razmišljanje u svim predmetima. Učitelji pronalaze realne probleme povezane s iskustvima djece koji im pomažu u poučavanju matematičkih sposobnosti i koncepata. Realne situacije, zamišljeni događaji, slagalice, igre i manipulacije mogu stvoriti probleme s kojima se učenici mogu suočiti i u njima sudjelovati. Učenici otkrivaju koncepte i procedure i koriste ih u interesantnim i novim situacijama te time postaju matematičari dok rješavaju različite probleme. Kad menadžeri, vlada i drugi vođe gledaju osnovne sposobnosti za rad svojih zaposlenika, naglašavaju sposobnost kritičkog i kreativnog razmišljanja, sposobnost rješavanja problema, učinkovitu pisanu i usmenu komunikaciju i timski rad. Veza između pristupa rješavanja problema i sposobnosti iz stvarnog života je očigledna. Kako bismo funkcionirali u ovom našem složenom i promjenjivom društvu, moramo rješavati različite probleme. Matematički kurikulum osnovne škole mora djecu pripremiti na to da postanu učinkoviti rješavači problema. Uz niz strategija za rješavanje problema učenici mogu razumjeti problem, razviti plan

i provesti ga. Nakon toga mogu razmotriti je li njihov odgovor razuman i postoje li alternativni odgovori ili pristupi, a na kraju mogu iskazati svoje odgovore i svoje razmišljanje. Sposobnost ispravnog računanja je bitna kod rješavanja problema, ali razmišljanje je jezgra poučavanja i učenja matematike. Na svakom satu može se učiti sposobnost rješavanja problema kao što je saznala gđa Eckelkamp kad je pitala učenike trećeg razreda da razmotre prijevoz za putovanje.

**Gđa Eckelkamp:** "Budući da proučavamo životinje i staništa, idemo u zoološki vrt. Imamo 27 učenika u našem razredu. Popričajmo o tome kako ćemo doći do zoološkog vrta".

**Evan:** "Možemo pješice do tamo".

**Tara:** "Predaleko je; trebali bi ići automobilima".

**Gđa Eckelkamp:** "Koliko automobila trebamo?"

**Kate:** "Naš auto ima dva sjedala sprijeda i tri straga, tako da se u svakom automobilu može voziti četvero djece. Šest automobila s četvero djece: šest automobila s četvero djece je dvadeset i četvero djece".

**Kim:** "Ali imamo dvadeset i sedmero djece. Trebamo sedam automobila za sve ako se troje djece ne razboli".

**Joaquina:** "Neki automobili imaju dva sjedala straga. U nekim autima može se voziti troje djece. Dvadeset sedam podijeljeno s tri je devet automobila. Neki automobili mogu imati četvero djece, drugi troje; mislim da trebamo osam automobila".

**Ali:** "Naš kombi ima sedam sjedala - svi se mogu voziti u četiri kombija".

**Jorge:** "Jedan kombi je isto što i jedan veliki i jedan mali automobil".

**Tom:** "Jedan školski autobus može voziti sve nas uz gđu Eckelkamp i roditelje".

Problemi iz stvarnog života zahtijevaju više od računanja  $27/4 = 6$  i ostatak 3. Što se tiče problema sličnih navedenom, engleska nacionalna procjena napretka u obrazovanju je ustanovila da većina učenika u osnovnoj i srednjoj školi daje izračun 6, ostatak 3, radije nego realni odgovor 7. Uz računanje, bitno je da učenici objasne ima li odgovor smisla, na koji način uvjeti mogu utjecati na odgovor, i kako je odgovor dobiven. Problemi mogu imati različite odgovore ovisno o



razmotrenim čimbenicima. Sve je više dokaza da je rješavanje problema moćno i učinkovito sredstvo za učenje. U klasičnom izdanju o vrstama poučavanja vezanim uz rješavanje problema Schroeder i Lester ([1], str. 115.) identificirali su tri vrste pristupa rješavanju problema. To su:

- Poučavanje o rješavanju problema
- Poučavanje za rješavanje problema
- Poučavanje putem rješavanja problema.

## 2 Poučavanje o rješavanju problema

*Poučavanje o rješavanju problema* je fokusirano na korake i strategije poučavanja. Problemi su zadaci za vježbanje strategija. Ovaj pristup uključuje poučavanje učenika kako riješiti problem, što uključuje poučavanje procesa (razumjeti, izraditi strategiju, implementirati, provjeriti) ili strategija za rješavanje problema. Primjer strategije je "nacrtaj sliku" u kojoj učenici koriste sliku ili dijagram u rješavanju problema. Poučavanje o rješavanju problema može i trebalo bi biti dio sadržaja poučavanja, ali zahtijeva vrijeme koje moramo posvetiti poučavanju učenika vezano uz proces i strategije rješavanja problema.

### 2.1 Rješavanje problema u četiri koraka

Učenici trebaju realne, otvorene probleme jer oni nude mogućnost otkrivanja bitnog matematičkog sadržaja. Problem je situacija za koju se ne može odmah naći rješenje ili neka poznata strategija. Ako je odgovor već poznat, nema problema. Ako je procedura poznata, rješenje uključuje zamjenu informacije u poznati proces. Ako su nepoznati i odgovor i procedura, učenici trebaju tehnike za rješavanje problema. George Polya, poznati matematičar, u svojoj knjizi 'Kako to riješiti' sugerira rješavanje problema u četiri koraka. Eksplicitno poučavanje ovih koraka može poboljšati sposobnost učenika da razmišljaju matematički. Ova opća strategija ili organizator zvana heuristika primjenjuje se za svo rješavanje problema i parira znanstvenoj metodi:

#### **Znanstvena metoda**

1. Razumjeti problem

2. Izvući nacrt problema
3. Organizirati eksperiment ili promatranje
4. Prikupiti i analizirati podatke
5. Izvući zaključke
6. Interpretirati i procijeniti rješenje.

1. *Razumjeti problem.* Prvo se moramo angažirati i shvatiti o čemu se radi u problemu te identificirati pitanje koje se nameće vezano uz problem.
2. *Napraviti plan.* U ovoj fazi razmišljamo o tome kako riješiti problem. Hoćemo li napisati jednadžbu? Želimo li modelirati problem s materijalima?
3. *Provesti plan.* To je implementacija naše strategije tj. pristupa.
4. *Provjeriti.* Ova faza, možda najvažnija, ali i ona koja se najviše izbjegava, je trenutak u kojem odlučujemo odgovora li odgovor iz koraka 3 na problem postavljen u koraku 1. Ima li naš odgovor smisla? Ako nema, vratimo se natrag na korak 2 i odaberimo drugu strategiju za rješavanje problema ili se vratimo na korak 3 ako trebamo samo nešto popraviti unutar naše strategije.

### **Polyaini koraci za rješavanje problema**

1. Identificirati problem ili pitanje
2. Predložiti rješenje (napraviti plan)
3. Provesti plan
4. Provjeriti i procijeniti.

Polyaini koraci rješavanja problema su obično uključeni u matematičke knjige za osnovne škole kao vodič za rješavanje problema za učenike koji koriste izraze za razumjeti, planirati, raditi i provjeriti. Učenici koji su dobri u matematici imaju stratešku kompetenciju (korak 2) i adaptivno razmišljanje (korak 4). Polyaini koraci se dalje proširuju i objašnjavaju u Standardima za matematiku u praksi, uključujući apstraktno i kvantitativno razmišljanje (koraci 2 – 4), konstruiranje održivih argumenata (korak 3) te traženje i izražavanje regularnosti kod ponovnog razmišljanja (koraci 1 – 4). Ljepota Polyainog okvira je njena općenitost. Navedeni okvir se može primijeniti i trebao bi se primijeniti na različite vrste problema, od jednostavnih zadataka računanja do autentičnih problema i problema s višestrukim koracima. Kao što je već navedeno, bitno je zapamtiti da ova četiri koraka ne treba poučavati

izolirano, već ih treba uključiti u učenje matematičkih koncepata.

Kod problema u stvarnom životu, učenici razmatraju različite strategije, donose odluke o učinkovitosti i razumnosti procesa i rješavanja te donose zaključke i generaliziraju rezultate.

## 2.2 Jedanaest strategija za rješavanje problema

Strategije za rješavanje problema su metode koje možemo identificirati prilikom pristupanja zadatku, a koje su potpuno neovisne o određenoj temi ili predmetu. Učenici odabiru ili dizajniraju strategiju za razvoj plana (Polyain korak 2). Kad učenici otkriju važne ili posebno korisne strategije, treba identificirati i naznačiti metodu o kojoj se može raspravljati. Označavanje strategije je korisno sredstvo za učenike jer mogu govoriti o svojim metodama, što im, pak, može pomoći da uspostave veze između strategija i prezentacija. Strategije za rješavanje problema su "alati" koje učenici koriste za rješavanje problema. Pomažu učenicima razumjeti problem, razvijati i implementirati planove i procijeniti razumnost svojih rješenja. Razum, komunikacija, prezentiranje i povezivanje su uključeni kad učenici riješe problem.

Mnoge su sposobnosti procesuiranja potrebnog u matematici slične sposobnostima čitanja, a kod zajedničkog poučavanja, oni samo učvršćuju jedno drugo. Učenici razvijaju i definiraju strategije tijekom rješavanja različitih problema, uključujući nerutinske, otvorene i različite situacije. Repertoar strategija omogućuje da te strategije koriste na fleksibilan način za pristup novim situacijama. No, ne bismo smjeli učenicima nuditi strategije koje će im pokazati kako riješiti problem. Umjesto toga trebamo postaviti problem koji se sam oslanja na strategiju koju želimo da učenici razviju. Na taj način ćemo omogućiti učenicima da riješe problem na način koji ima najviše smisla i koji najbolje odražava njihovo vlastito razmišljanje. Idućih je jedanaest strategija za rješavanje problema ili alata bitno za učenike osnovnih škola:

1. **Pronađi i koristi uzorak:** učenici identificiraju i proširuju uzorak za rješavanje problema.
2. **Glumi:** glumeći problem učenici razumijevaju problem i sastavljaju plan rješavanja.
3. **Napravi model:** učenici koriste objekte za predstavljanje situacije.

4. **Napravi sliku ili dijagram:** učenici pokazuju što se događa u problemu putem slike ili dijagrama.
5. **Napravi tablicu i/ili grafikon:** učenici organiziraju i arhiviraju podatke u tablici ili grafičkom prikazu. Vjerojatnije je da će naći uzorak ili uočiti veze ako je problem vizualno prikazan.
6. **Napiši matematičku rečenicu:** ako problem uključuje brojne operacije, strategije često vode do matematičke rečenice ili izražavanja odnosa s brojevima ili simbolima.
7. **Pogodi i provjeri ili metoda pokušaja i pogrešaka:** istražujući različita moguća rješenja, učenici otkrivaju što funkcionira, a što ne. Čak i kad potencijalno rješenje ne funkcionira, može dati naznake za druge mogućnosti ili pomoći učenicima da razumiju problem.
8. **Uključi sve mogućnosti.** Učenici sustavno stvaraju niz rješenja i pronalaze ona koja zadovoljavaju zahtjeve situacije.
9. **Riješi jednostavniji problem ili razlomi problem u dijelove.** Ako je problem prevelik ili presložen, učenici mogu smanjiti problem ili ga razlomiti u dijelove radi lakšeg upravljanja.
10. **Počni unatrag:** ako prvo razmotrite cilj, problem može izgledati lakši. Ako učenici započnu s krajem u mislima, to im može pomoći da razviju strategiju koja vodi k rješenju, ali odostraga.
11. **Prelomi skup ili promijeni stajalište:** ako strategija ne funkcionira, učenici trebaju fleksibilno razmišljati. Možda će biti potrebno napustiti to što rade i probati nešto drugo ili razmišljati o problemu na posve drugi način.

Ovih jedanaest strategija su alati za razumijevanje, organizaciju, implementiranje i komunikaciju problema, rješenja i matematičkih koncepata. Jedna strategija može voditi do rješenja, ali obično je potrebna kombinacija strategija. Brojni matematički udžbenici i knjige uključuju izvrsne zadatke za razvoj strategije. Međutim, strategija je sredstvo, a ne cilj rješavanja problema.

### 2.3 Pronađi i koristi uzorak

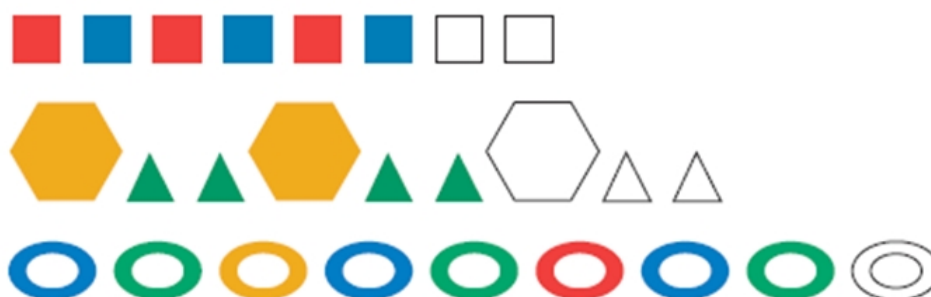
Živimo u svijetu punom uzoraka u umjetnosti, arhitekturi, glazbi, prirodi (Slika 1), dizajnu i ljudskom ponašanju. Uzorci su općenito definirani kao ponavljanje sekvenci objekata, akcija, zvukova ili simbola. Uzorci mogu, također, uključivati varijacije

ili anomalije jer nisu savršeni. Uzorci su povezani s očekivanjima i predviđanjima. Ako se nešto već prije dogodilo, ljudi očekuju da će se to i ponoviti. Novost je kad se nešto neočekivano dogodi. Uzorci mogu biti jednostavni ili složeni, stvarni ili apstraktni, vizualni ili slušni. Prepoznavanje i korištenje uzoraka je bitna ljudska sposobnost razmišljanja. Iz takvih primjera učenja na uzorcima u prirodi mogu učiti i djeca najmanjeg uzrasta jer je to prirodan način napredovanja u učenju.



Slika 1: Primjer uzorka u prirodi - suncokret

Bez sposobnosti da pronađu i koriste uzorke za organizaciju svijeta, ljudi bi živjeli u potpunom kaosu. Djeca stvaraju uzorke na temelju boja sa zajedničkim manipulativima: blokovi uzorka, obojane pločice, poveznice i višestruko povezane kocke. Primjeri obrazaca služe djeci kao uzorci iz kojih oni uče od jednostavnijih do složenijih uzoraka s tri ili četiri elementa (Slika 2). Učenici spajaju uzorke, čitaju uzorke boja i proširuju ih:



Slika 2: Obrasci za uzorak

Crveno plavo, crveno, plavo, crveno, plavo ...

Žuto, zeleno, zeleno, žuto, zeleno, zeleno ...

Plavo, zeleno, žuto, plavo, zeleno, crveno, plavo, zeleno žuto ...

Djeca mogu sama pronaći i napraviti ostale uzorke. Mogu se sami organizirati po vrsti cipela, boji očiju ili položajima:

Sandale, tenisice, sandale, tenisice ...

Smeđe, plavo, zeleno, smeđe, plavo, zeleno ...

Sjedi, stoji, sjedi, stoji, sjedi, stoji ...

Učitelji bi trebali, umjesto ograničavanja na jedan ili dva primjera, prezentirati niz uzoraka različitih vrsta i pitati učenike da ih pronađu i prošire. Kako učenici počinju razumijevati uzorke, počinju stvarati i svoje vlastite uzorke koji demonstriraju upravo to razumijevanje. Razumijevanje uzoraka je temeljna sposobnost za algebru i algebarsko razmišljanje. Učenici srednjih škola rade s uzorcima i nizovima koji se povećavaju, smanjuju i preklapaju na složenije načine nego uzorci koje koriste mlađi učenici. Složeniji uzorci mogu se naći u vezama među brojevima. Na slici 2 je prikazano kako se brojanje niza kvadratića u geometrijskom dizajnu pretvara u uzorak s algebarskim implikacijama. Djeca u osnovnoj školi broje i traže uzorke. Starija djeca koriste uzorke za stvaranje pravila ili matematičkog izraza. Ako počnu s jednostavnijim uzorcima i napreduju prema složenijim, učenici mogu naučiti koliko su uzorci moćna sposobnost razmišljanja pri rješavanju problema. Učenje o uzorcima nije ograničeno na matematiku, već je vezano i uz školske predmete. Kad se djeca nauče igrati uzorcima s glazbenim instrumentima, razvijaju sposobnosti koje se koriste kod čitanja rečenica i riječi. Rimovanje riječi, kratki i dugi samoglasnici, prefiksi i sufiksi su bitan uzorak u čitanju. Znanost je često pisana kao studija uzoraka u prirodnom svijetu. Učenici otkrivaju uzorke u lišću biljaka, promatranjem pretvaranja punoglavca u žabu te u kemijskim reakcijama octa i različitih stijena.

Još jedan primjer aktivnosti s uzorkom je uzorak s ljudima. Možemo pozvati učenike da se raspodijele prema spolu i odjeći:

Dječak-djevojčica, dječak-djevojčica ...

Tenisice, kožne cipele, tenisice, kožne cipele ...

Tamna kosa, svijetla kosa, tamna kosa, svijetla kosa ...

Možemo navesti djecu da uoče uzorak (tamna kosa, svijetla kosa, tamna kosa ...) te

ih pitati što je sljedeće i pustiti da se slože prema uzorku. Treba im dopustiti da sugeriraju druge uzorke.

Neka se učenici pridruže kad shvate uzorak. Klimnite glavom za pauzu što je dobro za zadržavanje ritma. Neka učenici drže kartice s oznakama za karakteristike i možemo ponovno pročitati uzorak.

Dječak, djevojčica, dječak, djevojčica, dječak, djevojčica

Kada zamijenimo oznake slovima, dobit ćemo:

B G B G B G

Djeca mogu smisliti uzorke s kockama, dugmadima, ili drugima materijalima.

## 2.4 Odglumi

U strategiji glume djeca dramatiziraju ili simuliraju problem što im pomaže pri razumijevanju i stvaranju plana radnji. Ako je situacija odglumljena s dostupnim argumentima, rješenje je često očigledno. Nova matematička operacija, kao što je oduzimanje, prezentirana je kroz priču, kao što ovdje vidimo:

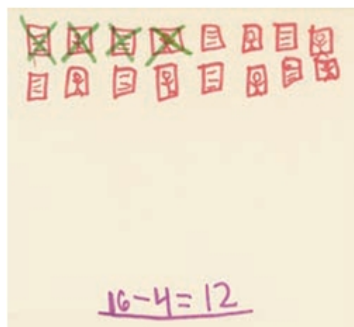
Ivan ima sedam banana. Daje tri banane Marti.



Slika 3: Oduzimanje

Marija je prikupila 16 kartica nogometnih igrača. Prodala je četiri kartice Marku.

Djeca se mogu mijenjati dok glume priču i razgovarati o rezultatima radnje. Nakon što odglume nekoliko priča, mogu odabrati svoje vlastite priče i odglumiti ih. Radnja oduzimanja se razvija tijekom postavljanja problema, a rješenje je prezentirano s objektima, putem akcija, sa slikama i, na kraju, s rečenicama koje sadrže



Slika 4: Oduzimanje

brojeve. U nizu neformalnih aktivnosti možemo pozvati učenike da odglume matematičke situacije. Djeca mogu kupovati u razrednoj trgovini napunjenoj hranom i proizvodima za kućanstvo. Igranje uloga služi kao poticaj za istraživanje i projekte.

Još jedan vrlo zanimljiv primjer je primjer plaćanja.

Zadatak je sljedeći: Ponuđen vam je posao, možete odabrati kako ćete primiti plaću. 5250 kn mjesečno ili 10 kn prvi dan, 20 kn drugi dan, 40 kn treći dan, 80 kn četvrti dan i dvostruko za svaki radni dan u mjesecu. Koji posao biste uzeli? Zašto? Pitajte učenike da predvide što je više: 5250 kn ili dupliciranje plaće 20 radnih dana. Neka učenici izbroje 5250 kn s novcem za igru. Onda neka odigraju plaćanje 10 kn prvi dan, 20 kn drugi dan itd. Ispišite kalendar tekućeg mjeseca za učenike na kojem će zabilježiti iznos zarađenog novca svaki dan u tjednu i idite do kraja.

Igre kao što je monopoli, uključuju glumu koja razvija sposobnosti razmišljanja i strategija. U prethodnom primjeru, učenici mogu odigrati dva scenarija vezana uz plaćanje. Isto tako mogu geometrijski istražiti napredak udvostručavanja. Gluma situacije i prezentiranje rezultata pisanim putem i putem simbola poboljšava algebarsko razmišljanje jer učenici mogu vidjeti uzorke koji proizlaze iz onog što rade.

## 2.5 Napravi model

Rad s manipulativima (olovke, medvjedi, plastične perlice) može izazvati interes za nove teme i pomoći učenicima da sami osmisle svoj koncept razumijevanja. Za manju djecu je bolje koristiti realne materijale. Plastične životinje su očigledni modeli u priči o životinjama. Nakon niza iskustava u rješavanju problema, učenici shvaćaju da životinje i ostali stvarni objekti mogu biti prezentirani pomoću kocaka, pločica ili štapića. Manipulativi se mogu lako preorganizirati kako bi prikazali radnju u

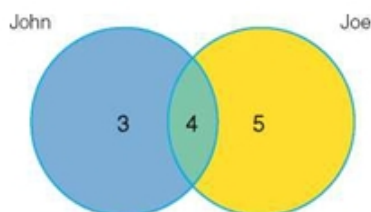


priči. Pokazuju početak i kraj situacije kroz aranžman. Modeli navode učenike da iskušaju različita rješenja bez razmišljanja o neuspjehu.

## 2.6 Napravi sliku ili dijagram

Slike i dijagrami imaju iste prednosti kao i modeli pri vizualizaciji problema i razmišljanja o objašnjenju. Međutim, učitelji ne smiju dozvoliti učenicima da se izgube u crtežima koji su preopširni ili s previše detalja. Svrha crteža je ilustrirati situacijski problem. Djeca bi se trebala osjećati bolje uz "umjetnost matematike" nego uz to da pokušaju učiniti da nešto izgleda realno. Markeri, naljepnice, krugovi, trokuti i črčkarije mogu prezentirati situacije jednostavno i brzo. Pečati sa životinjama, oblici, cvijeće i drugi dizajn mogu isto tako ilustrirati problem i smanjiti vrijeme potrebno za crtanje. Što djeca više sazrijevaju u razmišljanju, numerički i drugi simbolični izrazi mogu zamijeniti modele, slike i dijagrame. Označavanje dijagrama olakšava rečenice s brojevima i rješenje. Vennovi dijagrami pomažu učenicima vizualizirati situaciju u kojoj su bitni klasifikacija i pripadanje grupi.

Na primjer: John i Joe imaju ukupno 12 pasa. Imaju četiri zajednička psa, s tim da John sam ima tri psa. Koliko pasa ima Joe?



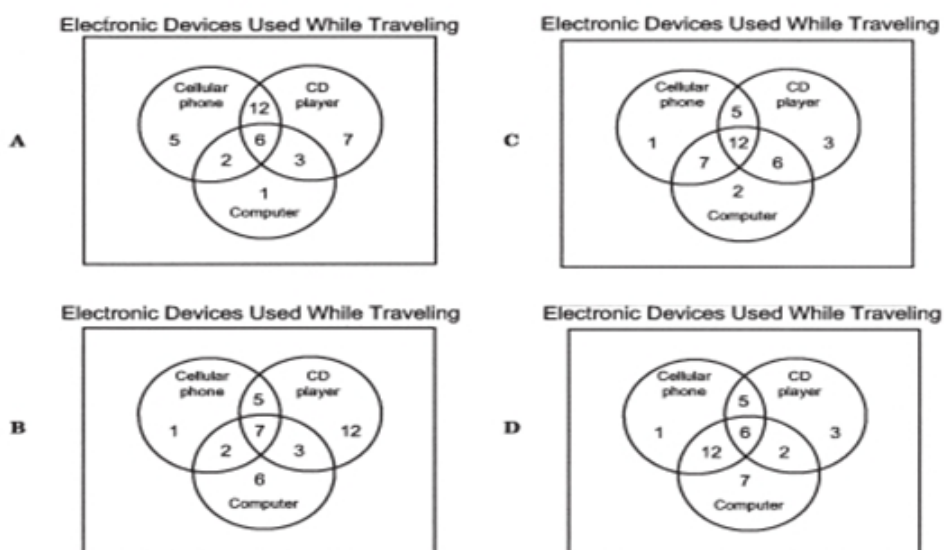
Slika 5: Vennovi dijagrami

Saznanje da dječaci imaju ukupno 12 pasa i da John ima tri psa i dijeli vlasništvo za 4 psa omogućuje iscrtavanje Vennovog dijagrama i pisanje brojki:  $12 - 7 = 5$ . Što je odnos složeniji, Vennovi dijagrami su bitniji za razumijevanje problema i pronalaženje odgovora kao što je prikazano pitanjem sljedećim pitanjem. Više od 90 posto učenika bilo je uspješno u tome.

Koji dijagram odgovara podacima iz sljedeće tablice?

Electronic Devices Used While Traveling	
Electronic Device	Number of People
Cellular phone only	5
Cellular phone and CD player only	12
Cellular phone and computer only	2
Cellular phone, CD player, and computer	6
CD player only	7
CD player and computer only	3
Computer only	1

Slika 6: Tablica s podacima



Slika 7: Vennovi dijagrami

Lako možemo uočiti da je rješenje ovog problema slika pod A.

## 2.7 Napravi tablicu i/ili grafikon

Naučiti kako napraviti tablicu ili grafikon istovremeno je strategija rješavanja problema i matematičkog sadržaja. Koncepti i sposobnosti povezani s prikupljanjem

podataka, analizom i prikazom omogućuju učenicima da organiziraju i interpretiraju informacije iz problema. Bilježenje podataka daje vizualan prikaz tako da učenici mogu vidjeti koju informaciju su prikupili. Mogu potražiti uzorke i veze. Brojni primjeri drugih strategija rješavanja problema uključuju izradu tablice radi bilježenja rezultata strategije modeliranja ili traženja uzorka. Tablice i grafikoni stvaraju veze, promjene i trendove koji su očitiji, tako da učenici mogu pronaći uzorak za interpretaciju.

## 2.8 Napiši matematički zadatak riječima

Prilikom rješavanja problema učenici komuniciraju i prezentiraju svoje razmišljanje putem modeliranja, glume, crtanja i pisanja. Riječi opisuju situacijski problem kao i brojke.

Na primjer: Nataša ima četiri jabuke i pet naranči. Ima ukupno devet komada voća.

$$4 \text{ jabuke} + 5 \text{ naranči} = 9 \text{ komada voća}$$

$$4 + 5 = 9$$

Kao što se vidi iz navedenih primjera, zadatak s riječima razvijen iz modela, crteža i odglumljenih problema sažima situacijski problem. Čak i kad je računanje rutina ili je odgovor očigledan, sposobnost pisanja jednadžbi je veoma bitna.

Pisanje jednadžbi je važno kad učenici uče o operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Kada se uči množenje, na primjer priča sa zbrajanjem predstavlja temelj razumijevanja množenja i njegove prezentacije u jednadžbi. Pisanje jednadžbi je također bitno za pokazivanje dijeljenja kao ponovljenog oduzimanja. Učenici mogu modelirati ponovljeno oduzimanje s kovanicama i vidjeti kako je dijeljenje povezano s oduzimanjem.

Ana je imala 14 kn. Potrošila je 2.10 kn za svaku gumicu. Koliko gumica je kupila?

$$14 - 2.10 - 2.10 - 2.10 - 2.10 - 2.10 - 2.10 = 1.4$$

14 podijeljeno s 2.10 je 6 gumica i ostatak 1.4 kn.

Učenici obično pišu svoje vlastite jednadžbe za rješavanje problema, a ne eliminiraju jednadžbe kao što je napravljeno u testnom primjerku. Kalkulatori omogućavaju

učenicima da se usredotoče na problem, a ne na izračunavanje kad uspoređuju nekoliko mogućih odgovora. U sljedećem primjeru neki od učenika usredotočit će se na mogućnost novčane otplate, a drugi na vrijeme potrebno za otplatu.

Primjer: Novi automobil je oglašen u novinama za 118 300 kn.

Koliko će Ivan platiti svaki mjesec sljedećih 36 mjeseci bez predujma i kamata?

$$118300 : 36 = 3286.11$$

Ivan će svaki mjesec plaćati 3286 kn naredne 3 godine.

## 2.9 Pogodi i provjeri, metoda pokušaja i pogrešaka (metoda uzastopnih približavanja)

Pogodi i provjeri, poznato kao i metoda pokušaja i pogrešaka je općenita metoda rješavanja problema prema kojoj se s nekoliko mogućih rješenja pokušava riješiti glavni problem. Umjesto da se odmah krene na ispravan odgovor, učenici promatraju što funkcionira, a što ne. Čak i ako pokušaji ne dovedu do odgovora, često daju tragove prema rješenju. Prilikom drugog ili trećeg pokušaja, učenici mogu pronaći uzorak koji vodi do željenog rezultata. Koristeći kalkulator učenici u razredu ispituju nekoliko rezultata.

Dva broja zajedno pomnožena daju 144. Kada je veći broj podijeljen s manjim, količnik je 4.

Primjer iz učionice:

Klara: "Znam  $12 \cdot 12$  je 144."

Ana: "Ali 12 podijeljeno s 12 je 1, tako da dva broja ne mogu biti 12 i 12".

Josip: "Ja sam pomnožio 4 i 36 i dobio 144."

Luka: "Ali 36 podijeljeno s 4 daje 9, ne 4."

Jelena: "Idemo napraviti tablicu tako da možemo vidjeti brojeve koje smo pokušali".

Lovro: "Koji broj je između 12 i 4? Mislím da će morati biti parni ako želimo dobiti parni broj. Pokušajmo sa 6 i 8".

Klara: "Ako podijeliš 144 sa 6 dobiješ 24."

Ana: "To je to! Dvadeset četiri podijeljeno sa šest je četiri. Funkcionira li to i s 8?"

Lovro: "Napravio sam drugu slagalicu. Dva broja pomnožena zajedno su 180, a razlika između njih je 3."

<b>Pokušaj</b>	<b>1. Broj</b>	<b>2. Broj</b>	<b>Umnožak</b>	<b>Količnik</b>
#1	12	12	144	1
#2	4	36	144	9
#3	6	24	144	4

Slika 8: Tablica

U ovom slučaju učenici su prepoznali da će im tablica pomoći organizirati pogodi i provjeri rješenja. Kad se učitelji suzdržavaju od traženja rješenja odmah, potiču na razmišljanje. Kod rješavanja problema, "vidi što funkcioniра" je dobra strategija. Pogodi i provjeri ne znači naslijepo pogađanje, već podrazumijeva razuman izbor. Ako je predstavljena velika staklenka guma za žvakanje, učenici mogu pogađati od 100 do 1000000.



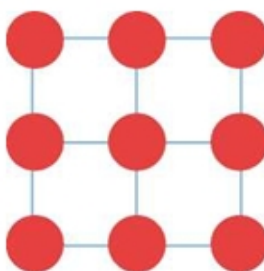
Slika 9: Gume za žvakanje

Velika staklenka s gumama za žvakanje nalazi se uz malu staklenku koja sadrži samo 50 guma za žvakanje. Učenici uspoređuju broj u manjoj staklenki s veličinom veće staklenke, a onda unose svoje procjene u tablicu ili u svoj dnevnik: "moja procjena za broj žvakaćih guma u velikoj staklenki je tolika i tolika zato što (treba objasniti razlog)." Drugi pristup je izložiti manju referentnu staklenku, nakon što su učenici već napravili procjene. Učenici broje žvakaće gume u referentnoj stak-

lenki i prilagođavaju procjene. Originalne procjene mogu varirati od 100 do 5000, ali nakon što su izbrojali 133 u referentnoj staklenki, procjene mogu biti dosljednije i točnije, kao što je od 800 do 1330. Korištenje razuma je cilj procjene tako da bi učitelji trebali izbjeći davanje nagrade za najbolju procjenu. Umjesto toga, trebaju pomoći učenicima identificirati rang dobrih procjena kao što je od 1000 – 1200.

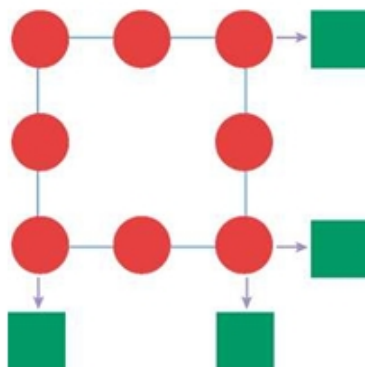
Brojčane slagalice (Slika 10) također pozivaju na pogodi-provjeri razmišljanje. Na slici 10 brojeve od 0 do 8 treba poredati tako da su sume u svim retcima i stupcima jednake 12. Na slici 11 su tako složeni da je suma na svakoj strani kvadrata 11. Da bi riješili slagalicu, učenici pokušavaju nekoliko kombinacija brojeva. Ako su brojke napisane na malom komadiću papira, mogu se lako maknuti, što brojčanu slagalicu čini bržom i manje frustrirajućom. Pogrešna kombinacija može zamesti tragove prema ispravnom odgovoru. Nakon što riješe prvi niz slagalica, učenici pokušavaju vidjeti mogu li naći rješenja za ostale sume kao što su 10 ili 13.

a) Rasporedite brojeve od 0 do 8 u krugove tako da suma svakog retka i stupca bude 12.



Slika 10: Slagalice

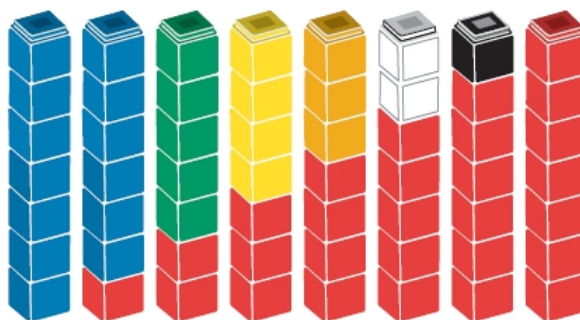
b) Rasporedite brojeve od 1 do 8 u krugove tako da suma svakog retka i stupca bude 11.



Slika 11: Slagalica s brojevima

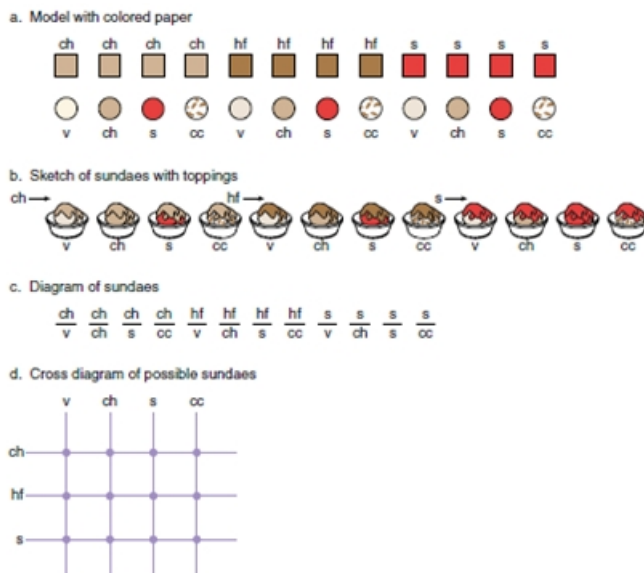
## 2.10 Uključi sve mogućnosti

Uključivanje svih mogućnosti je strategija koja se često koristi s drugim strategijama. Korištenje 'pogodi i provjeri' strategije može prirodno dovesti do organiziranog pristupa o tome što funkcionira, a što ne. Izrada tablice mogućih odgovora se često koristi za identifikaciju uzorka ili veze, kao što su bicikli, vozila ili kombinacije kovanica. U prvim razredima učenici modeliraju sve moguće iznose za 7 s kockama (Slika 12). Kad napišu sve svoje odgovore, uočavaju uzorak povećavanja prvog broja dok se drugi broj smanjuje.



Slika 12: Moguće kombinacije broja 7

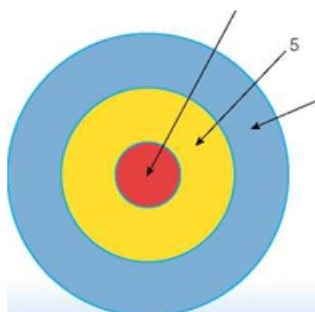
Put do sladoleda je, pak, druga situacija za pronalaženje mogućnosti. Ako trgovina prodaje četiri okusa sladoleda i tri preljeva, može li svako dijete u nogometnom timu od 19 igrača dobiti različiti sladoled? Ovaj problem može biti riješen s modelom, crtežom, dijagramom, kao što je prikazano na slici 13. Na slici 13 a), na primjer, smeđi papir predstavlja čokoladni preljev u obliku četiri kruga, svaki predstavlja drugi sladoled. Sladoled i kombinacije preljeva se mogu koristiti i za ilustraciju multiplikacije ostalih proizvoda (slika 13 d)).



Slika 13: Moguće kombinacije sladoleda



U sljedećoj igri učenici određuju moguće pogotke bacanja s tri strelice pikada u metu. Označi cilj s bodovima, kao što je 9 za centar mete, 5 za srednji krug i 3 za vanjski krug. Neka učenici igraju pikado i zapisuju bodove na papir s tri stupca koji pokazuje brojke za skupljene bodove u svakom krugu bacanja. Nakon što su učenici odigrali nekoliko igara, pitajte ih koliko je najviše bodova, a koliko najmanje. Pitajte ih je li moguće da ukupan broj bodova bude 4, 9, 14, 15, 18 ili 20 ako su sve tri strelice pogodile metu. Zamolite ih da razmisle postoji li uzorak koji im može pomoći da odrede koji bodovi su mogući, a koji nemogući. Recite im da naprave popis svih mogućih kombinacija koristeći bodovnu listu.



Slika 14: Pikado

Game	Center, 9 points	Middle, 5 points	Outer, 3 points	Total
#1	1	1	1	17
#2	1	0	2	15
#3	0	1	2	11
#4	0	3	0	15

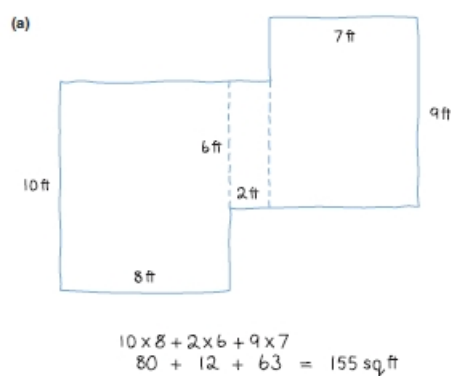
Slika 15: Bodovna lista

Zatim možemo promijeniti vrijednosti mete i broj strelica te tražiti od učenika da razmisle o najviše i najmanje mogućim i nemogućim odgovorima.

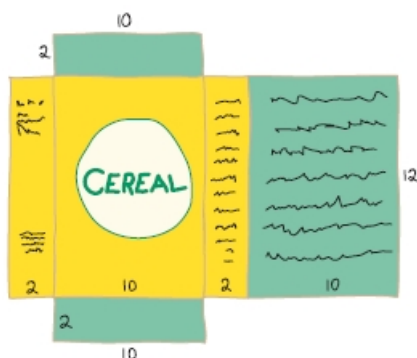
## 2.11 Riješi jednostavniji problem ili razlomi problem u dijelove

Neki problemi su prenaporni jer izgledaju složeno ili sadrže velike brojke. Razbijanje složenog problema u manje i jednostavnije dijelove bitan je dio strategije rješavanja

problema. Ponekad i zamjena manjih brojeva u problemu pomaže učenicima razumjeti što se u problemu događa. Rješavanje jednostavnijeg problema omogućuje učenicima da se pokrenu. Brojni realni problemi su rješavani u dijelovima. Prilikom mjerenja površine nepravilno oblikovane sobe za tepih, učenici mogu izmjeriti dijelove sobe i spojiti ih (Slika 16 a)). Površina kutije za zobene pahuljice (pravokutna prizma) pronađena je dodavanjem svake pojedinačne površine (Slika 17). Mnoge mentalne strategije računanja temelje se na stavljanju složenije kombinacije u lakši izračun. Na primjer, učitelj želi da učenici rade na mentalnim strategijama izračuna za dodavanje devetki. Ako je  $4567 + 999$  preteško kao prvi primjer, učitelj može krenuti s  $47 + 9$ . Učenici mogu pronaći odgovor koristeći brojevni pravac i brojeći prema 56. Isto tako mogu ustanoviti da je dodavanje  $47 + 10$  jednostavnije za mentalno računanje, ali zbroj mora biti ispravljen oduzimanjem 1 da bi dobili 56. Krenite s  $47 + 10$ ,  $323 + 100$  ili  $4567 + 1000$ , uzorak dodavanja laganog broja je utvrđen prije nego krenete raditi s  $47 + 9$ ,  $323 + 9$ , ili  $4567 + 999$ . Učenje principa kompenzacije dodavanjem i oduzimanjem s jednostavnim brojevima potiče računanje napamet vezano uz zbrajanje i oduzimanje u nizu situacija.



Slika 16: Površina sobe



Slika 17: Površina kutije za zobene pahuljice

## 2.12 Počni unatrag (metoda rješavanja unatrag)

Razmišljanje unatrag pomaže kad učenici znaju rješenje ili odgovor i pronalaze komponente. Neki učitelji uključuju razmišljanje unatrag u "poznate" probleme. Učenici krenu s rješenjem i razmišljaju o informaciji koja bi dala rezultat. Edmundo ima sedam ljubimaca, pasa i mačaka. Ako ima pet pasa, koliko ima mačaka? Djeca mogu modelirati ili nacrtati sedam ljubimaca, identificirati pet pasa i uočiti da postoje dvije mačke koje nedostaju. Jednadžba je problem oduzimanja koja može biti napisana u obliku dodavanja li oduzimanja.



$$\begin{aligned}
 7 \text{ pets} &= 5 \text{ dogs} + \underline{\quad} \text{ cats} \\
 5 \text{ dogs} + \underline{\quad} \text{ cats} &= 7 \text{ pets} \\
 7 \text{ pets} - 5 \text{ dogs} &= \underline{\quad} \text{ cats}
 \end{aligned}$$

Slika 18: Metoda rješavanja unazad

### 2.13 Prekini skup ili promijeni gledište

Kreativno razmišljanje se vrlo cijeni u današnjem promjenjivom svijetu. Ustrajnost je bitna vrlina dobrih rješavača problema. Rješavači problema trebaju razumjeti kad dođu u "slijepu ulicu." "U slijepoj ulici" moraju promijeniti strategiju ili način na koji razmišljaju o problemu. Sposobnost probijanja starih percepcija i prihvaćanje novih mogućnosti je dovelo do brojnih tehnoloških i praktičnih inovacija. Izumitelj samoljepljivih papirića radio je na formuli za novo ljepilo, ali pronašao je ljepilo koje baš nije dobro funkcioniralo. Umjesto da odbaci taj promašaj, razmislio je kako bi to moglo biti korisno. Stavite devet točaka na papiru u kvadratu  $3 \cdot 3$ . Spojite svih devet točaka s četiri ravne linije, a da pri tome ne podignete olovku s papira. Nakon nekoliko pokušaja, možemo se složiti da problem ne može biti riješen. Međutim, kad se linije prošire izvan vizualne kutije od devet točaka, rješenje nije teško. Kad imate odobrenje pokušati nešto van zadanih okvira otvaraju se nove mogućnosti. Iskustvo iz prošlosti može biti od pomoći ili nas ograničiti. Biti fleksibilan je manje strategija, a više stanje uma koji može vidjeti alternativne mogućnosti. U brojčanoj slagalici (Slika 11), učenici moraju premjestiti brojeve nekoliko puta da dobiju zbrojeve i poredaju brojeve na način koji funkcionira. Kad nađu ispravan broj, učenici se mogu opirati promjeni tog broja čak i kad je to potrebno za rješavanje cijele slagalice. Djeca su manje udubljena u svoje razmišljanje i stoga imaju manje poteškoća s promjenom stajališta u usporedbi s odraslima koji su usredotočeni na svoje razmišljanje. I djeca i odrasli moraju naučiti postaviti si pitanje: "Postoji li drugi način?" Na slici 19 kvadrati su nacrtani na križaljci. Prvi kvadrat ima površinu 1. Drugi kvadrat ima 4 jedinice. Izazov je nacrtati ostale kvadrate s površinama od dvije jedinice, 3 kvadratne jedinice, 4 kvadratne jedinice, 5 kvadratnih jedinica do 9 kvadratnih jedinica. Da bi u tome uspjeli, učenici moraju promijeniti svoje stajalište i prepoznati da kvadrati mogu biti nacrtani prema različitim orijentacijama i da za druge brojeve, iako kvadrate, možda ne postoji rješenje.



Slika 19: Rešetke za slagalicu

### 3 Poučavanje za rješavanje problema

Ovakvo poučavanje bi moglo biti sažeto u razvijanje sposobnosti koje će kasnije učenicima omogućiti rješavanje problema. Takvo poučavanje često kreće s učenjem apstraktnog sadržaja i lagano se kreće prema problemima kao načinu korištenja naučene sposobnosti. Na primjer, učenici uče algoritme za zbrajanje razlomaka i kad to svladaju, rješavaju probleme koji uključuju zbrajanje razlomaka. (Ovaj pristup koristi se u brojnim udžbenicima).

Poučavanje za rješavanje problema je, također, dio prakse poučavanja u matematici poznat kao povijesni način poučavanja matematike. Učitelj prezentira matematiku, a učenici vježbaju sposobnost i na satu rješavaju zadatke s riječima koji zahtijevaju korištenje te sposobnosti. Na žalost, ovakav pristup matematici se nije pokazao uspješnim za većinu učenika vezano uz razumijevanje ili pamćenje matematičkih koncepata. Zato učitelji za rješavanje problema traže sljedeće: svi učenici nužno moraju imati prethodno znanje da bi razumjeli objašnjenja učitelja, što je rijetko, ako i uopće, slučaj. Obično učitelj prezentira jedan način rada s problemom/procedurom, što, vjerojatno, neće imati puno smisla za brojne učenike i što je nedostatak za učenike koji bi to mogli riješiti drugačije. Učitelji mogu poručiti da postoji samo jedan način rješavanja problema, a to pogrešno interpretira cjelokupnu matematiku i onemogućuje učenicima da nešto prirodno pokušaju napraviti na svoj način. Takav način stavlja učenika u pasivni položaj koji ovisi o idejama učitelja, a ne u položaj neovisne osobe koja razmišlja i koja ima sposobnosti i odgovornosti da riješi problem. Odvaja sposobnosti učenja i koncepata kod rješavanja problema, što ne poboljšava samo učenje. Smanjuje vjerojatnost da će učenik pokušati riješiti novi problem bez eksplicitnih uputa kako ga riješiti. Ali upravo je to ono što matematika i jest - razmišljanje o pristupu rješavanja problema.

Neki učitelji smatraju da je najkorisniji pristup ako pokažu učenicima kako riješiti problem, sprječavajući muku i štedeći vrijeme. Međutim, upravo muka vodi do učenja tako da se učitelji moraju oduprijeti prirodnom nagonu da skrate muku. Najbolji način da pomognemo učenicima je da ne pomognemo previše. Ukratko, poučavanje za rješavanje problema, posebno modeliranje i objašnjavanje strategije kako riješiti problem, može učiniti da učenici budu još gori u rješavanju problema u matematici, umjesto bolji. Učenici uče matematiku kao rezultat rješavanja problema. Matematičke ideje su rezultat iskustva u rješavanju problema, a ne elemenata koji moraju biti naučeni prije rješavanja problema. Štoviše, proces rješavanja pro-

blema je potpuno prepleten s učenjem. Djeca uče matematiku radeći matematiku, a kad rade matematiku, onda je i uče ([5]). Učenje radom ili poučavanje putem rješavanja problema zahtijeva promjenu paradigme, što znači da učitelj mijenja više stvari vezano uz poučavanje. Mijenja svoju filozofiju razmišljanja o tome kako misli da djeca uče i kako im ona mogu najbolje pomoći. Na prvi pogled može se činiti da je uloga učitelja manje zahtjevna jer učenici sami rade matematiku, ali uloga učitelja u takvim razredima je, zapravo, vrlo zahtjevna.

Primjer: Nacrtaj pravokutnik kojemu je opseg 30 cm.

Učitelj na početku pita učenike što je zadano u zadatku, a što se traži. Kada dobije odgovor da se treba nacrtati pravokutnik, upućuje učenike na pitanje što sve trebaju znati da bi nacrtali pravokutnik. Nakon što učenici uvide da im trebaju duljine stranica pravokutnika, navodi ih na formulu za opseg tj. postavlja pitanje znaju li definiciju opsega tj. što povezuje stranice i opseg pravokutnika. Nakon što učenici uvrste poznate elemente u formulu za opseg pravokutnika dobiju

$$30 = 2(a + b) \text{ tj. } 15 = a + b.$$

Učitelj dalje pita učenike mogu li u tom trenutku doći do rješenja. Koja dva broja zbrojena daju 15? Neki učenici su za rješenje stranica pravokutnika dobili da je  $a = 10$  cm,  $b = 5$  cm te nacrtali takav pravokutnik. Učitelj diskutira s učenicima može li se dobiti drugačije rješenje? Drugi su dobili rješenje  $a = 8$  cm,  $b = 7$  cm, zatim  $a = 12$  cm,  $b = 3$  cm itd. Važno je uočiti da ima više različitih rješenja jer ima više različitih brojeva koji u zbroju daju 15. Cilj rješavanja ovakvih zadataka je da učenici shvate da postoji više različitih rješenja i zašto. Ovakva učiteljeva uloga u razredu je ključna jer navodi učenike na ispravno razmišljanje pri rješavanju problema.

Učitelji moraju odabrati vrlo kvalitetne zadatke koji će omogućiti učenicima da nauče sadržaj razmišljajući o svojim vlastitim strategijama i rješenjima. Učitelji moraju postavljati dobro sastavljena pitanja koja omogućuju učenicima da verificiraju i s tim povežu svoje strategije. Učitelji moraju slušati odgovore učenika i pratiti njihov rad te u određenom trenutku odlučiti kako proširiti ili formalizirati razmišljanje učenika.

## 4 Poučavanje putem rješavanja problema

Ovaj pristup općenito znači da učenici uče matematiku korištenjem stvarnog sadržaja, problema, situacija i modela. Ti konteksti i modeli omogućuju studentima stvaranje značenja za koncepte tako da se mogu baviti i apstraktnim konceptima. Poučavanje putem rješavanja problema može se opisati kao nešto obrnuto od poučavanja za rješavanje problema - s problemima prezentiranim na početku predavanja i sposobnostima koje se javljaju tijekom rada na problemu. Na primjer, kod istraživanja situacije kombiniranja  $1/2$  i  $1/3$  vrpce kako bi se odredila ukupna dužina vrpce, učenici će biti navedeni da sami otkriju proceduru za dodavanje razlomaka. Matematički koncepti i procedure se najbolje poučavaju putem rješavanja problema. U sažetku pregleda istraživanja, Cai ([5], str. 33.) objašnjava da postoje dvije uloge učinkovite implementacije poučavanja putem rješavanja problema, a to su odabir zadataka i upravljanje tijekom sata u razredu o čemu će biti govora u daljnjem tekstu.

### 4.1 Što je problem?

Učitelji mogu, i trebali bi, postavljati zadatke ili probleme koji navode učenike na razmišljanje i na razvijanje daljnjih znanja za rješavanje problema u matematici. Pokušajmo ispitati zašto ovaj pristup bolje podržava učenje. Kao što je navedeno, dva načina podrške navedena u istraživanju za razvoj konceptualnog razumijevanja uključuju učenike u produktivnu borbu i čine odnose eksplicitnima. Odabir problema koji će to omogućiti je vrlo bitan za učinkovito poučavanje. Problem je ovdje definiran kao bilo koji zadatak ili aktivnost za koju učenici nemaju propisana ili upamćena pravila ili metode, niti je u njihovoj percepciji "točno" rješenje. Napominjemo da problem može, i ne mora, sadržavati riječi. Zadatak s riječima može biti "rutina" tako da učenici odmah mogu reći radi li se o množenju, dijeljenju, zbrajanju ili oduzimanju. Također, zadatak s riječima može biti "izvan rutine", što znači da ne mogu inicijalno znati kako riješiti problem. Jednadžba bez zadatka s riječima ili, čak, bez i jedne riječi može biti problematična i izvan rutine. Razmotrite sljedeće:

$$10+_{-} = 4+ (3 +_{-})$$

Popunite praznine tako da jednadžba bude točna.

Pronađite različite parove brojeva koji jednadžbu čine točnom. Koji je odnos između dva broja za svako točno rješenje? Zašto?



Ovaj problem je "izvan rutine", ukoliko učenici, kad ga prvi put pročitaju, ne znaju kako pronaći odgovor.

## 4.2 Obilježja problema

Da bi problem bio "problem", učenik ga mora smatrati problematičnim. Sljedeća obilježja problema mogu se koristiti kao vodič pri procjeni je li zadatak uistinu i problem.

Da bi zadatak ujedno bio i pravi, primjereni problem, on mora imati polazište na trenutno učeničkom znanju. Dizajn ili odabir zadatka mora uzeti u obzir trenutno razumijevanje učenika. Trebaju imati odgovarajuće ideje za rješavanje problema, a istovremeno ga smatrati izazovnim ili interesantnim. Problematični ili angažirajući aspekt problema mora postojati zbog matematike koju učenici moraju naučiti. Angažirajući konteksti su bitni ako želimo da učenici matematiku shvate smisleno. No, kontekst nije žarište, ali sadržaj jest. Dobar problem ima interesantnu matematiku. Prethodni primjer je interesantan i angažirajući jer se učenici mogu igrati brojkama i otkriti da uvijek postoji razlika od tri između dvije vrijednosti.

Mora zahtijevati opravdanje i objašnjenje odgovora i metoda. Kod dobrog problema ni postupak ni odgovor nisu jednoznačno određeni, tako da je opravdanje središnji dio zadatka. Učenici moraju shvatiti da je za određivanje točnosti odgovora i zašto je taj odgovor točan, odgovornost samo njihova kao proizvod njihovog matematičkog razmišljanja. Tako se razvija matematička sposobnost razmišljanja! Kod poučavanja putem rješavanja problema, problemi (zadaci ili aktivnosti) su sredstvo za učenje željenog sadržaja. Tako nastaje potreba uključivanja tri ranije navedena obilježja od središnje važnosti u postavljanje smislenosti učenja, u kojoj se učenici mogu angažirati i dati matematici smisao.

## 4.3 Primjeri problema

Učenici mogu razviti konceptualno i proceduralno znanje putem rješavanja problema. Prva dva primjera koja ovdje navodimo se fokusiraju na koncepte, a druga dva na procedure.

Koncepti se razvijaju nadogradnjom onih koncepata koje učenici već znaju. Ako krenemo od tamo gdje su učenici (odnosno od onoga što već razumiju), a onda počnemo koristiti problematične i angažirajuće zadatke vezano uz novi koncept,

učenici mogu razviti nove koncepte. Opravdanjem i objašnjenjem ove ideje postaju solidne i povezane s drugim konceptima. Navedimo nekoliko primjera.

*Koncept: Odvajanje*

Razmislite o 6 zdjela pahuljica koje se nalaze na dva različita stola. Nacrtajte sliku i pokažite kako bi tih šest zdjela moglo biti raspodijeljeno na dva stola. Ima li više od jednog načina? Koliko po vašem mišljenju ima načina?

U vrtiću možemo od djece tražiti da jednostavno pronađu jedan ili dva načina za to. U prvom ili drugom razredu, učitelj može očekivati od djece da pronađu sve kombinacije i da objasne kako znaju da su pronašli sve načine. U razgovoru u razredu nakon rada na zadatku, učenici će, vjerojatno, razviti ispravan proces popisivanja svih načina. Kako prva tablica ide od 0 do 6 zdjela, druga tablica počinje sa 6 i smanjuje se po jedan do 0 (sedam načina!).

*Koncept: Razlomci veći od 1*

Stavite  $X$  na dužinu gdje bi otprilike trebalo biti  $11/8$ . Objasnite zašto ste stavili  $X$  baš tu.

0\_\_\_\_\_2

Zadatak može biti riješen na više načina, na primjer s ravnalom ili savijenim komadom papira. Učenici moraju objasniti gdje su stavili svoj znak. U kasnijem razgovoru učitelj će moći pomoći razredu da shvate razlomke veće od 1 (na primjer, da je jedanaest osmina ekvivalentno jednom cijelom plus još tri osmine).

Procedure: Razlika poučavanja putem rješavanja problema je ta da je učenik onaj koji odlučuje o pristupu računanju. Neki učitelji koriste poučavanje putem rješavanja konceptualnih problema, ali ne i proceduralnih. To prekida vezu iz perspektive učenika: zašto ne bi koristili svoje vlastite strategije za procedure kad su radili strategije za povezane koncepte? Učenici mogu smisliti svoje vlastite strategije za procedure, a učitelji to trebaju cijiniti i poticati. U nastavku navodimo nekoliko primjera.

*Procedura: Zbrajanje dvoznamenkastih cijelih brojeva*

Koliko je zbroj od 48 i 25? Kako znate?

Čak i kad nema priče ili situacije koju treba riješiti, to je problem jer dosta učenika mora samo shvatiti kako pristupiti zadatku. (U ovom trenutku još nisu naučili standardni algoritam). Učenici rade na problemu koristeći materijale, slike ili mentalne strategije. Nakon što učenici riješe problem na svoj način, učitelji ih sve okuplja i sluša strategije i rješenja. Idući popis sadrži samo neke pristupe na koje su nadošli učenici drugog razreda:

$$4 [8] + 2[5]$$

$$40 + 20 = 60$$

$$8 + 2 = 10 \text{ (3 je ostalo od 5)}$$

$$60 + 10 = 70$$

$$70 + 3 = 73$$

$$40 + 20 = 60$$

$$60 + 8 = 68$$

$$68 + 5 = 73$$

$$48 + 20 = 68$$

$$68 + 2 \text{ ("od 5")} = 70$$

$$\text{" Još uvijek imam 3 od 5."}$$

$$70 + 3 = 73$$

$$25 + 25 = 50 \text{ (23)}$$

$$50 + 23 = 73$$

Učitelj: Odakle smo dobili 23? "Odvojili smo ga od 48." Kako si razdvojio 48?

"Kao 20 i 20 i razdvojio sam 8 kao 5 i 3."

$$48 - 3 = 45 \text{ (3)}$$

$$45 + 25 = 70$$

$$70 + 3 = 73$$

Na isti način, mogu biti smišljene operacije s decimalnim brojevima. Procedure za razlomke, koje mnogi učenici slabo razumiju, mogu biti istražene putem rješavanja problema.

*Procedura: Dijeljenje razlomaka*

Klara ima 2 cijele pizze i  $1/3$  druge. Sve pizze su iste veličine. Ako svaki od njenih prijatelja želi pojesti  $1/4$  pizze, koliko prijatelja može nahraniti s  $7/3$  pizze?

Uz računske operacije s cijelim brojevima i racionalnim brojevima, procedure vezane uz mjerenja možemo poučavati putem rješavanja problema. Brojne formule možemo razviti putem rješavanja problema. Na primjer, učenici mogu gledati pomoću okruglog poklopca spremnika i istraživati kako je dijametar povezan s obujmom kruga kako bi saznali kako su te formule povezane. Ono što je prilično jasno je to da što više problema učenici riješe, postaju voljniji i imaju više samopouzdanja za rješavanje problema i nalaze sve više metoda za "napad" na buduće probleme.

#### 4.4 Odabir korisnih zadataka

Kao što je navedeno u popisu obilježja problema, odabir zadataka mora uključiti razmišljanje o sposobnostima učenika. Zadatak učeniku mora biti problemski. Prilikom odabira zadataka treba ispitati niz čimbenika, uključujući stupanj kognitivne razine, te je li zadatak relevantan za učenike. Srećom, ne moramo krenuti od nule jer imamo udžbenik koji može biti dobar izvor za odabir zadataka.

Prije svega kod odabira zadatka treba biti siguran da je taj zadatak kognitivno zahtjevan, što znači da uključuje viši stupanj razmišljanja. Zadatci za nisku kognitivnu razinu (takozvani rutinski problemi ili zadatci nižeg stupnja) uključuju činjenične, poznate procedure (računanje) i rješavanje rutinskih problema. Zadatci koji zahtijevaju viši stupanj razmišljanja, s druge strane, uključuju pronalaženja odnosa, analizu informacija i donošenje zaključaka. Na primjer, ako zatražimo od učenika da pronađu površinu pravokutnika, to je drugačiji način razmišljanja od onoga da ih zatražimo da naprave "nacrt" sobe i izračunaju površinu prizemlja. Sljedeće stavke su korisne za određivanje toga je li zadatak dovoljno izazovan za učenika.

### KOGNITIVNE RAZINE:

**Niža kognitivna razina**

## a) Zadatci memorije

- Uključuju davanje već naučenih činjenica, pravila, formula, definicija ili memorije
- Predstavljaju rutinu - uključujući točnu reprodukciju već naučene procedure
- Nemaju veze s povezanim konceptima.

## b) Procedure bez zadataka povezivanja

- Poziva se specifično na korištenje procedura
- Jednosmjerne su, s malo dvosmislenosti što treba napraviti i kako
- Nemaju veze s povezanim konceptima
- Fokusirane su na davanje točnih odgovora, a ne na razvijanje matematičkog razumijevanja
- Ne zahtijevaju objašnjenje ili se objašnjenje odnosi samo na proceduru.

**Viša kognitivna razina**

## a) Procedure sa zadatcima povezivanja

- Pažnja učenika je usmjerena na korištenje procedura u svrhe razvoja dublje razine razumijevanja matematičkih koncepata i ideja
- Sugeriraju opće procedure koje su usko povezane radi naglašavanja konceptualnih ideja
- Obično su prezentirane na više načina (npr. vizualno povezivanje, združivanje istih materijala, simbola)
- Zahtijevaju angažman učenika u razvoju konceptualnih ideja koje podupiru procedure radi uspješnog završetka zadatka.

## b) Rad na problemskim zadatcima

- Zahtijeva složeno i ne-algoritamsko razmišljanje (razmišljanje izvan rutine u kojem ne postoji predvidljivi, poznati pristup)
- Zahtijeva od učenika istraživanje i razumijevanje prirode matematičkih koncepta, procesa i odnosa
- Zahtijeva samopraćenje ili samoregulaciju vlastitog kognitivnog procesa
- Zahtijeva da učenici raspoložu s relevantnim znanjem u radu na zadatku
- Zahtijeva analizu zadatka i aktivno ispitivanje zadatka što može ograničiti moguće strategije i rješavanje
- Zahtijeva znatan kognitivni napor.

Možemo primijetiti da je niža razina zadataka rutinska i jednosmjerna. Drugim riječima, učenici nisu angažirani u produktivnoj borbi. S druge strane, kod više razine zadataka (izvan rutine), učenici ne samo da su angažirani u produktivnoj borbi dok rade na zadatku, već se suočavaju i sa izazovom uspostave veze s konceptima i drugim relevantnim znanjem.

## 4.5 Višestruke točke ulaza i izlaza

Budući da su učenici na različitim razinama matematičkog znanja, bitno je koristiti probleme koji imaju višestruke točke ulaza, što znači da zadatak mora varirati po težini izazova te da mu se može pristupiti na više načina. Jedna od prednosti problemski utemeljenog pristupa je da možemo imati različite učenike u svakom razredu jer su učenici potaknuti da koriste niz strategija uz svoje prijašnje iskustvo. U suštini, učenicima je rečeno da "koriste vlastite ideje za rješavanje problema". Neki učenici koriste manje učinkovite pristupe (na primjer računanje), ali razvijaju naprednije strategije rješavanja problema. Ako imaju izbor strategija, anksioznost učenika je manja. Sljedeći primjer koji ćemo napraviti, pokazuje kognitivno zahtjevan zadatak koji ima višestruke točke ulaza i izlaza. Ta rješenja variraju ovisno o prethodnom znanju o problemu. Tijekom razgovora u razredu, uloga učitelja je osigurati stratešku podijeljenost strategija (možda prvo razmjena manje naprednih strategija ili povezane strategije zajedno). Tako svi učenici mogu unaprijediti svoje znanje koncepta razlomaka. Zadaci bi trebali imati višestruke točke izlaza ili različite načine koje učenici mogu demonstrirati u razumijevanju cilja učenja.

Na primjer, učenici mogu nacrtati sliku, napisati jednadžbu, koristiti materijale ili odglumiti problem koji uključuje opseg pravokutnika kako bi demonstrirali da mogu pronaći opseg za bilo koju veličinu pravokutnika. Te opcije su posebno važne za učitelje i za njihovo bolje razumijevanje onoga što znaju učenici s teškoćama u učenju. Njihovo korištenje modela ili vizualizacije može prenijeti više od onoga što prikazuju uz svoje ograničene jezične sposobnosti. Učenici s poteškoćama u učenju mogu se boriti i s jezičnim izrazima i stoga mogu bolje demonstrirati svoje znanje koristeći slike. Ukoliko zamolimo učenike da objasne i ilustriraju rješenje, to može biti jedan od načina da bolje procijenimo jesu li učenici naučili ono što smo htjeli. Na primjer: matematički razred uči statistiku. Učiteljica je donijela tri vreće s crvenim i plavim klikerima. Označila ih je na način kao što je prikazano na slici 20. Učiteljica je protresla svaku vreću. Pitala je razred: "Zatvorite oči i uzmite jedan

		
75 crveno	40 crveno	100 crveno
25 plavo	20 plavo	25 plavo
Vreća X	Vreća Y	Vreća Z
Ukupno=100	Ukupno=60	Ukupno=125

Slika 20: Matematički zadatak

kliker. Što mislite u kojoj vreći imate najviše izgleda da izvučete plavi kliker?

Koju vreću biste odabrali?

Objasnite zašto baš tu vreću. Pri objašnjenju možete se koristiti i dijagramom.

## 4.6 Relevantni konteksti

Sigurno je jedno od najvažnijih obilježja poučavanja putem rješavanja problema to da problem s kojim započnemo sat može potaknuti entuzijazam učenika za učenje matematike. Usporedimo ova dva uvodna zadatka za učenike šestog razreda:

"Danas ćemo istražiti omjere i vidjeti kako oni mogu biti korišteni za uspoređivanje iznosa".

”Za koju minutu ću vam pročitati ulomak iz Harryja Pottera o tome koliko je velik Hagrid. Koristit ćemo omjere da usporedimo našu visinu i debljinu s Hagridovom.”

Konteksti se mogu koristiti i za učenje o kulturama, kao što je kultura učenika u razredu. Mogu se koristiti i za povezivanje s drugim predmetima te mogu biti potencijalno uključeni u učenje matematike. Dječja literatura je bogat izvor problema na svim razinama, ne samo na primarnoj. Dječje priče mogu se koristiti na brojne načine i poslužiti kao niz zadataka za razmišljanje, a nekoliko odličnih knjiga nam može pomoći u tome.

Vratimo se na primjer s Hagridom koji je dva puta veći i pet puta širi od prosječnog čovjeka. Učenici 2. i 3. razreda mogu izrezati papir koji je visok kao oni i širok kao njihova ramena. Onda mogu probati zaključiti koliko bi Hagrid bio velik da je dva puta viši od njih i pet puta širi od njih. U 4. i 5. razredima učenici mogu napraviti tablicu koja pokazuje koliko je visok i težak svaki učenik i potražiti uzorak (ispada da je oko 30 prema 1). Onda mogu zaključiti koliko je visok i težak Hagrid i vidjeti radi li se o istom omjeru (5 prema 2). Učenici 6. i 8. razreda mogu napraviti dijagram razmještaja svojih visina i težina i vidjeti gdje staviti podatke o Hagridu. Ovaj primjer sadrži sve, mjerenja, brojke i algebru. Kroz ovakve primjere učenike zainteresiramo rješavanju problema kroz igru. Lik Hagrida iz Harry Pottera je poznat i zbog toga zanimljiv. Kroz takve primjere djeca lakše uče. Pogađanje rješenja u njihovoj dobi je igra, ali i učenje. Neovisno o tome imaju li učenici 6 ili 13 godina, literatura je puna iskustava i mašte, što utječe na njihov entuzijazam za rješavanje povezanih matematičkih problema i vrlo je vjerojatno da će naučiti i vidjeti matematiku kao koristan alat za istraživanje svijeta.

Pronalaženje relevantnih koncepata za angažiranje svih učenika je uvijek izazov u razredu. Korištenje konteksta poznatog svim učenicima može biti učinkovito, ali ga je teško pronaći. Izvrstan izvor problema stoga je drugi predmet koji učenici imaju. Učitelji osnovnih škola mogu izvući ideje iz tema koje se uče u društvenim predmetima, prirodnim znanostima i u jezicima. Isto tako i učitelji srednjih škola mogu povezati sve te predmete. Drugi poznati konteksti, kao što su umjetnost, sport i kultura također mogu biti vrijedan izvor. Društveni predmeti obiluju mogućnostima za primjenu u matematici. Vremenski prikaz povijesnih događaja su odlična prilika za učenike koji rade na povezanim veličinama brojeva da bolje razumiju povijest. Učenici mogu istraživati područja i gustoću naseljenosti, dok na društvenim studijama mogu razgovarati o tome kako se život razlikuje između regija s 200 ljudi



koji žive na jednom kvadratnom metru i regijama s 5 ljudi na jednom kvadratnom metru. Web može biti odličan izvor za nalaženje problema s višestrukim ulaznim i izlaznim točkama koji su relevantni i angažirajući za učenike.

Trebali bi nastojati prilagoditi zadatke koji se ne temelje na problemu. Većina tradicionalnih udžbenika je napravljena za razrede s učiteljem, za razliku od pristupa o kojem smo govorili. Kako bismo uključili poučavanje putem rješavanja problema, trebamo se fokusirati na velike nastavne cjeline te pronaći ideju za zadatak. Drugo, trebamo pronaći važan zadatak. To se može napraviti prilagođavanjem najboljeg, ili najvažnijeg zadatka u poglavlju, temeljenom na problemu ili stvaranjem i pronalaženjem zadatka u drugom izvoru.

**Activity**  
**How can you draw and classify triangles?**  
 Triangles can be classified by their angles or their sides.

Classified by Angles	Classified by Sides
<b>Acute triangle</b> All three angles are acute angles.	<b>Equilateral triangle</b> All sides are congruent.
<b>Right triangle</b> One angle is a right angle.	<b>Isosceles triangle</b> At least two sides are congruent.
<b>Obtuse triangle</b> One angle is an obtuse angle.	<b>Scalene triangle</b> No sides are congruent.

Follow Steps a-c to draw a triangle with a 5-cm side between  $40^\circ$  and  $50^\circ$  angles.

- Draw a 5-cm segment.
- Draw a  $40^\circ$  angle at one end of the segment and a  $50^\circ$  angle at the other end. Extend the sides until they meet.
- Classify the triangle by its angles and by its sides. You can use your protractor and ruler to check measurements.
- Draw and label an accurate example of each type of triangle defined above.

**CHECK**  
 Find the missing angle measure. Then classify the triangle by its angles and by its sides.

- 
- 
- 
- 
- Draw a triangle with a 3-inch side between two  $40^\circ$  angles. Then classify the triangle by its angles and by its sides.
- Reasoning** Find the value of  $x$  in the triangle at the right. Then classify the triangle by its angles and by its sides. Is it a regular polygon?

Section B Lesson 9-7 487

Slika 21: Klasifikacija trokuta

Jedna od mogućnosti je ponuditi niz trokuta i odrediti grupe učenika koje će pokušati skup trokuta podijeliti u grupe ovisno o njihovim karakteristikama. Radi detaljnije raščlambe možemo zamoliti učenike da ih sortiraju prema stranicama i kutovima. Dobivene rezultate mogu usporediti s drugim grupama učenika. Vokabular možemo prilagoditi grupama učenika. Učenici mogu dobiti sirove špagete i

višu razinu pitanja: "Možete li napraviti dva trokuta različite veličine, a da su oba jednakokračna? Možete li napraviti trokut s tri tupa kuta? Zašto da ili zašto ne? Ako je trokut klasificiran kao pravokutan, koja je klasifikacija stranica moguća ili nemoguća?" Primjećujete kako se ove prilagodbe uklapaju s karakteristikama problema. Učenici razvijaju dublje razumijevanje trokuta i mogu bolje vidjeti odnose između klasifikacija. Ukratko, odabir korisnih zadataka je složen te predstavlja stalan prioritet za učitelje. Istražitelji predlažu korištenje procesa koji će pomoći u odabiru korisnih zadataka:

*Identificirati matematičke ciljeve (glavne ciljeve).*

*Stvoriti (pronaći) problem.*

*Anticipirati rješenja učenika.*

*Implementirati i razmišljati o problemu.*

Možemo primijetiti paralele s Polya-inim procesom rješavanja problema. To su paralelni procesi: angažirani smo u rješavanju problema dok donosimo odluke o matematičkim zadacima za učenike.

## 4.7 Upravljanje tijekom rada u razredu

Tijek rada u razredu odnosi se na interakciju tijekom sata. Naučiti kako upravljati učinkovitom diskusijom u razredu prilično je složeno i zahtijeva obraćanje pozornosti na više elemenata. Cilj tijeka je zadržati visok kognitivni stupanj dok učenici pokušavaju naučiti i formalizirati matematičke koncepte. Imajmo na umu da svrha nije da učenici kažu odgovor i da ih učitelj ocijeni. Tijek rada može se pojaviti prije, tijekom i nakon rješavanja problema, ali faza nakon rada je posebno bitna, budući da je to razgovor koji može pomoći učenicima da povežu problem s općenitijom ili formalnom matematikom, ali i s drugim idejama.

## 4.8 Razgovor u razredu

Nemoguće je dovoljno naglasiti vrijednost razgovora na satu matematike. Kako učenici opisuju i procjenjuju rješenja zadataka, razmjenjuju pristupe, učenje se događa na načine na koje se inače ne bi dogodilo. Učenici s ograničenim jezičnim sposobnostima i teškoćama u učenju, moraju koristiti matematički vokabular i artikulirati matematičke koncepte kako bi naučili i jezik i matematičke koncepte. Oni počinju preuzimati ideje (strateška kompetencija) i razvijati osjećaj moći dok pokušavaju razumjeti matematiku (produktivna dispozicija). Dok slušaju ideje dru-

gih, uviđaju da postoje različiti pristupi prema načinu rješavanja matematičkih problema, a matematiku počinju gledati kao nešto što mogu napraviti. Kad je problem iznesen, učenike možemo pitati koje strategije će koristiti i zašto. Pridružujući se grupi možemo modelirati pitanja za koja želimo da ih učenici postave jedni drugima i sebi. Možemo i razmišljati naglas kako bismo im pokazali kako razmišljamo o problemu. To je jako bitno za učenike s teškoćama u učenju i njihovo razmišljanje jer proces razmišljanja postaje eksplicitan. U višim razredima, svaka grupa može imati promatrača čiji je posao postavljanje pitanja. Tijekom razgovora, nakon što su učenici riješili problem, učenici mogu razmišljati ne samo o svojoj strategiji, već i o drugim strategijama. Postavljanje pitanja poput: biste li to napravili drugačije sljedeći put, koja strategija ima smisla (i zašto), što im je predstavljalo problem i kako su to premostili, je od osnovnog značaja za razvijanje matematičke sposobnosti učenika. Iako su brojna dobra pitanja specifična za zadatak koji je riješen, neka općenita pitanja mogu pomoći učenicima da shvate sljedeće:

*Što ste napravili, a da vam je pomoglo razumjeti problem?*

*Je li postojalo nešto u problemu što vas je podsjetilo na neki drugi problem koji ste imali?*

*Jeste li došli do podataka koji vam nisu trebali? Kako ste znali da ti podaci nisu važni?*

*Kako ste odlučili nešto napraviti?*

*Kako ste odlučili je li vaš odgovor točan ili nije?*

*Jeste li pokušali nešto što ne funkcionira? Kako ste shvatili da neće funkcionirati?*

*Može li vam nešto što ste napravili u ovom problemu pomoći da riješite druge probleme?*

Primijetimo da se ta pitanja fokusiraju na proces, kao i na odgovor, te na to što je funkcioniralo, a što nije. Uravnotežen razgovor pomaže učenicima naučiti kako rješavati matematičke probleme. Za razgovor u razredu priručnik za učitelje opisuje kako implementirati učinkoviti tijek rada u razredu, Chapin, O'Connor i Anderson napisali su "Kad učitelj uspije postaviti razred u kojem učenici slušaju jedan drugoga, daju jasan i opsežan doprinos i dokazuju svoje tvrdnje, onda je učitelj napravio mjesto moćnog konteksta za učenje." To vrijedi za svakog učenika. Nema izuzetaka! Učenici koji se natječu, često se bore jer im je onemogućeno da istražuju i povezuju ideje. Ovi autori dijele pet 'načina razgovora' koji mogu pomoći učitelju prilikom razgovora o matematici (Slika 22).

U nastavku slijede ilustracije primjera tijeka rada u malim grupama koje trebaju riješiti  $27-19 = \_$ . Učitelj ispituje dvoje učenika (Ivana i Anu) da porazgovaraju o svojim različitim odgovorima.

**Ivan:** "Pa, ja sam dodao jedan devetnaestici i dobio dvadeset. Onda sam od dvadeset sedam oduzeo dvadeset i dobio sedam. Ali sam dodao jedan tako da sam morao oduzeti jedan od sedam i dobio šest."

**Učitelj:** "Što misliš o tome Ana?"

**Ana:** "Ja to nisam tako dobila".

**Učitelj:** "Da, znam, ali što misliš o njegovom objašnjenju?"

**Ana:** "Pa, ne može biti točno jer sam upravo izračunala. Dodala sam jedan devetnaestici i dobila dvadeset i dodala sedam i dobila dvadeset sedam. Tako da sam ukupno izračunala osam. Šest ne može biti točno."

**Učitelj:** "Ivane, što misliš o njenom objašnjenju?"

**Ivan:** "Ima smisla. Trebao sam računati."

**Učitelj:** "Misliš li da su oba odgovora točna?"

**Ivan:** "Ne".

**Ana:** "Ne. Da je bilo dvadeset sedam minus dvadeset, odgovor bi bio sedam, jer izračunaš sedam. Ako je devetnaest, mora biti osam".

**Ivan:** "Čekaj. Vidim nešto... dobio sam sedam... vidim, izračunao sam da je dvadeset sedam minus dvadeset jednako sedam. Ali onda... čini mi se... od dvadeset sedam treba oduzeti devetnaest. A ja sam oduzeo dvadeset! Previše sam oduzeo tako da moram dodati jedan do sedam. Dobijem osam, baš kao i Ana!"

Iako je ovo razgovor između dvoje djece, sličan stil se može koristiti i u cijelom razredu pomažući učenicima da shvate što je ispravno, a što nije, vezano uz njihove strategije.

## 4.9 Razmatranje pitanja

Pitanja su bitna. Ako ne zamolimo učenike da razmišljaju, oni neće razmišljati. Iako to zvuči jednostavno, postavljanje ciljanih pitanja je u stvari vrlo složeno i nešto što učinkoviti učitelji nastoje poboljšati tijekom cijele karijere.

Osnovni kriteriji vezani uz ispitivanja koja utječu na učenje su:

**PRODUKTIVNI RAZGOVOR ZA RAZRED**

Razgovor	Što znači i zašto	Primjeri za učitelja
1 Artikulacija	Ovaj potez uključuje postavljanje pitanja umjesto izjavne rečenice radi objašnjenja, korištenja odgovarajućeg jezika i uključivanja više učenika.	Koristili ste stotice i računali? Tako, prvo ste zabilježili vaša mjerenja u tablice?
2 Parafraziranje	Pitati učenike da parafraziraju nečije ideje vlastitim riječima osigurat će da ideje budu navedene na različite načine i potaknuti učenike da slušaju jedni druge.	Tko može ponoviti što je Roberto upravo rekao, ali svojim vlastitim riječima?
3 Razmišljanje	Tu se traži od učenika da kažu što misle o ideji drugog učenika	Slažete li se ili ne s Božicom? Zašto?
4 Elaboracija	Ovo je zahtjev učenicima da provociraju, dodaju, elaboriraju ili daju primjer. Namjera je veće sudjelovanje učenika, produbljivanje njihovog razumijevanja i proširenje	Možete li dati primjer? Vidite li vezu između Božičine ideje i Robertove ideje? Što ako...?
5 Čekanje	Ironično, jedan od koraka u razgovoru je ne razgovarati. Vrijeme tišine ne bi trebalo biti neugodno, već poticajno. Ako postane čudno, zamolite učenike da porazgovaraju u parovima i onda ponovno pokušajte.	Ovo pitanje je bitno. Malo razmislimo o tome.

Slika 22: Produktivni razgovor za razred

1. *"Razina" pitanja:* Pitanja su rangirana u različitim modelima. Na primjer, Bloomova taksonomija uključuje šest razina (znanje, razumijevanje, primjenu, analizu, sintezu, procjenu), s tim da je svaka kognitivno zahtjevnija od prethodne. Kognitivne razine uključuju dvije manje zahtjevne i dvije zahtjevnije kategorije. Bez obzira na taksonomiju određenih kategorija, cilj je postavljati višu razinu pitanja. To je posebno bitno ako učenici razmišljaju na višem stupnju, a ipak se koristi premalo pitanja za višu razinu u poučavanju matematike.

2. *Tip ciljanog znanja:* Bitni su i konceptualno i proceduralno znanje i stoga pitanja moraju biti usmjerena prema oba tipa znanja. Ako su pitanja ograničena na proceduralna znanja, kao što je "Kako si to riješio?" ili "Koje korake si koristio?", onda će učenici razmišljati o procedurama, a ne o povezanim konceptima. Pitanja fokusirana na konceptualno znanje uključuju upite: "Hoće li ovo pravilo uvijek funkcionirati? Kako možemo povezati jednadžbu koju si napisao sa slikom? Zašto koristiti zajedničke nazivnike za dodavanje razlomaka?"

3. *Uzorak ispitivanja*: Kao što Herbel-Eisenmann i Breyfogle ([5], str. 45.) navode, bitno je razmišljati o pitanjima koje postavljamo, ali, isto tako, je bitno razmišljati i o uzorcima pitanja koje treba postaviti. Uobičajen uzorak ispitivanja je sljedeći: Učitelj postavlja pitanja, učenik odgovara, učitelj potvrđuje ili izaziva odgovor. Ova "inicijacija povratnog odgovora" ne vodi k razgovoru u razredu koji će potaknuti učenike na razmišljanje. Prema drugom mogućem uzorku, učitelj nastavlja ispitivati učenika kako bi ga doveo do određenog odgovora. Takav se način postavljanja pitanja razlikuje od uzorka "fokusiranja" koji koristi probna pitanja za razgovor u razredu i pomaže učenicima shvatiti matematiku. Gore navedeni razgovori pomažu poboljšati usredotočeni razgovor.

4. *Treba razmišljati o odgovoru*: Budući da nije dovoljno razvijati pitanja visoke razine, fokusirati se na procedure i koncepte i razmišljati o uzorcima ispitivanja, moramo se uvjeriti da su svi učenici angažirani. Ako je postavljeno odlično pitanje, a na njega odgovori samo jedan učenik, onda će ostali odmah shvatiti da ne moraju razmišljati o odgovoru i sav naš napor je u tom slučaju uzaludan. Umjesto toga, koristimo strategije kako bismo osigurali da svi razmišljaju o odgovoru. Recimo učenicima da "diskutiraju s parom iz klupe" o pitanju.

5. *Kako reagirati na odgovor*: Kada potvrdimo ispravno rješenje, gubimo mogućnost angažiranja učenika u smisleni razgovor o matematici i stoga ograničavamo mogućnosti učenja. U sredini sata, provjeravamo odgovore učenika kako bismo saznali misle li i ostali učenici da je odgovor točan, mogu li reći zašto i postoje li druge strategije ili rješenja problema.

#### **4.10 Koliko reći, a koliko ne?**

Kad poučavamo putem rješavanja problema, jedna od najvećih dilema za učitelje je koliko toga reći. Ako kažemo previše, učenici će se manje angažirati u rješavanju problema i zaustavit ćemo ih u njihovim načinima rješavanja problema. S druge strane, reći premalo može ostaviti učenike zbunjenima u onome što mi možemo vidjeti kao "neproduktivnu" borbu. Jedan od načina rješavanja ove dileme naveli su edukatori koji su analizirali praksu u razredu povezanu s učenjem: "Informacija može i treba biti podijeljena sve dok ne rješava problem i dok ne oduzima učenicima razmišljanje o situaciji i razvijanje metoda rješavanja koje razumiju". Predlažu tri elementa koja učitelji trebaju reći učenicima:

- Matematičke konvencije. Simboli koji se koriste za prezentiranje "tri i pet jednako osam" " $3 + 5 = 8$ " su konvencije ( $+$  i  $=$ ). Terminologija i označavanje su također konvencije. U pravilu, simboli i terminologija bi trebali biti uvedeni nakon konceptata i onda specifično kao sredstvo izražavanja ili označavanja ideja. Ponekad učenici s poteškoćama u razvoju imaju koristi od pokazivanja terminologije i značenja simbola koji pomažu sudjelovanju u procesu rješavanja problema.
- Alternativne metode. Ako učenici sami ne dođu prirodno do bitne strategije, onda učitelj mora uvesti strategiju kao "drugi" način, ali ne i jedini i najbolji način.
- Objašnjenje ili formalizacija učeničkih prijedloga. Trebate pomoći učenicima objasniti ili interpretirati njihove ideje i naglasiti povezane ideje. Učenik može dodati 38 i 5 s naznakom da je 38 i 2 jednako 40 i s 3 daje 43. Ova strategija se može povezati sa strategijom koja se koristi za zbrajanje  $8 + 5$ . Odabir 40 kao središnje točke u ovoj proceduri je bitan i vrijedan koncept. Ako svi obrate pozornost na taj koncept, to im može pomoći da vide poveznicu, što posebno ojačava samopouzdanje učenika koji su prvi predložili strategiju.

#### 4.11 Jednakost i poučavanje putem rješavanja problema

Poučavanje putem rješavanja problema omogućuje učenicima da postanu matematički pismeni.

Poučavanje putem rješavanja problema omogućit će učenicima:

- *Fokusirati pažnju učenika na ideje i razumno razmišljanje.* Prilikom rješavanja problema, učenici nužno razmišljaju o konceptima sadržanima u problemu. Koncepti koji se pojavljuju vjerojatno će biti integrirani s postojećima i poboljšati razumijevanje. Ovak pristup je potaknut od strane učenika u razredu.
- *Razvijati matematički proces.* Učenici koji rješavaju problem u razredu bit će angažirani u svih pet procesa rada s matematikom: rješavanju problema, razmišljanje, komunikacija, povezivanje i prezentacija. Ti procesi stavljaju matematiku u domenu koja je pristupačnija, interesantnija i smislenija.

- *Razvijati samopouzdanje i identitete učenika.* Kako se učenici angažiraju u rješavanju problema, počinju identificirati sebe kao matematičare. Svaki put kad učitelj predstavi zadatak s problemom i očekuje rješenje, treba učenicima reći, "Vjerujem da to možete napraviti". Kad su učenici uključeni u tijek u kojem točnost rješenja leži u opravdanju procesa, počinju se vidjeti kao matematičari.
- *Osigurati kontekst koji omogućuje učenicima pronalazak smisla koncepta.* Ako navedemo kontekst, posebno ako se kontekst temelji na iskustvu s kojim su učenici upoznati, podupiremo razvoj matematičkih konceptata. Takav pristup omogućuje učenicima pristup matematici i uspješno učenje koncepta.
- *Omogućiti točke ulaza i izlaza brojnim učenicima.* Dobri problemski zadaci imaju višestruke putove rješenja. Učenici mogu riješiti  $42 - 26$  oduzimajući 26 od 42, dodajući 26 na različite načine da dođu do 42, oduzimajući 20 od 42 i onda još 6, računajući unaprijed (ili unatrag) ili koristeći standardne metode izračunavanja. Svaki učenik treba naći smisao zadatka koristeći vlastite ideje. Štoviše, učenici trebaju proširiti te ideje i razumijevanje kad čuju i razmišljaju o strategijama rješavanja drugih. Za razliku od toga, pristup kojeg dirigira učitelj zanemaruje različitost, na štetu većine učenika.
- *Omogućiti dodatke i proširenja.* Dodaci i "što ako" pitanja mogu motivirati napredne učenike ili one koji brzo riješe zadane zadatke te povećati učenje i entuzijazam za matematiku. Takvi problemi mogu biti konfigurirani na načine koji odgovaraju određenim učenicima.
- *Angažirati učenike i tako smanjiti problem discipline.* Pitanje discipline u razredu je često zbog toga što je učenicima dosadno, ne razumiju upute učitelja ili, jednostavno, zadatak ne smatraju dovoljno važnim. Većina učenika želi izazov i uživa u tome da može riješiti problem na način koji im odgovara, što znači da imaju i manje razloga za stvaranje nereda i glumatanje po razredu.
- *Osigurati formativnu procjenu podataka.* Kako učenici razgovaraju o idejama, crtaju slike ili koriste materijale, brane svoja rješenja i ocjenjuju rješenja drugih te pišu izvješća i objašnjenja, omogućuju učitelju uvid u stalni protok vrijednih informacija. To je bogat dokaz kako učenici rješavaju problem, koje su moguće zablude koje imaju te kako povezuju i primjenjuju nove koncepte.



Uz bolje razumijevanje onoga što učenici znaju, učitelj može učinkovitije planirati i utjecati na potrebe učenja svakog učenika.

- *To je zabavno!* Učenici uživaju u kreativnom procesu rješavanja problema, traže uzorke i pokazuju kako su nešto riješili. Učitelji uživaju u iznenađujućim i inventivnim načinima na koji učenici razmišljaju. Učitelji znaju više o učenicima i cijene različitost u svom razredu kad se fokusiraju na rješavanje problema. Kad učenici imaju samopouzdanja, pokazuju ustrajnost i uživaju u matematici, mogu postići i viši stupanj i nastaviti učenje o matematici - to im otvara brojna vrata u budućnosti.

## Zaključak

Matematika je za većinu učenika najteži nastavni predmet. Posebice su im najteži problemski zadaci koji bi trebali povezivati stvarne životne situacije i matematičke apstrakcije te učenicima olakšati razumijevanje matematičkih sadržaja. Zbog toga možemo reći da je rješavanje problema najviši oblik učenja. On pobuđuje kod učenika kreativnost, razvija učenikovo stvaralačko mišljenje, misaono osamostalji- vanje te razvoj učničke individualnosti. Veoma je važno da učenici samostalno usvajaju nove nastavne sadržaje, a to mogu tek kada se aktiviraju njihove intelek- tualne sposobnosti. Na takav način se kod učenika potiče povezivanje nastavnih sadržaja i lakše se može ostvariti primjena stečenih znanja u novonastalim situaci- jama. Kako bi učenici što lakše riješili određeni problem, moraju ga razumjeti, imati ideju, tj. napraviti plan rješavanja, izvesti taj plan te ga, na kraju, znati procijeniti kao dobar ili loš. Trebali bi znati izvući zaključke. Ovakvi problemski zadaci uče učenike razmišljati, logički zaključivati i, u konačnici, uče ih kako učiti. Stvaraju od učenika samostalnog pojedinca koji stvara, misli i rješava probleme. Kako bi lakše i brže došli do rješenja, učenicima su potrebne i određene strategije tj. metode rješavanja problema. One su veoma važne i primjenjive. U ovom radu objašnjeno je jedanaest takvih metoda (strategija).

## Literatura

- [1] L. M. KENNEDY, S. TIPPS, A. JOHNSON, *Guiding children's learning of mathematics*, Thomson Wadsworth, Belmont, USA, 2008.
- [2] I. KLASNIĆ, *Problemski zadaci - Kako ih rješavaju uspješni i neuspješni učenici*, *Odgojne znanosti*, Vol. 11, No. 1 (17), 2009.
- [3] Z. KURNIK, *Heuristička nastava*, *Matematika i škola*, **34** (2006), 148 - 153.
- [4] Z. KURNIK, *Problemska nastava*, *Matematika i škola*, **15** (2002), 196 - 202.
- [5] J. A. VAN DE WALLE, K. S. KARP, J. M. BAY - WILLIAMS, *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*, Pearson, New Jersey, USA 2010.

## Sažetak

Tema ovog rada su metode za rješavanje problemskih zadataka. U radu su dana tri pristupa za poučavanje rješavanja problema: poučavanje o rješavanju problema, poučavanje za rješavanje problema i poučavanje putem rješavanja problema. Svaki pristup donosi korisne i bitne činjenice za učenikovo znanje i razvijanje sposobnosti za rješavanje problemskog zadatka, a tako i stvarnih životnih situacija. Opisano je i rješavanje problema u četiri koraka prema poznatom matematičaru Georgeu Polyau. Dano je i opisano jedanaest strategija pomoću kojih se brže i lakše dolazi do rješenja određenog problema. Svaka metoda je alat kojeg učenici koriste prilikom rješavanja problemskih zadataka. Navedeni su korisni primjeri problemskih zadataka za osnovnu školu te su razmatrana glavna pitanja koja utječu na učenje i rješavanje problema. Objasnjena je i uloga učitelja koji organizira, motivira i usmjeruje učenike na pravilno korištenje znanja i informacija.

## Summary

The purpose of this master thesis is to show the methods of solving problems. In this paper the three approaches to the teaching of problem solving are given: teaching about problem solving, teaching for problem solving and teaching through problem solving. Each approach offers substantial and relevant facts to students' knowledge and developing competencies for solving problem, as well as real life situations. Four principles of problem solving identified by well-known mathematician George Polya are also described. Eleven strategies for reaching a solution to a certain problem by faster and easier means are also given and described. Each method is a tool which students use while solving problem. Useful problem examples for primary school students are enumerated and the main issues that affect learning and problem solving are examined. The role of a teacher, who organizes, motivates and directs students to properly use their knowledge and information, is also illustrated.

## Životopis

Rođena sam 18. listopada 1990. godine u Požegi. Pohađala sam Osnovnu školu "Dobriša Cesarić" u Požegi nakon koje sam 2005. godine upisala opći smjer Gimnazije Požega. Maturirala sam 2009. godine s odličnim uspjehom te upisala integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.