0-1 matrice

Ivezić, Iva

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Ivezić

$0-1$ **matrice**

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Ivezić

$0-1$ **matrice**

Završni rad

Voditeljica: izv. prof. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2020.

Sažetak

Tema ovog rada su $0-1$ matrice. U prvom dijelu rada definirat ćemo osnovne pojmove koje ćemo koristiti u radu. Upoznat ćemo se s nekoliko vrsta $0-1$ matrica gdje su prve matrica komunikacije i permutacijska matrica. Proučit ćemo što nam matrice komunikacije omogućuju pri računu s Kroneckerovim produktom te njihovu povezanost s vec i devec operatorima. Upoznat ćemo se s matricama eliminacije i duplikacije te s rezultatima koji se tiču $0-1$ matrice vezane s matricom reda n. Na kraju ćemo se upoznati s matricama pomaka i s njihovom primjenom u vremenski povezanim procesima.

Ključne riječi: $0-1$ matrice, Kroneckerov produkt, matrica komunikacije, matrica pomaka

Abstract

The theme of this paper are $0-1$ matrices. The first part will define the basic terms that will be mentioned in the paper. A few types of $0-1$ matrices will be presented where the first ones are communication matrix and the permutation matrix. We will study what the communication matrices enable us with the Kronecker product and their connection with vec and devec operators. Elimination and duplication matrices will also be presented as well as the results concerning $0-1$ matrices connected to $n \times n$ matrices. In the end, shifting matrices will be presented and their use in time connected processes.

Key words: $0-1$ matrix, Kroneckers product, communication matrix, shift matrix

Sadržaj

1 Uvod

$0-1$ matrica je cjelobrojna matrica u kojoj je svaki element 0 ili 1. Također se naziva i binarna matrica, logička matrica, matrica relacija ili Boolean matrica.

Prva $0-1$ matrica se pojavila u ekonometriji i statistici koju nazivamo matrica izbora čije stupce čine odgovarajuće odabrani stupci iz jedinične matrice. Množenjem s desna dane matrice A matricom izbora kao rezultat dobijemo matricu čiji su stupci izabrani stupci matrice A. Matrica permutacija je također $0-1$ matrica. Stupci matrice permutacija dobiveni su permutacijom stupaca jedinične matrice, a množenje (s lijeva) s desna dane matrice A matricom permutacija kao rezultat dobijemo matricu čiji su (retci) stupci dobiveni permutacijom (redaka) stupaca matrice A.

Još neke od $0-1$ matrica koje ćemo također proučavati u radu su matrice komunikacije, matrice eliminacije i matrice kopiranja koje su povezane s vec, vech i $\overline{\nu}$ operatorima. Navedene matrice su bitne jer se prirodno pojavljuju u matričnom računu.

Posljednje $0-1$ matrice koje ćemo razmatrati su tzv. matrice premještanja. Množenjem (s lijeva) s desna dane matrice A matricom premještanja (retci) stupci matrice A su premješteni poprijeko (dolje) za određeni broj mjesta te su novonastala mjesta popunjena nulama.

2 Osnovni pojmovi

Definicija 1. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo **jediničnu matricu** reda n kao kvadratnu matricu

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, jedinična matrica ima jedinice na dijagonali, a svi ostali koeficijenti jednaki su joj 0.

„Za matricu $B = (b_{ij}) \in M_n$ kažemo da je **donjetrokutasta** ako vrijedi $b_{ij} = 0, \forall i < j$.“ (Bakić, 2008: 38).

Pričamo li o permutaciji od npr. n elemenata, nije nam važna priroda tih elemenata, već samo efekt djelovanja svake pojedine permutacije.

Definicija 2. Neka je n proizvoljan prirodan broj. **Permutacija** skupa $\{1, 2, \cdots, n\}$ je bilo koja bijekcija $p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Često se kaže i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

Kroneckerov produkt se definira za dvije matrice proizvoljne veličine nad nekim prstenom. S $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ označavamo skup svih matrica tipa $m \times n$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$, gdje je $\mathbb{F}$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. U slučaju kada je $m = n$ pišemo $M_n(\mathbb{F})$.

Definicija 3. Neka su $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ i $A \in M_{p \times q}(\mathbb{F})$. **Kroneckerov produkt** matrica A i B definiramo kao

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mp \times nq}(\mathbb{F}).$$

Neka od svojstava, koje ćemo koristiti u radu, Kroneckerovog produkta su:

1. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C$,
2. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, ukoliko postoje AC i BD,
3. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$,
4. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
5. Općenito, $A \otimes B \neq B \otimes A$

Svojstvo 5. Kroneckerovog produkta ne vrijedi za vekotre istog tipa a i b, tj. vrijedi $a^T \otimes b = b \otimes a^T = ba^T$ i upravo ta iznimka nam dozvoljava da $A \otimes b$, gdje je A matrica tipa $m \times n$, a b vektor tipa $p \times 1$, zapišemo u obliku

$$A \otimes b = \begin{pmatrix} a^1 \otimes b \\ \vdots \\ a^m \otimes b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \otimes a^1 \\ \vdots \\ b \otimes a^m \end{pmatrix}.$$

Vektorizacija matrice je linearna transformacija. Ona pretvara matricu u vektor stupac. Princip rada operatora vektorizacije je prilično jednostavan, on svrstava sve stupce matrice jedan ispod drugog i može se primijeniti na matrice bilo kojeg tipa.

Definicija 4. Neka je A matrica tipa $m \times n$ i a_j je j-ti stupac matrice A. Tada je vec A vektor tipa $mn \times 1$

$$\text{vec } A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Navest ćemo i neka osnovna svojstva operatora vektorizacije: Neka su $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, i neka je $a \in \mathbb{F}^n$. Tada vrijede sljedeca svojstva:

1. $\text{vec } (A + B) = \text{vec } A + \text{vec } B$,
2. $\text{vec } (\alpha A) = \alpha \text{vec } A$,
3. $\text{vec } (a^T) = \text{vec } (a) = a$.

Slično, neka je A matrica tipa $m \times n$ i neka je a^i i-ti redak matrice A. Tada je devec A $1 \times mn$ vektor, tj.

$$\text{devec } A = [a^1, \cdots , a^m].$$

Dakle, devec operator transformira matricu A u redak vektor slažući retke matrice A jednog do drugog. Očito je da su ta dva operatora međusobno povezana pa uočimo:

1. $(\text{vec } A)^T = [a_1^T, \cdots a_n^T] = \text{devec } A^T$,
2. Ako je $A^T = B$, tada vrijedi $\text{vec } B^T = (\text{devec } B)^T$.

3 Matrice izbora i permutacijske matrice

Promotrimo matricu $A = (a_1 \cdots a_n)$, gdje je a_i i-ti stupac od A, tipa $m \times n$. Pretpostavimo da želimo pomoću matrice A konstruirati novu matricu B čiji će stupci biti npr. prvi, četvrti i peti stupac matrice A. Neka je $\mathcal{S} = (e_1^n e_4^n e_5^n)$, gdje je e_j^n j-ti stupac jedinične matrice I_n reda n. Očito je

$$A\mathcal{S} = (a_1 a_4 a_5) = B.$$

Matricu $\mathcal{S}$ nazivamo **matricom izbora**, a njeni stupci su sačinjeni od stupaca jedinične matrice. Matrice izbora primjenjuju se u ekonometriji, grani ekonomije koja se bavi primjenom statističkih metoda na ekonomske podatke. Primjerice, matrica A može predstavljati zapažanja na svim endogenim varijablama u ekonometrijskom modelu, a matrica B može predstavljati zapažanja na endogenim varijablama koje se pojavljuju na desnoj strani određene jednadžbe u tom modelu. Uobičajeno je korištenje matrica izbora, a i matematički je prikladno, te pišemo $B = A\mathcal{S}$.

Navedeno svojstvo matrica izbora se generalizira u slučaju kada su dane matrice blok matrice. Pretpostavimo da je $A = (A_1 \cdots A_p)$ matrica tipa $m \times np$ koja se sastoji od p $m \times n$ matrica - svaka matrica A_i je tipa $m \times n$. Nadalje, pretpostavimo da želimo konstruirati novu matricu B pomoću matrice A, i to na način da se B sastoji od A_1, A_4 i A_5. Tada je

$$B = (A_1 A_4 A_5) = A(\mathcal{S} \otimes I_n),$$

gdje je $\mathcal{S} = (e_1^n e_4^n e_5^n)$, isto kao u primjeru s početka ovog poglavlja.

Matrica P dobivena permutacijom stupaca i redaka jedinične matrice naziva se **permutacijska matrica**. Permutacijom redaka i stupaca jedinične matrice dobivamo matricu u kojoj svaki redak i svaki stupac sadrži točno jedan element 1, a ostali elementi su 0. Svaka permutacijska matrica je ortogonalna, tj. $P^T = P^{-1}$, jer stupci jedinične matrice čine skup ortonormiranih vektora. Rezultat množenja s lijeva (s desna) dane matrice A i matrice permutacija je matrica čiji su retci (stupci) dobiveni permutacijom redaka (stupaca) matrice A.

4 Matrica komunikacije i uopćenje vec i devec operatora matrice komunikacije

4.1 Matrica komunikacije

Promotrimo situaciju kada imamo matricu A tipa $m \times n$. Matricu A možemo zapisati u obliku

$$A = (a_1 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$$

gdje je a_j j-ti stupac, a a^i i-ti redak matrice A. Onda je

$$\text{vec } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

gdje je

$$\text{vec } A^T = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}.$$

Uočimo da vec A i vec A^T sadrže elemente matrice A, a razlikuju se samo u rasporedu tih elemenata. Iz toga možemo zaključiti da postoji matrica permutacija K_{mn} reda mn za koju vrijedi

$$K_{mn} \text{vec } A = \text{vec } A^T.$$

Matricu K_{mn} nazivamo **matricom komunikacije**. K_{nm} je matrica komunikacije povezana s matricom tipa $n \times m$. Vrijedi

$$K_{nm}K_{mn}\text{vec } A = \text{vec } A,$$

iz čega slijedi $K_{nm} = K_{mn}^{-1} = K_{mn}^T$. Zadnja jednakost vrijedi jer je K_{mn} permutacijska matrica. Uočimo i

$$K_{1n} = K_{n1} = I_n.$$

Eksplicitni zapis matrice komunikacije K_{mn} je

$$K_{mn} = \begin{bmatrix} I_n \otimes e_1^m \\ I_n \otimes e_2^m \\ \vdots \\ I_n \otimes e_m^m \end{bmatrix} = [I_m \otimes e_1^n I_m \otimes e_2^n \cdots I_m \otimes e_n^n],$$

gdje je e_j^m j-ti stupac jedinične matrice I_m reda m, a e_i^n je i-ti supac jedinične matrice I_n reda n.

4.2 Matrice komunikacije, Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Matrice komunikacije nam dozvoljavaju izmjenjivanje matrica u Kroneckerovom produktu, to je njihovo osnovno svojstvo. Teorijski dio vezan za ovo poglavlje je preuzet iz [3].

Neka je A matrica tipa $m \times n$, B matrica tipa $p \times q$, a b vektor tipa $p \times 1$. Tada je

$$\begin{aligned} &K_{pm}(A \otimes B) = (B \otimes A)K_{qn}, \\ &K_{pm}(A \otimes B)K_{nq} = B \otimes A, \\ &K_{pm}(A \otimes b) = b \otimes A, \\ &K_{mp}(b \otimes A) = A \otimes b. \end{aligned}$$

Druga svojstva komunikacijskih matrica vezana uz Kroneckerov produkt nisu dobro poznata. Neka su A i B navedene matrice i neka je

$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix}$$

gdje je b^i i-ti redak matrice B. Tada vrijedi:

$$A \otimes B = A \otimes \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A \otimes b^1 \\ \vdots \\ A \otimes b^p \end{pmatrix}$$

Teorem 1.

$$K_{pm}(A \otimes B) = \begin{pmatrix} A \otimes b^1 \\ \vdots \\ A \otimes b^p \end{pmatrix}$$

Dokaz.

$$K_{pm}(A \otimes B) = \begin{pmatrix} I_m \otimes e_1^p \\ \vdots \\ I_m \otimes e_p^p \end{pmatrix} (A \otimes B) = \begin{pmatrix} A \otimes e_1^p B \\ \vdots \\ A \otimes e_p^p B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \otimes b^1 \\ \vdots \\ A \otimes b^p \end{pmatrix}$$

. $\square$

Slično, ako zapišemo matricu B u obliku $B = (b_1 \cdots b_q)$, gdje je b_j j-ti stupac matrice B, tada vrijedi:

$$A \otimes B = A \otimes (b_1 \cdots b_q) \neq (A \otimes b_1 \cdots A \otimes b_q)$$

Teorem 2.

$$(A \otimes B)K_{nq} = (A \otimes b_1 \cdots A \otimes b_q)$$

Dokaz.

$$(A \otimes B)K_{nq} = (A \otimes B)(I_n \otimes e_1^q \cdots I_n \otimes e_q^q) = (A \otimes Be_1^q \cdots A \otimes Be_q^q) = (A \otimes b_1 \cdots A \otimes b_q)$$

$\square$

Slijedeći teoremi su povezani s prethodno navedenim teoremima.

Teorem 3.

$$(K_{qm} \otimes I_p)(A \otimes \text{vec } B) = \begin{pmatrix} A \otimes b_1 \\ \vdots \\ A \otimes b_q \end{pmatrix}$$

Dokaz.

$$(K_{qm} \otimes I_p)(A \otimes \text{vec } B) = \begin{bmatrix} I_m \otimes (e_1^q \otimes I_p) \\ \vdots \\ I_m \otimes (e_q^q \otimes I_p) \end{bmatrix} (A \otimes \text{vec } B) = \begin{bmatrix} A \otimes (e_1^q \otimes I_p)\text{vec } B \\ \vdots \\ A \otimes (e_q^q \otimes I_p)\text{vec } B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A \otimes b_1 \\ \vdots \\ A \otimes b_q \end{pmatrix}$$

$\square$

Teorem 4.

$$(I_n \otimes K_{pm})(\text{vec } A \otimes B) == \begin{pmatrix} B \otimes a_1 \\ \vdots \\ B \otimes a_n \end{pmatrix}$$

Dokaz.

$$(I_n \otimes K_{pm})(\text{vec } A \otimes B) = \begin{bmatrix} K_{pm} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_{pm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \otimes B \\ \vdots \\ a_n \otimes B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pm}(a_1 \otimes B) \\ \vdots \\ K_{pm}(a_n \otimes B) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} B \otimes a_1 \\ \vdots \\ B \otimes a_n \end{pmatrix}$$

$\square$

Budući da vrijedi $K_{mn}^{-1} = K_{nm}$, navedeni teoremi iziskuju slijedeće korolare:

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= K_{mp} \begin{pmatrix} A \otimes b^1 \\ \vdots \\ A \otimes b^p \end{pmatrix}, \\
A \otimes B &= (A \otimes b_1 \cdots A \otimes b_q) K_{qn}, \\
(A \otimes \text{vec } B) &= (K_{mq} \otimes I_p \begin{pmatrix} A \otimes b_1 \\ \vdots \\ A \otimes b_q \end{pmatrix}, \\
(\text{vec } A \otimes B) &= (I_n \otimes K_{mp}) \begin{pmatrix} B \otimes a_1 \\ \vdots \\ B \otimes a_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Analizom teorema možemo dobiti još nekoliko sličnih korolara.

Teorem 3. i 4. nam omogućuju pretvorbu vec-a Kroneckerovog produkta u Kroneckerov produkt vec-a i obrnuto. Promotrimo slijedeću situaciju. Neka su matrica A tipa $m \times n$ i matrica B tipa $p \times q$ zapisane u obliku:

$$A = (a_1 \cdots a_n), \quad B = (b_1 \cdots b_q).$$

Dakle, vrijedi:

$$A \otimes B = (a_1 \otimes b_1 \cdots a_1 \otimes b_q \cdots a_n \otimes b_1 \cdots a_n \otimes b_q),$$

iz čega slijedi:

$$\text{vec } (A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_1 \otimes b_1 \\ \vdots \\ a_1 \otimes b_q \\ \vdots \\ a_n \otimes b_1 \\ \vdots \\ a_n \otimes b_q \end{pmatrix}$$

gdje je

$$\text{vec } A \otimes \text{vec } B = \begin{bmatrix} a_1 \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \\ \vdots \\ a_n \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Uočimo da su elementi oba vektora jednaki, samo im je poredak drugačiji od vektora do vektora. Svaki je vektor moguće dobit množenjem drugog vektora odgovarajućom $0-1$ matricom. Primjenjujući Teoreme 3. i 4. slijedi

$$\text{vec } (A \otimes B) = (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)(\text{vec } A \otimes \text{vec } B), \tag{1}$$

$$(I_n \otimes K_{mq} \otimes I_p)\text{vec } (A \otimes B) = \text{vec } A \otimes \text{vec } B. \tag{2}$$

Navedena svojstva matrice komunikacije nam omogućuju da zapišemo vec $(A \otimes B)$ pomoću vec A ili vec B. Zapis nam ilustrira slijedeći teorem.

Teorem 5.

$$\text{vec}\,(A \otimes B) = \left[I_n \otimes \begin{pmatrix} I_m \otimes b_1 \\ \vdots \\ I_m \otimes b_q \end{pmatrix} \right] \text{vec}\,A,$$

$$\text{vec}\,(A \otimes B) = \left[\begin{pmatrix} I_q \otimes a_1 \\ \vdots \\ I_q \otimes a_n \end{pmatrix} \otimes I_p \right] \text{vec}\,B.$$

Dokaz. Iz jednadžbe (1) slijedi:

$$\text{vec}\,(A \otimes B) = (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)(\text{vec}\,A \otimes \text{vec}\,B) = (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)\text{vec}\,[\text{vec}\,B(\text{vec}\,A)^T],$$

vrijedi:

$$\text{vec}\,[\text{vec}\,B(\text{vec}\,A)^T] = [I_n \otimes (I_m \otimes \text{vec}\,B)]\text{vec}\,A = [(\text{vec}\,A \otimes I_q) \otimes I_p]\text{vec}\,B,$$

pa je

$$\text{vec}\,(A \otimes B) = \{I_n \otimes [(K_{qm} \otimes I_p)(I_m \otimes \text{vec}\,B)]\}\text{vec}\,A = \{[(I_n \otimes K_{qm})(\text{vec}\,A \otimes I_q)] \otimes I_p\}\text{vec}\,B.$$

Koristeći Teoreme 3. i 4. dobivamo traženi rezultat. □

5 Generalizirani vec i devec operatori matrice komunikacije

5.1 Eksplicitni izrazi za $K_{mn}^{\overline{\tau}_n}$ i $K_{mn}^{\tau_m}$

Matrica K_{mn} je matrica komunikacije koju možemo zapisati u obliku

$$K_{mn} = \begin{bmatrix} I_n \otimes e_1^m \\ \vdots \\ I_n \otimes e_m^m \end{bmatrix} = [I_m \otimes e_1^n \cdots I_m \otimes e_n^n], \tag{3}$$

gdje je e_j^n j-ti stupac jedinične matrice I_n reda n. Dakle, matrica $K_{mn}^{\overline{\tau}_n}$ je tipa $n \times nm^2$ i dana je s

$$K_{mn}^{\overline{\tau}_n} = [I_n \otimes e_1^m \cdots I_n \otimes e_m^m], \tag{4}$$

a matrica $K_{mn}^{\tau_m}$ je matrica tipa $mn^2 \times m$ i dana je s

$$K_{mn}^{\tau_m} = \begin{bmatrix} I_m \otimes e_1^n \\ \vdots \\ I_m \otimes e_n^n \end{bmatrix}.$$

Iz Teorema 5. slijedi da za matricu A, tipa $m \times n$ vrijedi

$$\text{vec }(A \otimes I_G) = \left[I_n \otimes \begin{pmatrix} I_m \otimes e_1^G \\ \vdots \\ I_m \otimes e_G^G \end{pmatrix} \right] \text{vec } A. \tag{5}$$

Slijedi da sada vec$(A \otimes I_G)$ možemo zapisati pomoću generaliziranih vec-ova kao

$$\text{vec }(A \otimes I_G) = (I_m \otimes K_{mG}^{\tau_m})\text{vec } A \tag{6}$$

U posebnom slučaju, kada je a vektor tipa $m \times 1$ vrijedi

$$\text{vec }(a \otimes I_G) = K_{mG}^{\tau_m} a$$

pa, slično, možemo zapisati

$$\text{vec }(I_G \otimes A) = \left[\begin{pmatrix} I_n \otimes e_1^G \\ \vdots \\ I_n \otimes e_G^G \end{pmatrix} \otimes I_m \right] \text{vec } A$$

$$= (K_{nG}^{\tau_n} \otimes I_m)\text{vec } A \tag{7}$$

te vrijedi

$$\text{vec }(I_G \otimes a) = (\text{vec } I_G \otimes I_m)a.$$

Jednadžbe (6) i (7) će omogućiti zapis izvoda vec $(A \otimes I_G)$ i vec $(I_G \otimes A)$ pomoću generaliziranih vec-ova i devec-ova matrice komunikacije.

5.2 Korisna svojstva $K_{nG}^{\tau_n}$ i $K_{Gn}^{\overline{\tau}_n}$

U izvodima za $K_{nG}^{\tau_n}$ i $K_{Gn}^{\overline{\tau}_n}$ uobičajeno ih je izražavati pomoću matrice komunikacije K_{Gn}.

Teorem 6.

$$K_{nG}^{\tau_n} = (K_{Gn} \otimes I_G)(I_n \otimes \text{vec } I_G) = (I_G \otimes K_{nG})(\text{vec } I_G \otimes I_n),$$
$$K_{Gn}^{\overline{\tau}_n} = [I_n \otimes (\text{vec } I_G)^T](K_{nG} \otimes I_G) = [(\text{vec } I_G)^T \otimes I_n](I_G \otimes K_{Gn}).$$

Dokaz. Koristeći jednadžbu (3), možemo zapisati

$$(K_{Gn} \otimes I_G)(I_n \otimes \text{vec } I_G) = \begin{bmatrix} I_n \otimes (e_1^{G^T} \otimes I_G)(\text{vec } I_G) \\ \vdots \\ I_n \otimes (e_G^{G^T} \otimes I_G)(\text{vec } I_G) \end{bmatrix}$$

Ovo očito izjednačuje $K_{nG}^{\tau_n}$ s $(e_1^{G^T} \otimes I_G)(\text{vec } I_G) = e_j^G$ za $j = 1, \dots, G$ pa slijedi

$$(I_G \otimes K_{nG})(\text{vec } I_G \otimes I_n) = \begin{bmatrix} K_{nG}(e_1^G \otimes I_n) \\ \vdots \\ K_{nG}(e_G^G \otimes I_n) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \otimes e_1^G \\ \vdots \\ I_n \otimes e_G^G \end{pmatrix} = K_{nG}^{\tau_n}.$$

Odgovarajući rezultati za $K_{Gn}^{\overline{\tau}_n}$ dobiveni su s $K_{Gn}^{\overline{\tau}_n} = (K_{Gn}^{\tau_n})^T$. $\square$

Koristeći svojstva matrice komunikacije i Teorema 6. moguće je izvesti izraze za $K_{nG}^{\tau_n}$ i $K_{Gn}^{\overline{\tau}_n}$. Primjerice, znamo da za matricu A tipa $m \times n$, matricu B tipa $p \times q$ i vektor b tipa $p \times 1$ vrijedi

$$K_{pm}(A \otimes b) = b \otimes A,$$

$$K_{mp}(b \otimes A) = A \otimes b.$$

Teorem 7. Za matricu A tipa $m \times n$, matricu B tipa $p \times q$ i vektor b tipa $p \times 1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&K_{mp}^{\overline{\tau}_p}(A \otimes b \otimes I_m) = b \otimes (\text{vec } A)^T,\\
&K_{pm}^{\overline{\tau}_m}(b \otimes A \otimes I_p) = A \otimes b^T,\\
&K_{mp}^{\overline{\tau}_p}(I_m \otimes b \otimes A) = \text{devec } A \otimes b,\\
&K_{pm}^{\overline{\tau}_m}(I_p \otimes A \otimes b) = b^T \otimes A.
\end{aligned}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&K_{mp}^{\overline{\tau}_p}(A \otimes b \otimes I_m) = [I_p \otimes (\text{vec } I_m)^T](b \otimes A \otimes I_m) = b \otimes (\text{vec } I_m)^T(A \otimes I_m) = b \otimes (\text{vec } A)^T,\\
&K_{pm}^{\overline{\tau}_m}(b \otimes A \otimes I_p) = [I_m \otimes (\text{vec } I_p)^T](A \otimes b \otimes I_p) = A \otimes (\text{vec } I_p)^T(b \otimes I_p) = A \otimes b^T,\\
&K_{mp}^{\overline{\tau}_p}(I_m \otimes b \otimes A) = [(\text{vec } I_m)^T \otimes I_p](I_m \otimes A \otimes b) = (\text{vec } I_m)^T(I_m \otimes A) \otimes b = \text{devec } A \otimes b,\\
&K_{pm}^{\overline{\tau}_m}(I_p \otimes A \otimes b) = [(\text{vec } I_p)^T \otimes I_m](I_p \otimes b \otimes A) = (\text{vec } I_p)^T(I_p \otimes b) \otimes A = b^T \otimes A.
\end{aligned}$$

□

Moguće je dobiti i odgovarajuće rezultate za generalizirane vec-ove komunikacijske matrice $K_{mp}^{\tau_m}$ uz pomoć odgovarajućih matrica, no takvi su dokazi neefikasni jer te rezultate je lakše dobiti pomoću svojstava generaliziranih vec i devec operatora. Primjerice, imamo

$$K_{pm}(A \otimes b) = b \otimes A.$$

Uzimajući devec$_m$ od obje strane, dobivamo

$$K_{pm}^{\overline{\tau}_m}(I_p \otimes A \otimes b) = b^T \otimes A.$$

Slično, uzmemo li devec$_p$ jednadžbe $K_{mp}(b \otimes A) = A \otimes b$, dobijemo

$$K_{mp}^{\overline{\tau}_p}(I_m \otimes b \otimes A) = \text{devec } A \otimes b.$$

Također, znamo da vrijedi $K_{pm}K_{mp} = I_{pm}$ i uzimajući vec$_m$ od obje strane jednadžbe slijedi

$$(I_p \otimes K_{pm})K_{pm}^{\tau_m} = (I_{pm}^{\tau_m}).$$

Također je moguće dobiti i ostale slične dokaze koristeći navedena svojstva.

5.3 Ostali teoremi o K_{Gn}^{τ} i $K_{nG}^{\overline{\tau}}$

U ovom ćemo potpoglavlju obraditi teoreme vezane uz $K_{nG}^{\overline{\tau}_G}$, a ekvivalentne teoreme vezane uz $K_{Gn}^{\tau_G}$ možemo također dobiti korištenjem odgovarjaućih matrica. U ovom ćemo potpoglavlju koristiti $\overline{\tau}$ za notaciju devec$_G$ i τ za notaciju vec$_G$ operatora. Ostali generalizirani devec i vec operatori bit će označeni odgovarajućim indeksima. Teorijski dio vezan za ovo poglavlje je preuzet iz [3].

Teorem 8. Neka je a vektor tipa $n \times 1$. Tada vrijedi

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(a \otimes I_{nG}) = (I_G \otimes a^T),$$

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_{nG} \otimes a) = (a^T \otimes I_G).$$

Dokaz. Neka je $a = (a_1 \cdots a_n)$, tada

$$\begin{aligned} K_{nG}^{\overline{\tau}}(a \otimes I_{nG}) &= (I_G \otimes e_1^n \cdots I_G \otimes e_n^n) \begin{bmatrix} a_1(I_G \otimes I_n) \\ \vdots \\ a_n(I_G \otimes I_n) \end{bmatrix} \\ &= a_1(I_G \otimes e_1^n) + \cdots + a_n(I_G \otimes e_n^n) \\ &= I_G \otimes a^T \end{aligned}$$

Slično, vrijedi

$$\begin{aligned} K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_{nG} \otimes a) &= (I_G \otimes e_1^n \cdots I_G \otimes e_n^n)[I_n \otimes (I_G \otimes a)] \\ &= (I_G \otimes e_1^n a \cdots I_G \otimes e_n^n a) \\ &= (I_G \otimes a_1 \cdots I_G \otimes a_n) \\ &= (a_1 I_G \cdots a_n I_G) \\ &= a^T \otimes I_G. \end{aligned}$$

□

Teorem 9. Neka je A matrica tipa $n \times p$. Tada

$$(I_p \otimes K_{nG}^{\overline{\tau}})(\text{vec } A \otimes I_{nG}) = K_{pG}(I_G \otimes A^T). \tag{8}$$

Dokaz. Neka je $A = (a_1 \cdots a_p)$, gdje je a_j $n \times 1$ j-ti stupac od A. Tada je lijevu stranu jednadžbe (8) moguće zapisati kao

$$\begin{bmatrix} K_{nG}^{\overline{\tau}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_{nG}^{\overline{\tau}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \otimes I_{nG} \\ \vdots \\ a_p \otimes I_{nG} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nG}^{\overline{\tau}}(a_1 \otimes I_{nG}) \\ \vdots \\ K_{nG}^{\tau}(a_p \otimes I_{nG}). \end{bmatrix} \tag{9}$$

S druge strane, koristeći Teorem 7., desnu stranu jednadžbe (9) možemo zapisati kao $(I_G \otimes a_1 \cdots I_G \otimes a_p)^T$, i, prema svojstvima matrice komunikacije, to je jednako $K_{pG}(I_G \otimes A^T)$. □

Teorem 10. Neka je U matrica tipa $n \times G$ i neka je $u = \text{vec } U$. Tada je $K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_n \otimes u) = U^T = (u^{\overline{\tau}_n})^T$.

Dokaz. Očito je

$$\begin{aligned} K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_n \otimes u) &= (I_G \otimes e_1^n \cdots I_G \otimes e_n^n) \begin{bmatrix} u & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u \end{bmatrix} \\ &= [(I_G \otimes e_1^n)u \cdots (I_G \otimes e_n^n)u]. \end{aligned}$$

Zapišimo u u obliku $(u_1^T \cdots u_G^T)^T$, gdje je u_j j-ti stupak od U. Tada

$$(I_G \otimes e_j^n)u = \begin{pmatrix} e_j^n u_1 \\ \vdots \\ e_j^n u_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{j1} \\ \vdots \\ u_{jG} \end{pmatrix} = U_j^T.$$

□

Teorem 11. Neka je u vektor tipa $nG \times 1$. Tada

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(u \times I_n) = u^{\overline{\tau}}.$$

Dokaz. Zapišimo $u = (u_1^T \cdots u_n^T)^T$, gdje je svaki vektor u_i $G \times 1$.
Tada

$$\begin{aligned} K_{nG}^{\overline{\tau}}(u \otimes I_n) &= (I_G \otimes e_1^n \cdots I_G \otimes e_n^n) \begin{pmatrix} u_1 \otimes I_n \\ \vdots \\ u_n \otimes I_n \end{pmatrix} \\ &= (u_1 \otimes e_1^n) + \cdots + (u_n \otimes e_n^n). \end{aligned}$$

Vrijedi $u_j \otimes e_j^n = u_j e_j^n = (0 \cdots u \cdots 0)$,
pa slijedi

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(u \times I_n) = (u_1 \cdots u_n) = u^{\overline{\tau}}.$$

□

Teorem 12.

$$(I_m \otimes K_{nG}^{\overline{\tau}})K_{mn,nG} = K_{mG}(I_G \otimes K_{nm}^{\overline{\tau}_m})$$

Dokaz. Možemo zapisati $K_{mn,nG} = [I_m \otimes (I_n \otimes e_1^{nG}) \cdots I_m \otimes (I_n \otimes e_{nG}^{nG})]$, pa slijedi

$$(I_m \otimes K_{nG}^{\overline{\tau}})K_{mn,nG} = [I_m \otimes K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_n \otimes e_1^{nG}) \cdots I_m \otimes K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_n \otimes e_{nG}^{nG})]. \tag{10}$$

Sada, prema Teoremu 10. slijedi

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_n \otimes e_1^{nG}) = [(e_1^{nG})^{\overline{\tau}}]^T,$$

i, budući da vrijedi $e_1^{nG} = e_1^G \otimes e_1^n$ iz svojstava generaliziranih devec operatora, slijedi

$$(e_1^{nG})^{\overline{\tau}} = e_1^{G^T} \otimes e_1^n,$$

pa slijedi

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(I_n \otimes e_1^{nG}) = e_1^G \otimes e_1^n = e_1^G e_1^n.$$

Prvih n matrica na desnoj strani jednadžbe (10) mogu se zapisati kao

$$\begin{aligned} I_m \otimes e_1^G e_1^n \cdots I_m \otimes e_1^G e_n^n &= (I_m \otimes e_1^G)(I_m \otimes e_1^n \cdots I_m \otimes e_n^n) \\ &= (I_m \otimes e_1^G)(K_{nm}^{\overline{\tau}_m}). \end{aligned}$$

Slijedi da lijevu stranu jednadžbe (10) može biti zapisana kao

$$[(I_m \otimes e_1^G)K_{nm}^{\overline{\tau}_m} \cdots (I_m \otimes e_G^G)K_{nm}^{\overline{\tau}_m}] = K_{mG}(I_G \otimes K_{nm}^{\overline{\tau}_m}).$$

□

Teorem 13. Neka su b i d vektori tipa $n \times 1$ i neka je c $G \times 1$ vektor. Tada

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(b \otimes c \otimes d) = d^T bc.$$

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
K_{nG}^{\overline{\tau}}(b \otimes c \otimes d) &= (I_G \otimes e_1^n \cdots I_G \otimes e_n^n) \begin{bmatrix} b_1(c \otimes d) \\ \vdots \\ b_n(c \otimes d) \end{bmatrix} \\
&= b_1(c \otimes d_1) + \cdots + b_n(c \otimes d_n) \\
&= (b_1 d_1 + \cdots b_n d_n)c
\end{aligned}
$$

□

Teorem 14. Neka je b vektor tipa $n \times 1$ i neka je A $Gn \times p$ matrica. Tada

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(b \otimes A) = (I_G \otimes b^T)A.$$

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
K_{nG}^{\overline{\tau}}(b \otimes A) &= (I_G \otimes e_1^n \cdots I_G \otimes e_n^n) \begin{pmatrix} b_1 A \\ \vdots \\ b_n A \end{pmatrix} \\
&= b_1(I_G \otimes e_1^n)A + \cdots + b_n(I_G \otimes e_n^n)A
\end{aligned}
$$

Neka je $A = (A_1^T \cdots A_G^T)^T$, gdje je svaka podmatrica A_i tipa $n \times p$. Tada

$$(I_G \otimes e_1^n)A = (A_1^T e_1^n \cdots A_G^T e_1^n)^T$$

pa slijedi

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(b \otimes A) = b_1(A_1^T e_1^n \cdots A_G^T e_1^n)^T + \cdots + b_n(A_1^T e_n^n \cdots A_G^T e_n^n)^T.$$

Uzmimo u obzir prvu podmatricu,

$$b_1 e_1^n A_1 + \cdots + b_n e_n^n A_1 = b^T A_1,$$

pa možemo pisati

$$K_{nG}^{\overline{\tau}}(b \otimes A) = (A_1^T b \cdots A_G^T b)^T = (I_G \otimes b^T)A.$$

□

5.4 $K_{p,np}$ naspram $K_{np}^{\tau_n}$

$K_{p,np}$ i $K_{np}^{\tau_n}$ imaju np^2 stupaca. Promotrimo što se događa kada je Kroneckerov produkt sa np^2 redaka naknadno pomnožen navedenim matricama. Neka su A i B matrice takve da je matrica A tipa $m \times p$ i matrica B je tipa $r \times np$. Tada je $A \otimes B$ takav Kroneckerov produkt. Iz Teorema 2. slijedi

$$(A \otimes B)K_{p,np} = (A \otimes b_1 \cdots A \otimes b_{np}), \tag{11}$$

gdje je b_i i-ti stupac matrice B. Slijedećim teoremom je dan ekvivalentan rezultat za $K_{np}^{\tau_n}$.

Teorem 15. Neka je A matrica tipa $m \times p$ i neka je B matrica tipa $r \times np$. Tada

$$(A \otimes B)K_{np}^{\tau_n} = \begin{bmatrix} B(I_n \otimes a^1) \\ \vdots \\ B(I_n \otimes a^m) \end{bmatrix} \tag{12}$$

gdje je a^i i-ti redak od A.

Dokaz.

$$(A \otimes B)K_{np}^{\tau_n} = \begin{bmatrix} (a^1 \otimes B)K_{np}^{\tau_n} \\ \vdots \\ (a^m \otimes B)K_{np}^{\tau_n} \end{bmatrix}.$$

Iz Teorema 14. slijedi $(a^1 \otimes B)K_{np}^{\tau_n} = B(I_n \otimes a^1)$. □

Uzimajući transponirane oblike jednadžbi (11) i (12), možemo uočiti da ako je C matrica tipa $p \times m$ i matrica D tipa $np \times r$ slijedi

$$K_{np,p}(C \otimes D) = \begin{pmatrix} C \otimes d^1 \\ \vdots \\ C \otimes d^{np} \end{pmatrix} \tag{13}$$

za koje vrijedi

$$K_{np}^{\tau_n}(C \otimes D) = [(I_n \otimes c_1^T)D \cdots (I_n \otimes c_m^T)D], \tag{14}$$

gdje je d^i i-ti redak matrice D i c_j je j-ti stupac matrice C.

5.5 Matrica N_n

Matrica N_n je reda n^2 povezana je s matricom komunikacije K_{nn}. Matrica N_n definirana je s

$$N_n = \frac{1}{2}(I_{n^2} + K_{nn}).$$

Za matricu A reda n vrijedi

$$N_n \text{vec } A = \text{vec } \frac{1}{2}(A + A^T).$$

Očito je, iz svojstava matrice komunikacije, da je N_n simetrična idempotentna matrica. To znači da vrijedi $N_n^T = N_n = N_n^2$. Ostala svojstva matrice N_n koja ćemo navesti su na jednostavan način izvedena iz svojstava matrice K_{nn}. Neka su A i B matrice reda n i neka je b vektor tipa $n \times 1$, tada vrijedi

1. $N_n K_{nn} = N_n = K_{nn} N_n$,
2. $N_n(A \otimes B)N_n = N_n(B \otimes A)N_n$,
3. $N_n(A \otimes B + B \otimes A)N_n = N_n(A \otimes B + B \otimes A) = (A \otimes B + B \otimes A)N_n = 2N_n(A \otimes B)N_n$,
4. $N_n(A \otimes A)N_n = N_n(A \otimes A) = (A \otimes A)N_n$,
5. $N_n(A \otimes b) = N_n(b \otimes A) = \frac{1}{2}(A \otimes b + b \otimes A)$.

Općenito, za matricu K_{nn} često se koristi simbol K, a za matricu N_n se koristi N. Sukladno tome, nije neuobičajeno ne pisati indekse matrica eliminacije i matrica duplikacije.

6 Matrice eliminacije L, $\overline{L}$

Ukoliko je matrica A reda n, tada vec A sadrži sve elemente u vech A i u $\overline{\nu}(A)$. Iz toga slijedi da postoje matrice L tipa $\frac{1}{2}n(n+1) \times n^2$ i $\overline{L}$ tipa $\frac{1}{2}n(n-1) \times n^2$ takve da vrijedi

$$\begin{aligned} L\text{vec } A &= \text{vech } A, \\ \overline{L}\text{vec } A &= \nu(A). \end{aligned}$$

Matrice L i $\overline{L}$ nazivaju se **matricama eliminacije**. Na primjer, za matricu A reda 3 vrijedi

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7 Matrice duplikacije D, $\overline{L}^T$

Vrijedi, ako je matrica A koja je reda n simetrična, tada vech A sadrži sve osnovne elemente matrice A, a neki od tih elemenata su duplirani u vec A. Iz toga slijedi da postoji $0-1$ matrica D tipa $n^2 \times \frac{1}{2}n(n+1)$ za koju vrijedi

$$D\text{vech } A = \text{vec } A.$$

Primjerice, za simetričnu matricu reda 3 je

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Slično, ukoliko je matrica A donjetrokutasta matrica, tada su svi njeni osnovni nenul elementi sadržani u $\overline{\nu}(A)$. Iz toga slijedi, postoji $0-1$ matrica $\overline{L}^T$ tipa $n^2 \times \frac{1}{2}n(n-1)$ takva da vrijedi

$$\overline{L}^T \overline{\nu}(A) = \text{vec } A.$$

Matrice D i $\overline{L}^T$ nazivaju se **matricama duplikacije**.

8 Rezultati koji se tiču $0-1$ matrice vezane s matricom reda n

Vrijedi

1. $KD = D = ND, LD = I$,
2. $L^T L = I$,
3. $DLN = N$,
4. $D^T D = (LNL)^{-1} = 2I - LKL^T$,
5. $D = NL(LNL)^{-1} = 2NL^T - L^T LKL^T$,
6. $DD^T = 2N - L^T LKL^T L$,
7. $\overline{L}\,\overline{L}^T = I$,
8. $\overline{L}KL^T = O$,
9. Generalizirani inverz matrice D je $D^+ = LN$,
10. $D^+(A \otimes B)D = D^+(B \otimes A)D$,
11. Za nesingularnu matricu A vrijedi $[D^T(A \otimes A)D]^{-1} = LN(A^{-1} \otimes A^{-1})NL^T$,
12. Neka je $A = \{a_{ij}\}$ matrica reda n. Tada je $\overline{L}^T\overline{L}\mathrm{vec}\, A = \mathrm{vec}\, \overline{A}$, gdje je $\overline{A}$ strogo donjetrokutasta matrica dana s

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Još jedan od korisnih rezultata dan je slijedećim teoremom

Teorem 16. Neka je A dijagonalna matrica s dijagonalnim elementima $a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn}$. Tada je $D^T(A \otimes A)D$ također dijagonalna matrica dana s

$$D^T(A \otimes A)D = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & & & & & & & & \\ & 2a_{11}a_{22} & & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 2a_{11}a_{nn} & & & & & \\ & & & & a_{22}^2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 2a_{22}a_{nn} & & \\ & & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

9 Matrice pomaka

Matrice koje ćemo predstavit u ovom poglavlju se često koriste za analizu vremenski povezanih modela. „Kada je vremenski povezan proces zapisan u matričnom obliku, matrice pomaka igraju istu ulogu kao lag operatori koji se pojavljuju kada zapišemo proces za određeni vremenski period. Međutim, precizirajući proces u matričnom zapisu koristeći $0-1$ matrice uvelike olakšava uporabu matričnog računa“ (Turkington, 2002: 46). Lag operatori su operatori koji djeluju na element nekog vremenskog niza te je dobiveni rezultat njegov prethodni element.

9.1 Definicija i osnovne operacije

Razmotrimo matricu reda n

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O^T & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Očito je S_1 $0-1$ matrica, i to donjetrokutasta. Nju nazivamo **matricom pomaka**. Množeći danu matricu slijeva ili zdesna matricom S_1 elementi dani matrice se pomaknu za jedno mjesto i nule se smještaju na "novonastala" mjesta. Primjerice, neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa $n \times m$ i $B = (b_{ij})$ matrica tipa $m \times n$. Tada

$$S_1 A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

pa uočavamo da pri formiranju matrice S_1A prvi redak matrice A je pomaknut dolje za jedno mjesto i zamjenjen je s retčanim nul vektorom. Slično,

$$BS_1 = \begin{bmatrix} b_{12} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & b_{mn} & 0 \end{bmatrix},$$

pa uočavamo da pri formiranju matrice BS_1 pomičemo stupce matrice B u lijevu stranu za jedno mjesto te zamjenimo posljednji stupac stupčanim nul vektorom. Uočimo da za vektor a tipa $n \times 1$ vrijedi

$$S_1 a = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, a^T s_1 = (a_2 \cdots a_n 0).$$

Ostale matrice pomaka mogu biti formirane iz matrice S_1 i one će također pomaknuti elemente dane matrice za jedno mjesto. Očito

$$S_1^T A = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

pomiče retke matrice A gore za jedno mjesto i zadnji red je zamjenjen s retčanim nul vektorom i

$$BS_1^T = \begin{bmatrix} 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mn-1} \end{bmatrix}$$

pomiče stupce matrice B u desno za jedno mjesto i prvi redak je zamjenjen nul vektorom. Pretpostavimo da želimo zamjeniti prvi ili zadnji redak (stupac) dane matrice nul vektorom, a da nam ostali elementi ostanu isti. To također možemo napraviti koristeći matricu pomaka S_1. Primjetimo

$$S_1 S_1^T A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad BS_1S_1^T = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$S_1^T S_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1m} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad BS_1^T S_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Također, matrica pomaka se može koristiti da prvi redak (stupac) dane matrice ostavimo isti, a da sve ostale elemente matrice pomnožimo danom konstantom k. Na primjer, ako je I_n jedinična matrica reda n, tada

$$[I_n + (k-1)S_1S_1^T]A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

9.2 Matrice pomaka povezane s matricama reda n

Ukoliko je dana matrica pomnožena slijeva (zdesna) matricom pomaka S_1 (S_1^T) retci (stupci) dane matrice su pomaknuti za jedno mjesto. Ostale matrice pomaka definiramo na sličan način i one pomiču elemente dane matrice za bilo koji broj mjesta. Primjetimo, dana matrica reda n ima n matrica pomaka vezanih uz nju. Jedinična matrica I_n pomiče elemente za nula mjesta, matrica pomaka S_1 pomiče elementa za jedno mjesto i nule idu na novonastala mjesta, matrica pomaka

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & \ddots & & 0 & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pomiče elemente dane matrice za dva mjesta i nule idu na novonastala mjesta. Matrica pomaka

$$S_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

pomiče elemente za $n-1$ mjesta i na novonastala mjesta idu nule.

Ukoliko označimo j-ti stupac jedinične matrice reda n s e_j, tada je očito

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{i=j+1}^{n} e_i e_{i-1}^T, \\ S_j e_i &= e_{i+j},\ i+j \leq n, \\ S_j e_i &= 0,\ i+j > n. \end{aligned}$$

Štoviše

$$S_j = S_1^j,\ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

pod uvjetom da je $S_1^0 = I_n$.

Analiza matrice pomaka S_j je slična analizi matrice S_1.

Ukoliko je A matrica reda n, tada je $S_i^T A S_j$ matrica nastala pomicanjem elemenata matrice A i redaka gore i pomicanjem j redaka prema lijevo, a novonastala mjesta su popunjena nulama.

9.3 Neka od svojstava matrica pomaka

Očito je da sve matrice pomaka, osim jedinične matrice imaju slijedeća svojstva:

1. Sve su singularne, čak štoviše, vrijedi $r(S_j) = n - j$.

2. Sve su nilpotentne, primjerice $S_1^n = 0$.

3. $S_i S_j = S_{i+j},\ i+j < n$.

4. $S_i S_j = 0,\ i+j \geq n$.

Posljednja dva svojstva se mogu koristiti za pronalaženje i inverza matrica.

Teorem 17. Neka je R matrica reda mi razmotrimo matricu reda mn danu s

$$M(r) = I_{nm} + (R \otimes S_1).$$

Tada je

$$M(r)^{-1} = I_{nm} - R_1 + R^2 \otimes S_2 + \cdots + (-1)^{n-1}(R^{n-1} \otimes S_{n-1}).$$

9.4 Matrice pomaka i vremenski povezani procesi

Očita primjena matrica pomaka je u vremenski povezanim procesima. U matričnom zapisu vremenski povezanih procesa matrice pomaka imaju istu ulogu kao lag operatori kada zapisujemo proces za određeni vremenski period t.

Razmotrimo autoregresivan proces reda[1] od 1, $u_t + \alpha_1 u_{t-1} = \varepsilon_t,\ t = 1, \ldots, 0$ gdje su ε_t neovisne jednako distribuirane slučajne varijable. Koristeći lag operator l_1, gdje je $l_1 u_t = u_{t-1}$, proces u trenutku t možemo zapisati kao $(1 + \alpha_1 l_1)u_t = \varepsilon_t$.

U matričnom zapisu, dani proces možemo zapisati kao

$$u + \alpha_1 u_{-1} = \varepsilon,$$

gdje je

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ u_{-1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix},\ \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Novonastale vrijednosti vektora u_{-1} mogu se zamjeniti nulama bez da utiču na rezultate. Ukoliko to učinimo, slijedi

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = S_1 u,$$

pa matrični zapis autoregresivnog procesa možemo zapisati kao

$$I_n + \alpha_1 S1)u = \varepsilon.$$

[1]Poveznica između matrica pomaka i lag operatora se može koristiti za izvode rezultata za matrice pomaka. Primjerice, za $-1 < \alpha_1 < 1$ znamo da možemo pretvoriti proces pokretnog prosjeka poretka od l u autoregresivan proces koristeći proširenje

$$(1 + \alpha_1 l_1)^{-1} u_t = (1 - \alpha_1 l_1 + \alpha_1^2 l_1^2 \cdots) u_t,$$

gdje je $l^j u_t = u_{t-j}$. Iz čega slijedi

$$(I_n + \alpha_1 S_1)^{-1} = I_n - \alpha_1 S_1 + \alpha_1^2 S_2^2 - \cdots$$

Znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} S_i S_j &= S_{i+j},\ i + j < n, \\ S_i S_j &= 0,\ i + j \geq n, \end{aligned}$$

pa slijedi

$$(I_n + \alpha_1 S_1)^{-1} = I_n - \alpha_1 S_1 + \alpha_1^2 S_2^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \alpha_1^{n-1} S_{n-1}.$$

Slično, ako razmotrimo autoregresivan proces od niza od p:

$$u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \cdots + \alpha_p u_{t-p} = \varepsilon_t,\ t = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p < n$. U matričnom zapisu, dani proces možemo zapisati kao

$$u + \alpha_1 u_{-1} + \cdots + \alpha_p u_{-p} = \varepsilon,$$

gdje je

$$u_{-j} = \begin{pmatrix} u_{-j+1} \\ \vdots \\ u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-j} \end{pmatrix}.$$

Opet, ako zamjenimo novonastale vrijednosti nulama, slijedi

$$u_{-j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-j} \end{pmatrix} = S_j u,$$

i autoregresivan proces možemo zapisati kao

$$u + \alpha_1 S_1 u + \cdots + \alpha_p S_p u = \varepsilon,$$

ili

$$u + U_p \alpha = \varepsilon,$$

gdje je

$$U_p = (S_1 u \cdots S_p u) = S(I_p \otimes u),$$

i $S = (S_1 \cdots S_p)$ je matrica tipa $n \times np$.

Literatura

[1] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, 2008.

[2] B. J. Broxson, The Kronecker Product, University of North Florida, Florida, 2006.

[3] A. Turkington, Matrix Calculus and Zero-One Matrices, Cambridge University Press, 2002.