Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Doris Bencetić

Markovljevi lanci unatrag

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Doris Bencetić

Markovljevi lanci unatrag

Diplomski rad

mentor: prof. dr. sc. Mirta Benšić
komentor: dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Razne prirodne i društvene pojave odvijaju se na slučajan način. Teorija slučajnih procesa modelira evoluciju tih slučajnih pojava kroz vrijeme. Markovljevi lanci predstavljaju jedan od najvažnijih modela slučajne evolucije. Jednostavna struktura Markovljevih lanaca omogućava nam veliku količinu znanja o njihovom ponašanju, dok je ujedno klasa Markovljevih lanaca dosta široka za upotrebu u raznim područjima. Markovljevo svojstvo kaže da su prošlosti i budućnost nezavisne u odnosu na sadašnjost. Upravo to svojstvo omogućava nam predviđanje budućeg kretanja lanca te računanje vjerojatnosti i očekivanih vrijednosti koje opisuju to buduće ponašanje lanca. Iz Markovljeva svojstva vidimo da su prošlost i budućnost simetrične, što nam sugerira da Markovljeve lance promotrimo u vremenu koje teče unatrag. Ipak, prema teoremu o graničnoj distribuciji, kojeg navodimo u prvom dijelu rada, distribucija koncentrirana u danom stanju teži prema stacionarnoj distribuciji onda kad vrijeme teče unaprijed. To pokazuje da se potpuna simetrija ne može dobiti, osim u slučaju kad je i početna distribucija lanca stacionarna. U drugom dijelu rada pokazat ćemo da je Markovljev lanac, koji kreće iz stacionarne distribucije ako ga promatramo unatrag, opet Markovljev lanac kojeg nazivamo Markovljev lanac unatrag. Matrice prijelaznih vjerojatnosti ovih dvaju lanaca mogu se razlikovati. Ako se matrice prijelaznih vjerojatnosti ne razlikuju, radi se o reverzibilnim Markovljevim lancima. Svojstva navedenih procesa bit će detaljnije objašnjena u drugom poglavlju. Diskusiju Markovljevih lanaca unatrag provest ćemo i na nekim specijalnim modelima kao što su Ehrenfestov lanac, Bernoulli-Laplaceov lanac te lanci rađanja i umiranja. U ovom radu bazirat ćemo se samo na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu.

2 Markovljevi lanci

U ovom poglavlju bavit ćemo se ireducibilnim Markovljevim lancima s konačnim skupom stanja S u diskretnom vremenu ($t = 0, 1, 2, ...$). Podsjetit ćemo se najprije najbitnijih definicija i tvrdnji.

2.1 Oznake i važni rezultati

Definicija 2.1. **Slučajni proces** je familija slučajnih varijabli $(X_t, t \in T)$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $T \subset \mathbb{R}$.

Definicija 2.2. Neka je S diskretan skup. Slučajni proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s vrijednostima u S je **Markovljev lanac** ako vrijedi

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \tag{1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ i za proizvoljne $i_0, ..., i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su dvije uvjetne vjerojatnosti u (1) dobro definirane.

Svojstvo (1) naziva se **Markovljevim svojstvom**, pri čemu $n + 1$ predstavlja budućnost, n predstavlja sadašnjost i $n - 1, ..., 0$ predstavljaju prošlost.
Iz ovoga vidimo da je vjerojatnosno ponašanje Markovljeva lanca $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ u neposrednoj budućnosti X_{n+1} uvjetno na sadašnjost i prošlost jednako vjerojatnosnom ponašanju Markovljeva lanca u neposrednoj budućnosti uvjetno samo na sadašnjost.
Markovljevo svojstvo možemo interpretirati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = j, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0 | X_n = i) \\
&= \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)}{P(X_n = i)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) P(X_n = i, X_n - 1 = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)}{P(X_n = i)} \\
&= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \frac{P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)}{P(X_n = i)} \\
&= P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 | X_n = i).
\end{aligned}$$

Dakle, budućnost i prošlost uvjetno su nezavisne uz danu sadašnjost.

Definicija 2.3. Matrica $\mathbf{P} = (p_{ij} : i, j \in S)$ naziva se **stohastičkom matricom** ako je $p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in S$ te ako vrijedi:

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S.$$

Definicija 2.4. Neka je $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S i neka je $\mathbf{P} = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica. Slučajni proces $\mathbf{X} = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s prostorom stanja S je homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom $\boldsymbol{\lambda}$ i prijelaznom matricom $\mathbf{P}$ ako vrijedi

1. $P(X_0 = i) = \lambda_i, \forall i \in S$,

2. $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}, \forall n \geq 0$ i $\forall i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

Zbog kratkoće, Markovljev lanac iz definicije 2.4 nazivat ćemo $(\lambda, P)-$ Markovljevim lancem.

Definicija 2.5. Za $i, j \in S$ i vremena $0 \leq s \leq t, s, t \in \mathbb{N}_0$ definiramo **funkciju prijelaznih vjerojatnosti** Markovljeva lanca

$$p(i, s; j, t) = P(X_t = j | X_s = i).$$

Teorem 1. Markovljev lanac u potpunosti je određen poznavanjem distribucije od X_0 i funkcije prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku tj. funkcije

$$p(i, n; j, n+1) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Dokaz. Markovljev lanac u potpunosti je određen ako znamo sve njegove konačnodimenzionalne distribucije. Po pretpostavci teorema znamo distribuciju od X_0, tj. znamo $R(X_0) = S$, gdje je S skup stanja Markovljeva lanca i znamo $P(X_0 = k) = \lambda_k, \forall k \in S$. Distribuciju od X_0 označimo s $\lambda = (\lambda_k, k \in S)$. Računamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) \\
&= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) P(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) && (2) \\
&= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) && (3) \\
&= p(i_{n-1}, n-1; i_n, n) p(i_{n-2}, n-2, i_{n-1}, n-1) \cdots p(i_0, 0, i_1, 1) \lambda_{i_0},
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$.
Jednakost (3) dobili smo primjenom Markovljeva svojstva na jednakost (2).

$\square$

Vrijednosti p_{ij} za $i, j \in S$ organiziramo u matricu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = [p_{ij}]_{i,j \in S}$$

koju nazivamo **matrica 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti** Markovljeva lanca i koja je stohastička.

Elementi matrice $\boldsymbol{P}^n$ su n-koračne prijelazne vjerojatnosti Markovljeva lanca:

$$p_{ij}^n = P(X_n = j | X_0 = i).$$

Ta nam formula govori da, ako Markovljev lanac kreće iz stanja i, tada je vjerojatnost da nakon n koraka bude u stanju j jednaka ij-tom elementu n-te potencije prijelazne matrice $\boldsymbol{P}$.

Teorem 2.1. Neka je $\mathbf{X}$ $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{P})-$Markovljev lanac. Tada za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i za sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$ vrijedi:

$$P(X_o = i_o, X_1 = i_i, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{4}$$

Obratno, pretpostavimo da je $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ slučajni proces s konačnodimenzionalnim distribucijama danim formulom (4), gdje je $\boldsymbol{\lambda}$ neka vjerojatnosna distribucija na S, a $\mathbf{P}$ neka stohastička matrica na S. Tada je $\mathbf{X}$ $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{P})-$ Markovljev lanac.

Dokaz. Prisjetimo se formule za uvjetnu vjerojatnost $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$. Direktno je poopćenje formula $P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_0)P(A_1|A_0)P(A_2|A_0 \cap A_1) \cdots P(A_n|A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})$. Iz te formule slijedi:

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) \\
&\quad = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1|X_0 = i_0) \cdots P(X_n = i_n|X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&\quad = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n},
\end{aligned}$$

gdje je zadnji redak posljedica definicije 2.4.
Da bismo dokazali obrat, trebamo pokazati da vrijede uvjeti 1. i 2. iz definicije 2.4. Uzimanjem $n = 0$ u (4) odmah slijedi da je $\boldsymbol{\lambda}$ početna distribucija. Sada dokazujemo uvjet 2. iz definicije 2.4. :

$$\begin{aligned}
P &= (X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \frac{\lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} \\
&= p_{ij},
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi dvostrukom primjenom formule (4). □

Pitamo se- koji su putevi kroz skup stanja Markovljeva lanca mogući, a koji ne? Koja stanja Markovljev lanac može posjetiti ako je krenuo iz nekog zadanog stanja?

Definicija 2.6. Za skup $B \subset S$ definiramo **vrijeme prvog posjeta** lanca skupu B:

$$T_B = min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\},$$

uz dogovor da je $min\emptyset = \infty$.

Ako je $B = \{j\}, j \in S$, onda umjesto $T_{\{j\}}$ pišemo T_j.

Definicija 2.7. Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j **dostižno iz** i , oznaka $i \to j$ ako vrijedi da je $P(T_j < \infty|X_0 = i) > 0$.

Drugim riječima, Markovljev lanac s pozitivnom vjerojatnošću posjećuje $j \in S$ u konačnom vremenu ako je startao iz $i \in S$. Vrijedi $i \to i$.

Propozicija 2.2. (Kriterij dostižnosti) Sljedeća su svojstva ekvivalentna:

1. $i \to j, i, j \in S$,

2. $p_{ij}^n > 0$, za neki $n \in \mathbb{N}_0$,

3. $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0$ za neka stanja $i_1, ..., i_{n-1} \in S$ i neki $n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz se može vidjeti u [8].

Definicija 2.8. Stanja $i, j \in S$ **komuniciraju** ako je $i \to j$ i $j \to i$. Oznaka $i \leftrightarrow j$.

Relacija komuniciranja relacija je ekvivalencije na $S \times S$ koja inducira particiju skupa S na klase komuniciranja.
Ako matrica $\boldsymbol{P}$ ima sve elemente $\neq 0$, svako je stanje dostižno iz svakog stanja i u tom slučaju imamo samo jednu klasu komuniciranja.

Definicija 2.9. Markovljev lanac je **ireducibilan** ako se skup stanja S sastoji od samo jedne klase komuniciranja, tj. ako $\forall i, j \in S$ vrijedi $i \leftrightarrow j$.

Dakle, Markovljev lanac je ireducibilan ako svako stanje komunicira sa svakim drugim stanjem. U nastavku navodimo definiciju prirodnog grafa koji je povezan s homogenim Markovljevim lancima u diskretnom vremenu i pomoću kojega lako možemo vizualizirati ireducibilnost pojedinih Markovljevih lanaca.

Definicija 2.10. Pretpostavimo da je $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \cdots)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$. **Graf stanja** od $\mathbf{X}$ je usmjeren graf sa skupom vrhova S i skupom bridova $E = \{(i, j) \in S^2 : p_{ij} > 0\}$.

Za $C \subseteq S$ kažemo da je **zatvoren** podskup od skupa stanja S ako je $P(T_{S/C} < \infty | X_0 = i) = 0, \forall i \in C$. Iz zatvorenog podskupa skupa stanja Markovljev lanac ne može izaći, ali može u njega ući i tada biva apsorbiran. Ako je $C = \{j\}$ zatvoren, tada je $j \in S$ **apsorbirajuće stanje**.

Koja je vjerojatnost apsorpcije Markovljeva lanca u zatvorenom podskupu skupa stanja S? Koje je očekivano vrijeme do apsorpcije? Do odgovora na ova pitanja dolazimo analizom prvog prijelaza Markovljeva lanca:
Neka je $B \subset S$ i neka je T_B vrijeme pogađanja skupa B. Definiramo **vjerojatnosti pogađanja** sa:

$$h_i^B = P(T_B < \infty | X_0 = i).$$

Ako je B zatvoren podskup od S, tada su h_i^B **apsorpcijske vjerojatnosti**.
Očekivano vrijeme do apsorpcije Markovljeva lanca u slučaju kad je B zatvoren označavamo s $g_i^B = E[T_B | X_0 = i]$.

Definicija 2.11. Slučajna varijabla $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ zove se **vrijeme zaustavljanja** ako $\forall n \geq 0$ vrijedi:

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

tj. događaj $\{T \leq n\}$ ovisi samo o $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Teorem 2.3. [Jako Markovljevo svojstvo] Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{P})-$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i neka je T njegovo vrijeme zaustavljanja. Tada je, uvjetno na $\{X_T = i\}$, slučajni proces $(X_{T+n}, n \geq 0)$ $(\delta^i, \mathbf{P})-$ Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots X_T$, gdje je

$$\delta^i(j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$

Dokaz pogledati u [8].
Uvedimo sada jedan bitan pojam u analizi Markovljevih lanca, a to je **vrijeme prvog povratka** Markovljeva lanca u stanje $i \in S$:

$$T_i^{(1)} = min\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}.$$

Definicija 2.12. Stanje $i \in S$ je **povratno stanje** Markovljeva lanca ako je

$$P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1.$$

Povratno stanje možemo interpretirati kao stanje u koje se Markovljev lanac vraća beskonačno mnogo puta. Drugim riječima, stanje $i \in S$ je povratno ako se Markovljev lanac u to stanje prvi puta vraća s vjerojatnošću 1 u konačno mnogo koraka.

Definicija 2.13. *Stanje $i \in S$ je **prolazno** ako je*

$$P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) < 1.$$

Prolazno stanje možemo interpretirati kao stanje u koje se Markovljev lanac ne vraća beskonačno mnogo puta. Dakle, stanje $i \in S$ je prolazno ako se u njega Markovljev lanac prvi puta vraća u konačno mnogo koraka s vjerojatnošću manjom od 1.
Uvedimo P_j distribuciju vremena T_i :

$$f_{ji}^{(n)} = P_j(T_i = n), n \geq 1, i, j \in S$$

i $f_{ji}^{(0)} = 0$. Stavimo:

$$f_{ji} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_j(T_i = n) = P_j(T_i < \infty).$$

Tada je za $j = i, f_{ii} = P_i(T_i < \infty)$ vjerojatnost povratka u stanje i, dok je za $j \neq i$, f_{ji} vjerojatnost dolaska u stanje i uz početno stanje j. Dakle, $i \in S$ je povratno ako i samo ako je $f_{ii} = 1$. Uvedimo, nadalje, funkcije izvodnice nizova $(f_{ji}^{(n)} : n \geq 0)$ i $(p_{ji}^{(n)} : n \geq 0)$:

$$F_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} s^n, 0 < s < 1,$$

$$P_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} s^n, 0 < s < 1.$$

Sljedeću propoziciju navodimo bez dokaza.

Propozicija 2.4. (Dekompozicija u prvom vremenu posjeta)

1. Za $i \in S$ vrijedi:

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}, n \geq 1$$

   i za $0 < s < 1$,

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}.$$

2. Za $j \neq i$ vrijedi:
$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}, n \geq 1$$
i za $0 < s < 1$,
$$P_{ji}(s) = F_{ji}(s) P_{ii}(s).$$

Propozicija 2.5. Stanje $i \in S$ je povratno ako i samo ako vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Dokaz. Prema dosad navedenom, znamo da je stanje $i \in S$ povratno ako i samo ako je $f_{ii} = P_i(T_i^{(1)} < \infty) = 1$. Osim toga, znamo da je za $0 < s < 1$, $F_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$ i $P_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n$. Promatramo sljedeći limes:
$$\lim_{s \to 1} F_{ii}(s) = \lim_{s \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n.$$

Niz $(f_i^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0)$ je niz nenegativnih realnih brojeva i $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$ ima radijus konvergencije 1 pa primjenom Abelovog teorema na prethodnu jednakost dobivamo sljedeće:
$$\lim_{s \to 1} F_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} = 1$$
ako je $i \in S$ povratno. Analogno, vrijedi i
$$\lim_{s \to 1} P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Iz propozicije 2.4 slijedi da je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$. $\square$

Neposredna posljedica gornje propozicije je sljedeći kriterij prolaznosti: stanje $i \in S$ je prolazno ako i samo ako je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Proučimo sada na koji način broj posjeta pojedinom stanju ovisi o tome je li je to stanje povratno ili prolazno. Označimo sa N_i broj posjeta lanca stanju $i \in S$. Preciznije, $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$. Očekivani broj posjeta Markovljeva lanca stanju $i \in S$, uz početno stanje $j \in S$, možemo izračunati, uz primjenu teorema o monotonoj konvergenciji, na sljedeći način:
$$\begin{aligned} E_j N_i &= E_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) = E_j \left(\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) \\ &= \lim_{m \to \infty} E_j \left(\sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} E_j \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \\ &= \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} P_j(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_j(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}. \end{aligned}$$

Posebno u slučaju $j = i$ slijedi da je stanje i povratno ako i samo ako je $E_i N_i < \infty$. U tom je slučaju $N_i < \infty, P_i-$g.s. Iz $E_i N_i = \infty$ ne možemo zaključiti da je $N_i = \infty, P_i-$g.s.

Teorem 2.6. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. $i \in S$ je povratno stanje,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$,
3. $E_i N_i = \infty$,
4. $P_i(N_i = \infty) = 1$.

Dokaz. Ekvivalencije 1.,2. i 3. smo pokazali. Treba pokazati 4. $\leftrightarrow$ 1. Da bismo dokazali da 4. $\rightarrow$ 1., zapravo promatramo 4. $\rightarrow$ 3. Ako se Markovljev lanac koji kreće iz $i \in S$ g.s. u i vraća beskonačno mnogo puta, onda očekivani broj posjeta Markovljeva lanca stanju $i \in S$ iznosi beskonačno. Dokažimo sada da 1. $\rightarrow$ 4. U tu svrhu računamo:

$$P_i(N_i = \infty) = P_i(\cap_{n \in \mathbb{N}} \{N_i \geq n\}) = \lim_{n \to \infty} P_i(N_i \geq n) = \lim_{n \to \infty} P_i(T_i^{(n)} < \infty).$$

Općenito, promatramo:

$$\begin{aligned} P_j(T_i^{(n)} < \infty) &= P_j(T_i^{(n)} < \infty) = P_j(T_i^{(n)} < \infty, T_i^{(n-1)} < \infty) \\ &= \frac{P(T_i^{(n)} < \infty, T_i^{(n-1)} < \infty, X_0 = j)}{P(X_0 = j)} \\ &= P(T_i^{(n)} < \infty | T_i^{(n-1)} < \infty, X_o = j) P(T_i^{(n-1)} < \infty | X_0 = j) \end{aligned} \tag{5}$$

Kako je $(X_{T_i^{(n-1)}+k}, k \in \mathbb{N}_0)$ uvjetno na $\{X_{T_i^{(n-1)}} = i\}$ Markovljev lanac koji g.s. starta iz i i ima matricu prijelaznih vjerojatnosti kao i Markovljev lanac $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$, te je uvjetno na $\{X_{T_i^{(n-1)}} = i\}$ nezavisan od $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i^{(n-1)}}$, primjenom Jakog Markovljeva svojstva i homogenosti slijedi:

$$\begin{aligned} P(T_i^{(n)} < \infty | T_i^{(n-1)} < \infty, X_0 = j) &= P(T_i^{(n)} < \infty | X_{T_i^{(n-1)}} = i) \\ &= P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) = P_i(T_i^{(1)} < \infty). \end{aligned}$$

Vratimo li se sada na jednakost (5) dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} P_j(T_i^{(n)} < \infty) &= P_i(T_i^{(1)} < \infty) P_j(T_i^{(n-1)} < \infty) \\ &= P_j(T_i^{(n-1)} < \infty) f_{ii} = P_j(T_i^{(n-2)} < \infty) f_{ii}^2 \\ &= \cdots = P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = j) f_{ii}^{n-1} = f_{ji}(f_{ii})^{n-1} \end{aligned}$$

Specijalno, $P_i(T_i^{(n)} < \infty) = (f_{ii})^n$. Ako je stanje povratno, a stanje je povratno ako i samo ako je $f_{ii} = 1$, slijedi:

$$\begin{aligned} P_i(N_i = \infty) &= P(N_i = \infty | X_o = i) \\ &= \lim_{n \to \infty} P(T_i^{(n)} < \infty | X_o = i) \\ &= \lim_{n \to \infty} P_i(T_i^{(n)} < \infty) \\ &= \lim_{n \to \infty} (f_{ii}^n) = 1. \end{aligned}$$

□

Kao posljedica ovog teorema slijedi da je ekvivalentno sljedeće:

1. $i \in S$ je prolazno
2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$
3. $E_i N_i < \infty$
4. $P_i(N_i < \infty) = 1$.

Definicija 2.14. **Očekivano vrijeme prvog povratka** lanca u stanje i definirano je s $\mu(i) = E(T_i^{(1)} | X_0 = i)$.

Definicija 2.15. Stanje $i \in S$ je **pozitivno povratno** ako je $E_i(T_i^{(1)}) = E(T_i^{(1)} | X_0 = i) < \infty$.

Uočimo da iz $E(T_i^{(1)} | X_0 = i) < \infty$ slijedi $P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1$, tj. svako pozitivno povratno stanje ujedno je i povratno.

Definicija 2.16. Stanje $i \in S$ koje je povratno, ali nije pozitivno povratno, zove se **nul povratno** stanje.

Definicija 2.17. Slučajan proces $\boldsymbol{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zove se **stacionaran** ako $\forall k \geq 0$ i $\forall n \geq 0$, slučajni vektori $(X_0, X_1, ..., X_k)$ i $(X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+k})$ imaju istu distribuciju (u odnosu na vjerojatnost P).

Specijalno, ako $\boldsymbol{X}$ poprima vrijednosti u prebrojivom skupu stanja S, tada uzimajući $k = 0$ slijedi $P(X_n = i) = P(X_0 = i)$ za sve $i \in S$ i sva vremena $n \geq 1$. Dakle, kao specijalan slučaj dobivamo da se jednodimenzionalne distribucije ne mijenjaju kroz vrijeme. Pitamo se- koja je uloga stacionarnosti? Stacionarnost kod slučajnih procesa znači da se vjerojatnosna svojstva procesa ne mijenjaju kroz vrijeme. Preciznije, ako je $\boldsymbol{X} = (X_n : n \geq 0)$ stacionaran slučajan proces, tada je distribucija svih slučajnih elemenata X_n jednaka. Stacionarna distribucija igra glavnu ulogu u asimptotskim rezultatima. Stacionarna distribucija Markovljevih lanaca (ako postoji) usko je povezana s graničnom distribucijom koju ćemo također definirati u nastavku poglavlja.

Definicija 2.18. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i, i \in S)$ na S je **stacionarna ili invarijantna distribucija** ovog Markovljeva lanca ako vrijedi da je $\pi = \pi \boldsymbol{P}$, tj. po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \forall j \in S. \tag{6}$$

Teorem 2. Neka je $\boldsymbol{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $(\pi, \boldsymbol{P})-$ Markovljev lanac, gdje je π stacionarna distribucija. Tada je $\boldsymbol{X}$ stacionaran proces. Preciznije, $\boldsymbol{X}$ je stacionaran uz vjerojatnost $P_\pi = \sum_{i \in S} \pi_i P_i$. Nadalje, $\forall m \geq 0$ je $(X_{m+n} : n \geq 0)$ ponovno $(\pi, \boldsymbol{P})-$ Markovljev lanac.

Dokaz se može vidjeti u [8].

Definicija 2.19. Niz $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i : i \in S)$ naziva se **mjera** ako je $\lambda_i \in [0, \infty), \forall i \in S$. Mjera $\boldsymbol{\lambda}$ je netrivijalna ako postoji $i \in S$ takav da je $\lambda_i > 0$. Neka je $\boldsymbol{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom $\boldsymbol{P}$. Netrivijalna mjera $\boldsymbol{\lambda}$ na S je **invarijantna mjera** Markovljeva lanca $\boldsymbol{X}$ (odnosno prijelazne matrice $\boldsymbol{P}$) ako vrijedi

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{P},$$

odnosno po komponentama

$$\lambda_j = \sum_{k \in S} \lambda_k p_{kj}, \forall j \in S.$$

Sljedeća propozicija važna je za pitanje egzistencije invarijatne mjere:

Propozicija 2.7. Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za $j \in S$ definiramo

$$v_j = E_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} \mathbb{1}_{(X_n = j)}.$$

Tada je v invarijantna mjera. Ako je stanje i pozitivno povratno, tada je

$$\pi = (\pi_j, j \in S), \pi_j = \frac{v_j}{E_i(T_i)}$$

stacionarna distribucija.

Vrijednost v_j možemo definirati kao očekivani broj posjeta Markovljeva lanca stanju $j \in S$ neposredno prije nego se on prvi put vrati u stanje $i \in S$ iz kojeg je startao. Dokaz se može vidjeti u [8].
Sljedeći teorem govori o jedinstvenosti invarijantne mjere:

Teorem 3. Neka je $\boldsymbol{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac. Tada je $\boldsymbol{v} = (v_j : j \in S)$ invarijantna mjera takva da vrijedi $v_j > 0$ za sve $j \in S$. Ako je $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j : j \in S)$ neka druga invarijantna mjera za $\boldsymbol{X}$, tada postoji $c > 0$ takav da je $\boldsymbol{\lambda} = c\boldsymbol{v}$.

Dokaz se može vidjeti u [8].

Definicija 2.20. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i, i \in S)$ naziva se **granična distribucija** Markovljeva lanca ako $\forall i, j \in S$

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^n = \pi_j.$$

Teorem 4. Neka je π granična distribucija Markovljeva lanca $\boldsymbol{X}$. Tada je π i njegova stacionarna distribucija.

Dokaz se može vidjeti u [8].

Definicija 2.21. Neka je $\boldsymbol{X}$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom $\boldsymbol{P}$. Za stanje $i \in S$, označimo s $d(i)$ najveći zajednički djelitelj skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^n \geq 0\}$, gdje je $d(i) = 1$ ako je taj skup prazan. Kažemo da je stanje i **aperiodično** ako je $d(i) = 1$. U suprotnom je i **periodično** stanje, a $d(i)$ se zove **period** od i.

Na pitanje egzistencije granične distribucije odgovara sljedeći teorem:

Teorem 5. Neka je $\boldsymbol{\lambda}$ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja S. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $(\lambda, \boldsymbol{P})-$ Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan te ima stacionarnu distribuciju π. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j, \forall j \in S.$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j, \forall i, j \in S,$$

tj. stacionarna distribucija ujedno je i granična.

Dokaz se može vidjeti u [8].
Prisjetimo se jos jednog važnog rezultata o graničnom ponašanju srednjih vrijednosti kroz vrijeme:

Teorem 6. (Ergodski teorem) Pretpostavimo da je Markovljev lanac $\boldsymbol{X} = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i pozitivno povratan te da je π njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je f nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na S. Tada vrijedi

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j\right) = 1.$$

Dokaz se može vidjeti u [8].
Ergodski teorem kaže da je za gotovo sve puteve granično vremensko usrednjenje jednako prostornom usrednjenju.
Neka je $N_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k = i\}}$ vrijeme koje lanac provede u stanju i prije trenutka n.

Korolar 6.1. Za ireducibilan i pozitivno povratan Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom π vrijedi

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j\right) = 1, \forall j \in S.$$

Dokaz se može vidjeti u [8].

Teorem 7. (Teorem o konvergenciji) Za bilo koju početnu distribuciju, uz uvjet da je lanac aperiodičan, vrijedi

$$P(X_n = j) \to \pi_j, n \to \infty, \forall j.$$

Dokaz se može vidjeti u [8].

3 Markovljevi lanci unatrag

3.1 Markovljevi lanci unatrag

Markovljevo svojstvo koje govori da su prošlost i budućnost nezavisne uz danu sadašnjost zapravo tretira budućnost i prošlost kao simetrične. Međutim, manjak simetrije je u činjenici da u uobičajenoj formulaciji imamo inicijalno vrijeme 0, ali ne i terminalno vrijeme. Ako uvedemo terminalno vrijeme, možemo promatrati proces unatrag kroz vrijeme. U ovom poglavlju bavimo se odgovorima na sljedeća pitanja:

1. Je li novi proces i dalje Markovljev?,
2. Ako jest, u kojoj je vezi nova matrica prijelaznih vjerojatnosti u odnosu na originalnu?,
3. Pod kojim su uvjetima procesi unaprijed i unatrag stohastički jednaki?

Razmatranje ovih pitanja vodi k Markovljevim lancima unatrag.

Promotrimo homogeni Markovljev lanac u diskretnom vremenu $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, X_2, \dots)$, s prebrojivim skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$. Neka je m pozitivan cijeli broj na koji ćemo gledati kao na terminalno vrijeme. Definiramo $\hat{X}_n = X_{m-n}$ za $n \in \{0, 1, \dots, m\}$. Dakle, proces unaprijed kroz vrijeme dan je s $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \dots, X_m)$, dok je proces unatrag kroz vrijeme kroz vrijeme dan s

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m) = (X_m, X_{m-1}, \dots, X_0).$$

Neka je za $n \in \{0, 1, \dots, m\}$

$$\hat{\mathcal{F}}_n = \sigma\{\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n\} = \sigma\{X_{m-n}, X_{m-n+1}, \dots, X_m\}$$

σ algebra događaja procesa $\hat{\boldsymbol{X}}$ do trenutka n. Događaj za $\hat{\boldsymbol{X}}$ do trenutka n isto je što i događaj za $\boldsymbol{X}$ od trenutka $m-n$. Prvi rezultat koji navodimo je to da je obrnuti proces i dalje Markovljev lanac, ali generalno ne i homogen.

Propozicija 3.1. Proces $\hat{\boldsymbol{X}} = (\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m)$ je Markovljev lanac, ali nije homogen općenito. Jednokoračna matrica prijelaznih vjerojatnosti u trenutku $n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ dana je s

$$\hat{p}_{ij} = P(\hat{X}_{n+1} = j | \hat{X}_n = i) = \frac{P(X_{m-n-1} = j)}{P(X_{m-n} = i)} p_{ji}, (i, j) \in S^2.$$

Dokaz. Neka je $A \in \hat{\mathcal{F}}_n$ i $i, j \in S$. Tada je

$$\begin{aligned} P(\hat{X}_{n+1} = j | \hat{X}_n = i, A) &= \frac{P(\hat{X}_{n+1} = j, \hat{X}_n = i, A)}{P(\hat{X}_n = i, A)} \\ &= \frac{P(X_{m-n-1} = j, X_{m-n} = i, A)}{P(X_{m-n} = i, A)} \\ &= \frac{P(A | X_{m-n-1} = j, X_{m-n} = i) P(X_{m-n} = i | X_{m-n-1} = j) P(X_{m-n-1} = j)}{P(A | X_{m-n} = i) P(X_{m-n} = i)}. \end{aligned}$$

Ali, $A \in \sigma\{X_{m-n}, \dots, X_m\}$ pa prema Markovljevom svojstvu za proces $\boldsymbol{X}$ vrijedi

$$P(A|X_{m-n-1} = j, X_{m-n} = i) = P(A|X_{m-n} = i).$$

Zbog homogenosti procesa $\boldsymbol{X}$ je $P(X_{m-n} = i|X_{m-n-1} = j) = P(j,i) = p_{ji}$. Nakon supstitucije preostaje nam

$$P(\hat{X}_{n+1} = j|\hat{X}_n = i, A) = \frac{P(X_{m-n-1} = j)}{P(X_{m-n} = i)} p_{ji}.$$

□

Međutim, proces unatrag kroz vrijeme bit će homogen ako je distribucija od X_0 stacionarna distribucija pripadnog Markovljeva lanca.

Propozicija 3.2. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan i pozitivno povratan. Ako Markovljev lanac $\boldsymbol{X}$ starta iz svoje stacionarne distribucije $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i, i \in S)$, tada je $\hat{\boldsymbol{X}}$ homogen Markovljev lanac s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\hat{\boldsymbol{P}}$ koja je dana sa:

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji}, (i,j) \in S^2.$$

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodne propozicije 3.1. Prisjetimo se da, ako X_0 ima distribuciju π, tada X_k ima distribuciju π, $\forall k \in \mathbb{N}$. □

Prethodni rezultati služe kao motivacija za definiciju koja slijedi.

Definicija 3.1. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan Markovljev lanac s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$ i da je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna mjera za $\boldsymbol{X}$. **Markovljev lanac unatrag** od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ je Markovljev lanac $\hat{\boldsymbol{X}} = (\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots)$ s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\hat{\boldsymbol{P}}$ koja je definirana sa:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} p_{ji}, (i,j) \in S^2.$$

Kako bi prethodna definicija imala smisla, trebamo pokazati da je s $\hat{\boldsymbol{P}}$ dobro definirana matrica prijelaznih vjerojatnosti. Kako je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna mjera za $\boldsymbol{X}$,

$$\sum_{j \in S} \hat{p}_{ij} = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \in S} \lambda_j p_{ji} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 1, i \in S.$$

Generalna definicija je prirodna jer većina važnih svojstava Markovljevih lanaca unatrag slijedi iz jednadžbe ravnoteže između matrica $\boldsymbol{P}$ i $\hat{\boldsymbol{P}}$ te invarijantne mjere $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\lambda_i \hat{p}_{ij} = \lambda_j p_{ji}, (i,j) \in S^2. \tag{7}$$

Propozicija 3.3. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan Markovljev lanac s invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$ i da je $\hat{\boldsymbol{X}}$ Markovljev lanac unatrag od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$. Za $i, j \in S$ vrijedi:

1. $\hat{p}_{ii} = p_{ii}$,

2. $\hat{p}_{ij} > 0$ ako i samo ako je $p_{ji} > 0$.

Dokaz. Ovaj dokaz slijedi direktno iz jednadžbe ravnoteže (7). □

Sada navodimo složeniju verziju jednadžbe ravnoteže:

Propozicija 3.4. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan Markovljev lanac s invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$ i da je $\hat{\boldsymbol{X}}$ Markovljev lanac unatrag od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}^+$ i za svaki niz stanja $(i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}) \in S^{n+1}$ vrijedi:

$$\lambda_{i_1} \hat{p}_{i_1 i_2} \hat{p}_{i_2 i_3} \cdots \hat{p}_{i_n i_{n+1}} = \lambda_{i_{n+1}} p_{i_{n+1} i_n} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije:

1. (Baza indukcije)
   Za $n = 1$ primjenom osnovne jednadžbe ravnoteže dobivamo:
   $$\lambda_{i_1} \hat{p}_{i_1 i_2} = \lambda_{i_2} \hat{p}_{i_2 i_1}.$$

2. (Pretpostavka indukcije)
   Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k, k \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi:
   $$\lambda_{i_1} \hat{p}_{i_1 i_2} \hat{p}_{i_2 i_3} \cdots \hat{p}_{i_k i_{k+1}} = \lambda_{i_{k+1}} p_{i_{k+1} i_k} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1}.$$

3. (Korak indukcije) Ako tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$, vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci indukcije vrijedi sljedeće:
   $$\lambda_{i_1} \hat{p}_{i_1 i_2} \hat{p}_{i_2 i_3} \cdots \hat{p}_{i_k i_{k+1}} \hat{p}_{i_{k+1} i_{k+2}} = \lambda_{i_{k+1}} p_{i_{k+1} i_k} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1} \hat{p}_{i_{k+1} i_{k+2}}.$$
   Prema definiciji Markovljeva lanca unatrag vrijedi da je $\lambda_{i_{k+1}} \hat{p}_{i_{k+1} i_{k+2}} = \lambda_{i_{k+2}} p_{i_{k+2} i_{k+1}}$ pa slijedi:
   $$\lambda_{i_1} \hat{p}_{i_1 i_2} \hat{p}_{i_2 i_3} \cdots \hat{p}_{i_k i_{k+1}} \hat{p}_{i_{k+1} i_{k+2}} = \lambda_{i_{k+2}} p_{i_{k+2} i_{k+1}} p_{i_{k+1} i_k} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1}.$$

□

Jednadžba ravnoteže vrijedi i za n-koračne matrice prijelaznih vjerojatnosti:

Propozicija 3.5. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan Markovljev lanac s invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$ i da je $\hat{\boldsymbol{X}}$ Markovljev lanac unatrag od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$. Za svaki uređeni par $(i, j) \in S^2$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\lambda_i \hat{p}_{ij}^n = \lambda_j p_{ji}^n.$$

Dokaz. Za $n = 0$, lijeva i desna strana iznose λ_i za $i = j$ i 0 inače. Za $n = 1$ imamo osnovnu jednadžbu ravnoteže: $\lambda_i \hat{p}_{ij} = \lambda_j p_{ji}$. Generalno za $n \in \mathbb{N}^+$ uz primjenu prethodne propozicije 3.4 imamo:

$$\begin{aligned} \lambda_i \hat{p}_{ij}^n &= \sum_{(i_1, \ldots, i_{n-1} \in S^{n-1})} \lambda_i \hat{p}_{i i_1} \hat{p}_{i_1 i_2} \cdots \hat{p}_{i_{n-1} j} \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_{n-1} \in S^{n-1})} \lambda_j p_{j i_{n-1}} p_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdots p_{i_1 i} = \lambda_j p_{ji}^n. \end{aligned}$$

□

Sada možemo generalizirati propoziciju 3.3 otprije.

Propozicija 3.6. Pretpostavimo da je X ireducibilan Markovljev lanac s invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$ i da je $\hat{X}$ Markovljev lanac unatrag od $\mathbf{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$. Za $n \in \mathbb{N}$ i $(i, j) \in S^2$ vrijedi:

1. $\hat{p}_{ii}^n = p_{ii}^n$,
2. $\hat{p}_{ij}^n > 0$ ako i samo ako je $p_{ji}^n > 0$.

Promotrimo još neka svojstva Markovljeva lanca unatrag:

Propozicija 3.7. Pretpostavimo da je X ireducibilan Markovljev lanac s invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$ i da je $\hat{X}$ Markovljev lanac unatrag od $\mathbf{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$. Tada vrijedi:

1. $\boldsymbol{\lambda}$ je invarijantna i za $\hat{X}$,
2. $\hat{X}$ je također ireducibilan,
3. X je Markovljev lanac unatrag od $\hat{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$.

Dokaz.

1. Za $j \in S$, primjenom jednadžbe ravnoteže imamo:

$$\sum_{i \in S} \lambda_i \hat{p}_{ij} = \sum_{i \in S} \lambda_j p_{ji} = \lambda_j$$

2. Neka je $(i, j) \in S^2$. Kako je X ireducibilan, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. $p_{ji}^n > 0$. Iz prethodne propozicije 3.6 slijedi da je i $\hat{p}_{ij}^n > 0$. Stoga je i $\hat{X}$ ireducibilan.
3. Ovo je očito iz simetrične veze u 1.

$\square$

Dalje definiramo matricu koja nam je bitna za razumijevanje nekih svojstava Markovljevih lanaca unatrag:

Definicija 3.2. Neka je $\mathbf{X}$ Markovljev lanac s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P} = (p_{ij}, i, j \in S)$. Za $\alpha \in (0, 1]$ **matrica $\boldsymbol{\alpha}$ potencijala** od $\mathbf{X}$ dana je sa:

$$R_\alpha(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p_{ij}^{(n)}, (i, j) \in S^2.$$

Specijalan je slučaj matrica $R_1 = R(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_i[\mathbb{1}_{\{X_n = j\}}] = E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}]$ i to je jednostavno matrica potencijala od $\boldsymbol{X}$.

Navedimo jednadžbu ravnoteže za matrice potencijala:

Propozicija 3.8. Pretpostavimo da je $\hat{X}$ Markovljev lanac unatrag od X, s obzirom na invarijantnu mjeru $\boldsymbol{\lambda}$. Za $\alpha \in (0, 1]$, za pripadne matrice α potencijala vrijedi:

$$\lambda_i \hat{R}_\alpha(i, j) = \lambda_j R_\alpha(j, i), (i, j) \in S^2.$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz propozicije 3.4 i definicije matrice α potencijala:

$$\lambda_i \hat{R}_{\alpha(i,j)} = \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \hat{p}_{ij}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \lambda_i \hat{p}_{ij}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \lambda_j p_{ji}^n = \lambda_j \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p_{ji}^n = \lambda_j R_\alpha(j,i)$$

□

Vratimo se svojstvima Markovljevih lanaca unatrag:

Propozicija 3.9. Pretpostavimo da je $\hat{\boldsymbol{X}}$ Markovljev lanac unatrag od $\boldsymbol{X}$. Tada vrijedi:

1. $\boldsymbol{X}$ i $\hat{\boldsymbol{X}}$ su istog tipa (prolazni, povratni),
2. $\boldsymbol{X}$ i $\hat{\boldsymbol{X}}$ imaju isti period,
3. $\boldsymbol{X}$ i $\hat{\boldsymbol{X}}$ imaju isto očekivano vrijeme prvog povratka $\mu(i), \forall i \in S$.

Dokaz. Neka je $\hat{\boldsymbol{X}}$ Markovljev lanac unatrag od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na invarijantnu mjeru $\boldsymbol{\lambda}$.

1. Očekivani broj posjeta lanca stanju $i \in S$, ako lanac kreće iz i, jednak je za oba lanca i iznosi $\hat{R}(i,i)$ jer prema propoziciji 3.8 vrijedi $\hat{R}(i,i) = R(i,i)$. Stoga su oba lanca ili prolazna ili povratna. Prema teoremu 2.6, oba su lanca povratna ako vrijedi $E_i[N_i] = \infty$, odnosno ako je zajednički potencijal beskonačan. U suprotnom, ako je zajednički potencijal konačan, oba su lanca povratna. Oba lanca su nul povratna ako $\sum_{i \in S} \lambda_i = \infty$ dok su oba pozitivno povratna ako $\sum_{i \in S} \lambda_i < \infty$.

2. Ova tvrdnja slijedi zbog $p_{ii}^n = \hat{p}_{ii}^n, \forall n \in \mathbb{N}, i \in S$.

3. Ako su oba lanca prolazna ili ako su oba lanca nul povratna, tada je $\mu(i) = \hat{\mu}(i) = \infty, \forall i \in S$. Ako su oba lanca pozitivno povratna, tada $\forall n \in \mathbb{N}$, $i \in S$ vrijedi:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{p}_{ii}^k.$$

   Prema elementarnom teoremu obnavljanja lijeva strana konvergira k $\frac{1}{\mu(i)}, n \to \infty$, dok desna strana konvergira k $\frac{1}{\hat{\mu}(i)}, n \to \infty$.

□

Glavni smisao sljedećeg teorema je to da da ne trebamo apriori znati da je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna mjera za $\boldsymbol{X}$:

Teorem 3.10. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan lanac s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$. Ako postoji mjera $\boldsymbol{\lambda}$ i ako postoji stohastička matrica $\hat{\boldsymbol{P}}$ t.d. $\lambda_i \hat{p}_{ij} = \lambda_j p_{ji}, \forall (i,j) \in S^2$, tada vrijedi sljedeće:

1. $\boldsymbol{\lambda}$ je invarijatna za $\boldsymbol{X}$,
2. $\hat{\boldsymbol{P}}$ je matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljeva lanca unatrag $\hat{\boldsymbol{X}}$ od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$.

Dokaz. 1. Kako je $\hat{\boldsymbol{P}}$ stohastička matrica, vrijedi:

$$\sum_{j \in S} \lambda_j p_{ji} = \sum_{j \in S} \lambda_i \hat{p}_{ij} = \lambda_i, \forall i \in S.$$

2. Ovo slijedi iz tvrdnje pod 1) i definicije.

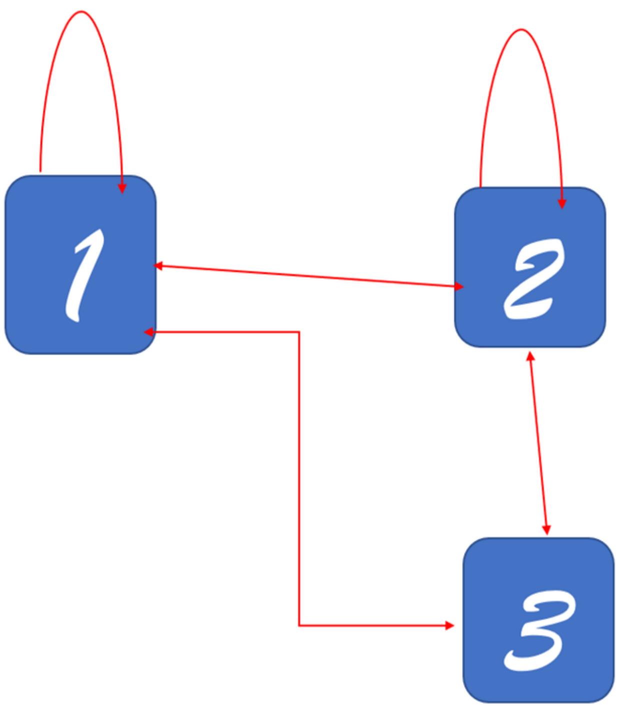
□

Navedimo jedan jednostavan primjer Markovljeva lanca unatrag:

Primjer 3.1. *Promotrimo Markovljev lanac $\boldsymbol{X}$ sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti danom sa:*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Želimo pronaći proces $\hat{\boldsymbol{X}}$ za koji vrijedi $\hat{X}_n = X_{m-n}$. Ako skiciramo graf stanja početnog lanca $\boldsymbol{X}$ dobivamo sljedeće:



Slika 1: Graf stanja

S obzirom na to da svako stanje iz S komunicira sa svakim drugim stanjem iz S, lanac je ireducibilan. U sljedećem koraku računamo invarijantnu mjeru $\boldsymbol{\lambda}$. Znamo da za invarijantnu mjeru vrijedi $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda P}$ tj. $\lambda_j = \sum_{k \in S} \lambda_k p_{kj}$ pa za $j \in S = \{1, 2, 3\}$ pa imamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\lambda_1 = \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{21} + \lambda_3 p_{31}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 p_{12} + \lambda_2 p_{22} + \lambda_3 p_{32}$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{23} + \lambda_3 p_{33}$$

Uvrstimo li vrijednosti za p_{ij}, dobivamo:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 + 0$$

Nakon sređivanja, dobivamo da je invarijantna mjera lanca $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda, \lambda, \frac{5}{6}\lambda\}$. Sada možemo izračunati matricu prijelaznih vjerojatnosti $\hat{\boldsymbol{P}}$ Markovljeva lanca unatrag od $\boldsymbol{X}$ za koju vrijedi $\hat{p}_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} p_{ji}$:

$$\hat{p}_{11} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} p_{11} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{p}_{12} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} p_{21} = \frac{1}{3}$$

$$\hat{p}_{13} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} p_{31} = \frac{5}{12}$$

$$\hat{p}_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} p_{12} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{p}_{22} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} p_{22} = \frac{1}{3}$$

$$\hat{p}_{23} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} p_{32} = \frac{5}{12}$$

$$\hat{p}_{31} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} p_{13} = \frac{3}{5}$$

$$\hat{p}_{32} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} p_{23} = \frac{2}{5}$$

$$\hat{p}_{33} = \frac{\lambda_3}{\lambda_3} p_{33} = 0$$

Dakle, matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljeva lanca unatrag sljedećeg je oblika:

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Invarijantna mjera $\boldsymbol{\lambda}$ je invarijantna mjera i za $\hat{\boldsymbol{X}}$.

U ovom su nam radu od posebnog interesa Markovljevi lanci unatrag čije se matrice prijelaznih vjerojatnosti $\hat{\boldsymbol{P}}$ podudaraju s originalnim matricama prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$. Lanac ovog tipa može poslužiti za modeliranje fizikalnih procesa koji su stohastički jednaki, unaprijed i unatrag kroz vrijeme.

Neka je $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ Markovljev lanac s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$. Pretpostavimo da smo snimili "film" koji se sastoji od niza stanja $(X_0, \dots, X_n)$ i "film" se prikazuje na uređaju koji ga može reproducirati unaprijed jednako dobro kao i unatrag. Pitanje je- možemo li gledajući niz koji se sastoji od niza tranzicija "filma" zaključiti prikazuje li se "film" unaprijed ili unatrag?

Važna pretpostavka je to da poznajemo matricu prijelaznih vjerojatnosti, u suprotnom ovaj zahtjev ne bi imao smisla. Postoje slučajevi u kojima je vrlo jednostavno odrediti u kojem smjeru gledamo na vrijeme. Primjerice, ako imamo skup stanja $\{1, 2, 3\}$ i vrijedi $p_{12} = p_{23} = p_{31} = 1$ promatrajući samo jedan prijelaz možemo sa sigurnošću reći o kojem smjeru vremena se radi. Ako gledamo "film" u kojem nakon npr. 3 slijedi 2, taj "film" mora biti reproduciran unatrag. S druge strane imamo, primjerice, **Ehrenfestov lanac** . Kod ovog lanca iz promatranja nekog konačnog "filma" $(X_0, \dots, X_n)$ nismo u mogućnosti sa sigurnošću reći u kojem se smjeru "film" prikazuje. To će biti detaljnije objašnjeno u sljedećem poglavlju.

Definicija 3.3. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ ireducibilan Markovljev lanac s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$ i invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$. Ako Markovljev lanac unatrag od $\boldsymbol{X}$ s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ također ima matricu prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$, tada je $\boldsymbol{X}$ **reverzibilan** s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ tj. ako vrijedi:

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}, (i, j) \in S^2.$$

Primjer 3.2. *Vratimo li se na primjer* 3.1, *vidimo da taj lanac nije reverzibilan jer* $\hat{p}_{ij} \neq p_{ij}$.

Koristeći rezultat 3.10 iz prethodnog poglavlja, možemo reći je li $\boldsymbol{X}$ reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ bez da znamo apriori da je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijatna.

Propozicija 3.11. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan s matricom prijelaznih vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$. Ako postoji mjera $\boldsymbol{\lambda}$ t.d. $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}, \forall (i, j) \in S^2$, tada vrijedi sljedeće:

1. $\boldsymbol{\lambda}$ je invarijatna mjera za $\boldsymbol{X}$,

2. $\boldsymbol{X}$ je reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$.

Ako je Markovljev lanac reverzibilan, onda uvjet iz prethodnog teorema možemo iskoristiti za pronalazak invarijante mjere.
Sljedeći su rezultati posljedice propozicija 3.4 i 3.5.

Propozicija 3.12. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan i da je $\boldsymbol{\lambda}$ mjera. Tada je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna i $\boldsymbol{X}$ je reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ ako i samo ako $\forall n \in \mathbb{N}^+$ i za svaki niz stanja $(i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}) \in S^{n+1}$ vrijedi:

$$\lambda_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_n i_{n+1}} = \lambda_{i_{n+1}} p_{i_{n+1} i_n} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1}.$$

Propozicija 3.13. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan i da je $\boldsymbol{\lambda}$ mjera. Tada je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna i $\boldsymbol{X}$ je reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ ako i samo ako $\forall(i,j) \in S^2, n \in \mathbb{N}^+$ vrijedi:

$$\lambda_i p_{ij}^n = \lambda_j p_{ji}^n.$$

Navedimo i uvjet reverzibilnosti u terminima matrice potencijala.

Propozicija 3.14. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan i da je $\boldsymbol{\lambda}$ mjera. Tada je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna i $\boldsymbol{X}$ je reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$ ako i samo ako vrijedi:

$$\lambda_i R_\alpha(i,j) = \lambda_j R_\alpha(j,i), \alpha\,(0,1]\,, (i,j) \in S^2.$$

U pozitivno povratnom slučaju (koji je i najvažniji), sljedeći teorem daje uvjet za reverzibilnost koji nije u izravnoj vezi s invarijantnom distribucijom. Uvjet je poznat kao **Kolmogorov kružni uvjet**.

Teorem 3.15. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ ireducibilan i pozitivno povratan. Tada je $\boldsymbol{X}$ reverzibilan ako i samo ako za svaki niz stanja $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ vrijedi:

$$p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_1} = p_{i_1 i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{X}$ reverzibilan. Primjenimo li Propoziciju 3.12 na niz $(i_1, i_2, \dots, i_n, i_1)$, dobivamo Kolmogorov kružni uvjet. Obrnuto, pretpostavimo da vrijedi Kolmogorov kružni uvjet i označimo sa $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantnu mjeru od $\boldsymbol{X}$. Iz kružnog uvjeta imamo:

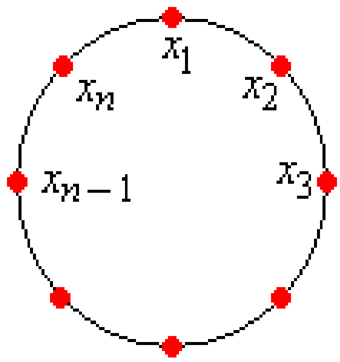
$$p_{ij} p_{ji}^k = p_{ji} p_{ij}^k, \forall(i,j) \in S, k \in \mathbb{N}^+.$$

Usrednjavanjem po $k = \{1 \dots n\}$ dobivamo:

$$p_{ij} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ji}^k = p_{ji} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^k, (i,j) \in S^2, n \in \mathbb{N}^+.$$

Ako pustimo $n \to \infty$, dobivamo $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}, (i,j) \in S^2$, pa je $\boldsymbol{X}$ reverzibilan. □

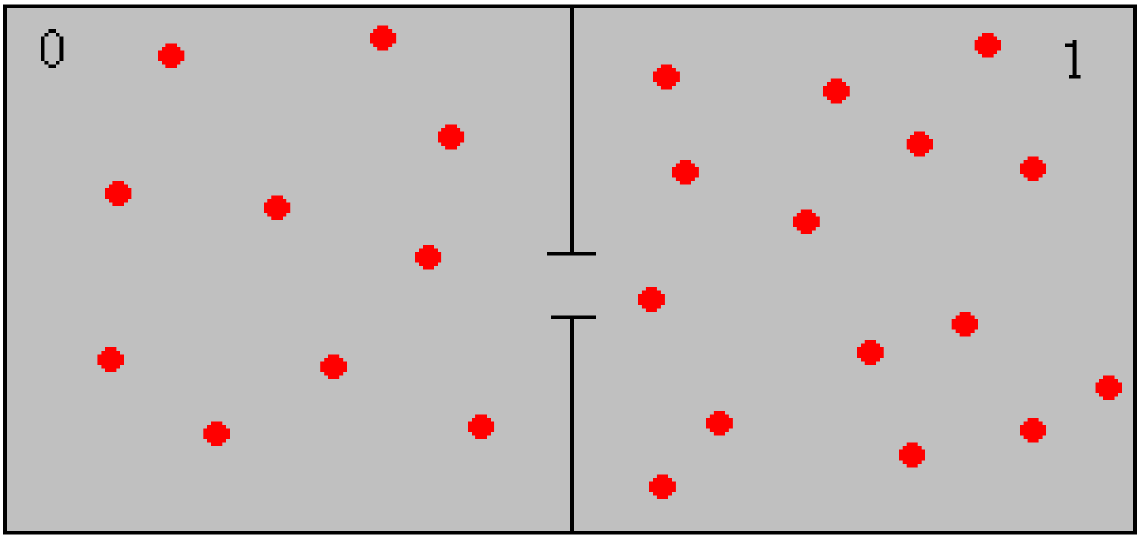
Kolmogorov kružni uvjet govori da je vjerojatnost posjeta lanca stanjima u nizu $(i_2, i_3, \dots, i_n, i_1)$, ako kreće iz i_1, jednaka vjerojatnosti posjeta lanca stanjima u nizu $(i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1)$ ako kreće iz i_1. Ovaj kružni uvjet poznat je i kao jednadžba ravnoteže za cikluse.



Slika 2: Kolmogorov kružni uvjet

3.2 Reverzibilnost Ehrenfestovog lanca

Ehrenfestov lanac jednostavan je diskretan model kojim opisujemo razmjenu molekula plina između dviju komora. Možemo ga formulirati i kao model urni gdje lopte odgovaraju molekulama, a urne komorama. Pretpostavimo da imamo dvije urne, označimo ih s 0 i 1, koje sadrže ukupno m lopti. Stanje sustava u trenutku $n \in \mathbb{N}$ u oznaci X_n označava broj lopti u urni 1. Promatrani stohastički proces je $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ s pripadnim skupom stanja $S = \{0, 1, \dots, m\}$. Naravno, broj lopti u urni 0 u trenutku n je $m - X_n$.
U osnovnom Ehrenfestovom modelu, u svakoj diskretnoj vremenskoj jedinici, nezavisno od prošlosti, slučajno je odabrana lopta i prebačena u urnu u kojoj se nije nalazila.



Slika 3: Ehrenfestov model

Ehrenfestov lanac $\mathbf{X}$ diskretan je Markovljev lanac sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ danom sa:

$$p_{ii-1} = \frac{i}{m}, P_{ii+1} = \frac{m-i}{m}, i \in S.$$

Pretpostavimo da modificiramo osnovni Ehrenfestov model na sljedeći način: u svakom diskretnom trenutku, nezavisno od prošlosti, slučajno izabiremo loptu i slučajno izabiremo urnu. Zatim, izabranu loptu stavimo u izabranu urnu.

Modificirani Ehrenfestov lanac $\mathbf{X}$ je Markovljev lanac u diskretnom vremenu sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti danom sa:

$$q_{ii-1} = \frac{i}{2m}, q_{ii} = \frac{1}{2}, q_{ii+1} = \frac{m-i}{2m}, i \in S.$$

Primijetimo da vrijedi:

$$q_{ij} = \frac{1}{2} p_{ij}, \text{ za } j \in \{i-1, i+1\}.$$

S obzirom na to da kod osnovnog i modificiranog Ehrenfestovog lanca svako stanje vodi u svako drugo stanje, oba su lanca ireducibilna.

Invarijantna distribucija osnovnog i modificiranog Ehrenfestovog lanca je binomna s parametrima m i $1/2$. Pokažimo da vrijedi $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \mathbf{P}$ te $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$.
Gustoća binomne distribucije je oblika: $\pi_i = \binom{m}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^m, i \in S$.
Za osnovni Ehrenfestov lanac imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\{j-1,j+1\}} \pi_k p_{kj} &= \pi_{j-1}p_{j-1j} + \pi_{j+1}p_{j+1j} \\ &= \binom{m}{j-1}\frac{1}{2}^m\frac{m-j+1}{m} + \binom{m}{j+1}\frac{1}{2}^m\frac{j+1}{m} \\ &= \frac{1}{2}^m\left[\binom{m-1}{j-1} + \binom{m-1}{j}\right] \\ &= \frac{1}{2}^m\binom{m}{j} = \pi_j.\end{aligned}$$

Za modificirani Ehrenfestov lanac zbog $q_{ij} = \frac{1}{2}p_{ij}$, za $j \in \{i-1, i+1\}$ vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\{j-1,j,j+1\}} \pi_k q_{kj} &= \pi_{j-1}q_{j-1j} + \pi_j q_{jj} + \pi_{j+1}q_{j+1j} \\ &= \frac{1}{2}\pi_{j-1}p_{j-1j} + \frac{1}{2}\pi_{j+1}p_{j+1j} + \frac{1}{2}\pi_j = \pi_j.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je binomna distribucija s parametrima m i $\frac{1}{2}$ invarijantna distribucija opisanih modela.

Pokažimo sada da su osnovni i modificirani Ehrenfestovi lanci reverzibilni:

Neka je $\lambda_i = \binom{m}{i}$ za $i \in S$. Uočimo da vrijedi:

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji} \text{ i } \lambda_i q_{ij} = \lambda_j q_{ji}, \forall i, j \in S.$$

Za osnovni lanac, ako je $i \in S$, vrijedi:

$$\lambda_i p_{ii-1} = \lambda_{i-1}p_{i-1i} = \binom{m-1}{i-1}$$

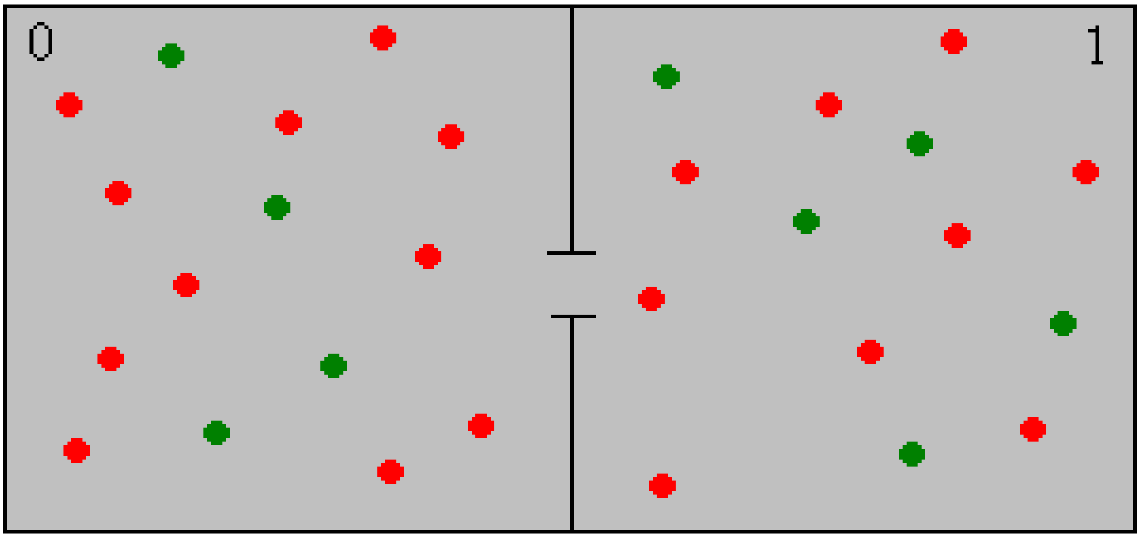
$$\lambda_i p_{ii+1} = \lambda_{i+1}p_{i+1i} = \binom{m-1}{i}.$$

U svim drugim slučajevima $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji} = 0$. Reverzibilnost modificiranog lanca slijedi trivijalno iz reverzibilnosti osnovnog Ehrenfestovog lanca zbog $q_{ij} = \frac{1}{2}p_{ij}$ za $j = i \pm 1$. Uvjet reverzibilnosti trivijalno vrijedi i za $j = i$.
Primijetimo da je $\boldsymbol{\pi}$ jednostavno $\boldsymbol{\lambda}$ normirano, i stoga imamo još jedan dokaz da je $\boldsymbol{\pi}$ invarijantna.

3.3 Reverzibilnost Bernoulli-Laplaceovog lanca

Beroulli-Laplaceov lanac jednostavan je diskretan model za difuziju dva nestlačiva plina između dva spremnika. Isto kao i kod Ehrenfestovog modela, možemo ga formulirati kao jednostavan model lopti i urni. Pretpostavimo da imamo dvije urne, u oznakama 0 i 1. Urna 0 sadrži l lopti, dok urna 1 sadrži k lopti, $k, l \in \mathbb{N}^+$. Od $l + k$ lopti r

lopti je crveno, dok je preostalih $l+k-r$ lopti zeleno, $r \in \mathbb{N}^+, 0 < r < l+k$. U svakom diskretnom trenutku, nezavisno od prošlosti, slučajno je izabrana po jedna lopta iz svake urne i one su zamijenjene. Lopte različitih boja odgovaraju različitim molekulama, a urne odgovaraju spremnicima. Svojstvo nestlačivosti reflektira se u smislu da je broj lopti u svakoj urni konstantan kroz vrijeme.



Slika 4: Bernoulli-Laplaceov model

Ako stavimo da X_n označava broj crvenih lopti u urni 1 u trenutku $n \in \mathbb{N}$, tada je:

1. $k - X_n$ broj zelenih lopti u urni 1 u trenutku n,
2. $r - X_n$ broj crvenih lopti u urni 0 u trenutku n,
3. $l - r + X_n$ broj zelenih lopti u urni 0 u trenutku n.

Bernoulli-Laplaceov lanac $\mathbf{X}$ je Markovljev lanac u diskretnom vremenu sa skupom stanja $S = \{max\{0, r-l\}, \ldots, min\{k, r\}\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ koja je dana sa:

$$p_{ii-1} = \frac{(l-r+i)i}{lk}, p_{ii} = \frac{(r-i)i + (l-r+i)(k-i)}{lk}, p_{ii+1} = \frac{(r-i)(k-i)}{lk}$$

za $i \in S$.

Ovo je izuzetno složen model, najviše zbog broja parametara. Do zanimljivih specijalnih slučajeva dolazimo kada se pojedini parametri podudaraju. Primjerice, kada je $r = j, l = k, r = k$ ili $l = k = r$.

S obzirom na to da vrijedi $p_{ii-1} > 0$ za svaki $i, i-1 \in S$ i $p_{ii+1} > 0$ za svaki $i, i+1 \in S$ tj. svako stanje vodi u svako drugo stanje, Bernoulli-Laplaceov lanac je ireducibilan.

Invarijantna distribucija je hipergeometrijska s parametrima $l+k, k, r$. Gustoća hipergeometrijske distribucije dana je sa:

$$\pi_i = \frac{\binom{r}{i}\binom{l+k-r}{k-i}}{\binom{l+k}{k}}, i \in S.$$

Izravan dokaz za $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ vrlo je kompleksan. Nakon što pokažemo reverzibilnost Bernoulli-Laplaceovog lanca, invarijantnost distribucije slijedit će direktno.

Neka je $\lambda_i = \binom{r}{i}\binom{l+k-r}{k-i}, i \in S$. Dovoljno je pokazati uvjet reverzibilnosti $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$ za svaki $i, j \in S$. Iz toga slijedi da je $\mathbf{X}$ reverzibilan i da je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna mjera za $\mathbf{X}$. Za $i \in S$ i za $j = i - 1 \in S$ lijeva i desna strana uvjeta reverzibilnosti svode se na sljedeće:

$$\frac{1}{lk}\frac{r!}{(i-1)!(r-i)!}\frac{(l+k-r)!}{(k-i)!(l-r+i-1)!}.$$

Za $i \in S$ i za $j = i + 1 \in S$ lijeva i desna strana uvjeta reverzibilnosti svode se na sljedeće:

$$\frac{1}{lk}\frac{r!}{i!(r-i-1)!}\frac{(l+k-r)!}{(k-i-1)!(l-r+i)!}.$$

Za sve ostale vrijednosti $i, j \in S$, uvjet reverzibilnosti je trivijalno zadovoljen. Hipergeometrijska distribucija $\boldsymbol{\pi}$ jednostavno je $\boldsymbol{\lambda}$ normirana pa iz ovoga slijedi da je i $\boldsymbol{\pi}$ invarijantna distribucija.

3.4 Markovljevi lanci unatrag i slučajne šetnje na grafovima

Pretpostavimo da je $G = (S, E)$ graf sa skupom vrhova S i skupom bridova $E \subset S^2$. Ako postoji put među bilo kojim dvama vrhovima, graf je **povezan**, a u suprotnom je nepovezan. Osnovna je razlika između **usmjerenih** i **neusmjerih** grafova u tome što je brid u usmjerenom grafu uređeni par vrhova. Usmjereni grafovi često se nazivaju i digrafovima (engl. directed graph, DiGraph). Stoga, za brid $e = (i, j) \in E$ kažemo da povezuje vrh $i \in S$ sa vrhom $j \in S$, ali ne nužno i obrnuto. Kažemo da brid $e \in E$ počinje u vrhu $i \in S$, a završava u vrhu $j \in S$. Od neusmjerenog grafa možemo dobiti usmjereni ako svaki brid zamijenimo sa dva - jednim u jednom smjeru i jednim u drugom ((i, j) i (j, i)). Pretpostavljamo da je graf neusmjeren u smislu da je $(i, j) \in E$ ako i samo ako je $(j, i) \in E$. Neka je $N(i) = \{j \in S : (i, j) \in E\}$ skup **susjeda** vrha $i \in S$ i neka je $d(i) = k(N(i))$ **stupanj** vrha $i \in S$. Pretpostavljamo da je $N(i) \neq 0$ za $i \in S$, tako da graf nema izoliranih vrhova.

Pretpostavimo da postoji **provodljivost** $c(i, j) > 0$ povezana sa svakim bridom $(i, j) \in E$. Provodljivost je simetrična u smislu da je $c(i, j) = c(j, i)$, za $(i, j) \in E$. Proširimo funkciju c do funkcije definirane na čitavom $S \times S$ tako da definiramo $c(i, j) = 0$ za $(i, j) \notin E$. Neka je

$$C(i) = \sum_{j \in S} c(i, j), i \in S.$$

Oznaka $C(i)$ označava ukupnu provodljivost bridova koji izlaze iz vrha $i \in S$. Glavna je pretpostavka da je $C(i) < \infty$, za $i \in S$. Možemo zamisliti tekućinu kroz bridove grafa tako da provodljivost brida na neki način mjeri kapacitet tog brida. Jedna od najboljih interpretacija je ta da graf zamislimo kao **električnu mrežu**, a bridove kao **otpornike**. U ovoj interpretaciji, provodljivost otpornika recipročna je otpornosti.

U nekim primjenama, posebice kod mreže otpornika koju smo maloprije spomenuli, potrebna je dodatna pretpostavka da graf G ne sadrži **petlje**, tako da $(i, i) \notin E$ za svaki $i \in S$.

Definicija 3.4. Markovljev lanac $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \cdots)$ u diskretnom vremenu sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti danom sa:

$$p_{ij} = \frac{c(i,j)}{C(i)}, (i,j) \in S^2$$

naziva se **slučajna šetnja** na grafu G.

Definicija 3.5. Slučajna šetnja u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti naziva se **put**.

Vratimo se sad slučajnoj šetnji na grafu i primijetimo da je $p_{ij} > 0$ za $i, j \in S$. Dalje, upotrebom definicije za C dobivamo sljedeće:

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = \sum_{j \in S} \frac{c(i,j)}{C(i)} = \frac{C(i)}{C(i)} = 1, i \in S,$$

stoga slijedi da je $\mathbf{P}$ dobro definirana matrica prijelaznih vjerojatnosti na S. Osim toga, $p_{ij} > 0$ ako i samo ako je $c(i,j) > 0$, što vrijedi ako i samo ako je $(i,j) \in E$, stoga je graf stanja od $\mathbf{X}$ upravo G graf s kojim smo krenuli.

S obzirom na to da put duljine n između stanja $i, j \in S$ postoji ako i samo ako je $p_{ij}^n > 0$, ako je G povezan, onda postoji put između svaka dva para različitih vrhova i stoga je lanac $\mathbf{X}$ ireducibilan.

Uzmimo da je $\mathbf{X}$ slučajna šetnja na povezanom grafu G i pokažimo da je $\mathbf{X}$ reverzibilan s obzirom na C.
Glavno opažanje je da vrijedi:

$$C(i)p_{ij} = C(j)p_{ji}, (i,j) \in S^2.$$

Ako je $(i,j) \in E$, lijeva strana jednaka je $c(i,j)$, a desna strana jednaka je $c(j,i)$. Zbog ranijih pretpostavki vrijedi da je $c(i,j) = c(j,i)$. Ako vrijedi $(i,j) \notin E$, obje strane jednakosti iznose 0. Iz toga slijedi da je C invarijantna mjera za slučajnu šetnju $\mathbf{X}$ i da je slučajna šetnja $\mathbf{X}$ reverzibilna s obzirom na C.

Kako je $\mathbf{X}$ reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}$ i $\mathbf{P}$ zadovoljavaju $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}, \forall (i,j) \in S^2$. S obzirom na to da vrijedi $p_{ij} > 0$ ako i samo ako $p_{ji} > 0$, graf stanja G od $\mathbf{X}$ ima dvosmjerne bridove pa slijedi da je $c_{ij} = c_{ji}, \forall (i,j) \in S^2$. Promotrimo sljedeće:

$$C(i) = \sum_{j \in S} c_{ij} = \sum_{j \in S} \lambda_i p_{ij} = \lambda_i, i \in S,$$

pa vrijedi da je $p_{ij} = \frac{c_{ij}}{C(i)}$

Dakle, vrijedi i obrnuto, tj. vrijedi da je svaki ireducibilan Markovljev lanac $\mathbf{X}$ sa skupom stanja S, matricom prijelaznih vjerojatnosti P i invarijantnom mjerom $\boldsymbol{\lambda}$, koji je reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$, slučajna šetnja na grafu stanja s funkcijom provodljivosti c koja je dana sa $c(i,j) = \lambda_i p_{ij}$, za $(i,j) \in S^2$.

Neke od prethodno spomenutih reverzibilnih lanaca možemo interpretirati u skladu s ovom tvrdnjom:

Primjer 3.3. *Osnovni Ehrenfestov lanac sa $m \in \mathbb{N}^+$ lopti je reverzibilan pa ga stoga možemo interpretirati kao slučajnu šetnju na grafu. Graf stanja G osnovnog Ehrenfestovog lanca sa $m \in \mathbb{N}$ lopti je put od 0 do m bez petlji. Funkcija provodljivosti c glasi $c(i+1,i) = \binom{m-1}{i}$ za $i \in \{0,1,\ldots,m-1\}$.*

Primjer 3.4. *Prisjetimo se da je modificirani Ehrenfestov lanac sa $m \in \mathbb{N}^+$ lopti reverzibilan pa ga možemo interpretirati kao slučajnu šetnju na grafu. Graf stanja G modificiranog Ehrenfestovog lanca sa $m \in \mathbb{N}$ lopti je put od 0 do m sa petljama. Funkcija provodljivosti c je $c(i+1,i) = \frac{1}{2}\binom{m-1}{i}$ za $i \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ i $c(i,i) = \frac{1}{2}\binom{m}{i}$ za $i \in \{0,1,\ldots,m\}$.*

Primjer 3.5. *Prisjetimo se da je Bernoulli-Laplaceov lanac sa $l \in \mathbb{N}^+$ lopti u urni 0 i $k \in \mathbb{N}^+$ lopti u urni 1, od kojih je $r \in \{0,\ldots,l+k\}$ lopti crveno, reverzibilan pa ga možemo interpretirati kao slučajnu šetnju na grafu. Graf stanja G ovog Bernoulli-Laplaceovog lanca je put od $\max\{0,r-l\}$ do $\min\{k,r\}$ sa petljama. Funkcija provodljivosti c dana je sa:*

$$c(i+1,i) = \binom{r}{i}\binom{l+k-r}{k-i}(r-i)(k-i), i \in \{\max\{0,r-l\},\ldots,\min\{k,r\}-1\}$$

$$c(i,i) = \binom{r}{i}\binom{l+k-r}{k-i}[(r-i)i+(j-r+i)(k-i)], i \in \{\max\{0,r-l\},\ldots,\min\{k,r\}\}.$$

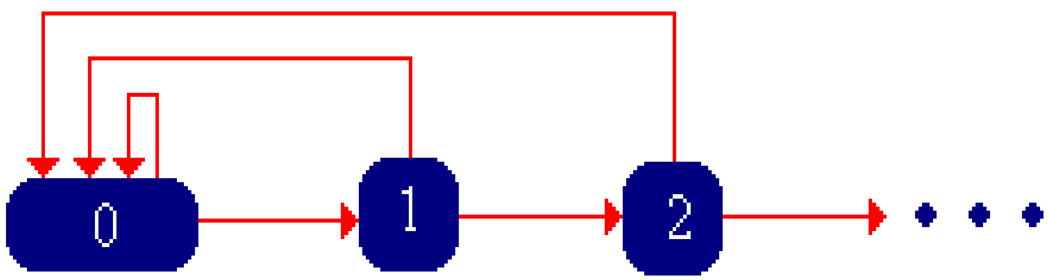
3.5 Lanci pouzdanosti u diskretnom vremenu i Markovljevi lanci unatrag

Pretpostavimo da imamo niz pokušaja od kojih svaki rezultira s uspjehom ili neuspjehom. Osnovna je pretpostavka da ako postoji $i \in \mathbb{N}$ uzastopnih pokušaja, tada je vjerojatnost uspjeha u sljedećem pokušaju dana s $p(i)$, nezavisno od prošlosti, gdje je $p : \mathbb{N} \to (0,1)$. Svaki put kad se realizira neuspjeh, krećemo ispočetka, s novim nizom pokušaja. Funkcija p naziva se **funkcija uspjeha**. Neka X_n označava duljinu niza uspjeha nakon n pokušaja.

Definicija 3.6. Neka je $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$ Markovljev lanac u diskretnom vremenu sa skupom stanja $\mathbb{N}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ danom sa:

$$p_{ii+1} = p(i), p_{i0} = 1 - p(i), i \in \mathbb{N}.$$

Markovljev lanac $\mathbf{X}$ naziva se lanac **uzastopnih uspjeha**.



Slika 5: Graf stanja lanca uzastopnih uspjeha

Neka T označava broj pokušaja do prvog neuspjeha ako krenemo s novim nizom pokušaja. Kod lanca uzastopnih uspjeha $\mathbf{X}$, $T = T_0^{(1)}$, vrijeme prvog povratka u stanje 0 ako krenemo iz 0. Primijetimo da T ima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}^+ \cup \infty$ jer je moguće da ne dođe do neuspjeha. Neka je $r(n) = P(T > n), n \in \mathbb{N}$, vjerojatnost barem n uzastopnih uspjeha ako krenemo s novim nizom pokušaja. Neka je $f(n) = P(T = n+1), n \in \mathbb{N}$ vjerojatnost točno n uzastopnih uspjeha ako krenemo s novim nizom pokušaja.

Funkcije p, r i f su povezane na sljedeći način:

1. $p(i) = r(i+1)/r(i), i \in \mathbb{N}$,
2. $r(n) = \prod_{i=0}^{n-1} p(i), n \in \mathbb{N}$,
3. $f(n) = [1 - p(n)] \prod_{i=0}^{n-1} p(i), n \in \mathbb{N}$,
4. $r(n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} f(i), n \in \mathbb{N}$
5. $f(n) = r(n) - r(n+1), n \in \mathbb{N}$.

Dakle, funkcije p, r i f daju ekvivalentne informacije. Ako znamo jednu od funkcija, možemo konstruirati preostale dvije pa stoga bilo koju od ovih funkcija možemo iskoristiti za definiranje lanca uzastopnih uspjeha. Funkcija r je **funkcija pouzdanosti** povezana uz T.

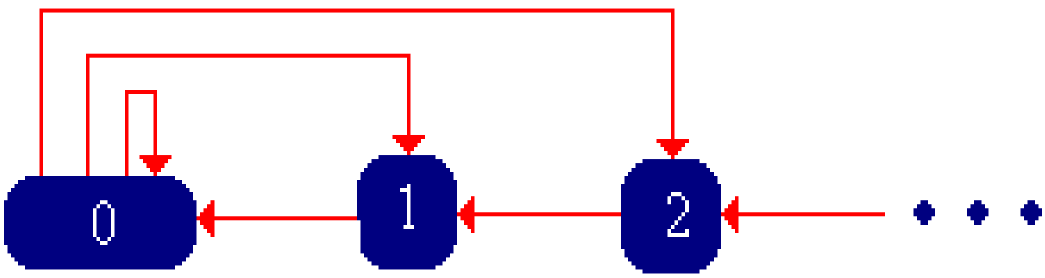
S obzirom na to da nula vodi u svako drugo stanje i da svako drugo stanje vodi natrag u nulu lanac uzastopnih uspjeha je ireducibilan.

Označimo s $\mu = E(T)$ očekivani broj pokušaja do prvog neuspjeha ako krenemo s novim nizom pokušaja. Promotrimo uređaj za koji vrijeme do kvara U ima vrijednosti u $\mathbb{N}$, s gustoćom f. Pretpostavljamo da je $f(n) > 0$, za $n \in \mathbb{N}$. Kada se uređaj pokvari, odmah je zamijenjen novim identičnim uređajem. Za $n \in \mathbb{N}$, neka Y_n označava vrijeme do kvara uređaja koji je ispravan u trenutku n.

Definicija 3.7. Neka je $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, Y_2, \dots)$ Markovljev lanac u diskretnom vremenu sa skupom stanja $\mathbb{N}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti Q koja je dana sa:

$$q_{0i} = f(i), q_{i+1i} = 1, i \in \mathbb{N}.$$

Markovljev lanac $\boldsymbol{Y}$ naziva se **lanac vijeka trajanja** s gustoćom f.



Slika 6: Graf stanja lanca vijeka trajanja

Ako sa U označimo životni vijek uređaja, tada je $T = 1 + U$ vrijeme prvog povratka lanca $\mathbf{Y}$ u stanje 0, ako je lanac startao iz 0.

Zbog pretpostavke na f stanje nula vodi u svako drugo stanje i svako drugo stanje vodi natrag u nulu pa je lanac $\mathbf{Y}$ ireducibilan.

Dosad smo mogli uočiti sličnosti u oznakama i rezultatima između lanca uzastopnih uspjeha i lanca vijeka trajanja. Postoji i dublja veza: lanac $\mathbf{Y}$ je Markovljev lanac unatrag od $\mathbf{X}$ i obrnuto.
Kako su oba lanca ireducibilna, prema teoremu 3.10 dovoljno je pokazati da vrijedi:

$$r_i p_{ij} = r_j q_{ji}, i, j \in \mathbb{N}.$$

Iz toga će slijediti da je $\mathbf{Y}$ Markovljev lanac unatrag od $\mathbf{X}$ i obrnuto, tj. da je i $\mathbf{X}$ Markovljev lanac unatrag od $\mathbf{Y}$ i da je r zajednička invarijantna distribucija. Ako uzmemo u obzir definicije lanaca, potrebno je promotriti samo dva slučaja, tj. slučaj $j = 0$ i slučaj $j = i + 1$. Za $j = 0$, imamo $r_i p_{i0} = r_i[1 - p(i)]$ i $r_0 q_{0i} = f(i)$ jer $r(0) = 1$. Ali, upotrebom gore navedenih svojstava $1. - 5.$, dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
r(i)[1 - p(i)] &= r(i)\Big(1 - \frac{r(i+1)}{r(i)}\Big) \\
&= f(i) = r(i) - r(i+1) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{i-1} f(i) - 1 + \sum_{i=0}^{i} f(i) \\
&= f(i).
\end{aligned}$$

Kad je $i \in \mathbb{N}$ i $j = i + 1$, imamo $r_i p_{ii+1} = r_i p(i)$ i $r_{i+1} q_{i+1i} = r_{i+1}$. Ali, $r_i p(i) = r_{i+1}$.

U terminima pouzdanosti, također je vrlo jednostavno vidjeti da je lanac vijeka trajanja Markovljev lanac unatrag od lanca uzastopnih uspjeha i obrnuto. Promotrimo uređaj koji ima vijek trajanja s vrijednostima u $\mathbb{N}$ i koji je odmah po kvaru zamijenjen s identičnim uređajem. Za $n \in \mathbb{N}$, na X_n možemo gledati kao na vijek trajanja uređaja koji je ispravan u trenuku n, a na Y_n kao na vrijeme koje je preostalo do kvara tog uređaja.

3.6 Reverzibilnost lanaca rađanja i umiranja u diskretnom vremenu

Definicija 3.8. Neka je S interval cijelih brojeva. **Lanac rađanja i umiranja u diskretnom vremenu** na S je Markovljev lanac $\mathbf{X}$ u diskretnom vremenu sa skupom stanja S koji je konačan ili beskonačan i matricom prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ danom sa:

$$p_{ii-1} = q(i), p_{ii} = r(i), p_{ii+1} = p(i), i \in S,$$

gdje su p, q i r nenegativne funkcije na S takve da $p(i) + q(i) + r(i) = 1$, za $i \in S$.

Mjera $\boldsymbol{\lambda}$ definirana sa:

$$\lambda_i = \frac{p(0) \cdots p(i-1)}{q(1) \cdots q(i)}, i \in \mathbb{N}$$

je invarijantna mjera za lanac rađanja i umiranja u diskretnom vremenu $\mathbf{X}$.

Uz pretpostavku $p(i) > 0$ i $q(i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}^+$, uz uvjet $q(0) = 0$, Markovljev lanac rađanja i umiranja u diskretnom vremenu je ireducibilan.

Ireducibilan, povratan lanac rađanja i umiranja $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ na intervalu cijelih brojeva S je reverzibilan. Kako bismo to pokazali dovoljno je pokazati da je zadovoljen Kolmogorov kružni uvjet, tj. da za svaki niz stanja $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_n)$ takav da $i_0 = i_n$ vrijedi:

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} = p_{i_n i_{n-1}} p_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdots p_{i_1 i_0}.$$

Možemo ograničiti naše razmatranje na nizove za koje vrijedi $i_{k+1} \in \{i_k, i_k - 1, i_k + 1\}$ za svaki $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. S obzirom na to da su nam jedini mogući potezi iz danog stanja jedan unatrag, jedan unaprijed i ostati na mjestu, vjerojatnost posjeta lanca stanjima $i_2, i_3, \dots, i_n, i_1$ u nizu, ako je lanac krenuo iz i_1, jednaka je vjerojatnosti posjeta lanca stanjima $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1$, ako je lanac krenuo iz i_1, tj. za takve nizove kružni uvjet je trivijalno zadovoljen.

Dakle, u slučaju kada je S konačan, ireducibilan lanac $\mathbf{X}$ je povratan pa je stoga reverzibilan. U slučaju kad je $S = \mathbb{N}$, možemo iskoristiti prethodnu invarijantnu mjeru kako bismo direktno pokazali da je lanac reverzibilan:

Za mjeru $\boldsymbol{\lambda}$ definiranu sa:

$$\lambda_i = \frac{p(0) \cdots p(i-1)}{q(1) \cdots q(i)}, i \in \mathbb{N}$$

dovoljno je pokazati da vrijedi uvjet reverzibilnosti $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$ za svaki $i, j \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da je $\boldsymbol{\lambda}$ invarijantna mjera za $\mathbf{X}$ i da je $\mathbf{X}$ reverzibilan s obzirom na $\boldsymbol{\lambda}$. Za $i \in \mathbb{N}$ i za $j = i + 1$ slijedi:

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji} = \frac{p(0) \cdots p(i)}{q(1) \cdots q(i)}.$$

Za $i \in \mathbb{N}^+$ i za $j = i - 1$ vrijedi:

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji} = \frac{p(0) \dots p(i-1)}{q(1) \dots q(i-1)}.$$

U svim drugim slučajevima, uvjet reverzibilnosti trivijalno je zadovoljen.

Neki slučajni procesi koje smo ranije spomenuli su Markovljevi lanci rađanja i umiranja:

Primjer 3.6. *Ehrenfestov lanac s parametrima $m \in \mathbb{N}^+$ je lanac rađanja i umiranja na $S = \{0, 1, \dots, m\}$ sa $q(i) = \frac{i}{m}$ i $p(i) = \frac{m-i}{m}$ za $i \in S$.*

Primjer 3.7. *Modificirani Ehrenfestov lanac s parametrom $m \in \mathbb{N}^+$ je lanac rađanja i umiranja na $S = \{0, 1, \dots, m\}$ gdje $q(i) = \frac{i}{2m}, r(i) = \frac{1}{2}$ i $p(i) = \frac{m-i}{2m}$ za $i \in S$.*

Primjer 3.8. *Bernoulli-Laplaceov lanac s paramerima $l, k, r \in \mathbb{N}^+$ takvim da $r < l + k$ je lanac rađanja i umiranja na $S = \{max\{0, r - l\}, \dots, min\{k, r\}\}$ gdje $q(i) = \frac{(l-r+i)i}{lk}, r(i) = \frac{(r-i)i+(l-r+i)(k-i)}{lk}$ i $p(i) = \frac{(r-i)(k-i)}{lk}$ za $i \in S$.*

Literatura

[1] D. Aldous and J. A. Fill, Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs, 2002., https://www.stat.berkeley.edu/users/aldous/RWG/book.html

[2] J. Chang, Stohastic Processes, Yale University, Department of Statistics and Data Science, 2007.

[3] D. Coppersmith, P. Tetali and P. Winkler, Collisions among random walks on a graph, SIAM J.Discrete Math, 363-374, 1993.

[4] P. Diaconis and D. Stroock, Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains, Ann.Appl. Probab., Institute of Mathematical Statistics, 1991., 36-61

[5] P. G. Doyle and J. L. Snell, Random Walks and electrical Networks, Mathematical Association of America, Washington DC, 1984.

[6] J. R. Norris, Markov Chains, Cambridge University Press, 1997.

[7] K. Sigman, Lecture Notes on Stochastic Modeling, Time-reversible Markov chains, Columbia University, Department of Industrial Engineering and Operations Research, 2009.

[8] Z. Vondraček, Markovljevi lanci- predavanja, Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odsjek, Zagreb, 2008.

[9] Probability, Mathematical Statistics, Stochastic Processes,

http://www.randomservices.org/random/

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznali smo se s Markovljevim lancima unatrag u diskretnom vremenu. U prvom poglavlju definirali smo Markovljeve lance u diskretnom vremenu.Također, uveli smo važne pojmove kao što su matrica prijelaznih vjerojatnosti, vrijeme prvog posjeta, vrijeme prvog povratka, invarijantna mjera, graf stanja itd. Klasificirali smo stanja Markovljeva lanca te naveli važne rezultate za razumijevanje Markovljevih lanaca. U drugom poglavlju, koje je i glavni dio rada, definirali smo Markovljeve lance unatrag te dokazali njihova najvažnija svojstva. Naveli smo jednadžbu ravnoteže za matrice $\mathbf{P}, \hat{\boldsymbol{P}}$ i mjeru $\boldsymbol{\lambda}$ a kasnije i složeniju verziju jednadžbe ravnoteže te jednadžu ravnoteže za matrice n-koračnih prijelaznih vjerojatnosti. Osim toga, naveli smo i jedan jednostavan primjer Markovljeva lanca unatrag. Od posebnog interesa bili su nam Markovljevi lanci unatrag čije se matrice prijelaznih vjerojatnosti podudaraju s originalnim matricama prijelaznih vjerojatnosti. Oni su poznati pod imenom reverzibilni Markovljevi lanci. Dokazali smo njihova bitna svojstva. Nakon toga, u zasebnim potpoglavljima raspravili smo reverzibilnost Ehrenfestovog lanca, reverzibilnost Bernoulli-Laplaceovog lanca i reverzibilnost lanaca rađanja i umiranja. Diskutirali smo i slučajne šetnje na grafovima u terminima reverzibilnih lanaca te lance pouzdanosti u terminima Markovljevih lanaca unatrag.

Ključne riječi: Markovljev lanac, proces unatrag kroz vrijeme, homogen proces, ireducibilan proces, Markovljev lanac unatrag, matrica prijelaznih vjerojatnosti, invarijantna mjera, reverzibilan Markovljev lanac, povratnost, prolaznost, jednadžba ravnoteže

Summary

In this thesis, we introduce Markov chains backwards in discrete time. In the first chapter, we defined Markov chains in discrete time. Also, we have defined important terms such as transition probability matrix, time of the first visit, time of the first return, invariant measure, state graph etc. We classified Markov chain states and presented results that are important for understanding Markov chains. In the second chapter, which is the main part of this thesis, we have defined Markov chains backwards and we have proved their properties. We introduced balance equation which holds for matrices $\mathbf{P}, \hat{\boldsymbol{P}}$ and for measure $\boldsymbol{\lambda}$. Later we introduced more complex balance equation so as balance equation that holds for n state transition probability matrices. Further, we set an example of Markov chain backwards. Markov chains backwards whose transition probability matrices are identical to original transition probability matrices were of special interest to us. They are known as reversible Markov chains. We also proved some important properties of reversible Markov chains. Furthermore, we discussed reversibility of Ehrenfest chain, reversibility of Bernoulli-Laplace chain and reversibility of birth and death chains in separate subsections. Also, we discussed random walks on graphs in terms of reversible Markov chains and birth- death chains in terms of Markov chains backwards.

Key words: Markov chain, process backward in time, homogeneous process, irreducible process, Markov chain backwards, reversible Markov chain, recurrence, transience, balance equation

Životopis

Moje je ime Doris Bencetić, rođena sam 14.2.1995. u Osijeku. Nakon završene opće gimnazije u Donjem Miholjcu upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Nakon stečene titule bacc.math. upisujem diplomski studij, smjer Financijska matematika i statistika. Trenutno radim u Croatia osiguranju u Zagrebu kao junior inženjer za poslovnu inteligenciju i podatkovnu znanost.