

# Konformna preslikavanja u stacionarnom provođenju topline

---

**Bogut, Kristina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:257443>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-02**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Preddiplomski sveučilišni studij matematike

Kristina Bogut

**Konformna preslikavanja u stacionarnom provođenju topline**

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Preddiplomski sveučilišni studij matematike

Kristina Bogut  
**Konformna preslikavanja u stacionarnom provođenju topline**  
Završni rad

Mentorica: izv.prof.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2020.

### **Sažetak**

Cilj ovog rada je pokazati ulogu konformnih preslikavanja u stacionarnom provođenju topline. Konkretno, pokazat ćemo kako se konformna preslikavanja mogu koristiti u određivanju stacionarne raspodjele temperature na nekim dvodimenzionalnim objektima.

**Ključne riječi:** harmonijska funkcija, konformno preslikavanje, stacionarno provođenje topline, ploča

### **Abstract**

This paper aims to show the role of conformal mapping in steady-state heat conduction. Concretely, we will show how to use conformal mappings in finding steady temperatures in various thin plates.

**Key words:** harmonic function, conformal mapping, steady-state heat conduction, plate

# Sadržaj

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Konformna preslikavanja</b>  | <b>1</b>  |
| 2.1      | Osnovni pojmovi . . . . .   | 1         |
| 2.2      | Primjeri konformnih preslikavanja . . . . .                                     | 3         |
| <b>3</b> | <b>Stacionarno provođenje topline</b>   | <b>4</b>  |
| 3.1      | Stacionarna raspodjela temperature u gornjoj poluravnini . . .                  | 7         |
| 3.2      | Stacionarna raspodjela temperature ploče u trodimenzionalnom prostoru . . . . . | 8         |
| 3.3      | Stacionarna raspodjela temperature u kvadrantu . . . . .                        | 10        |
| <b>4</b> | <b>Zaključak</b>  | <b>11</b> |

# 1 Uvod

Provođenje topline ima veliku ulogu u dizajnu svega što nas okružuje. Primjerice, prilikom izgradnje kuće želimo koristiti materijale koji će nam osigurati ugodnu temperaturu u domu u svako doba godine uz minimalne troškove grijanja i hlađenja prostora. Stoga je bitno razumijeti koncept provođenja topline. U ovom radu ograničit ćemo se na stacionarno provođenje topline, tj. na provođenje koje ne ovisi o vremenu, te ćemo pretpostaviti da se toplinska energija ne gubi ni ne nastaje unutar čvrstog tijela, odnosno nema prisutnih izvora i ponora topline. Bavit ćemo se s dvodimenzionalnim problemom provođenja te pokazati kako se konformna preslikavanja mogu koristiti u određivanju stacionarne raspodjele temperature nekih dvodimenzionalnih objekata. Najprije ćemo navesti osnovne pojmove i rezultate iz kompleksne analize koje ćemo koristiti u glavnom dijelu rada, definirati konformno preslikavanje i navesti neke primjere. Zatim ćemo predstaviti formulu za gustoću toplinskog toka. Izvest ćemo Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu za funkciju temperature u problemu dvodimenzionalnog stacionarnog toka topline, a onda izvesti formule za stacionarnu raspodjelu temperature u gornjoj poluravnini, na traci u trodimenzionalnom prostoru te u kvadrantu.

## 2 Konformna preslikavanja

Cilj ovog poglavlja je pojasniti pojmove iz kompleksne analize koje ćemo kasnije koristiti te nekoliko bitnih teorema na koje ćemo se pozvati. Dokazi se mogu pronaći u [1]. Također, detaljno ćemo objasniti konformna preslikavanja koja će nam trebati u izvodu formule za stacionarno provođenje topline.

### 2.1 Osnovni pojmovi

Objasnimo najprije što je to harmonijska funkcija, a što konformno preslikavanje. S  $\Omega$  ćemo označiti jednostavno povezano područje u  $\mathbb{R}^2$  ili u  $\mathbb{C}$ .

**Definicija 1.** Za funkciju  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je *harmonijska* ako je klase  $C^2(\Omega)$  i zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

**Teorem 2.1.** *Kompleksna funkcija  $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je derivabilna u točki  $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  ako i samo ako su funkcije  $u$  i  $v$ , kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u  $(x_0, y_0)$  i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove*

uvjete:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (2.1)$$

**Korolar 2.2.** Ako je  $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  derivabilna funkcija, a realne funkcije  $u$  i  $v$  klase  $C^2(\Omega)$ , onda su  $u$  i  $v$  harmonijske funkcije.

Funkcija  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zove se *harmonijski konjugat* funkcije  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ako je  $v$  klase  $C^2(\Omega)$  i zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete (2.1). Funkcija  $v$  jedinstvena je do na konstantu i vrijedi da je funkcija  $u + iv$  derivabilna na  $\Omega$ .

Funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je *analitička funkcija* u  $z_0 \in \Omega$  ako je derivabilna u svakoj točki iz okoline  $z_0$ .

Promotrimo kompleksnu analitičku funkciju  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  koja točku  $a$  iz  $z$ -ravnine preslikava u točku  $f(a)$  u  $w$ -ravnini. Pored toga, neka se krivulja  $l$ , kojoj pripada točka  $a$  preslika na krivulju  $L$ , kojoj pripada  $f(a)$ . Pretpostavimo da  $f$  ima derivaciju u točki  $a$  i  $f'(a) \neq 0$ . Broj  $|f'(a)|$  zovemo *omjer preslikavanja*, a  $\arg f'(a)$  zovemo *kut preslikavanja*. Ako se dvije glatke krivulje  $l_1$  i  $l_2$  u  $z$ -ravnini sijeku u točki  $a$ , a njihove slike  $L_1$  i  $L_2$  pod djelovanjem preslikavanja  $f$  se sijeku u  $f(a)$ , onda je kut između  $l_1$  i  $l_2$  jednak kutu između  $L_1$  i  $L_2$ .

**Definicija 2.** Za funkciju  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je *konformno preslikavanje* ako u svakoj točki domene čuva kuteve po veličini i orijentaciji.

**Teorem 2.3.** Neka je  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analitička funkcija. Ako vrijedi  $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$ , tada je  $f$  konformno preslikavanje.

Slijede teoremi koji će biti potrebni u izvođenju formule za stacionarnu raspodjelu temperature kojom ćemo se baviti u sljedećem poglavlju.

**Teorem 2.4.** Neka je  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  harmonijska funkcija koja preslikava područje  $D_z$  iz  $z$ -ravnine u područje  $D_w$  u  $w$ -ravnini. Ako je  $h(u, v)$  harmonijska funkcija definirana na  $D_w$ , onda je funkcija  $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$  harmonijska na  $D_z$ .

**Teorem 2.5.** Pretpostavimo da je preslikavanje  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  konformno na glatkom luku  $C$ . Neka je  $\Gamma = \{f(z) : z \in C\}$  i  $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ . Ako za  $h(u, v)$  vrijedi  $h = h_0, h_0 \in \mathbb{R}$ , onda za funkciju  $H$  vrijedi  $H = h_0$ .

Ako za  $h(u, v)$  vrijedi  $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ , onda za funkciju  $H$  vrijedi  $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$ , pri čemu su  $\frac{\partial h}{\partial n}$  i  $\frac{\partial H}{\partial N}$  derivacije u smjeru normale na luk  $C$ .

## 2.2 Primjeri konformnih preslikavanja

Za kompleksni broj  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi

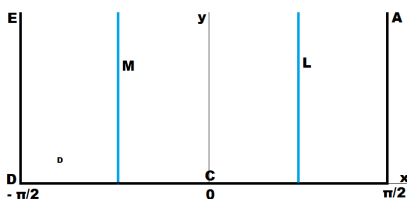
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Stoga su realni i imaginarni dio funkcije  $\sin z$  dani

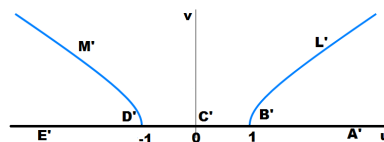
$$\begin{aligned} u &= \sin x \cosh y \\ v &= \cos x \sinh y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pokažimo kako djeluju preslikavanja koja ćemo kasnije koristiti.

**Primjer 1.** Preslikavanje  $\omega = \sin z$  je bijekcija s beskonačne trake definirane s  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$  u ravnini  $z$  na gornju poluravninu  $v \geq 0$  ravnine  $\omega$ .



Slika 1:  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$



Slika 2:  $v \geq 0$

Sliku dobivamo uvrštavanjem  $u$  (2.2). Preslikajmo najprije rubove. Točke  $(\frac{\pi}{2}, y)$  preslikavaju se u  $(\cosh y, 0)$ , točke  $(x, 0)$  u  $(\sin x, 0)$ , a točke  $(-\frac{\pi}{2}, y)$  u  $(-\cosh y, 0)$ . Svaka točka untrine  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  leži na nekom od horizontalnih pravaca  $x = \text{const.}$ ,  $y > 0$ . Slike tih pravaca su međusobno disjunktne i u uniji daju poluravninu  $v > 0$  (vidi slike 1 i 2).

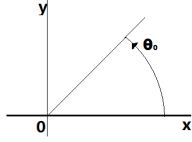
**Primjer 2.** Preslikavanje  $\omega = \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ , prilikom kojeg se koristi glavna grana logaritma, preslikava poluravninu  $y > 0$  na traku  $0 < v < \pi$ .

Preslikavanje  $\omega$  je kompozicija preslikavanja  $Z = \frac{z-1}{z+1}$  i  $\omega_1 = \log z$ .

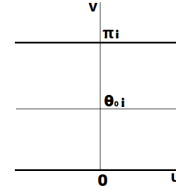
$Z$  preslikava gornju poluravninu  $y > 0$  na poluravninu  $Y > 0$ , gdje je  $z = x + iy$  te  $Z = X + iY$ .

Preslikavanje  $\omega_1$  ilustrirano je na slikama 3 i 4. Ono preslikava poluravninu  $Y > 0$  na traku  $0 < v < \pi$ . Zapišemo li  $Z$  kao  $Z = e^{i\theta}$ , tada je  $\log z = \ln R + i\theta$ , pri čemu  $R > 0$  i  $-\pi < \theta < \pi$ . Stoga možemo uočiti da slika ima koordinatne  $(\ln R, \theta_0)$ , gdje  $\theta_0$  varira između  $0$  i  $\pi$ .





Slika 3: ravnina  $XY$



Slika 4: ravnina  $uv$

### 3 Stacionarno provođenje topline

Kao što smo spomenuli u uvodu, baviti ćemo se stacionarnim prijenosom topline, tj. pretpostaviti ćemo da temperatura bilo koje točke sredstva ne ovisi o vremenu, već samo o mjestu sredstva. Vođenje topline kroz homogeni materijal može se računati pomoću Fourierova zakona. Zamislimo vođenje topline kroz štap poprečnog presjeka  $S$ . Pretpostavimo da temperatura u štapu linearno pada od jednog kraja do drugog i da je u svakoj točki određenog presjeka ista. Promatramo dva presjeka na kojima su temperature  $T_1$  i  $T_2$ , a koja su međusobno udaljena za  $\Delta x$ . Tada je toplina  $Q$  koja u određenom vremenu  $t$  prođe kroz taj dio sredstva dana formulom

$$Q = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} S t, \quad (3.1)$$

gdje je  $K$  koeficijent toplinske vodljivosti materijala,  $\Delta T = T_2 - T_1$  razlika temperatura na krajevima sloja,  $S$  je površina kroz koju prolazi toplina. Veličina  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$  zove se temperaturni gradijent, a smjer mu je isti kao i smjer normale na plohu kroz koju prolazi toplina. Predznak minus nastaje zbog činjenice da toplina prelazi iz područja više u područje niže temperature. Fourierov zakon (3.1) možemo napisati i pomoću *toplinskog toka*, odnosno *gustoće toplinskog toka*  $\Phi$ :

$$\Phi = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (K > 0). \quad (3.2)$$

Općenito, gustoća toplinskog toka kroz neku plohu dana je s

$$\Phi = -K \frac{dT}{dN}, \quad (3.3)$$

pri čemu je  $\frac{dT}{dN}$  derivacija funkcije  $T$  u smjeru normale  $N$  na zadanu plohu. SI jedinica za ovu fizikalnu veličinu je watt po metru kvadratnom ( $W/m^2$ ). Koeficijent toplinske vodljivosti  $K$  toplinska je karakteristika određenog materijala, a ovisi o temperaturi i o tlaku. Materijal kojemu je  $K$  velik dobar je toplinski vodič. U tablici 1 navedene su vrijednosti  $K$  nekih materijala.

| MATERIJAL        | $W/m^2$   |
|------------------|-----------|
| BETON            | 0.128     |
| ASFALT           | 0.74-0.76 |
| PROZORSKO STAKLO | 0.810     |
| SUHI PIJESAK     | 0.582     |
| PLEKSI GLAS      | 0.195     |
| CEMENT           | 1.047     |
| GRANIT           | 3         |

Tablica 1: Koeficijenti toplinske vodljivosti nekih materijala

Svakoj točki nekog tijela možemo pridružiti tri koordinate  $x, y$  i  $z$ . Mi ćemo pretpostaviti da temperatura tijela ovisi samo o koordinatama  $x$  i  $y$  pa će tok topline biti dvodimenzionalan i paralelan s ravninom okomitom na  $XOY$ -ravninu. Nadalje, pretpostavimo da toplinska energija ne nastaje niti nestaje unutar tijela. tj. nema izvora niti ponora topline unutar tijela. Pretpostavimo da je funkcija topline  $T$  u točki  $(x, y)$ :  $T(x, y)$  i njene prve i druge parcijalne derivacije  $T_x(x, y)$ ,  $T_y(x, y)$ ,  $T_{xx}(x, y)$ ,  $T_{yy}(x, y)$ ,  $T_{xy}(x, y)$  neprekidne u svakoj točki nutrine čvrstog tijela. Promotrimo element volumena oblika uspravne pravokutne prizme koji se nalazi unutar čvrstog tijela. Uzmimo da je visina prizme okomita na  $XOY$ -ravninu, duljine je jedan, a duljine stranica baze prizme su  $\Delta x$  i  $\Delta y$ .

Brzina toka topline preko lijeve strane prizme na desno iznosi  $-KT_x(x, y)\Delta y$ , a preko desne strane na desno jednaka je  $-KT_x(x + \Delta x, y)\Delta y$ . Oduzimanjem tih izraza dobivamo formulu za brzinu gubitka topline iz elementa volumena kroz te dvije strane:

$$-K \left\{ \frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x} \right\} \Delta x \Delta y. \quad (3.4)$$

Za dovoljno male  $x$  i  $y$  dobivamo aproksimaciju

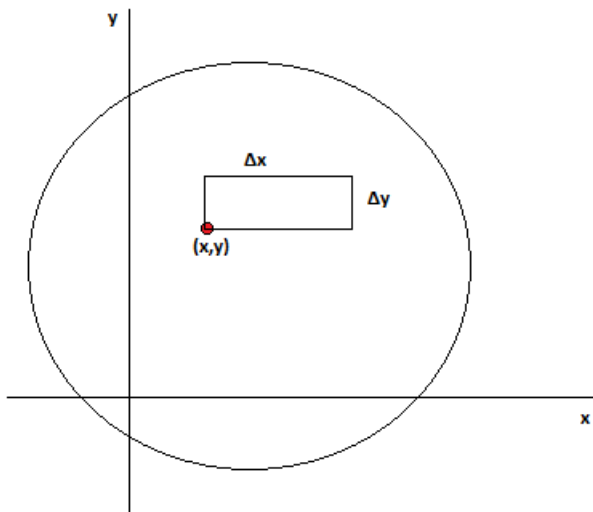
$$-KT_{xx}(x, y)\Delta x \Delta y, \quad (3.5)$$

čija se točnost povećava smanjivanjem  $\Delta x$  i  $\Delta y$ .

Na sličan način dobivamo formulu za brzinu gubitka topline kroz preostale dvije stranice prizme koje su okomite na ravninu  $XOY$ :

$$-KT_{yy}(x, y)\Delta x \Delta y. \quad (3.6)$$

Budući da toplina ulazi u i izlazi iz elementa volumena isključivo kroz te četiri stranice, a temperatura je stacionarna, suma izraza (3.5) i (3.6) je nula. Iz



Slika 5: Element volumena čvrstog tijela

jednadžbe

$$KT_{xx}(x, y)\Delta x\Delta y + KT_{yy}(x, y)\Delta x\Delta y = 0$$

slijedi

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0, \quad (3.7)$$

pa funkcija temperature  $T$  zadovoljava Laplaceovu jednadžbu. Slijedi da je  $T$  harmonijska funkcija na području definicije koje je interior čvrstog tijela.

Primijetimo da su nivo-krivulje  $T(x, y) = c_1$ ,  $c_1 \in \mathbb{R}$  funkcije  $T$  *izoterme*. U tom slučaju  $T(x, y)$  možemo interpretirati kao temperaturu u točki  $(x, y)$  tankog sloja materijala u ravnini, pri čemu su obje strane tog sloja toplinski izolirane. Gradijent funkcije  $T$  okomit je na izotermu u svakoj njenoj točki, a najveći tok topline u nekoj točki u smjeru je gradijenta funkcije  $T$  u toj istoj točki.

Ako je  $T(x, y)$  temperatura tankog sloja materijala čvrstog tijela, a  $S$  harmonijski konjugat funkcije  $T$ , tada je nivo-krivulji  $S(x, y) = c_2$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$  gradijent funkcije  $T$  tangencijalni vektor u svakoj točki u kojoj je analitička funkcija  $T(x, y) + iS(x, y)$  konformna. Krivulje  $S(x, y) = c_2$  zovu se *strujnice*.

Ukoliko je  $\frac{dT}{dN} = 0$  po nekom dijelu ruba tankog sloja materijala, onda je toplinski tok kroz taj dio ruba jednak nuli, tj. dio ruba je toplinski izoliran, odnosno on je strujnica.

### 3.1 Stacionarna raspodjela temperature u gornjoj poluravnini

Pronađimo izraz za temperaturu  $T(x, y)$  tanke beskonačne ploče u ravnini  $XOY$  zadane jednadžbom  $y \geq 0$ . Pretpostavimo da su strane ploče toplinski izolirane, a temperatura ruba ploče  $y = 0$  svugdje je nula osim na intervalu  $(-1, 1)$ , gdje je jednaka jedan. Funkcija  $T(x, y)$  na toj je ploči ograničena, a s fizikalnog aspekta ima smisla pretpostaviti da se  $T(x, y)$  približava nuli kako  $y$  teži u beskonačnost. Dobivamo sljedeći rubni problem:

$$\begin{aligned} T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) &= 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad y > 0) \\ T(x, 0) &= \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

pri čemu je  $|T(x, y)| < M$ , za neku pozitivnu konstantu  $M \in \mathbb{R}$ .

Ovo je Dirichletov problem za gornju  $XOY$ -poluravninu. Riješit ćemo ga tako da ga transformiramo u novi Dirichletov problem za područje u  $UV$ -ravnini. To područje bit će slika  $XOY$ -poluravnine dobivena preslikavanjem  $w = f(z)$  koje je analitičko na domeni  $y > 0$  i konformno duž ruba  $y = 0$ , osim u točkama  $(\pm 1, 0)$ , gdje  $f$  nije definirano. Primjenom teorema 2.4 i 2.5, rješenje problema u ravnini  $UV$  preslikat ćemo u rješenje problema u ravnini  $XOY$ . Specijalno, harmonijsku funkciju u varijablama  $u$  i  $v$  preslikat ćemo u harmonijsku funkciju u varijablama  $x$  i  $y$ , a rubni uvjeti u  $UV$ -ravnini bit će sačuvani na odgovarajućim dijelovima ruba u  $XOY$ -ravnini.

Neka je  $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$ , uz  $0 \leq \theta_k \leq \pi$  ( $k = 1, 2$ ). Preslikavanje

$$\begin{aligned} \omega &= \log \frac{z - 1}{z + 1} \\ &= \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \quad \left( \frac{r_1}{r_2} > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= \ln \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| + i \arg \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

je definirano na gornjoj poluravnini  $y \geq 0$ , osim u točkama  $z = \pm 1$ , zbog  $0 < \theta_1 - \theta_2 < \pi$  za  $y \geq 0$ . Sada je vrijednost logaritma glavna grana logaritamske funkcije za  $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$ , pa se kao u primjeru 2 gornja poluravnina

$y \geq 0$  preslikava u horizontalnu traku  $0 < v < \pi$  u ravnini  $\omega$ . Segment na osi  $OX$  između  $z = -1$  i  $z = 1$ , gdje je  $\theta_1 - \theta_2 = \pi$  preslikava se u gornji rub trake, a ostatak osi  $OX$ , gdje je  $\theta_1 - \theta_2 = 0$  se preslikava u donji rub. Cauchy-Riemannovi uvjeti su zadovoljeni pa je funkcija (3.9) analitička i harmonijska.

Harmonijska funkcija od  $u$  i  $v$  koja je jednaka nuli na rubu trake  $v = 0$  i jedinična na rubu  $v = \pi$  je funkcija

$$T = \frac{1}{\pi}v. \quad (3.10)$$

Ona je harmonijska budući da je imaginarna komponenta cijele funkcije  $(1/\pi)\omega$ . Prebacivanjem u koordinate  $x$  i  $y$  u jednadžbi (3.9) dobivamo

$$\begin{aligned} v &= \arg \left[ \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}-1)} \right] = \arg \left[ \frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2} \right] \text{ ili} \\ v &= \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

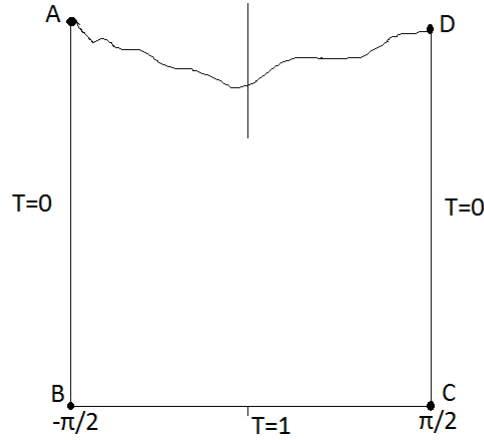
Zbog  $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \theta_1 - \theta_2$  i  $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$ , izraz (3.10) možemo pisati kao

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi). \quad (3.12)$$

Budući da je funkcija (3.10) harmonijska na traci  $0 < v < \pi$  i da je funkcija (3.9) analitička na gornjoj poluravnini  $y > 0$ , po teoremu 2.4 možemo zaključiti da je (3.11) i harmonijska na toj poluravnini. Prema teoremu 2.5, rubni uvjeti za dvije harmonijske funkcije su isti na odgovarajućim dijelovima ruba jer su oblika  $h = h_0$ , pa je stoga funkcija (3.11) rješenje početnog problema.

### 3.2 Stacionarna raspodjela temperature ploče u trodimenzionalnom prostoru

Zamislimo beskonačnu ploču u trodimenzionalnom prostoru ograničenu ravninama  $x = \pm\pi/2$  i  $y = 0$ . Temperatura ploha  $x = \pm\pi/2$  jednaka je nuli, a temperatura plohe  $y = 0$  jednaka je jedan. Želimo naći formulu za temperaturu  $T(x, y)$  u proizvoljnoj točki nutrine ploče. Za ploču čije su strane savršeno izolirane, problem se svodi na problem pronalaska funkcije temperature na tankoj beskonačnoj ploči danoj izrazom  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y \geq 0$ .



Slika 6: Ploča savršeno izoliranih strana

Rubni problem glasi

$$\begin{aligned}
 T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) &= 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right), \\
 T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) &= T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \quad (y > 0), \\
 T(x, 0) &= 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

pri čemu je funkcija  $T(x, y)$  ograničena. Kao u primjeru 1, preslikavanje  $\omega = \sin z$  transformira dani problem u problem stacionarnog provođenja topline u gornjoj poluravnini. Prema pododjeljku 3.1, dobivamo

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi). \tag{3.14}$$

Zamjenom varijabli  $u = \sin x \cosh y$ ,  $v = \cos x \sinh y$  dobivamo

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2 \cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2 \cos x \sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2(\cos x / \sinh y)}{1 - (\cos x / \sinh y)^2} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\cos x}{\sinh y} \right) \quad \left(0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Budući da je  $\omega = \sin z$  analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini, a funkcija (3.14) je harmonijska na poluravnini  $v > 0$  i zadovoljava  $T = 1$  za  $|u| < 1$  i  $v = 0$  te  $T = 0$  za  $|u| > 1$  i  $v = 0$ , slijedi da je (3.15) harmonijska funkcija na ploči  $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$  i zadovoljava granične uvjete u (3.13). Dodatno vrijedi  $|T(x, y)| \leq 1$  pa smo našli traženu funkciju temperature.

### 3.3 Stacionarna raspodjela temperature u kvadrantu

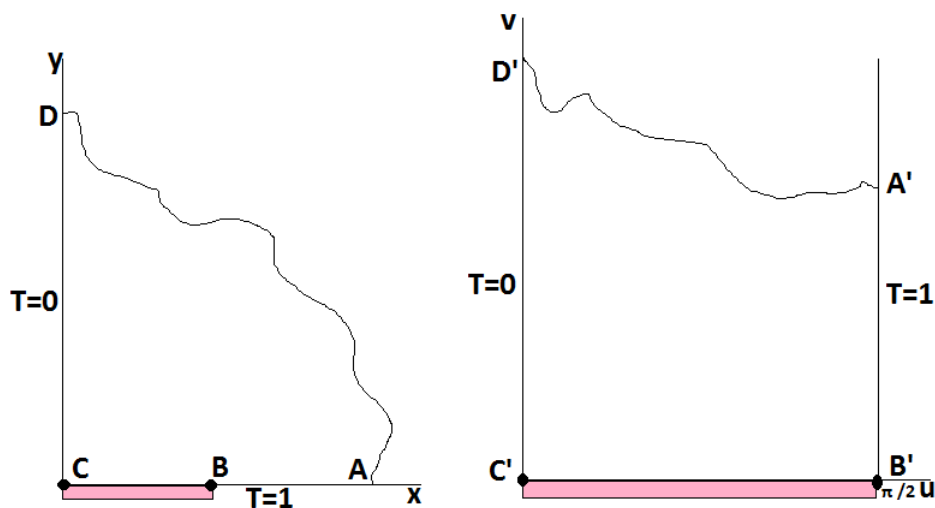
Pronađimo formulu za temperaturu tanke ploče u obliku kvadranta, ako je segment na kraju jednog ruba toplinski izoliran, ostatak tog ruba je na fiksnoj temperaturi, a drugi rub na je na nekoj drugoj fiksnoj temperaturi. Strane ploče su izolirane pa je problem dvodimenzionalan. Temperaturnu skalu i jedinicu duljine možemo odabrati na način da rubni problem za funkciju temperature  $T$  postane:

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy} = 0 \quad (x > 0, y > 0), \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} T_y(x, 0) = 0, & \text{za } 0 < x < 1 \\ T(x, 0) = 1, & \text{za } x > 1, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$T(0, y) = 0 \quad (y > 0), \quad (3.18)$$

pri čemu je  $T(x, y)$  ograničena unutar kvadranta.



Slika 7: Preslikavanje  $z = \sin \omega$

Bijektivno preslikavanje  $z = \sin \omega$  beskonačnu ploču  $0 \leq u \leq \pi/2, v \geq 0$  preslikava na kvadrant  $x \geq 0, y \geq 0$ . Budući da je  $z = \sin \omega$  konformno svugdje na traci osim u točki  $\omega = \pi/2$ , inverzno preslikavanje mora biti konformno na kvadrantu, osim u točki  $z = 1$ . Stoga, rješenje zadanog problema možemo naći tražeći funkciju koja je harmonijska na traci i zadovoljava granične uvjete prikazane na slici 7 desno.

Tražena funkcija temperature za novi rubni problem je

$$T = \frac{2}{\pi}u, \quad (3.19)$$

pri čemu je funkcija  $(2/\pi)u$  realni dio funkcije  $(2/\pi)\omega$ . Za  $0 < u < \pi/2$  vrijedi  $\sin u \neq 0$  i  $\cos u \neq 0$ , pa zamjenom varijabli kao u (2.2)

$$x = \sin u \cosh v, \quad y = \cos u \sinh v, \quad (3.20)$$

dobivamo

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \quad (3.21)$$

Primijetimo da za svaki fiksni  $u$  hiperbola (3.21) ima fokuse u točkama  $z = \pm\sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = \pm 1$  i da duljina glavne osi iznosi  $2 \sin u$ . Tada je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti između oba fokusa i točke  $(x, y)$  koja leži na hiperboli u prvom kvadrantu jednaka

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \sin u.$$

Iz (3.20) slijedi da jednakost vrijedi i za slučajeve  $u = 0$  i  $u = \pi/2$ . Uvrštavanjem u (3.19) dobivamo da je tražena funkcija temperature dana formulom

$$T = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}. \quad (3.22)$$

## 4 Zaključak

Problem provođenja topline vrlo je složen. No, ukoliko se ograničimo na dvodimenzionalni problem i izostavimo vremensku ovisnost, problem postaje jednostavniji. U slučaju da su geometrijska svojstva takvog problema komplicirana, primjenom konformnih preslikavanja možemo konstruirati novi problem čija su geometrijska svojstva jednostavna i poznata pa je lako doći do rješenja originalnog problema.



## Literatura

- [1] J. W. Brown, R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*,  
*Eigth Edition*, New York, 2009.
- [2] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, Skripta, PMF - matematički odjel,  
Sveučilište u Zagrebu, 2009.
- [3] M. Mikoč, *Građevni materijali*,  
Građevinski fakultet Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek,  
2006.