Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Kraljević

Linearna algebra u stvarnom životu

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Kraljević

Linearna algebra u stvarnom životu

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2020.

Sadržaj

Sažetak

U ovom završnom radu navest ćemo nekoliko primjena linearne algebre u svakodnevnom životu. U prvom dijelu rada definirat ćemo matrice, navest ćemo matrične operacije, iskazati i dokazati svojstva množenja matrica i objasniti dva primjera u kojima se koristi primjena matričnog zapisa i produkta matrica. U drugom dijelu navest ćemo teorijski dio vezan uz sustave linearnih jednadžbi i pokazati primjenu u kemiji, preciznije, u kemijskim reakcijama. Na samom kraju rada pokazat ćemo zanimljive transformacije u računalnoj grafici koje koriste rezultate linearne algebre te ćemo ih slikovno prikazati preko primjera.

Ključne riječi: linearna algebra, primjena, matrice, sustavi linearnih jednadžbi, 2D transformacije

Abstract

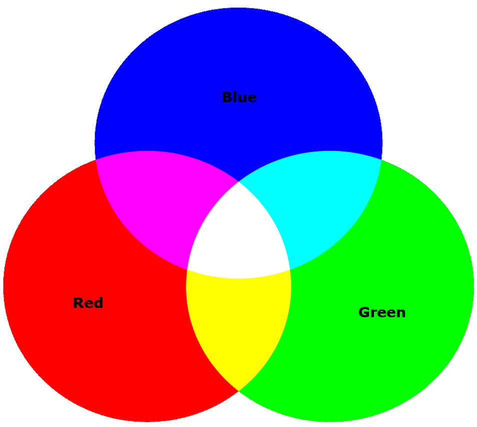
In this final paper, we will list several applications of linear algebra in everyday life. In the first part of the paper we will define matrices, list matrix operations, state and prove the properties of matrix multiplication and explain two examples in which the application of matrix notation and matrix product is used. In the second part, we will present the theoretical part related to systems of linear equations and show the application in chemistry, more precisely, in chemical reactions. At the very end of the paper, we will show interesting transformations in computer graphics that use the results of linear algebra and we will illustrate them with examples.

Keywords: linear algebra, applications, matrices, systems of linear equations, 2D transformations

1 Uvod

Tema ovog završnog rada je linearna algebra u stvarnom životu. ***Linearna algebra*** je grana matematike koja se bavi proučavanjem vektora, matrica, linearnih operatora, sustava linearnih jednadžbi, te općenito vektorskih prostora i linearnih transformacija. Vektorski prostori imaju važnu ulogu u modernoj matematici pa zbog toga linearna algebra nalazi široku primjenu u drugim matematičkim disciplinama. Osim u matematici, može se vrlo često primjeniti i na ostale prirodne i društvene znanosti.

Ono čime ćemo se mi baviti, kao što je već spomenuto na početku, jest primjena u stvarnom životu. Primjerice, jedna zanimljiva primjena je korištenje linearnih kombinacija u miješanju boja. Pa tako spektar koji možemo vidjeti našim okom je kombinacija određene količine triju boja: crvene, zelene i plave. Boja se može pohraniti dodjeljivanjem ovih triju boja u rasponu od 0 do 255 za svaku, pa će tako, na primjer, uređena trojka $(0, 0, 0)$ predstavljati *crnu* boju, $(255, 255, 255)$ *bijelu* boju, dok će $(255, 0, 0)$ predstavljati *crvenu* boju najjačeg inteziteta. Iz ovoga vidimo da se svaka boja može napisati u obliku vektora, dok se svaka slika može zapisati u obliku (m, n) matrice, to jest za svaku se sliku može smatrati da se sastoji od (m, n) piksela koji svaki ima svoju boju. Određenim transformacijama se dolazi do mijenjanja boja na slici. Ovakav postupak se naziva *RGB model*.



RGB model

S ovim malim primjerom možemo zaključiti da je linearna algebra sveprisutna u stvarnom životu, stoga ćemo navesti neke od njih u radu.

Na samom početku rada ćemo definirati matricu i kroz cijeli rad vidjeti koliko je zapravo važan matrični zapis zbog široke primjene koju ima. Pojam matrica uveo je engleski matematičar iz 19. stoljeća James Sylvester, a njegov prijatelj matematičar, Arthur Cayley, je 1850-ih u dva svoja rada predstavio teoriju matrica. Prvo ih je primjenio na proučavanje sustava linearnih jednadžbi, gdje su još uvijek vrlo korisne. Upravo o takvim sustavima ćemo se dotaknuti u drugom dijelu rada. Naime, linearni sustavi jednadžbi imaju korisnu primjenu u linearnim ekonomskim modelima, linearnim igrama, analizi mreže, električnim mrežama koje daju informaciju o izvorima napajanja poput baterija i uređajima koji se napajaju tim izvorima kao što su žarulje ili motori. Pokazat ćemo kako korištenjem sustava linearnih jednadžbi možemo izjednačiti kemijsku jednadžbu. U zadnjem poglavlju rada ćemo vidjeti primjenu linearne algebre u računalnoj grafici i pokazati kako koristimo matrice za predstavljanje rotacija i drugih transformacija slike.

2 Matrice

2.1 Osnovno o matricama

Prve dvije primjene koje ćemo spomenuti koristit će neke rezultate o matricama, njihovom načinu zapisivanja i računskim operacijama. Prvo ćemo ih definirati i reći osnovno o njima. Teorijski dio vezan za ovo poglavlje je preuzet iz [7] i [4].

Definicija 2.1. *Neka je $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ polje, a $m, n \geq 1$ prirodni brojevi. Preslikavanje*

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

*zovemo **matrica** tipa (m, n), a vrijednost $A(i, j) \in \mathbb{F}$ **element** (koeficijent) matrice. Element matrice možemo označavati i s a_{ij} ili $[A]_{ij}$. Uobičajeno je da se skup svih vrijednosti preslikavanja A također zove matrica i označava kao*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Elementi matrice A raspoređeni su u m *redaka* i n *stupaca.* Uređenu n-torku $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ nazivamo i-ti ***redak*** matrice A, a uređenu m-torku $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ j-ti ***stupac*** matrice A. Elementi matrice A indeksirani su na način koji odmah ukazuje na njihov položaj u matrici. Element a_{ij} se nalazi na presjeku i-tog retka i j-tog stupca.

Definicija 2.2. *Matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ su **jednake** ako su jednake kao preslikavanja, to jest ako su istog tipa te su im elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki. Pišemo $A = B$.*

Definicija 2.3. ***Zbroj matrica** $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ tipa (m, n) je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, n) za čije elemente vrijedi*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, , \ldots, n$. Pišemo $C = A + B$.

Definicija 2.4. ***Umnožak matrice** $A = [a_{ij}]$ tipa (m, n) **skalarom** $\lambda \in \mathbb{F}$ je matrica $B = [b_{ij}]$ tipa (m, n) za čije elemente vrijedi*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$. Pišemo $B = \lambda A$.

Definicija 2.5. *Matrice A i B su **ulančane** ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.*

Definicija 2.6. *Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ ulančane matrice tipa (m, n) i (n, p). **Umnožak matrica** A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, p) čiji su elementi dani sljedećom formulom:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

*za $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$. Pišemo $C = A \cdot B = AB$. Na ovaj način definirali smo operaciju **množenja matrica***

$$\cdot : M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{np}(\mathbb{F}) \to M_{mp}(\mathbb{F}).$$

Možemo pamtiti da (i,j)-ti element produkta AB dobivamo tako što i-ti redak matrice A pomnožimo *skalarno* s j-tim stupcem matrice B. Pogledajmo to u idućem primjeru.

Primjer 2.1. *Neka su* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. *Izračunajmo* $A \cdot B$ *i* $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \\ 5 \cdot 2 + 7 \cdot 6 & 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{bmatrix}$$

Možemo vidjeti kako $AB \neq BA$, odnosno množenje matrica nije komutativno.

Propozicija 2.1 (Svojstva množenja matrica). *Množenje matrica je:*

1. ***kvaziasocijativno**, to jest*

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B),$$

za sve $\lambda \in \mathbb{F}$, *te* A *i* B *za koje je izraz definiran.*

Dokaz. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada su matrice $(\lambda A)B$, $\lambda(AB)$ i $A(\lambda B)$ tipa (m,n). Vrijedi:

$$[(\lambda A)B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\lambda A]_{ik}[B]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda [A]_{ik})[B]_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj} = \lambda [AB]_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$. Na isti način možemo pokazati i preostalu jednakost. □

2. ***distributivno prema zbrajanju matrica**, to jest*

$$(A+B)C = AC + BC, A(B+C) = AB + AC,$$

za sve A, B *i* C *za koje je izraz definiran.*

Dokaz. Neka su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $C \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada su $(A+B)C, AC + BC \in M_{mp}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} [(A+B)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A+B]_{ik}[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} ([A]_{ik} + [B]_{ik})[C]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[C]_{kj} + \sum_{k=1}^{n} [B]_{ik}[C]_{kj} = [AC]_{ij} + [BC]_{ij} = [AC+BC]_{ij}, \end{aligned}$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$. Na isti način možemo dokazati i drugu jednakost. □

3. ***asocijativno**, to jest*

$$(AB)C = A(BC),$$

za sve matrice A, B *i* C *za koje je izraz definiran.*

Dokaz zadnje tvrdnje može se pronaći u [4].

2.2 Primjena u ekonomiji: Rekord prodaje

U ovom primjeru ćemo pokazati primjenu matričnog zapisa i množenja matrica u rekordu prodaje neke tvornice određenom broju trgovina. Naime, tvornica šalje određeni broj četiri vrste proizvoda u tri trgovine. To možemo prikazati u matričnom obliku:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

gdje a_{ij}-ti član predstavlja količinu j-tog proizvoda koji je poslan u i-tu trgovinu. Pojedinačna cijena i pojedinačna težina također se može prikazati u matričnom obliku:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix},$$

gdje b_{i1} predstavlja pojedinačnu cijenu i-tog proizvoda, a b_{i2} pojedinačnu težinu i-tog proizvoda. Koristeći definiciju množenja matrica, vidimo da matrice A i B možemo pomožiti jer imamo dobro definiran produkt, odnosno $AB = C = [c_{ij}]$, gdje c_{i1} predstavlja ukupnu cijenu proizvoda u i-toj trgovini, a c_{i2} ukupnu težinu proizvoda u i-toj trgovini. Pogledajmo to s konkretnim brojevima prikazanim u sljedećoj tablici:

	Klima uređaj	Hladnjak	55" TV	65" TV
Trgovina 1	30	20	50	20
Trgovina 2	0	7	10	0
Trgovina 3	50	40	50	50
Pojedinačna cijena(kn)	2200	1400	2700	4000
Pojedinačna težina(kg)	30	70	9	11

Tablica 2.1: Prodajna lista

Dakle, podatke vezane uz broj četiri vrste proizvoda koje tvornica šalje u tri različite trgovine može se napisati u obliku sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 & 20 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \\ 50 & 40 & 50 & 50 \end{bmatrix},$$

a pojedinačnu cijenu izraženu u kunama i pojedinačnu težinu izraženu u kilogramima na sljedeći način:

$$B = \begin{bmatrix} 2200 & 30 \\ 1400 & 70 \\ 2700 & 9 \\ 4000 & 11 \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ dobit ćemo novu matricu $C = [c_{ij}]$ čiji će prvi stupac predstavljati ukupnu zaradu tvornice prodanih proizvoda za svaku trgovinu zasebno, a drugi stupac ukupnu težinu. Pomnožimo ih:

$$AB = C = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 & 20 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \\ 50 & 40 & 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2200 & 30 \\ 1400 & 70 \\ 2700 & 9 \\ 4000 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 309000 & 2970 \\ 36800 & 580 \\ 501000 & 5300 \end{bmatrix}.$$

Ovim primjerom vidjeli smo korisnu primjenu matričnog zapisa, te kako množenjem matrica lako možemo doći do određenih informacija koje nas zanimaju vezanih uz prodaju u ekonomiji.

2.3 Primjena u svakodnevnoj kupovini

U ovoj primjeni ćemo također vidjeti upotrebu matričnog zapisa i produkta matrica, ali u primjeru koji provodimo svakodnevno kupujući proizvode u trgovinama. Zanima nas iznos konačnog računa koji će biti najpovoljniji za nas, odnosno iznos koji će biti najmanji. Pogledajmo to u konkretnom primjeru.

Tri osobe, označimo ih s *Osoba 1*, *Osoba 2* i *Osoba 3*, kupuju četiri vrste proizvoda u dvije različite trgovine koje označimo s *Trgovina 1* i *Trgovina 2*. Naš zadatak je pronaći trgovinu u kojoj će konačni račun biti najpovoljniji za svaku osobu, odnosno tražimo trgovinu u kojoj će iznos računa biti najmanji za svaku osobu posebno. Individualna količina proizvoda koju svaka osoba kupuje prikazana je u tablici 2.2, a pojedinačna cijena svakog proizvoda izražena u kunama u dvije različite trgovine u tablici 2.3.

	Kiflica	Kroasan	Kolač	Kruh
Osoba 1	6	5	1	3
Osoba 2	3	6	2	2
Osoba 3	3	4	1	3

Tablica 2.2: Individualna količina proizvoda

	Trgovina 1	Trgovina 2
Kiflica	1.50	1
Kroasan	2	2.50
Kolač	16	17
Kruh	5	4.50

Tablica 2.3: Cijene proizvoda u trgovinama

Koristeći podatke iz obje tablice možemo vidjeti da iznos koji je *Osoba 1* potrošila u *Trgovini 1* je:

$$6 \cdot 1.50 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 16 + 3 \cdot 5 = 50,$$

a u *Trgovini 2*:

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 2.50 + 1 \cdot 17 + 3 \cdot 4.50 = 49.$$

Na isti način izračunamo iznose i za preostale dvije osobe. Tako će *Osoba 2* u *Trgovini 1* potrošiti:

$$3 \cdot 1.50 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 5 = 58.50,$$

a u *Trgovini 2*:

$$3 \cdot 1 + 6 \cdot 2.50 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 4.50 = 61.$$

Iznos *Osobe 3* potrošen u *Trgovini 1* je:

$$3 \cdot 1.50 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 16 + 3 \cdot 5 = 43.50,$$

dok je u *Trgovini 2*:

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2.50 + 1 \cdot 17 + 3 \cdot 4.50 = 43.50.$$

Ovaj izračun možemo zapisati u matričnom obliku, odnosno kao produkt upravo ta dva matrična zapisa.
Podatke iz tablice 2.2 zapišimo u obliku sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

a podatke iz tablice 2.3 na sljedeći način:

$$B = \begin{bmatrix} 1.50 & 1 \\ 2 & 2.50 \\ 16 & 17 \\ 5 & 4.50 \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica A i B dobivamo sljedeći produkt:

$$AB = C = \begin{bmatrix} 50 & 49 \\ 58.50 & 61 \\ 43.50 & 43.50 \end{bmatrix}.$$

Prvi redak matrice C predstavlja iznos *Osobe 1* potrošen u obje tgovine, odnosno element c_{11} matrice C označava iznos računa *Osobe 1* u *Trgovini 1*, a element c_{12} iznos računa *Osobe 1* u *Trgovini 2*. Vidimo da će *Osoba 1* imati manji iznos računa u *Trgovini 2*.
Na isti način, drugi redak matrice C će predstavljati podatke vezane za *Osobu 2*, a treći redak za *Osobu 3*.

Uspoređujući iznose potrošene u obje trgovine za svaku osobu zasebno možemo zaključiti da je iznos računa *Osobe 1* manji u *Trgovini 2*, od *Osobe 2* je manji u *Trgovini 1*, dok je *Osoba 3* potrošila jednak iznos novca u obje trgovine.

3 Sustavi linearnih jednadžbi

3.1 Osnovni pojmovi sustava linearnih jednadžbi

Treću primjenu koju ćemo obraditi vezat će se uz sustave linearnih jednadžbi, a kako bi ju što bolje mogli razumjeti, uvest ćemo osnovne pojmove, definicije i tvrdnje vezane upravo za njih. Definicije i tvrdnje su preuzete iz [2] i [6].

Definicija 3.1. ***Linerna jednadžba*** *nad poljem $\mathbb{F}$ od n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednadžba oblika*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{F}$.
Opći sustav linearnih jednadžbi *nad poljem $\mathbb{F}$ sastoji se od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, $m,n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3.1}$$

gdje se skalari $a_{ij} = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ zovu ***koeficijenti*** *sustava, a $b_1, b_2, \ldots, b_m$* ***slobodni članovi****.*

Definicija 3.2. ***Rješenje sustava*** *3.1 je svaka uređena n-torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ za koju supstitucija $x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2, \ldots, x_n = \gamma_n$ zadovoljava sve jednadžbe.*

Za sustav 3.1 obično koristimo sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

koje redom nazivamo ***matrica sustava***, ***matrica nepoznanica***, ***matrica slobodnih članova*** i ***proširena matrica sustava***.
Uz pomoć ovako uvedenih oznaka sustav 3.1 možemo pisati u ekvivalentnom obliku:

$$AX = B.$$

Sustav 3.1 može biti rješiv (ima jedinstveno rješenje ili beskonačno mnogo rješenja) ili nerješiv (nema rješenja).
Na primjer, sustav

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje $(1, 1)$ i to je primjer rješivog sustava.

Sada kada smo definirali sustave linearnih jednadžbi, te njihovo rješenje, zanimaju nas načini kako smo do tih rješenja došli. Onaj koji ćemo mi kasnije koristiti u primjeni naziva se Gauss-Jordanova metoda eliminacije. Ona je proširenje Gaussove metode eliminacije čija se ideja temelji na tome da se pomoću elementarnih tranformacija ponište elementi koji se nalaze ispod glavne dijagonale, odnosno na tome da matricu svedemo na gornjestepenastu. Na takav način dobijemo novi sustav koji je ekvivalentan početnom. (Pokazano u [2].)

Definicija 3.3. ***Elementarne transformacije*** *sustava 3.1 su:*

1. *zamjena poretka dviju jednadžbi,*
2. *množenje proizvoljne jednadžbe skalarom $\lambda \neq 0$,*
3. *množenje proizvoljne jednadžbe sustava skalarom λ i pribrajanje rezultata bilo kojoj drugoj jednadžbi sustava.*

Teorem 3.1. *Primjenom elementarnih transformacija po retcima svaka se matrica različita od nule može svesti na gornjestepenasti oblik.*

Skica dokaza prethodnog teorema može se vidjeti u [1].

Kod Gauss-Jordanove metode eliminacije matricu elementarnim transformacijama svodimo na gornjestepenastu, odnosno ako je

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

proširena matrica sustava, tada se ona elementarnim transformacijama svodi na

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & c_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m \end{array}\right],$$

gdje je $r = r(A)$. U nastavku rada definirat ćemo što je to $r(A)$. Iz izgleda dobivene proširene matrice odmah možemo vidjeti da će sustav biti rješiv ako i samo ako je

$$c_{r+1} = \cdots = c_m = 0.$$

Više o tome može se vidjeti u [2].

Sustav s kojim ćemo se susresti u primjeni je tip sustava koji uvijek ima barem jedno rješenje. Definirajmo ga.

Definicija 3.4. *Kaže se da je sustav linearnih jednadžbi* ***homogen*** *ako vrijedi $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$*

Drugim riječima, homogen sustav ima proširenu matricu oblika $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array}\right]$.
Na primjer, homogen sustav je:

$$x + y - z = 0$$
$$x + 2y + 2z = 0.$$

Homogen sustav je uvijek rješiv jer svaki homogen sustav ima barem trivijalno rješenje. Uvedimo još definiciju ranga matrice u terminu koji će nam biti prikladan za primjenu i pripadni teorem.

Definicija 3.5. ***Rang*** *matrice A,u oznaci r(A), je broj nenul redaka u njenom gornjestepenastom obliku.*

Teorem 3.2. *Neka je A matrica sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica, te s d označimo broj zavisnih varijabli. Ako je sustav rješiv, tada vrijedi*

$$d = n - r(A).$$

Dokaz prethodne tvrdnje može se vidjeti u [2].
Idući teorem nam upravo govori kada homogen sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Taj rezultat će nam biti potreban i u primjeni.

Teorem 3.3. *Ako je $[\ A \mid 0\ ]$ homogen sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, gdje je $m < n$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja.*

Dokaz. Prema teoremu 3.2 i oznakama koje smo prethodno uveli imamo

$$d = n - r(A) \geq n - m > 0.$$

Dakle, postoji barem jedna zavisna varijabla, pa prema tome postoji beskonačno mnogo rješenja. □

3.2 Primjena u izjednačavanju kemijskih jednadžbi

Sustave linearnih jednadžbi susrećemo često u svakodnevnom životu. Jedna korisna primjena istih koristi se u kemiji pri izjednačavanju kemijskih jednadžbi. Naime, kada se dogodi kemijska reakcija, molekule koje nazivamo reaktanti se kombiniraju kako bi tvorile nove molekule koje zovemo produkti. Tu se uvodi pojam uravnotežene kemijske jednadžbe – algebarska jednadžba koja daje relativni broj reaktanata i produkata u reakciji i ima isti broj atoma svake vrste i s lijeve i s desne strane.
Primjerice, nama najbliža uravnotežena kemijska reakcija je stvaranje molekule vode pri čemu sudjeluju molekule vodika i kisika. Pripadna kemijska jednadžba je $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$, što znači da se dvije molekule vodika kombiniraju s jednom molekulom kisika, te nastaju dvije molekule vode. Vidimo da je jednadžba uravnotežena jer na obje strane imamo po 4 atoma vodika i 2 atoma kisika.
Korisno je za primjetiti da svaka kemijska jednadžba nije jedinstvena. Pomnožimo li obje strane kemijske jednadžbe s nekim pozitivnim cijelim brojem jednadžba će također biti uravnotežena što znaći da rješenje kemijske jednadžbe nije jedinstveno.
Samu tehniku određivanja broja reaktanata i produkata provodimo rješavanjem homogenog sustava linearnih jednadžbi. Pogledajmo to u idućem primjeru.

3.2.1 Reakcija fotosinteze

U ovom primjeru ćemo pronaći brojeve reaktanata i produkata u procesu fotosinteze*. Označimo broj molekula *ugljikova dioksida,vode, glukoze* i *kisika* redom sa x, y, z i w. Tražimo uravnoteženu kemijsku jednadžbu oblika

$$xCO_2 + yH_2O \longrightarrow zC_6H_{12}O_6 + wO_2.$$

*Fotosinteza-proces koji se odvija u kloroplastima biljnih stanica u kojima biljka iz ugljikova dioksida (CO_2) i vode (H_2O), uz pomoć Sunčeve energije stvara šećer glukozu ($C_6H_{12}O_6$) i kisik (O_2)

Usporedimo broj atoma reaktanata ugljika, kisika i vodika s brojem atoma produkata istih i dobijemo tri linearne jednadžbe:
UGLJIK: $x = 6z$
KISIK: $2x + y = 6z + 2w$
VODIK: $2y = 12z$.
Napišemo jednadžbe u standardnom obliku i vidimo da smo dobili homogeni sustav od 3 linearne jednadžbe s 4 nepoznanice:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & 6z & & & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 6z & - & 2w & = & 0 \\ & & 2y & - & 12z & & & = & 0 \end{array}$$

Prema teoremu 3.3 taj će sustav imati beskonačno mnogo netrivijalnih rješenja.
Primjenjujemo Gauss-Jordanovu metodu eliminacije kako bi odredili nepoznanice:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

Iz ovog rezultata nam slijedi:

$$\begin{aligned} x &= w \\ y &= w \\ z &= \tfrac{1}{6}w. \end{aligned}$$

Za w odaberemo najmanju pozitivnu cjelobrojnu vrijednost koja će proizvesti cjelobrojne varijable x, y i z. Stoga za w odaberemo vrijednost 6 i iz toga dobivamo: $x = 6$, $y = 6$, $z = 1$ i $w = 6$, odnosno uravnotežena kemijska jednadžba je oblika:

$$6CO_2 + 6H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2.$$

Time smo riješili problem i našli broj reaktanata i produkata u našoj reakciji fotosinteze.

4 Linearna algebra u računalnoj grafici

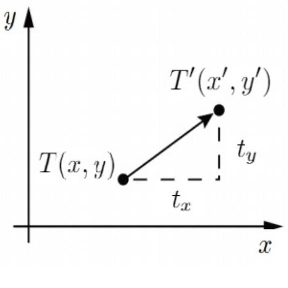
U ovom zadnjem poglavlju ćemo se baviti proučavanjem linearne algebre u računalnoj grafici. ***Računalna grafika*** je računalno područje koje uključuje stvaranje, pohranjivanje i obradu slikovnog sadržaja putem računala. Počela je napredovati u 1960-ima kada je omogućeno prvo interaktivno stvaranje grafičkog sadržaja i od tada se razvija vrlo brzo. Računalo ima široku primjenu u znanosti, inženjerstvu, umjetnosti, a posebno na polju zabave: filmovi i video igre. U filmskoj industriji je zastupljena za stvaranje raznih efekata, animacija i ostalih manipulacija nad pokretnim slikama. Prilikom izrade kompleksnih scena, često smo u situaciji da neki objekt želimo pomaknuti, promijeniti mu veličinu ili ga zarotirati oko neke točke. Uporabom matričnog računa i koordinata svaka se od spomenutih operacija može prikazati kao jedna matrica. Izvođenje takve operacije svodi se na matrično množenje. Naime, ako točku želimo pomaknuti jednostavno joj dodamo matricu translacije, točku koju želimo rotirati pomnožimo matricom rotacije i slično. Iz ovog razloga matrični je prikaz ovih operacija izuzetno pogodan u grafičkim aplikacijama i toliko je čest da zapravo čini temelj izvođenja grafičkih operacija i jezgru svih popularnih biblioteka za rad s grafikom. U ovom poglavlju ćemo, zbog jednostavnijeg prikaza odnosa matričnog zapisa i geometrijskih transformacija, pogledati kako se definiraju spomenute operacije u 2D prostoru, a na analogan način se mogu definirati i u 3D prostoru.

4.1 2D transformacije

Temeljni dijelovi računalne grafike su geometrijske transformacije koje mogu promijeniti položaj, veličinu, orijentaciju i oblik predmeta, a zovemo ih ***2D geometrijske transformacije***. One koje ćemo mi obraditi su: *translacija, rotacija, skaliranje, refleksija i promjena nagiba.* Prije nego svaku obradimo recimo da se svaka točka s koordinatama (x, y) može prikazati u matričnom obliku. Tako će naša točka $T = (x, y)$ imati sljedeću matricu: $T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

4.1.1 Translacija

Prva 2D transformacija koju ćemo obraditi je translacija. U računalnoj grafici ***translacija*** je postupak premještanja predmeta iz jednog položaja u drugi u dvodimenzionalnoj ravnini. Pogledajmo to na primjeru premještanja točke $T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ u novu točku $T' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ za dani vektor[†] $\overrightarrow{t} = t_x \overrightarrow{i} + t_y \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$. Na slici 4.1 grafički je prikazan ovaj postupak.



Slika 4.1: Translacija

[†]Definiciju vektora, operacije s vektorima i definiciju Kartezijevog koordinatnog sustava vidjeti u [7].

Stoga, točka *T'* može biti zapisana u matričnom obliku na sljedeći način:

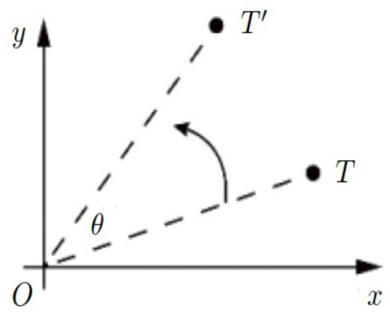
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Rotacija

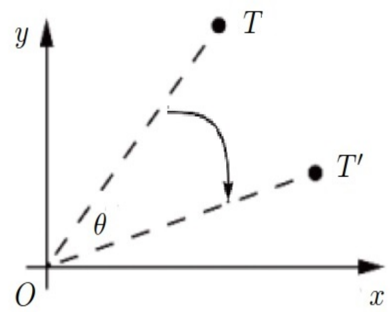
Druga transformacija je ***rotacija***. To je postupak zakretanja predmeta u odnosu na kut u dvodimenzionalnoj ravnini. Neka su zadani točka $O = (0, 0)$ i kut θ. Rotacija oko točke O za kut θ je transformacija koja preslikava svaku točku T u ravnini u točku *T'* za koju vrijede sljedeća svojstva:

- $|OT| = |OT'|$ i
- $\angle TOT' = \theta$.

Prema dogovoru, dvije su vrste rotacije. Rotacija za pozitivan kut θ je zakretanje predmeta u smjeru obrnutom od smjera okretanja kazaljki na satu (slika 4.2), dok je rotacija za negativan kut θ zakretanje predmeta u smjeru okretanja kazaljki na satu (slika 4.3).



Slika 4.2: Kut rotacije pozitivan



Slika 4.3: Kut rotacije negativan

Rotacija točke $T = (x, y)$, smještene pod kutom ϕ od osi apscisa s udaljenošću r od ishodišta koordinatnog sustava, dovodi do nove točke $T' = (x', y')$. Prigodno je da koordinate točke T zapišemo u obliku polarnih koordinata:

$$x = r\cos\phi \tag{4.1}$$

$$y = r\sin\phi. \tag{4.2}$$

Na isti način zapišemo i koordinate točke *T'*:

$$x' = r\cos(\phi + \theta)$$

$$y' = r\sin(\phi + \theta).$$

Koristeći adicijske formule za zboj sinusa i kosinusa i jednadžbe 4.1 i 4.2 dobijemo sljedeće formule za koordinate točke *T'*:

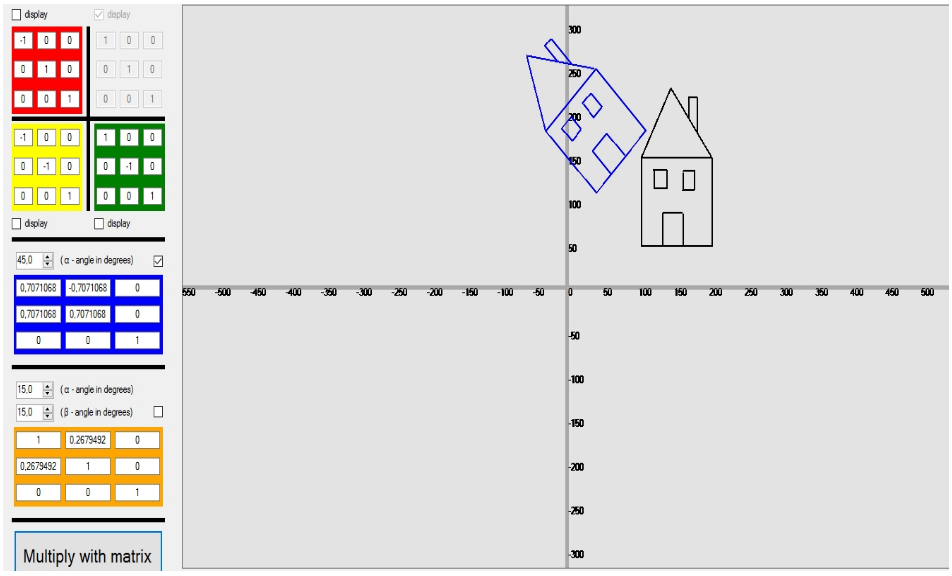
$$x' = r\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta,$$

$$y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Matrični zapis prethodnog izraza je:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Na slici 4.4 prikazan je primjer rotacije predmeta za pozitivan kut $\alpha = 45°$.



Slika 4.4: Primjer rotacije

4.1.3 Skaliranje

Iduća transformacija koju ćemo obraditi zove se ***skaliranje*** ili ***promjena mjerila*** zadanog objekta. Već iz samog naziva vidimo da je to postupak modificiranja ili mijenjanja veličine predmeta. Drugim riječima, to je postupak u kojoj se svaka koordinata mijenja faktorom skaliranja. Neka je zadana točka $T = (x, y)$ i njezini faktori skaliranja S_x, odnosno S_y. Ako vrijedi $S_x = S_y$, onda se radi o ***proporcionalnom*** skaliranju. U suprotnom, ako je $S_x \neq S_y$, onda takvo skaliranje nazivamo ***neproporcionalno*** skaliranje. Ukoliko neki od faktora, S_x ili S_y, sadrži negativan predznak, onda dolazi do zrcaljenja oko koordinatnih osi x ili y, ovisno o tome koji faktor ima negativan predznak. Postupkom skaliranja se spomenuta točka $T = (x, y)$, sa svojim odgovarajućim faktorima, mijenja u novu točku $T' = (x', y')$, za čije će koordinate vrijediti sljedeće:

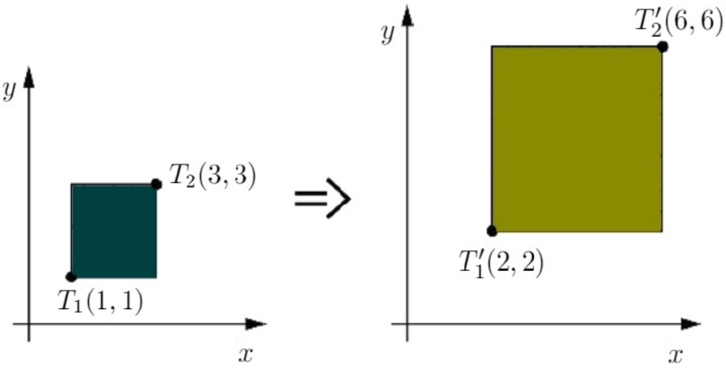
$$x' = S_x \cdot x \tag{4.3}$$

$$y' = S_y \cdot y. \tag{4.4}$$

Izraze 4.3 i 4.4 možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Na primjer, neka su dana dva vrha originalnog kvadrata, $T_1 = (1, 1)$ i $T_2 = (3, 3)$. Ako za faktore skaliranja uzmemo $S_x = S_y = 2$, onda na slici 4.5 možemo vidjeti promjenu mjerila originalnog kvadrata, odnosno dobili smo nove vrhove: $T_1' = (2, 2)$ i $T_2' = (6, 6)$. Analogno se dobiju i preostala dva vrha kvadrata.



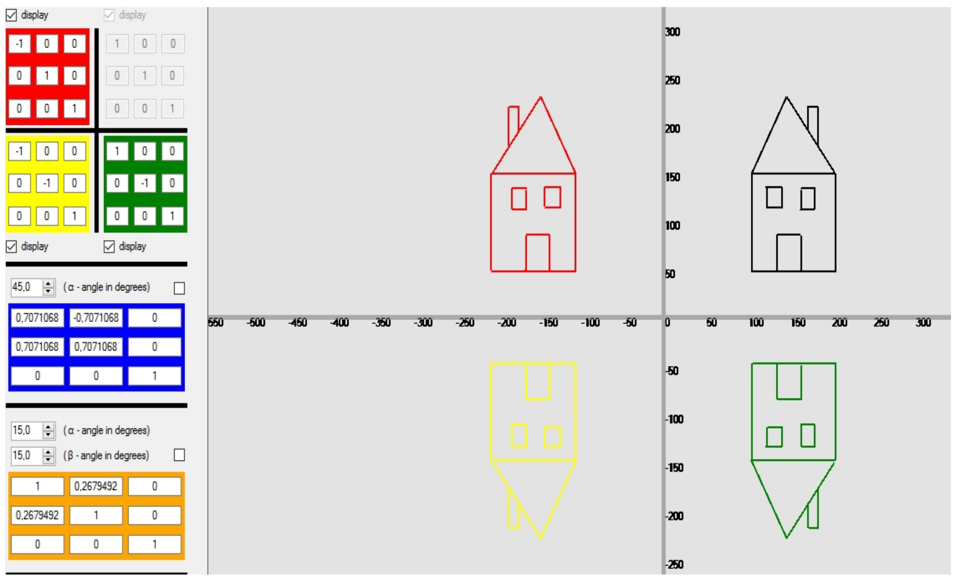
Slika 4.5: Promjena mjerila kvadrata

4.1.4 Refleksija

Iduća transformacija je povezana s prethodnom koju smo obradili. Kako smo naveli u prošlom odjeljku, kod negativnih faktora dolazi do zrcaljenja predmeta oko koordinatnih osi. Upravo takva vrsta transformacije se naziva ***refleksija***. Reflektirani objekt uvijek zadržava svoju početnu veličinu. To je poseban oblik rotacije kod kojeg je kut rotacije jednak 180°. Za faktore skaliranja $S_x = -1$ i $S_y = 1$, predmet se zrcali obzirom na y os. Obratno, ako je $S_x = 1$ i $S_y = -1$, onda dolazi do zrcaljenja predmeta obzirom na x os. A ako imamo slučaj $S_x = S_y = -1$, onda se predmet zrcali obzirom na obje osi x i y. Tako će matrični zapisi prethodno opisanih slučajeva redom izgledati ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

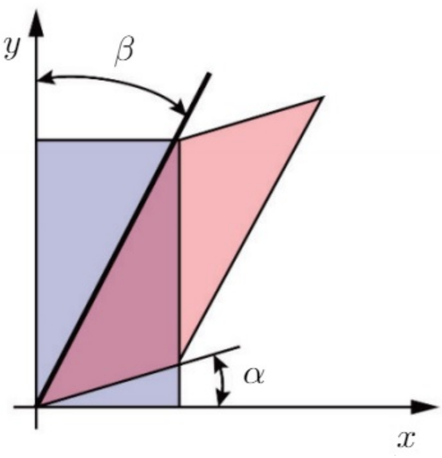
U idućem primjeru, na slici 4.6, možemo vidjeti sva tri slučaja zrcaljenje predmeta. U prvom kvadrantu se nalazi početni, odnosno originalni predmet. U drugom kvadrantu predmet se zrcalio obzirom na y os (faktor $S_x = -1$). U trećem kvadrantu se dogodilo zrcaljenje obzirom na obje osi ($S_x = S_y = -1$), a u četvrtom obzirom na x os ($S_y = -1$).



Slika 4.6: Primjer refleksije predmeta

4.1.5 Promjena nagiba

Posljednja transformacija koju ćemo obraditi je ***promjena nagiba*** objekta, poznatija kao ***"Shear"*** transformacija. U dvodimenzionalnoj ravnini nagib objekta može se mijenjati u odnosu na x i y os. Dakle, postoje dvije vrste promjene nagiba. Na slici 4.7 prikazana je promjena nagiba lika pravokutnika. Kut α predstavlja odstupanje lika od x-osi, a kut β od y-osi.



Slika 4.7: Promjena nagiba

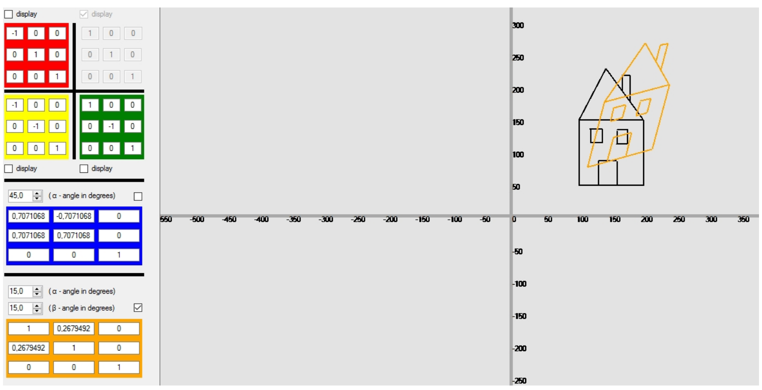
Ako promatramo točku $T = (x, y)$, onda će nova transformirana točka $T' = (x', y')$ imati sljedeće koordinate:

$$x' = x + y \cdot \tan\beta,$$
$$y' = y + x \cdot \tan\alpha.$$

Matrični oblik točke $T' = (x', y')$ onda izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\beta \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Primjerice, na slici 4.8 vidimo promjenu nagiba lika za kutove $\alpha = \beta = 15°$ u odnosu na x i y os.



Slika 4.8: Primjer promjene nagiba lika

Napomena 4.1. *Primjeri za rotaciju, refleksiju i promjenu nagiba prikazani su preko aplikacije "Matrix-Computer Graphics" koja je dostupna na [9].*

Literatura

[1] N. Antonić, *Sustavi linearnih jednadžbi*, nastavni materijali, Prirodoslovno matematički fakultet-Matematički odsjek, Zagreb

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008

[3] J. Deng, *Application of linear algebra in real life*, Marine college of Shandong jiaotong university, Weihai, China, 2014

[4] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra 1*, nastavni materijali, Prirodoslovno matematički fakultet-Matematički odsjek, Zagreb, dostupno online na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf`

[5] N. Lončarić, D. Keček, M. Kraljić, *Matrices in computer graphics*, Tehnički glasnik, 2018, 120-123, dostupno online na: `https://hrcak.srce.hr/202367`

[6] D. Poole, *Linear algebra: A modern introduction*,Cengage Learning; 4th Edition, 2014, 57-136

[7] R. Scitovski, D. Marković, D. Brajković, *Linearna algebra 1*, nastavni materijali, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2020

[8] E. Ulrychová, *Several Simple Real-world Applications of Linear Algebra Tools*, University of Economics, Department of Mathematics, Czech Republic, dostupno online na: `https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf06/WDS06_106_m8_Ulrychova.pdf`

[9] Matrix-Computer graphics, aplikacija dostupna online na: `http://www.mediafire.com/file/84b4dhwonqcb78c/Matrix_-_Computer_Graphics.zip/file`