Grci na financijskom tržištu

Šućur, Kristijan

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Kristijan Šućur

Grci na financijskom tržištu

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Kristijan Šućur

Grci na financijskom tržištu

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Na prvi pogled možda ćete pomisliti kako je tema ovog rada proučavanje grčkog naroda na njihovom financijskom tržištu, no to je kriva pretpostavka. Zadržimo još malo u tajnosti glavnu temu ovog rada. Prije svega motivirati ćemo čitatelja te ćemo objasniti osnovne pojmove na financijskom tržištu kako bi lakše shvatili princip rada financijskih ustanova. Financijske ustanove nam daju mogućnost aktivnog sudjelovanja na financijskom tržištu.

Upoznati ćemo se s osnovnim pojmovima slučajnih procesa te važnim dijelom rada, a to je Brownovo gibanje. Također ćemo definirati Itôv integral i Itôvu formulu koja će nam biti potrebna za određivanje kretanja cijena rizične financijske imovine. Vrlo bitna stvar koju ćemo koristiti u radu, a osmislili su ju Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton 1973. godine, je Black-Scholes-Merton (BSM) formula. Tu formulu ćemo koristiti kako bi izračunali vrijednost izvedenice, odnosno opcije, na financijskom tržištu. Korištenjem formule omogućuje se trgovanje opcijama po nearbitražnoj cijeni.

Sada dolazimo do glavne teme ovoga rada, a to su parametri koje dobijemo raznim računima nad BSM formulom. Parametre nazivamo 'Grci' jer ti parametri nose naziv po grčkim slovima. Oni daju informacije kako bi se trgovci njihovom primjenom zaštitili od rizika kojeg su stekli prodajom ili kupnjom opcija. Također ćemo promotriti na koji način trgovci koriste te parametre u svrhu zaštite od rizika.

1 Osnovni pojmovi

1.1 Motivacija

Prije svega upoznati ćemo se s pojmom financijskog tržišta. U moru mnogih definicija financijskog tržišta izdvojiti ćemo jednu jednostavniju kako bi što bolje shvatili taj pojam.

Definicija 1.1. *Financijsko tržište označava skup institucija i transakcija na kojem se susreću kupci i prodavači i na kojima se odvija trgovanje kapitalom.*

U nastavku ćemo reći što sve smatramo pod kapitalom. Glavni dio ovog rada biti će analiziranje formula i modela na financijskom tržištu. Zbog toga financijsko tržište dijelimo na dva dijela: financijsko tržište u diskretnom vremenu (FTDV) i financijsko tržište u neprekidnom vremenu (FTNV). Nabrojiti ćemo neke razloge zbog kojih postoje matematički modeli na financijskom tržištu. Jedan od osnovnih razloga za korištenje nekog modela je mogućnost opisivanja kretanja cijena financijskih instrumenata (eng. security), koje ćemo opisati u nastavku. Također postoje razni modeli koji mjere, ograničavaju i kontroliraju rizik na financijskom tržištu.

Financijske instrumente na financijskom tržištu dijelimo na osnovne i na izvedene, tzv. izvedenice (eng. derivatives). Osnovne financijske instrumente dijelimo na nerizične i rizične. Nerizični financijski instrument je novac u domaćoj valuti, dok su rizični financijski instrumenti dionice, obveznice, strane valute, zlato, nafta i drugo. Vrijednosti izvedenih financijskih instrumenata dobivamo iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata (najčešće rizičnih). Neke vrste izvedenica su opcije (eng. options), forward ugovori (eng. forward contracts), zamjene (eng. swaps) i mnoge druge. Definirati ćemo neke od njih koje će nam biti potrebne u radu. Izdavanjem raznih izvedenica trgovci se izlažu riziku, no mi ćemo u ovome radu proučavati kako taj rizik smanjiti te ukoliko je moguće potpuno ga neutralizirati.

Definicija 1.2. *Forward ugovor je ugovor u kojemu je cijena financijskog instrumenta u točno određenom trenutku u budućnosti dogovorena u sadašnjosti i bez obzira na tržišnu cijenu u tom trenutku moraju je poštovati i kupac i prodavatelj.*

Definicija 1.3. *Opcija je ugovor između kupca i prodavatelja opcije koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obvezu, da kupi ili proda neku imovinu do određenog datuma (ili na određeni datum) (eng. maturity) po unaprijed dogovorenoj cijeni (eng. strike price).*

Postoji više vrsta opcija. Neke od njih su europske opcije, američke opcije, egzotične opcije i druge. Europske i američke još nazivamo i vanilla opcije. Opcije dijelimo na call i put opcije. U ovome radu baviti ćemo se samo europskim opcijama jer izvršenje europske opcije može biti samo na određeni datum, odnosno u vremenu dospijeća dok se američka opcija može izvršiti u bilo kojem trenutku do vremena dospijeća. Kao rizični financijski instrument uzeti ćemo dionicu koju ćemo proučavati i na kojoj ćemo temeljiti cijeli rad.

Najprije uvedimo neke oznake koje će nam biti potrebne u radu dok ćemo europsku call i put opciju definirati u nastavku rada. Cijenu dionice u početnom trenutku, odnosno u trenutku $t = 0$, označavati ćemo sa S_0. Vrijeme dospijeća opcije označavati ćemo s T, dok ćemo cijenu izvršenja opcije označavati s K. Cijenu dionice u trenutku dospijeća opcije označavati ćemo sa S_T. Nadalje, uvesti ćemo još neke oznake koje će nam biti potrebne.

Razliku između vremena t i T označavati ćemo s $\tau(t,T) = T - t$. Ovaj rad temeljimo na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu pa stoga uvodimo oznaku r za neprekidnu kamatnu stopu tijekom jednogodišnjeg razdoblja. To znači da će u svakom trenutku kamata biti zaračunata. Jedna od važnih stvari u modelu koja je potrebna kako bi izračunali cijenu opcije je volatilnost, u oznaci σ.

Iz prethodnog možemo zaključiti da ako gledamo samo trenutak dospijeća T vlasnik opcije ili bilježi zaradu ili je na nuli, dok prodavatelj opcije, ukoliko vlasnik opcije bilježi zaradu, bilježi gubitak. Jasno je da u trenutku kupnje opcije kupac mora prodavatelju opcije platiti određenu premiju kako bi osigurao pravo koje mu opcija jamči. Pitamo se kolika je cijena opcije u trenutku $t = 0$. Odgovor na to pitanje saznati ćemo u središnjem dijelu rada.

1.2 Što je zaštita?

Glavna tema ovoga rada je analizirati metode zaštite (eng. hedging) od rizika na financijskom tržištu preuzetog izdavanjem raznih izvedenica, konkretno u ovom radu izdavanjem opcija. Kako bi se postalo dobrim trgovcem (eng. trader) na financijskom tržištu važno je dobro razumjeti kako se zaštiti od mogućeg rizika. Trgovci koji rade s raznim izvedenicama na financijskom tržištu su izloženi velikom riziku. Najveći gubici tokom korištenja izvedenica sežu do 9 milijardi američkih dolara. Kako ne bi pomislili da se takve stvari ne događaju i kod nas vidjeti ćemo na primjeru Riječke banke. Njihov zaposlenik je tijekom četiri godine na trgovanju deviznih tečajeva izgubio 100 milijuna američkih dolara. Time vidimo da se tijekom trgovanja mogu ostvariti enormni gubici koji mogu voditi do propadanja tvrtki.

Tijekom ovog rada korištenjem jedne formule prikazati ćemo kako trgovci mogu smanjiti rizik te je li moguće svesti svoj rizik na nulu. Model se zasniva na nizu pretpostavki, no tijekom rada model ćemo relaksirati kako bi bio jednostavniji za koristiti, a pri tome će biti koristan te nećemo previše odstupiti od stvarne situacije. Također ćemo isključiti iz izračuna moguće razne naknade iz stvarnoga života kao što su troškovi obrade transakcije, inicijalni troškovi trgovanja, plaćanje poreza u slučaju dobitka i mnoge druge. Računati ćemo cijene europskih vanilla call i put opcija pomoću BSM formule. BSM formulom ćemo se najviše baviti tijekom ovog rada.

Cilj ovoga rada je objasniti kako trgovac, kada je obavio transakciju izvedenice, može upravljati rizikom. Trgovac će pokušati svakodnevnim upravljanjem svoga portfelja smanjiti te, ukoliko je moguće, ukloniti rizik. Radi toga mora odrediti svoju strategiju trgovanja. Trošak takvoga trgovanja trebao bi određivati cijenu financijskog instrumenta. Tokom rada promatrati ćemo stav trgovca koji u svakom trenutku želi kupiti ili prodati određeni financijski instrument kako bi pružio uslugu svome klijentu. Također se cijeli rad zasniva na tome da će uvijek biti zainteresiranih klijenata koji žele kupiti ili prodati financijski instrument. Promotrimo sljedeći primjer koji će nam pobliže opisati korištenje izvedenica u stvarnome svijetu.

Primjer 1.1. Pretpostavimo da u Europi djeluje jedna tvrtka koja izvozi robu u SAD. U trenutku potpisa ugovora o trgovini robom tvrtka zna da će u budućnosti primiti novac u američkim dolarima, dok su troškovi tvrtke u eurima. Tijekom pregovora u obzir je uzeta trenutna vrijednost tečaja između te dvije valute. Ukoliko bi dolar oslabio moguće je da bi tvrtka izgubila profitabilnost u ovome poslu. Kako se to ne bi dogodilo tvrtka koristi forward ugovor kako bi u budućem vremenu dobila tečaj koji je bio dogovoren tijekom potpisa ugovora. Time će tvrtka, bez obzira na tečaj u budućnosti, dobiti dogovoren iznos u eurima i moći će bez gubitaka pokriti svoje troškove poslovanja. Na ovaj način se tvrtka zaštitila od mogućih rizika.

1.3 Forward ugovor i njegova zaštita

Jedan od najjednostavnijih primjera zaštite od rizika je zaštita forward ugovorom. Cijena izvršenja ugovora se najčešće dogovara tako da nema troškova pri potpisivanju ugovora. U prethodnom dijelu rada smo definirali što je forward ugovor. Promotrimo nadalje kako se koristi forward ugovor i kako se njegovim izdavanjem trgovac može lako zaštititi od rizika.

Trgovac i klijent žele dogovoriti po kojoj cijeni u budućnosti će klijent kupiti dionicu. Forward ugovor znači da klijent u vremenu izvršenja treba dobiti jednu dionicu od trgovca što nas vodi zaključku da je trgovcu najbolje kupiti jednu dionicu u trenutku potpisivanja ugovora. Ako nema dionicu, trgovac ju mora kupiti i tim uloženim novcem više ne može raspolagati sve do vremena izvršenja ugovora. Trgovac dionicu može kupiti svojim novcem ili može posuditi novac potreban za kupnju dionice. Ukoliko trgovac kupi dionicu svojim novcem to dovodi do oportunitetnog troška za trgovca, dok u suprotnom mora vratiti kamate na posuđeni novac. Trgovac u trenutku potpisivanja ugovora mora imati $S(t_0)$ novca za kupnju jedne dionice. Vrijeme dospijeća ugovora, odnosno kada klijent treba kupiti dionicu, je T. Dolazimo do zaključka da ukoliko se trgovac želi zaštititi od rizika cijena izvršenja forward ugovora K mora iznositi:

$$K = S(t_0) \cdot e^{r(T-t_0)}.$$

Ukoliko bi vrijednost za K bila manja od prethodnog izraza trgovac ne bi mogao vratiti posuđeni novac i bio bi u gubitku. Ako je vrijednost za K veća od izračunate vrijednosti trgovac bi sigurno zaradio, no klijent će vjerojatno onda potražiti nekog drugog trgovca koji će mu dati bolju ponudu. Zanimljivo je primjetiti kako trgovca ne zanima hoće li cijena dionice rasti ili padati tijekom razdoblja od ugovaranja forward ugovora sve do njegovog izvršenja. Zaključujemo kako se trgovac u ovom slučaju lako može zaštititi od rizika. Trgovci mogu riskirati na takav način da dogovore cijenu forward ugovora po navedenoj formuli, ali pričekaju s kupovinom dionice, tj. ne kupe ju u trenutku ugovaranja forward ugovora. Ukoliko cijena dionice padne od trenutka ugovaranja trgovac će proći jeftinije i bilježiti će zaradu na tom poslu. U suprotnom, ako cijena dionice poraste trgovac će morati kupiti dionicu po većoj cijeni i bilježiti će gubitak.

1.4 Call i put opcija

Opcija je jedna od najčešćih izvedenica kojima se trguje na financijskom tržištu. Kako ju svrstavamo u izvedenice, njena cijena ovisi o cijeni financijskog instrumenta, odnosno cijeni dionice kako smo već napomenili. Postoje dvije vrste opcija, a to su call i put opcije. U nastavku ćemo ih definirati te tako uočiti njihove sličnosti i razlike.

Definicija 1.4. *Call opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da u dogovoreno vrijeme kupi dionicu po unaprijed određenoj cijeni bez obzira na njenu tržišnu vrijednost toga dana.*

Neka je S_T tržišna cijena dionice u trenutku dospijeća opcije. Ukoliko je $S_T > K$ vlasnik opcije će iskoristiti svoje pravo i u vremenu T bilježiti će zaradu od $(S_T - K)$. U suprotnom, ukoliko je $S_T < K$ vlasnik opcije neće iskoristiti svoje pravo te mu je opcija bezvrijedna. Dolazimo do zaključka da u trenutku dospijeća T call opcija s cijenom izvršenja K vrijedi:

$$max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)_+.$$

Definicija 1.5. *Put opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da u dogovoreno vrijeme proda dionicu po unaprijed određenoj cijeni bez obzira na njenu tržišnu vrijednost toga dana.*

Neka je S_T tržišna cijena dionice u trenutku dospijeća opcije. Ukoliko je $S_T > K$ vlasnik opcije neće iskoristiti svoje pravo te mu je opcija bezvrijedna. U suprotnom, ukoliko je $S_T < K$ vlasnik opcije će iskoristiti svoje pravo i u vremenu T bilježiti će zaradu od $(K - S_T)$. Dolazimo do zaključka da u trenutku dospijeća T put opcija s cijenom izvršenja K vrijedi:

$$max\{0, K - S_T\} = (K - S_T)_+.$$

Odredimo sada formulu koja povezuje vrijednosti europske call i put opcije za iste T i K. Tu formulu nazivamo call-put paritet koja je dana sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned}
C_T^C - C_T^P &= (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ \\
&= \begin{cases} S_T - K, \ S_T > K \\ 0, \ S_T \le K \end{cases} - \begin{cases} K - S_T, \ K > S_T \\ 0, \ K \le S_T \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_T - K, \ S_T > K \\ 0, \ S_T \le K \end{cases} - \begin{cases} 0, \ S_T \ge K \\ K - S_T, \ S_T < K \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_T - K, \ S_T > K \\ 0, \ S_T \le K \end{cases} - \begin{cases} 0, \ S_T > K \\ K - S_T, \ S_T \le K \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_T - K, \ S_T > K \\ S_T - K, \ S_T \le K \end{cases} \\
&= S_T - K,
\end{aligned}$$

gdje su C_T^C i C_T^P oznake za vrijednosti call, odnosno put opcije. Time nam slijedi da je

$$C_T^C = C_T^P + S_T - K.$$

Možemo primjetiti da smo tijekom ovog poglavlja gledali samo profit, odnosno zaradu kupca call i put opcija. U nastavku ćemo se baviti računanjem premije koju kupac opcije mora platiti trgovcu kako bi mu omogućio pravo koje mu opcija daje. Prije nego krenemo na izračune call i put opcija upoznati ćemo se s osnovnim pojmovima slučajnih procesa.

2 Slučajni proces

Česta pitanja i pokušaji tijekom prošlosti bila su kako možemo modelirati neku pojavu kroz vrijeme. Neki od mnogih primjera su temperatura zraka na nekoj mjernoj postaji, dobici na nekoj igri na sreću i, nama važna pojava za ovaj rad, modeliranje cijena dionica kroz vrijeme. Tražene vrijednosti u nekom trenutku t ima smisla modelirati slučajnom varijablom. Time dolazimo do sljedećih definicija.

Definicija 2.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ σ-algebra na $\mathbb{R}$ generirana otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$ koju nazivamo Borelova σ-algebra. Svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da je $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ je slučajna varijabla.*

Definicija 2.2. *Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $(X_t, t \in T)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $T \subseteq \mathbb{R}$.*

Dva važna skupa svakog slučajnog procesa su:

- skup stanja - skup svih mogućih vrijednosti slučajne varijable X_t, za $t \in T$
- skup indeksa - skup $T \subseteq \mathbb{R}$.

Slučajne procese dijelimo na osnovu ta dva prethodna skupa. Procese obzirom na skup stanja S dijelimo na slučajne procese s diskretnim skupom stanja S, nazivamo ih još i lancima, i slučajne procese s neprebrojivim skupom stanja S. Slučajne procese obzirom na skup T dijelimo na slučajne procese u diskretnom vremenu (nizovi slučajnih varijabli), odnosno na slučajne procese u neprekidnom vremenu.

Definirajmo još neke pojmove koji će nam biti potrebni tijekom ovog poglavlja.

Definicija 2.3. *Familija $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ σ-algebri na Ω je fitracija na Ω ako je $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, za svaki $s \in [0, t)$.*

Definicija 2.4. *Prirodna filtracija slučajnog procesa $(X_t, t \geq 0)$ je $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \in [0, t]\})$.*

Definicija 2.5. *Za slučajni proces $(X_t, t \geq 0)$ kažemo da je adaptiran na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ($\mathbb{F}$-adaptiran) ako je za svaki $t \geq 0$ $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$, tj. ako je za svaki $t \geq 0$ X_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva.*

Definicija 2.6. *Slučajni proces $X = (X_t, t \geq 0)$ je martingal u neprekidnom vremenu s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ako vrijedi:*

1) $E[|X_t|] < \infty$, za svaki $t \geq 0$

2) X je $\mathbb{F}$-adaptiran (za svaki $t \geq 0, \sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$)

3) $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, za svaki s t.d. $0 \leq s < t$.

2.1 Slučajna šetnja

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definiramo pripadni niz parcijalnih suma kao

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

te postavimo $S_0 = 0$.

Definicija 2.7. *Niz $(S_n, n \in \mathbb{N}_0)$, gdje je niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ definiran kao*

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in (0,1)$$

zovemo jednostavna slučajna šetnja.

U slučaju da je $p = \frac{1}{2}$ govorimo o simetričnoj slučajnoj šetnji. Primjetimo da slučajne varijable S_n nisu međusobno nezavisne, no prirasti slučajne šetnje $S_n - S_{n-1} = X_n$ su međusobno nezavisni i jednako distribuirani. Odredimo osnovne numeričke karakteristike tih prirasta.

$$E[S_{k_{i+1}} - S_{k_i}] = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} E[X_j] = 0$$

$$Var(S_{k_{i+1}} - S_{k_i}) = Var\Big(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j\Big) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} Var(X_j) = k_{i+1} - k_i.$$

2.2 Brownovo gibanje

U svrhu konstrukcije Brownovog gibanja formiramo skaliranu slučajnu šetnju. Skaliranu slučajnu šetnju dobijemo tako da u jednostavnoj simetričnoj slučajnoj šetnji $(S_n, n \in \mathbb{N}_0)$ 'ubrzamo vrijeme' i 'skratimo korak'. Za fiksan $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$W_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt}, \text{ za } nt \in \mathbb{N}.$$

Ako $nt \notin \mathbb{N}$ onda $W^{(n)}(t)$ definiramo linearnom interpolacijom između dviju najbližih točaka s i u lijevo, odnosno desno od t za koje je $ns, nu \in \mathbb{N}$. Nadalje ćemo se zadržavati na $nt \in \mathbb{N}$. Skalirana slučajna šetnja je proces u neprekidnom vremenu $T = [0, \infty)$ s neprebrojivim skupom stanja $S = \mathbb{R}$. Iz skalirane slučajne šetnje ćemo kao distribucijski limes dobiti proces koji zovemo Brownovo gibanje. Prije svega pokažimo da i skalirana slučajna šetnja ima nezavisne priraste. Neka je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ t.d. je $nt_j \in \mathbb{N}$, za svaki $j \in \{0, \ldots, m\}$. Tada su slučajne varijable $W_{t_1}^{(n)} - W_{t_0}^{(n)}, W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}, \ldots, W_{t_m}^{(n)} - W_{t_{m-1}}^{(n)}$ nezavisne jer ovise o različitim slučajnim varijablama $X_j \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$W_{t_{i+1}}^{(n)} - W_{t_i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{nt_{i+1}} - S_{nt_i}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=nt_i+1}^{nt_{i+1}} X_k.$$

Matematičko očekivanje prirasta $W_t^{(n)} - W_s^{(n)}, 0 \le s < t$ t.d. su $ns, nt \in \mathbb{N}$ iznosi

$$E[W_t^{(n)} - W_s^{(n)}] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=ns+1}^{nt} E[X_k] = 0,$$

dok je varijanca prirasta

$$Var(W_t^{(n)} - W_s^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=ns+1}^{nt} Var(X_k) = t - s.$$

Proučimo što možemo saznati o distribuciji slučajne varijable $W_t^{(n)}$ za fiksan $n \in \mathbb{N}$ i u slučaju da je $nt \in \mathbb{N}$. Stavimo da je $Y_j = \frac{1}{2}(X_j + 1)$. Time zaključujemo da je distribucija od Y_j dana s

$$Y_j \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Niz $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ je niz nezavisnih Bernoulijevih slučajnih varijabli s parametrom $p = \frac{1}{2}$. Označimo s $B_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$. Tada je $B_k \sim \mathcal{B}(k, \frac{1}{2})$. Izračunajmo osnovne numeričke karakteristike od $(B_k, k \in \mathbb{N})$. Jednostavnim računom dobivamo da je $E[B_k] = \frac{k}{2}$ i $Var(B_k) = \frac{k}{4}$. Nadalje, za svaki fiksan $n \in \mathbb{N}$ slijedi

$$\begin{aligned} W_t^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} (2Y_j - 1) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} \Big(Y_j - \frac{1}{2} \Big) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \Big(\sum_{j=1}^{nt} Y_j - \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{2} \Big) = \frac{2}{\sqrt{n}} \Big(B_{nt} - \frac{nt}{2} \Big) = \frac{2}{\sqrt{n}} (B_{nt} - E[B_{nt}]) \\ &= \sqrt{t} \frac{2}{\sqrt{nt}} (B_{nt} - E[B_{nt}]) = \sqrt{t} \frac{B_{nt} - E[B_{nt}]}{\sqrt{\frac{nt}{4}}} = \sqrt{t} \frac{B_{nt} - E[B_{nt}]}{\sqrt{Var(B_{nt})}}. \end{aligned}$$

Kako je $B_{nt} \sim \mathcal{B}(nt, \frac{1}{2})$ te znamo da po centralnom graničnom teoremu slijedi da

$$\frac{B_{nt} - E[B_{nt}]}{\sqrt{Var(B_{nt})}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1), n \to \infty, \text{za svaki fiksan } t > 0.$$

Prethodni izraz drugačije možemo pisati kao

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{B_{nt} - E[B_{nt}]}{\sqrt{Var(B_{nt})}} \leq x \right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = P(\mathcal{N}(0,1) \leq x), \text{za svaki fiksan } t > 0.$$

Iz toga slijedi da za svaki fiksan $t > 0$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(W_t^{(n)} \leq x) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{B_{nt} - E[B_{nt}]}{\sqrt{Var(B_{nt})}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/2t} dy \\ &= P(\mathcal{N}(0,t) \leq x). \end{aligned}$$

Time dolazimo do sljedećeg teorema i definicije za Brownovo gibanje.

Teorem 2.1. *Fiksirajmo $t \geq 0$. Kada $n \to \infty$, distribucija skalirane slučajne šetnje $W_t^{(n)}$ izračunate u tom t konvergira prema $\mathcal{N}(0,t)$ distribuciji kada $n \to \infty$.*

To znači da za svaki fiksan $t \geq 0$, niz $(W_t^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0)$ po distribuciji teži u B_t, za $n \to \infty$, gdje B_t ima $\mathcal{N}(0,t)$ distribuciju.

Definicija 2.8. *Brownovo gibanje* $(B_t, t \geq 0)$ *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je slučajni proces u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja koji ima sljedeća svojstva:*

1) $B_0 = 0$ *g.s., tj.* $P(B_0 = 0) = 1$

2) za proizvoljne $t_1, \dots, t_n \geq 0$ *takve da je* $t_0 =< t_1 < \cdots < t_n$ *slučajne varijable* $B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *su nezavisne (nezavisnost prirasta)*

3) za proizvoljne $s, t \geq 0$ *takve da je* $0 \leq s < t$ *je* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *(stacionarnost prirasta).*

2.3 Geometrijsko Brownovo gibanje

Prije nego što krenemo s pojmom geometrijskog Brownovog gibanja definirajmo što su to povrati i log-povrati. Neka je S_t cijena financijskog instrumenta, npr. dionice, u trenutku $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$.

Definicija 2.9. *Povrat je relativna promjena cijene financijskog instrumenta u određenom trenutku (s obzirom na neki prethodni trenutak), često izražena kao postotak.*

Definirati ćemo dva tipa povrata, a to su jednoperiodni relativni povrat (aritmetički povrat) i log-povrat.

Definicija 2.10. *Jednoperiodni relativni povrat financijskog instrumenta u trenutku* t *s obzirom na njenu vrijednost u* $t-1$ *je postotna promjena njezine cijene definirana na sljedeći način:*

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, \; t \in \{1, \dots, T\}.$$

Prethodni izraz se također može zapisati kao

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1 + R_t$$

te tada govorimo o bruto povratu. Definirajmo sada što je log-povrat.

Definicija 2.11. *Prirodni logaritam bruto povrata* $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ *zove se log-povrat u trenutku* t *s obzirom na vrijednost financijskog instrumenta u trenutku* $t-1$ *te je definiran na sljedeći način:*

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}), \; t \in \{1, \dots, T\}.$$

Vidimo da su log-povrati prirasti logaritmiranog niza cijena financijskog instrumenta te možemo vidjeti da je n-periodni log-povrat jednak sumi jednoperiodnih log-povrata:

$$\begin{aligned} r_t(n) &= \ln(1 + R_t(n)) = \ln\big((1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-n+1})\big) \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-n+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-n+1}. \end{aligned}$$

Pri malim promjenama cijena, relativni i log-povrati su približno jednaki jer je $\ln(1+x) \approx x$, za dovoljno mali $x \in \mathbb{R}$. Relativni povrati su točni, dok su log-povrati simetrični te ćemo u nastavku njih promatrati zbog svojstva aditivnosti i boljih statističkih svojstava.

Definicija 2.12. *Geometrijsko Brownovo gibanje* $(S_t, t \geq 0)$ *je proces u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja i g.s. neprekidnim trajektorijama takav da je:*

1) $S_0 > 0$ *konstanta*

2) $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$

gdje je $(B_t, t \geq 0)$ *standardno Brownovo gibanje,* $\mu \in \mathbb{R}$ *i* $\sigma > 0$.

Iz prethodne definicije možemo zaključiti kako je za modeliranje cijena financijskih instrumenata zgodno koristiti geometrijsko Brownovo gibanje. Kako smo prethodno definirali log-povrate pogledajmo kako izgleda log-povrat geometrijskog Brownovog gibanja $(S_t, t \geq 0)$:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right) = \ln\left(e^{\sigma(B_t - B_s) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)}\right) = \sigma(B_t - B_s) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - s).$$

Iz definicije standardnog Brownovog gibanja znamo da vrijedi $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Izračunajmo sada matematičko očekivanje i varijancu log-povrata geometrijskog Brownovog gibanja. Matematičko očekivanje log-povrata geometrijskog Brownovog gibanja iznosi

$$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right)\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - s), \text{ za } s < t,$$

dok varijanca log-povrata geometrijskog Brownovog gibanja iznosi

$$Var\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right)\right) = \sigma^2(t - s).$$

Standardna devijacija log-povrata naziva se volatilnost te vidimo da volatilnost iznosi $\sigma\sqrt{t - s}$. Volatilnost je jedna od mjera rizičnosti financijske imovine jer nam daje informaciju o raspršenosti log-povrata oko očekivanja.

Geometrijsko Brownovo gibanje $(S_t, t \geq 0)$ je Markovljev proces, odnosno zadovoljava Markovljevo svojstvo. Neka je t sadašnjost, a $t + h$ budućnost, gdje je $h > 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} S_{t+h} &= e^{\sigma B_{t+h} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+h)} = e^{\sigma(B_{t+h} - B_t + B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)h} \\ &= S_t e^{\sigma(B_{t+h} - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)h}. \end{aligned}$$

Distribucija od S_{t+h} ne ovisi o t, nego samo o h. Uz danu sadašnjost S_t, budućnost S_{t+h} ovisi samo o budućem prirastu Brownovog gibanja $B_{t+h} - B_t$, a kako Brownovo gibanje ima nezavisne priraste slijedi da S_{t+h} ovisi samo o S_t i ne ovisi o prošlosti prije t.

Za fiksan $\omega \in \Omega$ funkciju $t \mapsto B_t(\omega)$ nazivamo trajektorija Brownovog gibanja. Trajektorija Brownovog gibanja je g.s. neprekidna i nigdje diferencijabilna funkcija. Trajektorija geometrijskog Brownovog gibanja je eksponencijalna transformacija trajektorije Brownovog gibanja. Za fiksan $\omega \in \Omega$ funkciju $t \mapsto S_t(\omega) = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t(\omega)}$ nazivamo trajektorija geometrijskog Brownovog gibanja. Trajektorije geometrijskog Brownovog gibanja preuzimaju svojstva trajektorije standardnog Brownovog gibanja, tj. one su g.s. neprekidne i nigdje diferencijabilne funkcije. Markovljevi procesi s neprekidnim skupom stanja u neprekidnom vremenu i g.s. neprekidnim trajektorijama nazivamo difuzijama. Brownovo gibanje i geometrijsko Brownovo gibanje primjeri su difuzija.

2.4 Itôv integral

Početak stvaranja BSM formule je modeliranje cijene dionice $S(t) = S_t$ kao slučajnog procesa. Dinamiku kretanja cijene dionice opisujemo stohastičkom diferencijalnom jednadžbom koja je dana formulom

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

koja može biti zapisana i na sljedeći način

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

gdje je S_0 početna cijena dionice, μ drift, σ je volatilnost te je B_t standardno Brownovo gibanje. Svojstva Brownovog gibanja opisali smo u prethodnim poglavljima. Prvi integral u prethodnoj formuli je Riemannov integral dok je drugi integral Itôv stohastički integral.

Intuitivno, cijena dionice tijekom vremena napravi puno pomaka prema gore odnosno dolje te u konačnici daje završnu vrijednost dionice. Sva ta kretanja cijene gore i dolje smatraju se nezavisnima i da dolaze iz normalne distribucije. Glavna pretpostavka je da ta kretanja dolaze iz normalne distribucije, ali i činjenica da ti prirasti ne ovise o prethodnim prirastima. Koristeći svojstva Brownovog gibanja dolazimo do sljedećeg svojstva za varijancu:

$$\begin{aligned} Var(W(t+s)) &= Var(W(t) + W(t+s) - W(t)) \\ &= Var(W(t)) + Var(W(t+s) - W(t)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kako bi došli do rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe krenuti ćemo s nekim osnovnim pojmovima i svojstvima Brownovog gibanja.

Definicija 2.13. *Neka je $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, subdivizija segmenta $[0, T]$ i neka je $\|\pi\| = max_{j\in\{1,\ldots,n\}}(t_j - t_{j-1})$ dijametar subdivizije π. Varijacija p-tog reda, $p \in [1, \infty)$, funkcije f na $[0, T]$ definirana je izrazom*

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p.$$

Ako je taj limes konačan, kažemo da je f konačne ili ograničene p-varijacije na $[0, T]$. Inače kažemo da je f neograničene varijacije na $[0, T]$.

Teorem 2.2. *Brownovo gibanje $(B_t, t \geq 0)$ je g.s. neograničene varijacije $(p = 1)$ na $[0, T]$, dok mu je kvadratna varijacija $(p = 2)$ na $[0, T]$ g.s. T.*

U nastavku ćemo se upoznati s Riemann-Stieltjesovim (R-S) integralom. Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s funkcijom distribucije F_X. Očekivanje slučajne varijable dano je sljedećim izrazom $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$. Primjetimo da su to integrali u odnosu na F_X. Za prebrojive π i σ, $E[X]$ možemo aproksimirati sljedećom sumom

$$E[X] \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i(F_X(t_i) - F_X(t_{i-1})),$$

gdje su $\pi = \{t_0, t_1, \ldots\}$ i $\sigma = \{y_1, y_2, \ldots\}$, za $t_{i-1} \leq y_i < t_i$. Općenito, neka su f i g realne funkcije na $[0, T]$, π i σ subdivizija i međusubdivizija od $[0, T]$ i neka je za $i \in \{1, \ldots, n\}$ te $\Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1})$. Tada je R-S suma oblika

$$S_n = S_n(\pi, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i g.$$

Definicija 2.14. *Ako* $lim_{n\to\infty} S_n(\pi,\sigma) = S$ *postoji i ne ovisi o izboru* π *i* σ *tada* S *zovemo R-S integral funkcije* f *u odnosu na funkciju* g *na intervalu* $[0,T]$ *i pišemo:*

$$S = \int_0^T f(x)dg(x).$$

Sljedećom napomenom dati ćemo dovoljne uvjete za egzistenciju R-S integrala.

Napomena 2.1. *R-S integral postoji ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1) f *i* g *nemaju prekide u istim točkama iz* $[0,T]$

2) f *je ograničene p-varijacije, a* q *je ograničene q-varijacije na* $[0,T]$*, za neke* $p,q > 0$ *t.d.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

Želimo integrirati u odnosu na $t \mapsto B_t(\omega)$, za fiksan $\omega \in \Omega$.

Primjer 2.1. Neka je $g(t) = B_t(\omega)$, za fiksan $\omega \in \Omega$, g definiran na $[0,T]$ te neka je $f(t) = 1$, za svaki $t \in [0,T]$. Tada je

$$\begin{aligned} \int_0^T dB_t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \lim_{n\to\infty} (B_{t_1} - B_{t_0} + B_{t_2} - B_{t_1} + \cdots + B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (B_{t_n} - B_{t_0}) = \lim_{n\to\infty} (B_T - B_0) = B_T \text{ g.s.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Funkcija f je ograničene 1-varijacije, a q ograničene 2-varijacije na $[0,T]$ pa vrijedi dovoljni uvjet $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$.

Nadalje ćemo definirati jednostavne slučajne procese kako bi u nastavku mogli definirati Itôv stohastički integral jednostavnih slučajnih procesa.

Definicija 2.15. *Slučajni proces* $C = (C_t, t \in [0,T])$ *je jednostavan ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

1) postoji subdivizija $\pi_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, *od* $[0,T]$ *i (konačan) niz slučajnih varijabli* $(Z_i, i = 1, \ldots, n)$ *t.d. je* $E[Z_i] < \infty$*, za svaki i, za koje je*

$$C_t = \begin{cases} Z_i \ , \ t \in [t_{i-1}, t_i) \\ Z_n \ , \ t = T \end{cases}$$

2) niz $(Z_i, i = 1, \ldots, n)$ *adaptiran je na filtraciju* $\{\mathcal{F}_{t_{i-1}} : i = 1, \ldots, n\}$, $\mathcal{F}_{t_{i-1}} = \sigma(\{B_s : s \in [0, t_{i-1}]\})$ *gdje je* $(B_t, t \in [0,T])$ *standardno Brownovo gibanje na* $[0,T]$.

Trajektorije jednostavnih slučajnih procesa su jednostavne funkcije. Primjer jedne jednostavne funkcije je stepenasta funkcija. Definirajmo sada Itôv stohastički integral jednostavnih slučajnih procesa.

Definicija 2.16. *Za* $(C_t, t \in [0,T])$ *jednostavan slučajni proces, Itôv integral definiran je na sljedeći način:*

1) $\int_0^T C_s dB_s = \sum_{i=1}^n Z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$

2) $\int_0^t C_s dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + Z_k (B_t - B_{t_{k-1}}) = I_t$, *za* $t \in [t_{k-1}, t_k)$.

Napomena 2.2. *Vrijedi sljedeće:*

1) $\int_0^{t_k} C_s dB_s = \sum_{i=1}^k Z_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = I_{t_k}$

2) $I_0 = 0$.

Teorem 2.3. *Slučajni proces* $(I_t, t \in [0,T])$ *je martingal u odnosu na prirodnu fitraciju Brownovog gibanja* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$.

Dolazimo do jednog važnog svojstva koji se zove Itôva izometrija koja je dana formulom u sljedećem teoremu.

Teorem 2.4. *Itôv integral definiran s (2.16) zadovoljava*

$$E\left[\left(\int_0^t C_s dB_s\right)^2\right] = \int_0^t E[C_s^2] ds, t \in [0,T].$$

Teorem 2.5. *Za konstante* c_1 *i* c_2 *te jednostavne slučajne procese* $C^{(1)}$ *i* $C^{(2)}$ *na* $[0,T]$ *vrijedi*

$$\int_0^t (c_1 C_s^{(1)} + c_2 C_s^{(2)}) dB_s = c_1 \int_0^t C_s^{(1)} dB_s + c_2 \int_0^t C_s^{(2)} dB_s.$$

Prethodni teorem je svojstvo linearnosti Itôvih stohastičkih integrala jednostavnih slučajnih procesa. Definirajmo u nastavku opću definiciju Itôvog integrala.

Neka je $C = (C_t, t \in [0,T])$ proizvoljni slučajni proces koji zadovoljava sljedeće pretpostavke:

1) C_t je transformacija slučajne varijable B_s, za $s \leq t$, tj. C_t je izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \in [0,T]\})$, tj. C je adaptiran na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja.

2) $\int_0^T E[C_s^2] ds < \infty$.

Lema 2.1. *Ako slučajni proces* $C = (C_t, t \in [0,T])$ *zadovoljava pretpostavke 1) i 2), tada postoji niz jednostavnih slučajnih procesa* $(C_t^{(n)}, t \in [0,T], n \in \mathbb{N})$ *t.d. vrijedi*

$$\int_0^T E[(C_s - C_s^{(n)})^2] ds \to 0, n \to \infty.$$

Prethodnu lemu možemo interpretirati na sljedeći način: proces C se može dobro aproksimirati jednostavnim slučajnim procesom $C^{(n)}$ za dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$. Iz prethodne leme slijedi:

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^T E[(C_s^{(n)} - C_s^{(m)})^2] ds = 0$$

te koristeći Itôvu izometriju slijedi

$$\lim_{m,n\to\infty} E[(I_t(C^{(n)}) - I_t(C^{(m)}))^2] = 0, t \in [0,T].$$

Niz $(I_t(C^{(n)}), n \in \mathbb{N})$ je za svaki $t \in [0,T]$ Cauchyjev niz u prostoru kvadratno integrabilnih slučajnih varijabli na kojem radimo pa ima limes. Taj limes se zove Itôv integral slučajnog procesa $C = (C_t, t \in [0,T])$ kojeg aproksimiraju jednostavni slučajni procesi iz niza $((C_t^{(n)}, t \in [0,T]), n \in \mathbb{N})$. Itôv integral općeg integranda $(C_t, t \in [0,T])$ je limes u srednje kvadratnom smislu niza Itôvih integrala jednostavnih slučajnih procesa koji ga aproksimiraju u smislu iskazane leme. Itôv integral od $C = (C_t, t \in [0,T])$:

$$I_t = \int_0^t C_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t C_s^{(n)} dB_s$$

nasljeđuje sva svojstva Itôvog integrala jednostavnih procesa. Korištenjem svih znanja koje smo obradili u ovome poglavlju možemo izračunati sljedeći integral, no mi ćemo samo zapisati rješenje toga integrala.

Primjer 2.2.

$$\int_0^T B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_T^2 - T) g.s.$$

Nadalje, odredimo Itôvu formulu. Znamo da u diferencijalnom računu vrijedi

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Pitamo se kako izgleda pravilo za kompoziciju funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i trajektorije Brownovog gibanja $t \mapsto B_t(\omega)$ za fiksni $\omega \in \Omega$. Zbog ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja neće vrijediti $df(B_t) = f'(B_t)dB_t$. Za točnu formulu koja vrijedi moramo pretpostaviti da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima drugu derivaciju i tada vrijedi:

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)dt.$$

Prethodna formula je Itôva formula u diferencijalnom obliku. Itôva formula u integralnom obliku dana je sljedećim izrazom:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

Teorem 2.6. *Neka je $f(t,x)$ funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije $f_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x), f_x(t,x), f_{xx}(t,x)$ te neka je $(B_t, t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje. Tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi:*

$$f(T, B_T) - f(0, B_0) = \int_0^T f_t(t, B_t)dt + \int_0^T f_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, B_t)dt.$$

U nastavku ćemo generalizirati prethodno iskazane Itôve formule na novu klasu procesa.

Definicija 2.17. *Neka je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ njegova prirodna filtracija. Itôv proces je slučajni proces $(X_t, t \geq 0)$ oblika:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Delta(s)dB_s + \int_0^t \theta(s)ds$$

gdje je X_0 neslučajan, a $(\Delta(t), t \geq 0)$ i $(\theta(t), t \geq 0)$ su $\mathbb{F}$-adaptirani procesi koji zadovoljavaju sljedeće:

$$E\left[\int_0^t \Delta^2(s)ds\right] < 0, \int_0^t |\theta(s)|ds < \infty, \text{za svaki } t > 0.$$

U sljedećem teoremu vidjeti ćemo kako glasi Itôva formula za Itôv proces.

Teorem 2.7. *Neka je $(X_t, t \geq 0)$ Itôv proces i neka je $f(t,x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t,x), f_x(t,x)$ i $f_{xx}(t,x)$. Tada za svaki $T > 0$ vrijedi*

$$\begin{aligned} f(T, X_T) - f(0, X_0) &= \int_0^T f_t(t, X_t)dt + \int_0^T f_x(t, X_t)s(t)dB_t \\ &+ \int_0^T f_x(t, X_t)\theta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)\Delta^2(t)dt. \end{aligned}$$

Primjer 2.3. Neka je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje te neka je $\mathbb{F}$ njegova prirodna filtracija. Neka su $(\mu(t), t \geq 0)$ i $(\sigma(t), t \geq 0)$ $\mathbb{F}$-adaptirani procesi. Tada je

$$X_t = \int_0^t \sigma(s)dB_s + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds, X_0 = 0.$$

Neka je proces kretanja rizične financijske imovine opisan na sljedeći način:

$$S_t = S_0 exp(X_t) = S_0 exp\left(\int_0^t \sigma(s)dB_s + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds\right), S_0 > 0.$$

Iz Itôve formule za Itôv proces na $f(t,x) = S_0 exp(x)$ dobivamo da je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe geometrijsko Brownovo gibanje dano sljedećom formulom

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

koga smo već upoznali u prethodnom poglavlju.

2.5 Black-Scholes-Merton formula

U prvom poglavlju ovoga rada upoznali smo se s call i put opcijama. Kako bi ostvarili pravo na opciju moramo platiti određeni iznos. Cijenu te opcije određivati ćemo pomoću BSM formule. U ovome modelu primjenjivati ćemo geometrijsko Brownovo gibanje koje smo obradili u prethodnom dijelu rada. BSM formula je formula za nearbitražno vrednovanje europske call i put opcije na financijskom tržištu na kojem dionica slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. Oznaka za call opciju je $C_T^C = (S_T - K)_+ = f_1(S_T)$, dok je oznaka za put opciju $C_T^P = (K - S_T)_+ = f_2(S_T)$. Za izvedenicu čija je vrijednost u T modelirana slučajnom varijablom $f(S_T)$, nearbitražna cijena u $t \in [0, T]$ dana je s

$$f(S_t) = E^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t],$$

gdje je P^* vjerojatnost neutralna na rizik, a ona se definira kao vjerojatnost uz koju je proces diskontiranih cijena rizične financijske imovine $(e^{-rt}S_t, t \in [0, T])$ martingal u neprekidnom vremenu adaptiran na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja. U nastavku ćemo iskazati Girsanovljev teorem.

Teorem 2.8. *Neka je $(B_t, t \in [0, T])$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te neka je $\mathbb{F}$ njegova prirodna filtracija. Tada je proces $(X_t, t \in [0, T])$,*

$$X_t = e^{-qB_t - \frac{1}{2}q^2 t}, q \in \mathbb{R}$$

martingal u odnosu na $\mathbb{F}$.

Relacijom $P^*(A) = E[X_t I_A]$ za $A \in \mathcal{F}$ definirana je vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ koja je ekvivalentna vjerojatnosti P te je u odnosu na nju proces $(\widetilde{B_t}, t \in [0, T])$, $\widetilde{B_t} = B_t + qt$, standardno Brownovo gibanje adaptirano na $\mathbb{F}$.

U nastavku ćemo izvesti BSM formulu za vrednovanje europske call opcije u trenutku $t \in [0, T)$.

$$\begin{aligned}
C_t^C &= E^*[e^{-r(T-t)} C_T^C | \mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} (S_0 e^{\sigma(B_T - B_t + B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t+t)} - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} (S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} (S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+ | S_t = x] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} (x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+ | S_t = x] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} (x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+].
\end{aligned}$$

Iz Girsanovljevog teorema znamo da je $\sigma \widetilde{B_u} = \sigma B_u + (\mu - r)u$ pa iz toga slijedi

$$\sigma(B_T - B_t) + (\mu - r)(T - t) = (\sigma B_T + (\mu - r)T) - (\sigma B_t + (\mu - r)t) = \sigma \widetilde{B_T} - \sigma \widetilde{B_t} = \sigma(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t}).$$

Primjetimo da je $(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t})$ prirast Brownovog gibanja na $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ te da $(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t})$ ima normalnu distribuciju $\mathcal{N}(0, T - t)$, s obzirom na P^*.
Nastavimo dalje s određivanjem vrijednosti europske call opcije.

$$\begin{aligned}
C_t^C &= E^*[e^{-r(T-t)} (x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+] \\
&= E^*[(x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - r)(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+] \\
&= E^*[x e^{\sigma(\widetilde{B_T} - \widetilde{B_t}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy.
\end{aligned}$$

Nadalje, odredimo za koje $y \in \mathbb{R}$ je podintegralna funkcija veća od 0. Znamo da je $x > 0$ jer on predstavlja cijenu dionice te on ne može biti negativan:

$$\begin{aligned}
x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} &> K e^{-r(T-t)} \\
e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} &> \frac{K}{x} e^{-r(T-t)} \\
\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) &> \ln\left(\frac{K}{x}\right) - r(T-t) \\
y &> \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{K}{x}\right) - r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right) \\
y &> \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{K}{x}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) \\
y &> -\frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) = -d_2.
\end{aligned}$$

Nakon što smo odredili kada je podintegralna funkcija pozitivna možemo nastaviti računati vrijednost call opcije:

$$
\begin{aligned}
C_t^C &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right)_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} \left(x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} x \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) - \frac{y^2}{2(T-t)}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy.
\end{aligned}
$$

Uvedimo supstituciju $y = -z$ te nastavimo s izvodom formule:

$$
\begin{aligned}
C_t^C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} x \int_{d_2}^{-\infty} e^{-\sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) - \frac{z^2}{2(T-t)}} (-dz) - \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{d_2}^{-\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} (-dz) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} x \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z^2 + \sigma^2 (T-t)^2 2\sigma z (T-t)} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} x \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{(z+\sigma(T-t))^2}{2(T-t)}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz.
\end{aligned}
$$

Kako bi pojednostavnili izvod izračunati ćemo posebno ova dva integrala iz prethodnog zapisa:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left| \begin{array}{l} \dfrac{z + \sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} = u \\ dz = \sqrt{T-t}\; du \\ \\ \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} x \int_{-\infty}^{\frac{d_2 + \sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{T-t}\; du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \int_{-\infty}^{\frac{d_2 + \sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= x \Phi\left(\frac{d_2 + \sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \\
&= x \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}} \right).
\end{aligned}
$$

Oznaka Φ stoji za funkciju distribucije standardne normalne slučajne varijable dok smo rezultat za d_1 dobili na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
d_2 + \sigma(T-t) &= \frac{1}{\sigma} \left(\ln\left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right) + \sigma^2 (T-t)) \\
&= \frac{1}{\sigma} \left(\ln\left(\frac{x}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right) \\
&= d_1.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo sada drugi integral koji nam je ostao:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left| \begin{array}{l} \dfrac{z}{\sqrt{T-t}} = u \\ dz = \sqrt{T-t}\ du \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{T-t} du \\
&= K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

Ovim računima dolazimo do vrijednosti za europsku call opciju, uz cijenu dionice x, danu sljedećom formulom:

$$C_t^C = I_1 - I_2 = x\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right),$$

dok slučajna varijabla kojom modeliramo cijenu europske call opcije u $t \in [0,T]$ je dana s

$$C_t^C = S_t \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Kako bi izračunali vrijednost europske put opcije koristit ćemo call-put paritet kojeg smo upoznali kada smo govorili o call i put opcijama u prvom poglavlju. Za $t \in [0,T]$ računamo

$$\begin{aligned}
C_t^C - C_t^P &= E^*[e^{-r(T-t)} C_T^C | \mathcal{F}_t] - E^*[e^{-r(T-t)} C_T^P | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} E^*[C_T^C - C_T^P | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} E^*[S_T - K | \mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t] - K e^{-r(T-t)} \\
&= S_t - K e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Nadalje, slijedi formula za izračun vrijednosti europske put opcije.

$$\begin{aligned}
C_t^P &= C_t^C - S_t + K e^{-r(T-t)} \\
&= S_t \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t + K e^{-r(T-t)} \\
&= -S_t \left(1 - \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right)\right) + K e^{-r(T-t)} \left(1 - \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right)\right) \\
&= K e^{-r(T-t)} \Phi\left(-\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t \Phi\left(-\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

U nastavku rada cijenu opcije označavati ćemo s π. Posebno, ukoliko je riječ o call opciji, odnosno put opciji označavati ćemo ih s π_C i π_P. Dolazimo do notacije $\pi(S(t), t; K, T)$ za cijenu opcije u trenutku t, gdje vidimo zavisnost cijene opcije o vremenu i naravno cijeni dionice. U prethodnim poglavljima definirali smo Itôv integral koju je uveo Itô 1951. godine. Itô je izveo formulu za cijenu opcije koju, iako ju treba intepretirati u integralnom obliku, uobičajeno zapisujemo u diferencijalnom obliku koja prati sljedeću formulu:

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial S} dS + \frac{\partial \pi}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 dt. \tag{2.3}$$

Nadalje ćemo koristiti ovu formulu kako bi otkrili princip i svojstva zaštite koje nam ova formula pruža. Pretpostavimo da trgovac prodaje kupcu opciju za koju dobiva premiju π. Kako bi se trgovac pravilno zaštitio od mogućih kretanja cijene dionice on mora kupiti određeni dio jedne dionice. Trgovčev portfelj se sastoji od novaca, odnosno prinosa i izdataka, prodanih opcija i broja dionica u vlasništvu. Ako s $V(t)$ označimo vrijednost portfelja u svakom trenutku t njegovu promjenu možemo pisati kao

$$dV = \Delta dS - d\pi.$$

Korištenjem (2.3) dolazimo do sljedećeg zapisa:

$$\begin{aligned} dV &= \Delta dS - \left(\frac{\partial \pi}{\partial S} dS + \frac{\partial \pi}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 dt \right) \\ &= \left(\Delta - \frac{\partial \pi}{\partial S} \right) dS + \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Kako bi eliminirali rizik, ne želimo da naš portfelj ovisi o promjeni cijene dionice jer taj faktor ne možemo predvidjeti. To nas vodi do sljedeće jednakosti, a to je koliki dio jedne dionice moramo posjedovati u svakom trenutku trajanja opcije. Ta jednakost dana je s

$$\Delta = \frac{\partial \pi}{\partial S}.$$

Trenutačno još ne znamo koliko iznosi $\partial\pi/\partial S$ pa ne možemo znati koliki dio jedne dionice moramo posjedovati u svakom trenutku. Cjelokupni izračun je preveliki pa ćemo samo izreći osnovne formule koje se dobiju izračunom te ćemo ih uzeti kao temelj za daljnji dio rada. Prije svega recimo kako jednom kad preuzmemo rizik prodajom opcije premija koju trgovac dobije u tu svrhu trebala bi pokriti troškove procesa zaštite. Najprije uvedimo formule koje će nam biti potrebne. Buduća vrijednost novca koju dobivamo neprekidnim ukamaćivanjem po stopi r dana je s

$$F = S(t_0) exp\left((r - q)(T - t_0)\right)$$

gdje je q dividenda koju, radi kompleksnosti, nećemo promatrati. Dividenda može biti godišnja, polugodišnja, kvartalna te zbog njezine neizvjesnosti kolika će biti smatrati ćemo da nema dividendi na posjedovanje dionice. Značenja parametara d_1 i d_2 smo već upoznali, a njihove formule dane su s

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t_0} = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}.$$

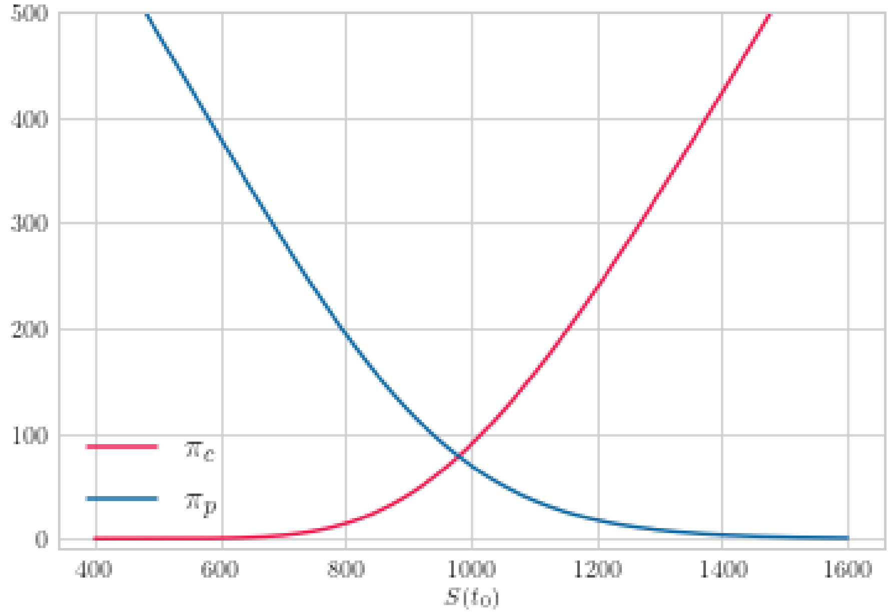
Dolazimo do formula za izračun premija za call i put opciju. Formule su dane u sljedećoj tablici:

	Premija π
π_C	$exp(-r(T - t_0))(FN(d_1) - KN(d_2))$
π_P	$exp(-r(T - t_0))(KN(-d_2) - FN(-d_1))$

Tablica 2.1: Formule za izračun premija call i put opcija

Iz formula za izračun premija call i put opcija možemo vidjeti da drift μ nema nikakav utjecaj. Oznaka N stoji za funkciju distribucije standardne normalne slučajne varijable. U sljedećem poglavlju govoriti ćemo o parametrima koje dobijemo raznim operacijama nad cijenom opcije. No, prije toga promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.4. Pretpostavimo sljedeće uvjete u BSM formuli: neka je dana neprekidna kamatna stopa u vrijednosti $r = 2\%$, vrijeme izvršenja opcije $T = 1$ godina te volatilnost iznosi $\sigma = 0.2$. Cijena izvršenja opcije iznosi $K = 1000$ kuna. Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti kako se ponašaju iznosi premija za call i put opciju s obzirom na različite trenutne vrijednosti dionice.



Slika 2.1: Iznosi premija za call i put opciju

Iz prethodne slike možemo primjetiti da premija za call opciju raste porastom početne vrijednosti dionice. U suprotnom, premija za put opciju raste ukoliko početna vrijednost dionice pada.

3 "Grci"

U ovome dijelu rada upoznati ćemo četiri parametra koja dobijemo raznim računskim operacijama nad cijenom opcije. Svaki od tih parametara ima neko značenje i može trgovcu pomoći kako se njihovim pravilnim korištenjem može zaštititi od rizika.

3.1 Delta

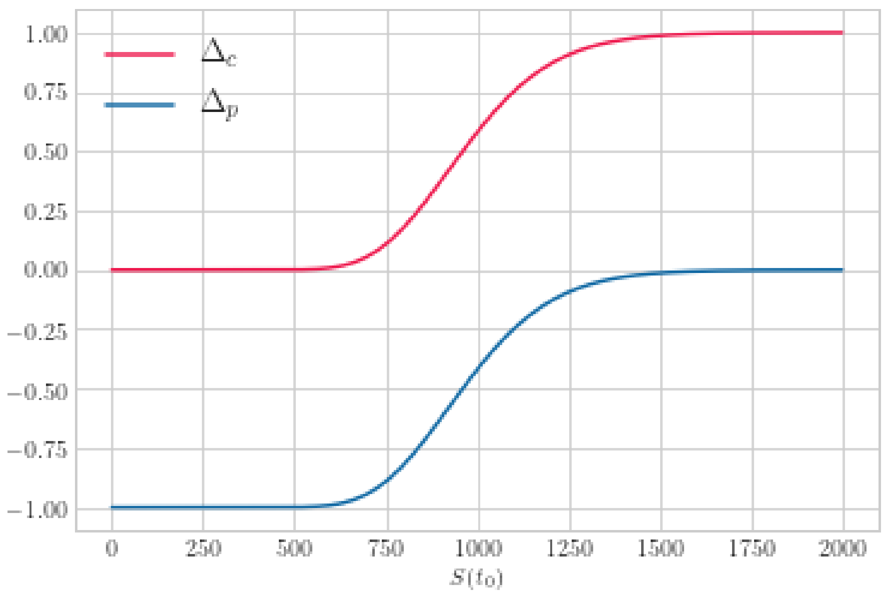
Prvi parametar kojeg smo uveli na kraju prethodnog poglavlja je Delta, Δ. Delta nam govori koliko dio jedne dionice trgovac treba posjedovati kako bi se pravilno zaštitio od rizika. U tom slučaju govorimo o Delta zaštiti. U sljedećoj tablici dane su formule za izračun Delta kod call i put opcija.

	Delta Δ
Δ_C	$exp(-q(T-t_0))N(d_1))$
Δ_P	$-exp(-q(T-t_0))N(-d_1)$

Tablica 3.1: Formule za izračun parametra Delta

U sljedećem primjeru promotriti ćemo vrijednosno ponašanje parametra Δ za različite početne vrijednosti dionice.

Primjer 3.1. Pretpostavimo sljedeće uvjete u BSM formuli: neka je dana neprekidna kamatna stopa u vrijednosti $r = 2\%$, vrijeme izvršenja opcije $T = 1$ godina te volatilnost koja iznosi $\sigma = 0.2$. Cijena izvršenja opcije iznosi $K = 1000$ kuna. Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti kako se ponašaju vrijednosti parametra Delta za call i put opciju s obzirom na različite trenutne vrijednosti dionice.



Slika 3.1: Vrijednosti parametra Δ za call i put opciju

Primjetimo da je vrijednost Δ_P negativna što znači da trgovac mora prodati određeni dio dionice kako bi se Delta zaštitio, dok u slučaju call opcije mora kupiti određeni dio dionice.

Do sada smo naučili izačunati cijenu opcije te računati Deltu kako bi se pravilno zaštitili. U sljedećem primjeru pogledajmo kako trgovac svakodnevnim mijenjanjem svog portfelja eliminira rizik.

Primjer 3.2. Neka je zadana neprekidna kamatna stopa $r = 2\%$, drift $\mu = 0.1$, volatilnost iznosi $\sigma = 0.2$ te neka je početna cijena dionice $S(t_0) = 100$ kuna. Vrijednosti $Z^{(i)}$ ćemo slučajno generirati iz standardne normalne slučajne varijable koji će služiti za promjenu cijene dionice koja je dana sljedećom formulom:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z^{(i)}\right).$$

Neka je vrijeme trajanja opcije dano s $T = 0.1$, tj. razlika između vremena izvršenja i trenutnog vremena iznosi $\tau = T - t_0 = 0.1$. Koraci tijekom provedbe zaštite biti će nam $\Delta t = 0.005$ jer pretpostavljamo da u tom periodu trajanja opcije možemo trgovati samo 20 dana. Neka je cijena izvršenja opcije $K = 100$ kuna. Objasnimo što će nam koji stupac u tablici značiti. Značenja pojedinih stupaca u tablici su:

1) Korak: jedan korak će značiti promjenu za jedan dan
2) $Z^{(i)}$: slučajno generirani broj iz standardne normalne slučajne varijable koji određuje promjenu cijene dionice u trenutku t_i
3) $S(t_i)$: vrijednost dionice u trenutku t_i, čija je početna vrijednost 100 kuna
4) π: vrijednost opcije svakog pojedinog dana
5) Δ: vrijednost Delte svakog dana
6) V: vrijednost dionice nasljeđene iz prethodnog dana
7) N: iznos novca nasljeđenog iz prethodnog dana
8) V BSM: vrijednost dionice iz BSM formule za taj dan
9) N BSM: iznos novca određenog BSM formulom za taj dan
10) PiG: profit i gubitak za taj dan
11) Ukupno: akumulirani profit ili gubitak

Korak	Z	$S(t)$	π	Δ	V	N	V BSM	N BSM	PiG	Ukupno
1		100.00	2.62	52.52%			52.52	-49.90		0.00
2	-0.0969	99.90	2.50	51.83%	52.47	-49.91	51.78	-49.28	0.06	0.06
3	-0.2337	99.61	2.28	49.82%	51.63	-49.28	49.62	-47.34	0.06	0.13
4	0.5889	100.49	2.67	55.62%	50.06	-47.34	55.89	-53.22	0.04	0.17
5	-0.5743	99.71	2.19	50.23%	55.46	-53.23	50.09	-47.90	0.05	0.22
6	-0.7561	98.69	1.64	42.64%	49.57	-47.90	42.08	-40.44	0.03	0.25
7	0.3756	99.26	1.81	46.49%	42.32	-40.44	46.15	-44.34	0.06	0.31
8	1.1662	100.95	2.63	59.33%	46.94	-44.34	59.89	-57.27	-0.03	0.28
9	-0.0494	100.92	2.52	59.31%	59.88	-57.27	59.86	-57.33	0.08	0.36
10	0.7822	102.08	3.18	68.66%	60.55	-57.34	70.09	-66.90	0.02	0.38
11	-0.6564	101.18	2.51	62.05%	69.47	-66.91	62.78	-60.28	0.05	0.44
12	-0.3337	100.74	2.15	58.58%	62.51	-60.28	59.02	-56.87	0.08	0.52
13	0.0374	100.84	2.10	59.80%	59.07	-56.88	60.30	-58.20	0.09	0.61
14	0.6775	101.85	2.66	70.08%	60.91	-58.21	71.38	-68.72	0.05	0.66
15	1.4363	103.98	4.26	87.72%	72.87	-68.73	91.21	-86.95	-0.12	0.54
16	1.3292	105.99	6.09	96.94%	92.98	-86.96	102.76	-96.67	-0.06	0.47
17	-0.7428	104.93	5.02	95.81%	101.72	-96.68	100.54	-95.52	0.02	0.50
18	-1.6709	102.52	2.75	85.09%	98.23	-95.53	87.24	-84.49	-0.04	0.45
19	1.2704	104.42	4.45	98.55%	88.85	-84.50	102.90	-98.45	-0.10	0.36
20	0.7552	105.58	5.59	99.99%	104.05	-98.46	105.58	-99.98	-0.01	0.35
21	-0.2190	105.30	5.30	100.00%	105.29	-99.99	0.00	0.00	0.00	0.35

Tablica 3.2: Dinamička primjena Delta zaštite

Iz prethodnog primjera možemo vidjeti kako trgovac dinamično mijenja svoj portfelj kako bi se zaštitio od rizika jer se svakodnevno događaju promjene cijena dionice. Objasnimo što se događa tijekom provedbe zaštite. U prvom danu trgovac je prodao opciju klijentu i u tom slučaju je primio novac u iznosu 2.62 kune. Vidimo također da Delta iznosi 52.52% što znači da trgovac mora kupiti 0.5252 dionice po cijeni 100 kuna kako bi se zaštitio. Vrijednost tog dijela iznosi 52.52 kune, no kako je trgovac već dobio premiju od 2.62 kune on mora pozajmiti 49.90 kuna kako bi kupio potreban broj dionice.

U sljedećem danu dogodio se pad cijene dionice za 10 lipa te je tako njegov portfelj izgubio na vrijednosti otprilike 5 lipa. Također se akumulirala neprekidna kamatna stopa u iznosu od 1 lipe. Također vidimo i da je vrijednost opcije pala. Zbog promjene cijene dionice mijenja se i pripadajući iznos za Deltu. Delta u drugom danu iznosi 51.83%. To znači da će trgovac prodati 0.0069 dionice po cijeni od 99.90 kuna i taj novac će iskoristiti za vraćanje duga. Tako trgovac rebalansira svoj portfelj. Trgovac svakog dana mijenja svoj portfelj kako bi bio u neutralnoj poziciji radi promjene cijene dionice sve do vremena dospijeća opcije te na kraju bilježi profit od 0.35 kuna. Ovaj primjer je primjer Delta zaštite. U nastavku ćemo se upoznati s drugim parametrima.

3.2 Gamma i Theta

Prije nego krenemo na sljedeće parametre malo ćemo zagrebati u teorijski dio kako bi što bolje razumijeli koncept zaštite. Koristit ćemo Taylorov razvoj. Taylorov razvoj nam govori da se svaka funkcija može aproksimirati polinomom. Koeficijenti polinoma određeni su vrijednošću derivacija funkcije u određenoj točki. Prisjetimo se da je cijena opcije π funkcija vrijednosti dionice S i vremena t. Kako bi dobili još neke parametre funkciju cijene opcije razviti ćemo do drugog reda po cijeni dionice, odnosno po S, te do prvog reda po vremenu t. Cijena dionice u trenutku $t = 0$ je S_0 pa dolazimo do sljedećeg izraza za cijenu opcije:

$$\pi(S,t) \approx \pi(S_0,t_0) + \frac{\partial \pi}{\partial S}(S_0,t_0)\cdot(S-S_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(S_0,t_0)\cdot(S-S_0)^2 + \frac{\partial \pi}{\partial t}(S_0,t_0)\cdot(t-t_0).$$

Ako aproksimiramo cijenu opcije Taylorovim razvojem do prvog reda onda cijenu opcije aproksimiramo pravcem, no ukoliko aproksimiramo Taylorovim razvojem do drugog reda onda cijenu opcije aproksimiramo parabolom kao što je slučaj u prethodnoj formuli. Također možemo primjetiti da se linearna aproksimacija vrijednosti opcije nalazi ispod grafa aproksimirane vrijednosti opcije danom prethodnom formulom. U oba prethodna slučaja možemo primjetiti da nema velike razlike u cijeni opcije ukoliko se cijena dionice nalazi blizu njene početne cijene. U suprotnom, ako cijena dionice značajno odstupa od početne cijene dionice ostali sumandi dolaze do izražaja. Iz formule je također lako primjetiti da je drugi sumand jednak Delti. Nadalje ćemo definirati Gammu i Thetu što će nam omogućiti prikaz prethodne formule za cijenu opcije u obliku 'Grka'. U prethodnom dijelu upoznali smo se s procedurom Delta zaštite. Uvedimo sljedeće oznake:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} \quad \text{i} \quad \theta = \frac{\partial \pi}{\partial t}.$$

Matematički gledano Gamma je jednaka drugoj derivaciji cijene opcije po vrijednosti dionice S, dok je Theta jednaka derivaciji cijene opcije po vremenu t. Također primjetimo da se oba izraza nalaze u formuli Taylorovog razvoja cijene opcije. Trenutnu cijenu opcije označavamo s $\pi_0 = \pi(S(t_0), t_0)$, promjenu, odnosno razliku, u vrijednosti dionice označavamo s $\Delta S = S - S_0$ te promjenu u vremenu označavamo s $\Delta t = t - t_0$. Time dolazimo do sljedećeg izraza:

$$\pi(S_0 + \Delta S, t_0 + \Delta t) = \pi_0 + \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma \cdot \Delta S^2 + \theta \cdot \Delta t.$$

Sada smo zapisali formulu za cijenu opcije s početka poglavlja u obliku 'Grka'. Prije nego što se detaljnije počnemo baviti parametrima Gamma i Theta objasnimo zašto opcije zovemo nelinearnim instrumentima. To znači da promjenom vrijednosti dionice cijena opcije se ne mijenja s točno određenom proporcionalnošću. Pogledajmo to na sljedećem primjeru.

Primjer 3.3. Pretpostavimo sljedeće uvjete u BSM formuli: neka je dana neprekidna kamatna stopa u vrijednosti $r = 2\%$, vrijeme izvršenja opcije $T = 1$ godina, volatilnost iznosi $\sigma = 0.2$ te je cijena dionice u trenutku $t = 0$ jednaka $S_0 = 1000$ kuna. Cijena izvršenja opcije iznosi $K = 1000$ kuna. Time dolazimo da je cijena call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka 89.16 kuna, a cijena put opcije jednaka 69.36 kuna. U sljedećoj tablici dan je prikaz promjena cijena dionice te pripadajuće promjene u cijeni call odnosno put opcije:

cijena dionice	-40	-20	-10	0	10	20	40
cijena call opcije	-21.57	-11.19	-5.69	0	5.89	11.97	24.69
cijena put opcije	18.43	8.81	4.31	0	-4.11	-8.03	-15.31

Tablica 3.3: Promjena cijena opcije uzrokovane promjenom cijene dionice

Iz ovoga primjera, ali i iz slike 2.1, vidimo da promjena početne cijene dionice implicira promjenu cijene opcije. Promotrimo najprije call opciju. Vidimo da za svako dvostruko povećanje razlike u cijeni dionice na više, cijena opcije se povećava više nego dvostruko. U suprotnom, ako gledamo razlike cijena dionica koje su niže od početne cijene dionice svako dvostruko povećanje razlike cijena dionice cijena opcije se smanjuje manje od dvostrukog. Analogno se može zaključiti za put opciju samo će biti obrnuti slučaj. Također, možemo primjetiti da je apsolutna promjena početne cijene dionice veća od apsolutne promjene cijene opcije. Lako je izračunati da je apsolutna promjena cijene dionice jednaka zbroju apsolutnih promjena u cijenama call i put opcije. To se može izračunati pomoću call-put pariteta kojega smo upoznali u prvom poglavlju.

Prethodnim primjerom smo shvatili kako promjena početne cijene dionice utječe na promjenu cijene opcije. Pokušajmo sada povezati i Delta zaštitu u prethodnu priču iz primjera. Pomoću pretpostavki iz primjera lako je izračunati Deltu za call opciju. Delta za call opciju iznosi $\Delta = 57.93\%$. To znači da je za svaku call opciju potrebno kupiti 0.5793 dio jedne dionice. Ukoliko se cijena dionice promjeni za 20 kuna promjena vrijednosti koju bilježi naš portfelj iznosi 11.59 kuna. Nadalje, izračunajmo Delta za put opciju s istim pretpostavkama kao iz prethodnog primjera. Delta za put opciju iznosi $\Delta = -42.07\%$. To znači da za svaku prodanu put opciju trebamo prodati 0.4207 dio jedne dionice. Ukoliko cijena dionice padne za 20 kuna, tada promjena koju bilježi naš portfelj iznosi 8.41 kunu.

Tijekom prethodnog primjera mogli smo primjetiti povezanost između Delti za call i put opciju. Dolazimo do jednog važnog rezultata. Sljedećom formulom možemo vidjeti koja je poveznica između Delte za call odnosno put opciju:

$$\Delta_C - \Delta_P = 1.$$

3.2.1 Gamma

Iz Taylorovog razvoja za cijenu opcije na početku poglavlja možemo primjetiti da u sumandu u kojem se pojavljuje Gamma razlika u promjeni od početne cijene dionice ima kvadratni učinak na taj sumand. To nas dovodi do jednog zanimljivog primjera. Pretpostavimo da je trgovac kupio opciju i postavio zaštitu kako bi mogao upravljati rizikom kojeg je dobio tom transakcijom. Promatrati ćemo primjer u kojem je trgovac kupio opciju čija je trenutačna cijena dionice jednaka cijeni izvršenja i prodao Δ dionice za svoju Delta zaštitu. Uvedimo i konkretne brojke u cijelu priču. Neka je početna cijena dionice $S_0 = 1000$ kuna te neka je cijena izvršenja $K = 1000$ kuna. Neprekidna kamatna stopa iznosi $r = 2\%$ dok je volatilnost zadana s $\sigma = 0.2$. Vrijeme trajanja opcije iznosi $T = 1$ godina. Trgovac je u tom slučaju morao prodati $\Delta = 0.5793$ dionice.

Pretpostavimo da je cijena dionice narasla za 20 kuna. U tom slučaju posjedovanje opcije vrijedi više. Također treba promijeniti strukturu posjedovanja dionice, odnosno rebalansirati svoj portfelj Delta zaštitom. Novi Δ sada iznosi 0.6175. To znači da trgovac mora prodati $0.6175 - 0.5793 = 0.0382$ dionice po cijeni od 1020 kuna kako bi se potpuno Delta zaštitio. Trgovac prodajom bilježi zaradu u iznosu od 38.96 kuna. Nadalje, pretpostavimo da se cijena dionice smanjila za 20 kuna te sada ponovno iznosi 1000 kuna. Posjedovanje opcije trgovca vraća na početno stanje što se tiče njene vrijednosti. Nadalje, trgovac se mora Delta zaštititi, odnosno trebao bi kupiti nazad 0.0382 dionice kako bi se potpuno zaštitio. No taj dio će kupiti po cijeni od 1000 kuna te će na to potrošiti iznos od 38.20 kuna. Jednostavnim računom možemo vidjeti da je trgovac u profitu $38.96 - 38.20 = 0.76$ kuna.

Trgovac je zaradio 0.76 kuna koristeći svoju strategiju zaštite kada je cijena porasla te kada je cijena pala. Primjetimo da postoji zarada trgovca kada on posjeduje opciju i kada prodaje Δ dionice u svrhu zaštite. Strategija nam omogućuje prodaju dionice kada je cijena visoka, a kupnju dionice kada je cijena niska. Ovaj proces vrijedi i za put opciju, kao i za call opciju na kojoj smo temeljili prethodni primjer.

Primjetimo kako trgovci koji posjeduju opciju i štite ju zarađuju novce, dok očito trgovci koji prodaju opciju su na gubitku. Prije nego objasnimo ovaj paradoks pokušati ćemo odrediti koliko trgovac može zaraditi koristeći ovu strategiju. Znamo da se promjena neke vrijednosti mjeri kao derivacija. To znači da moramo znati kolika je derivacija od Δ, tj. moramo znati $\partial\Delta/\partial S$. Kao što znamo iz prethodnog poglavlja da je Delta već derivacija cijene opcije po cijeni dionice, odnosno $\Delta = \partial\pi/\partial S$ što nam govori kako se cijena opcije mijenja promjenom cijene dionice. Završno, vrijednost koja nam govori koliko trgovac može generirati profita svojom strategijom zbog promjene cijene dionice dana je s parametrom $\Gamma = \partial^2\pi/\partial S^2$.

Kako bi mogli predvidjeti koliko bi nam ovakva strategija mogla donijeti profita moramo se vratiti u Taylorov razvoj cijene opcije s početka poglavlja. Formula nam govori kako točno zaštititi opciju koristeći Delta poziciju. Sumand iz Taylorovog razvoja dan je sljedećom formulom

$$\Gamma_{P\&G} = \frac{1}{2}\Gamma \cdot (S - S_0)^2,$$

koji se još naziva cash Gamma, a slova P i G označuju profit, odnosno gubitak.

Možemo primjetiti dva slučaja koja nam daju profit. Što se brže cijena opcije mijenja promjenom cijene dionice to više profita može biti stvoreno što je reprezentirano parametrom Γ. Drugi slučaj koji nam donosi zaradu je promjena cijene. Što je veće odstupanje od početne cijene možemo stvoriti više profita. Taj profit koji se generira promjenom cijene nije linearan nego je kvadratan. Takvo kreiranje profita je zanimljivo jer što duže čekamo to je bolje jer je vjerojatnije da će se vrijednost dionice pomaknuti od svoje početne cijene. U tom slučaju trgovac preuzima rizik.

Vratimo se na prethodni primjer i pretpostavimo da cijena dionice raste. Znamo da rast cijene dionice donosi profit trgovcu. Ako trgovac ne napravi novu Delta zaštitu rezultiranu promjenom cijene dionice i cijena počne padati njegov profit počne nestajati. Ukoliko trgovac na vrijeme ne napravi novu Delta zaštitu preuzima rizik.

Za kraj poglavlja odredimo još formule za parametar Gamma u call i put opciji. Formule su dane u sljedećoj tablici:

	Gamma Γ
Γ_C	$exp(-q(T - t_0))\frac{\phi(d_1)}{S(t_0)\sigma\sqrt{T-t_0}}$
Γ_P	$exp(-q(T - t_0))\frac{\phi(d_1)}{S(t_0)\sigma\sqrt{T-t_0}}$

Tablica 3.4: Formule za izračun parametra Gamma

gdje je ϕ funkcija gustoće standardne normalne slučajne varijable:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

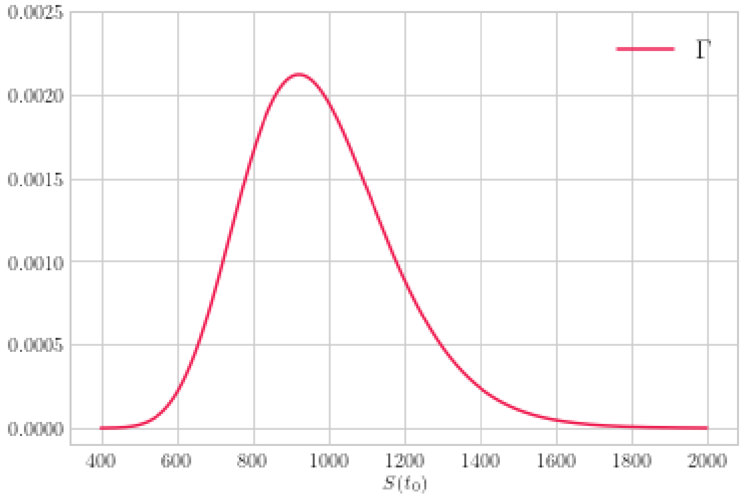
Vidimo da su formule za Gammu jednake za call i put opciju. U sljedećem primjeru prikazati ćemo rezultate za Γ i $\Gamma_{P\&G}$ za pojedine promjene cijena dionice.

Primjer 3.4. Neka su dani sljedeći parametri: cijena izvršenja iznosi $K = 1000$ kuna te neka su $r = 2\%$, $\sigma = 0.2$ i $T = 1$ godina. Promotrimo rezultate za te parametre ukoliko su se dogodile sljedeće promjene cijena dionice:

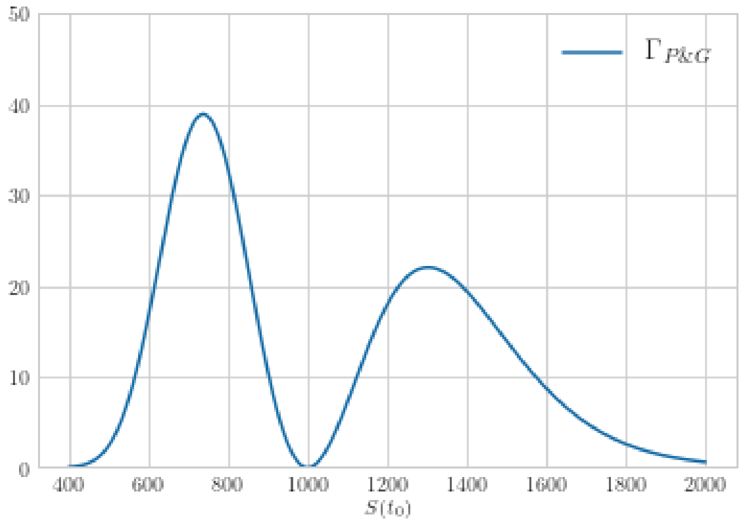
S	850	900	950	1000	1050	1100
Γ	0.0019452	0.0021011	0.0020964	0.0019552	0.0017214	0.0014424
$\Gamma_{P\&G}$	21.88	10.51	2.62	0	2.15	7.21

Tablica 3.5: Vrijednosti Γ i $\Gamma_{P\&G}$ za različite početne vrijednosti dionice

Na sljedećim grafičkim prikazima možemo vidjeti vrijednosno ponašanje za Γ i $\Gamma_{P\&G}$ na osnovu pretpostavki iz prethodnog primjera.



Slika 3.2: Vrijednosti parametra Γ



Slika 3.3: Vrijednosti za $\Gamma_{P\&G}$

Prethodno smo zaključili da je Gamma jednaka za call i put opciju. Iz slike 3.2 za vrijednosti Γ vidimo da njegov graf ima zvonoliki oblik. Najveća vrijednost za Gammu je u slučaju kada je cijena dionice manja od cijene izvršenja K. Također možemo primjetiti kako promjenom cijena od početne cijene dionice stvaramo profite. U ekstremnim promjenama cijene dionice $\Gamma_{P\&G}$ se približava nuli, što možemo primjetiti na slici 3.3, jer vrijednosti za faktor Γ u tim slučajevima su jako male.

3.2.2 Theta

U primjeru iz prethodnog poglavlja vidjeli smo kako možemo generirati profit promjenom cijene dionice u oba pravca ukoliko posjedujemo opciju i na vrijeme koristimo Delta zaštitu. Naravno, to je predobro da bi bilo istinito. Sada ćemo razjasniti paradoks koji proizlazi iz toga. U cijelu priču oko toga nismo uzeli u obzir jednu važnu činjenicu, a to je da trgovac mora platiti premiju kako bi kupio opciju. Prvo trgovac mora zaraditi toliko da bi pokrio plaćanje opcije pa tek onda kreće ostvarivati profit.

Pretpostavimo da je trenutna cijena opcije oko cijene izvršenja. Očito je da je cijena opcije veća ukoliko je period, odnosno vrijeme izvršenja duže, ne mijenjajući ostale parametre. To je naravno razumno jer što je duži period cijena dionice može završiti iznad cijene izvršenja, ukoliko govorimo o call opciji. Isto tako, ukoliko je vrijeme izvršenja opcije duže cijena dionice može pasti na nisku razinu. To neće biti problem jer tada opciju nećemo izvršiti. U tom slučaju izgubiti ćemo samo premiju koju smo platili za opciju, dok nam je potencijalna zarada neograničena.

Vrijednost opcije koju je trgovac kupio u vremenu t_0 postaje sve manja i manja kako vrijeme prolazi. Taj proces je neizbježan te ako cijena dionice ostane na istoj razini kao i na ugovaranju opcije njena vrijednost u vremenu izvršenja će biti nula. Opcija gubi svoju vrijednost malo po malo. Promjenu vrijednosti opcije od jednog dana do sljedećeg određujemo parametrom Theta, u oznaci θ. Za očekivati je da je Theta negativan i za call i za put opciju ako se cijena dionice nalazi oko početne razine cijene dionice.

Zanimljivo je shvatiti kako tijekom razdoblja trajanja opcije jedina stvar koju možemo predvidjeti je vrijeme. Vrijeme ne može ići brže niti sporije niti se može vraćati. Pogledajmo sljedeći primjer.

Neka je trenutna cijena dionice dana sa $S_0 = 20$ kuna. Neka je neprekidna kamatna stopa $r = 2.5\%$, volatilnost $\sigma = 0.35$ te neka je vrijeme trajanja opcije $T = 1$ godina. Neka je cijena izvršenja opcije $K = 20$ kuna. Cijena put opcije tada iznosi 2.50 kuna. Pretpostavimo da se na financijskom tržištu trguje 250 dana jer ne računamo vikende i blagdane kao radne dane. Time također pretpostavljamo da opcija gubi vrijednost samo na te radne dane. Mogli bi tada staviti da opcija gubi vrijednost od 0.01 kunu po danu koji prođe. Time bi gubitak vrijednosti opcije tijekom vremena bio prediktivan. To naravno ne bi bilo dosljedno tržištu. Znamo samo izračunati Thetu u sadašnjosti i znamo da će opcija izgubiti svoju vrijednost kada dođe njeno vrijeme izvršenja, ali ne možemo predvidjeti kako će se njena vrijednost ponašati tijekom vremena trajanja opcije.

Pogledajmo vrijednosti opcije tijekom svakoga dana. Početna cijena dionice iznosi $S_0 = 20$ te koraci tijekom vremena neka su $\Delta t = 1/250$. Tako ćemo razumjeti kako opcija gubi vrijednost tijekom vremena. U sljedećoj tablici pogledajmo vrijednosti opcije tijekom vremena.

Vrijednost opcije	Preostalo vrijeme	Vrijednost opcije	Preostalo vrijeme
2.50	250	1.99	150
2.48	245	1.96	145
2.46	240	1.93	140
2.44	235	1.90	135
1.66	100	1.20	50
1.62	95	1.14	45
1.58	90	1.07	40
1.54	85	1.01	35
0.94	30	0.55	10
0.86	25	0.39	5
0.77	20	0.18	1
0.67	15	0	0

Tablica 3.6: Promjena vrijednosti opcije kroz vrijeme

Iz tablice je lako primjetiti kako opcija sporo gubi na svojoj vrijednosti tijekom početka trajanja opcije, a gubitak vrijednosti se ubrzava kako se približava vrijeme dospijeća. Tijekom prvih mjesec dana opcija gubi na svojoj vrijednosti 2 lipe tijekom jednog tjedna. Kada je ostalo još 100 dana do izvršenja opcije opcija gubi na svojoj vrijednosti 4 lipe tijekom jednog tjedna. Tijekom zadnjeg tjedna opcija je izgubila 39 lipa na svojoj vrijednosti, a najveći gubitak u jednom danu je ostvaren zadnji dan gdje je opcija izgubila 18 lipa na svojoj vrijednosti. To je veoma važno znati za trgovca koji kupuje opciju. On treba znati da će njegova opcija s vremenom gubiti na vrijednosti te da će najviše gubiti kako se vrijeme trajanja opcije približava vremenu dospijeća.

Vrijeme je da definiramo Thetu. Na početku poglavlja smo već upoznali njenu matematičku definiciju koja glasi

$$\theta = \frac{\partial \pi}{\partial t}.$$

Često Thetu gledamo kao promjenu tijekom jednog vremenskog trenutka, odnosno dana, pa dolazimo do sljedeće formule:

$$\theta_d = \theta \cdot \Delta t,$$

gdje je Δt jedan dan. Kao što smo već ranije spomenili jedan dan gledamo kao radni dan tijekom kojeg se može trgovati što bi značilo da je $\Delta = 1/250$. To znači da vrijeme staje kada se vikendi pojave. No u stvarnosti to nije tako. Trgovanje možda staje tijekom vikenda, ali novosti oko stanja na tržištu pojavljuju se i tijekom vikenda te se time mijenja i volatilnost pa i vrijednost dionice koja nije odmah prikazana. Možemo reći da je $\Delta t = 1/365$ ukoliko se radi o radnim danima, npr. s utorka na srijedu, a ukoliko se gleda promjena s petka na ponedjeljak uzimamo da je $\Delta = 3/365$. Nadalje, možemo zapisati promjenu u vrijednosti opcije tijekom jednog dana sljedećom formulom

$$\begin{aligned} \theta_d &= \pi(S_0, t_0 + \Delta t; T, K) - \pi(S_0, t_0; T, K) \\ &= \pi(S_0, t_0; T - \Delta t, K) - \pi(S_0, t_0; T, K). \end{aligned}$$

Formule za trenutnu Thetu koju dobijemo iz BSM formule dane su u sljedećoj tablici:

Theta θ	
θ_C	$exp(-r(T-t_0))(-\frac{1}{2}F\sigma\phi(d_1) - rKN(d_2) + qFN(d_1))$
θ_P	$exp(-r(T-t_0))(-\frac{1}{2}F\sigma\phi(d_1) + rKN(-d_2) - qFN(-d_1))$

Tablica 3.7: Formule za izračun parametra Theta

U sljedećem primjeru odrediti ćemo parametar Theta za neke vrijednosti cijene dionice.

Primjer 3.5. Neka su dani sljedeći parametri: $K = 1000$ kuna, volatilnost iznosi $\sigma = 0.2$, $r = 2\%$ te $T = 1$ godina. U sljedećoj tablici pogledajmo vrijednosti Thete za call i put opciju za razne vrijednosti cijene dionice.

S	500	750	1000	1250	1500
θ_C	-0.1015656	-15.3710563	-48.9062561	-37.9961528	-24.1949783
θ_P	19.5024080	4.2329171	-29.3022827	-18.3921793	-4.5910049

Tablica 3.8: Vrijednosti parametra Theta za različite početne vrijednosti dionice

Iz prethodnog primjera vidimo da se najmanja Theta postiže ukoliko je cijena opcije oko cijene izvršenja. Odmicanjem cijene dionice od cijene izvršenja Theta raste. Parametar Theta može biti pozitivan u dva slučaja. Jedan slučaj je kod call opcije kada je cijena dionice dosta veća od cijene izvršenja i kada ćemo aktivirati tu opciju što nažalost u ovom primjeru ne vidimo, a drugi slučaj je kod put opcije kada je cijena dionice dosta manja od cijene izvršenja i kada ćemo izvršiti opciju što je vidljivo iz prethodnog primjera.

3.3 Vega

Prije nego se posvetimo Vegi kao sljedećem parametru objasniti ćemo utjecaj volatilnosti na cijenu opcije. Do sada smo pretpostavljali da je volatilnost fiksna kroz cijeli period trajanja opcije. Volatilnost se mijenja s vremenom jer se cijene dionice također svakodnevno mijenjaju. Takvu volatilnost nazivamo realizirana volatilnost. Jasno je da postoje periodi niske odnosno visoke volatilnosti, ali u trenutku kad se opcija proda to postaje vidljivo kroz zaštitu opcije. U ovome poglavlju istražiti ćemo utjecaj raznih vrijednosti volatilnosti na cijenu opcije. Razne vrijednosti volatilnosti možemo usporediti s određenim situacijama kao što su promjena cijena na tržištu, promjena mišljenja brokera o određenoj dionici ili se može koristiti kao neizvjesnost budućeg vremena. Koncept nepoznate ili neizvjesne volatilnosti uveden je baš iz tog razloga, ali ga je u praksi teško koristiti.

Krenimo s upoznavanjem parametra Vega. Matematički izraz za trenutnu Vegu dan je s

$$\nu_{inst} = \frac{\partial \pi}{\partial \sigma},$$

gdje je π oznaka za vrijednost financijskog instrumenta, odnosno opcije. Prije svega primjetimo jednu razliku s prethodnim parametrima, a to je da Vega nije grčko slovo. Ovaj parametar je jako bitan u teoriji opcija te ćemo u nastavku vidjeti njegovu svrhu. Potreba za razumijevanjem Vege postala je bitna kada je tržište opcijama postalo likvidno kao danas. Ukoliko smo krivo procijenili vrijednost volatilnosti konačne posljedice vidjeti ćemo tek nakon što smo proveli sve zaštite i nakon što je opcija istekla.

Nakon što smo uvidjeli važnost volatilnosti kao bitnog parametra u trgovanju razumno ga je dodati cijeni dionice S i vremenu trajanja opcije t pri izračunu cijene opcije. Kako je volatilnost postala varijabla njenu početnu vrijednost označavati ćemo s $\sigma(t_0) = \sigma_0$ dok ćemo vrijednost izvedenice označavati s $\pi = \pi(S(t), t, \sigma(t))$, kraće zapisano $\pi = \pi(S, t, \sigma)$. Cijenu opcije zapisujemo pomoću Taylorovog razvoja kao što smo u prethodnim poglavljima radili. Dobivamo

$$\pi(S_0 + \Delta S, t_0 + \Delta t, \sigma_0 + \Delta\sigma) = \pi_0 + \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma \cdot \Delta S^2 + \theta \cdot \Delta t + \nu_{inst} \cdot \Delta\sigma,$$

gdje je $\pi_0 = \pi(S(t_0), t_0, \sigma(t_0))$.

Do sada svi parametri koje smo obradili nalazimo u izrazu BSM formule. Bez BSM formule ne bi bilo parametra σ i bez njega formuli bi nedostajao važan parametar. Jasno je da parametar σ može biti različit za razne opcije.

Izraz za izračunavanje Vege za call i put opciju dan je u sljedećoj tablici:

	Vega ν
$\nu_{inst,C}$	$S(t_0)exp(-q(T - t_0))\phi(d_1)\sqrt{T - t_0}$
$\nu_{inst,P}$	$S(t_0)exp(-q(T - t_0))\phi(d_1)\sqrt{T - t_0}$

Tablica 3.9: Formule za izračun parametra Vega

Primjetimo da su $\nu_{inst,C}$ i $\nu_{inst,P}$ jednaki. U većini praktičnih primjera ne uzimamo Vegu kao što je definirana iznad nego ju normaliziramo. Normalizirani izraz za Vegu dan je s

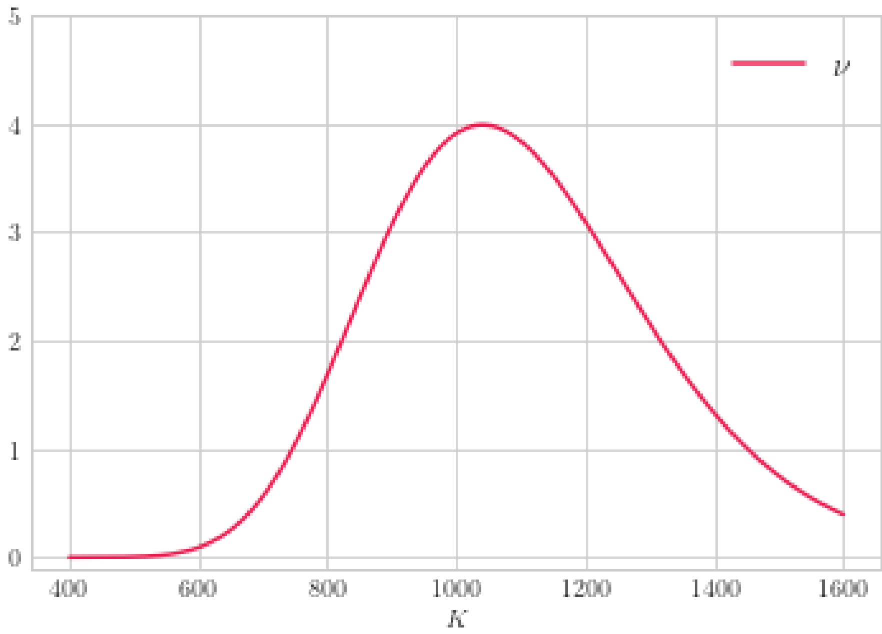
$$\nu = \nu_{inst} \cdot \Delta\sigma,$$

gdje je $\Delta\sigma = 1\%$. To je utjecaj promjene volatilnosti za 1% na cijenu opcije. Taj utjecaj je linearan. To znači da se svaka postotna promjena volatilnosti množi s linearnim koeficijentom ν_{inst} te se tako dobije promjena u cijeni opcije. Primjera radi, promjena volatilnosti za 2% iznositi će dvostruko veću promjenu u cijeni opcije od utjecaja promjene volatilnosti za 1% na cijenu opcije. Razumijevanje broja koji predstavlja Vega aludira kako će on utjecati na naš portfelj. U sljedećem primjeru izračunati ćemo Vegu za call i put opciju, odnosno biti će nam dovoljno izračunati za jedno jer Vege za call i put opciju su jednake.

Primjer 3.6. Neka su dani sljedeći parametri: neprekidna kamatna stopa iznosi $r = 2\%$, vrijeme trajanja opcije je $T = 1$ godina, početna cijena dionice iznosi $S_0 = 1000$ kuna i volatilnost iznosi $\sigma = 0.2$. Promotrimo vrijednosno ponašanje parametra Vega za različite cijene izvršenja K. U sljedećoj tablici prikazane su vrijednosti parametra Vega za cijene izvršenja koje su oko početne cijene dionice.

K	800	900	1000	1100	1200
ν	1.67882	3.06340	3.91043	3.83975	3.09706

Tablica 3.10: Vrijednosti parametra Vega za različite cijene izvršenja opcije



Slika 3.4: Vrijednosti parametra Vega za različite cijene izvršenja opcije

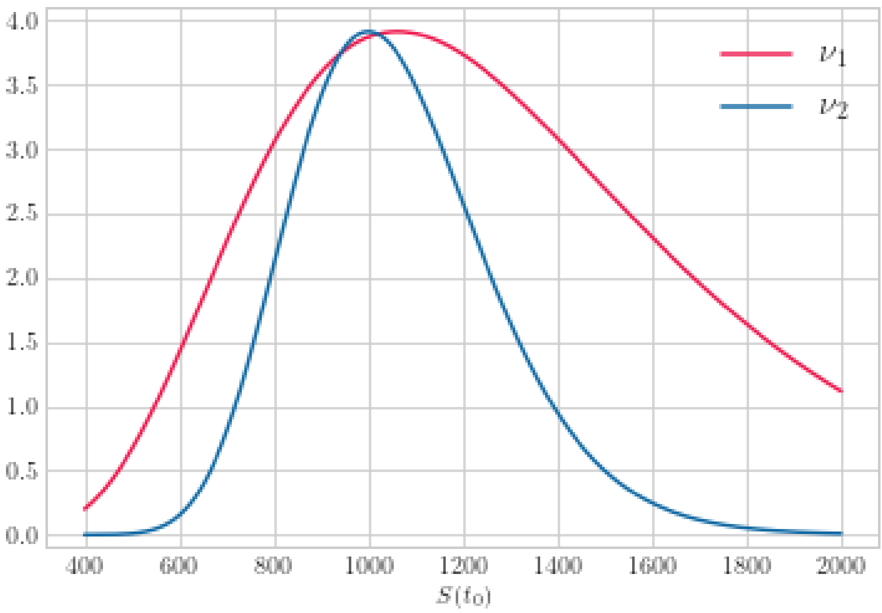
Iz prethodnog primjera te iz slike 3.4 vidimo da je parametar Vega najveći ukoliko se cijena izvršenja nalazi oko početne cijene dionice. Udaljavanjem cijene izvršenja od početne cijene dionice parametar Vega opada. Razumno je pitati se kako volatilnost utječe na parametar Vega. Kako bi odgovorili na to pitanje promotriti ćemo sljedeći primjer u kojemu ćemo gledati vrijednosno ponašanje Vege s obzirom na različite vrijednosti za volatilnost uz različite početne cijene dionice.

Primjer 3.7. Neka su zadani sljedeći parametri: neprekidna kamatna stopa iznosi $r = 2\%$, cijena izvršenja opcije je $K = 1000$ kuna i vrijeme trajanja opcije je $T = 1$ godina. Vrijednosno ponašanje parametra Vega gledati ćemo na osnovu dvije različite vrijednosti za volatilnost, $\sigma = 0.2, 0.4$, te za različite početne cijene dionice. Dobivene vrijednosti možemo vidjeti u sljedećoj tablici.

		S_0						
		800	900	950	1000	1050	1100	1200
σ	20%	2.09852	3.40378	3.78391	3.91043	3.79578	3.49068	2.58088
	40%	3.04382	3.59016	3.76196	3.86668	3.90889	3.89522	3.73179

Tablica 3.11: Vrijednosti parametra Vega za različite volatilnosti

Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti vrijednosno ponašanje parametra Vega za parametre određene u prethodnom primjeru. Oznakom ν_2 prikazana je vrijednost parametra Vega za $\sigma = 0.2$, dok je oznakom ν_1 prikazana vrijednost parametra Vega za $\sigma = 0.4$.



Slika 3.5: Vrijednosno ponašanje Vege za različite volatilnosti

Iz prethodnog primjera te iz slike 3.5 možemo primjetiti kako je parametar Vega najveći ako se početna cijena dionice nalazi oko cijene izvršenja te da ukoliko je početna cijena dionice dosta manja ili veća od cijene izvršenja parametar Vega se smanjuje. Također možemo primjetiti kako je kod manje volatilnosti parametar Vega veći ako je početna cijena dionice oko cijene izvršenja nego u slučaju veće volatilnosti. Ukoliko je početna cijena dionice dosta manja ili veća nego cijena izvršenja opcije parametar Vega veći je kada imamo slučaj veće volatilnosti.

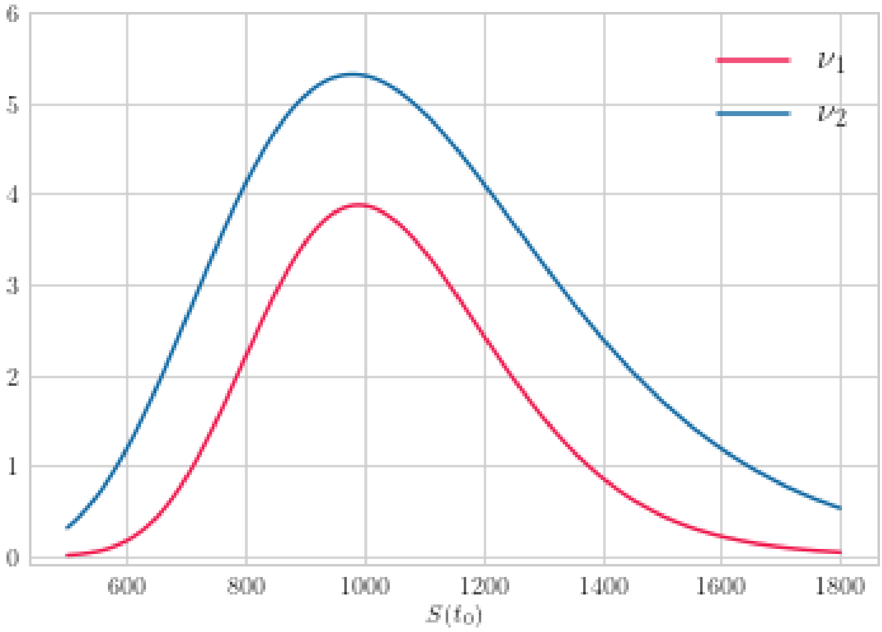
Nadalje, u sljedećem primjeru promotrimo vrijednosno ponašanje Vege ukoliko promatramo opciju u dva različita vremenska perioda trajanja opcije.

Primjer 3.8. Neka je neprekidna kamatna stopa $r = 3\%$, cijena izvršenja $K = 1000$ kuna i volatilnost $\sigma = 0.2$. Promotriti ćemo vrijednosti parametra Vega za početne cijene dionice $S_0 = 900, 1000, 1100$ kuna u vremenima trajanja opcije $T = 1, 2$ godine. Vrijednosti za parametar Vega dane su u sljedećoj tablici.

		S_0		
		900	1000	1000
τ	1	3.45553	3.86668	3.37036
	2	5.07679	5.30007	4.88963

Tablica 3.12: Vrijednost parametra Vega za različite periode trajanja opcije

Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti vrijednosno ponašanje parametra Vega za različita vremena trajanja opcije.



Slika 3.6: Vrijednost parametra Vega za različite periode trajanja opcije

Iz prethodnog primjera možemo zaključiti da duži period trajanja opcije vodi k većoj vrijednosti parametra Vega, uz ostale nepromijenjene uvjete, što možemo vidjeti iz slike 3.6. Oznakom ν_1 označeno je vrijednosno ponašanje parametra Vega za period trajanja opcije od 1 godine, dok je oznakom ν_2 označeno vrijednosno ponašanje parametra Vega za period trajanja opcije od 2 godine.

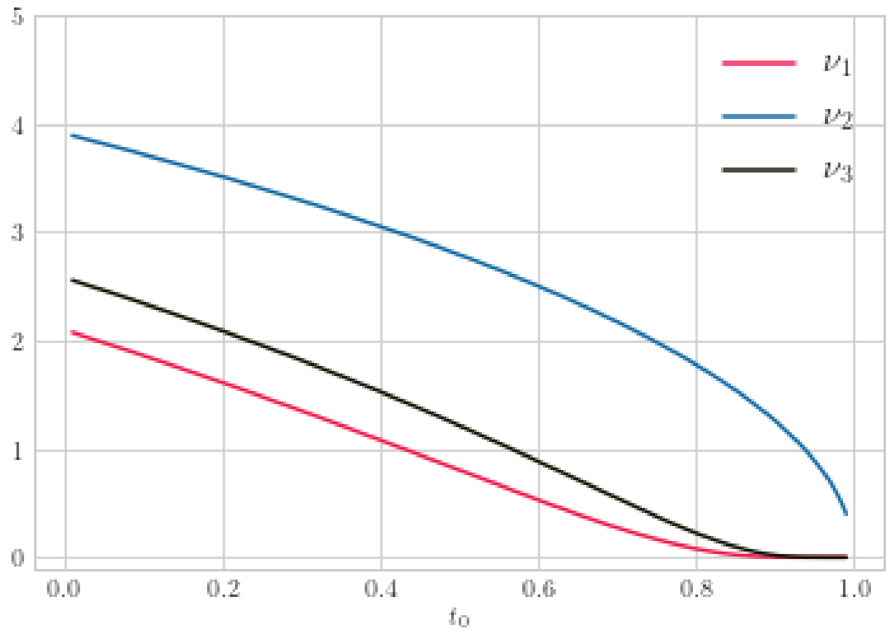
Također nas zanima kako se Vega ponaša tijekom vremena trajanja opcije. Sljedećim primjerom usporediti ćemo vrijednosti Vege tijekom vremena u odnosu na različite vrijednosti početne cijene dionice.

Primjer 3.9. Neka su zadani sljedeći parametri: neprekidna kamatna stopa iznosi $r = 2\%$, cijena izvršenja $K = 1000$ kuna i volatilnost $\sigma = 0.2$. Promotriti ćemo vrijednosti parametra Vega za sljedeće početne vrijednosti dionice $S_0 = 800, 1000, 1200$ kuna kroz vremenske periode $\tau = T - t_0 = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ godina. Dobivene vrijednosti za Vegu u različitim slučajevima dane su u sljedećoj tablici.

		τ				
		1	0.8	0.6	0.4	0.2
S_0	800	2.09852	1.61294	1.08207	0.52807	0.07909
	1000	3.91043	3.51161	3.05333	2.50303	1.77700
	1200	2.58088	2.08899	1.52762	0.88578	0.22254

Tablica 3.13: Promjena vrijednosti parametra Vega kroz vrijeme

Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti vrijednosno ponašanje parametra Vega uz pretpostavke iz prethodnog primjera. Oznakom ν_1 označeno je vrijednosno ponašanje parametra Vega ukoliko cijena dionice iznosi 800 kuna, oznakom ν_2 ukoliko cijena dionice iznosi 1000 kuna te oznakom ν_3 ukoliko cijena dionice iznosi 1200 kuna.



Slika 3.7: Promjena vrijednosti parametra Vega kroz vrijeme

Iz slike 3.7 možemo vidjeti da vrijednost Vege opada s vremenom, tj. kako se približava vrijeme dospijeća parametar Vega postaje sve manji. Također možemo primjetiti kako vrijednost parametra ovisi o cijeni dionice u danom trenutku. Vidimo da je vrijednost Vege najveća ako je trenutna cijena dionice oko cijene izvršenja opcije, no ukoliko je trenutna cijena dionice daleko od cijene izvršenja parametar Vega je dosta manji. Zanimljivo je primjetiti da ukoliko je trenutna cijena dionice daleko od cijene izvršenja parametar Vega s vremenom se približava nuli, dok ukoliko je cijena dionice oko cijene izvršenja parametar Vega se polagano smanjuje. To možemo razumjeti na način da ukoliko je cijena dionice oko cijene izvršenja te ukoliko je opcija blizu svog vremena dospijeća promjena volatilnosti za 1% imati će veći utjecaj na cijenu opcije jer je vrlo lako moguće da cijena dionice u vremenu dospijeća bude veća od cijene izvršenja. Ukoliko je cijena dionice daleko iznad ili ispod cijene izvršenja te je vrijeme dospijeća opcije vrlo blizu promjena volatilnosti za 1% neće imati veliki utjecaj na cijenu opcije jer je teško očekivati veliki rast ili pad cijene dionice u tako kratkom vremenu.

Česta primjena parametra Vega na tržištu opcija je napraviti razliku između cijena ponude i potražnje. Na likvidnom tržištu opcija često se za razliku između cijene opcije koju prodavatelj želi dobiti i cijene opcije koju kupac želi ponuditi uzima vijednost jedne Vege te ponekad i vrijednost dvije Vege.

Literatura

[1] B. BASRAK, *Matematičke financije*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.

[2] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014.

[3] P. LEONI, *The Greeks and Hedging Explained*, Palgrave Macmillan, 2014.

[4] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[5] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.

[6] Z. VONDRAČEK, *Slučajni procesi*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2010.

Sažetak

Na početku rada upoznali smo se s osnovnim pojmovima na financijskom tržištu. U nastavku rada definirali smo osnovne pojmove slučajnih procesa kao što su Brownovo gibanje i geometrijsko Brownovo gibanje te smo proučili njihova svojstva. Primjenom Itôvog integrala pokazali smo da pomoću geometrijskog Brownovog gibanja možemo opisivati kretanje cijene dionice kao slučajnog procesa. Pomoću Black-Scholes-Merton formule određivati ćemo nearbitražnu cijenu opcije. Glavni dio rada je objašnjavanje raznih parametara koje dobijemo raznim računima nad BSM formulom. Te parametre nazivamo 'Grci'.

Ključne riječi: Brownovo gibanje, geometrijsko Brownovo gibanje, Itôv integral, Black-Scholes-Merton formula, 'Grci'

Summary

At the beginning of this graduate thesis we introduce some basic terms in financial market. After that, we give fundamental definitions of random processes like Brownian motion and geometric Brownian motion. Basic properties of Brownian motion and geometric Brownian motion are also shown. By applying Itô's integral we showed that geometric Brownian motion is suitable for modelling stock prices. With using Black-Scholes-Merton formula we can calculate non-arbitrage price of an option. Main part of this graduate thesis is explain different parameters which we obtain from BSM formula. This parameters are called 'Greeks'.

Keywords: Brownian motion, geometric Brownian motion, Itô's integral, Black-Scholes-Merton formula, 'Greeks'

Životopis

Rođen sam 23. prosinca 1993. godine u Osijeku. Obrazovanje sam započeo 2000. godine u Osnovnoj školi Višnjevac. Nastavljam školovanje 2008. godine u III. gimnaziji u Osijeku. Nakon završene srednje škole, 2012. godine, upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv *prvostupnika matematike* stječem 2017. godine uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Nenada Šuvaka i izv. prof. dr. sc. Dragane Jankov Maširević i završni rad *Parametarski zadane neprekidne distribucije.* U jesen iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studija aktivno sam se bavio odbojkom igrajući najviši stupanj natjecanja u Hrvatskoj te bio dijelom odbojkaške reprezentacije Hrvatske. Trenutačno sam nezaposlen.