Relacije i funkcije

Lađarević, Slađana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Slađana Lađarević

Relacije i funkcije

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Slađana Lađarević

Relacije i funkcije

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu bavit ćemo se relacijama i funkcijama. Najprije ćemo definirati pojam relacije te navesti primjer primjene relacija u svakodnevnom životu. Nakon toga, proučavat ćemo svojstva relacija kako teorijski, tako i praktično - kroz primjere. Fokusirat ćemo se na relacije ekvivalencije i relacije parcijalnog uređaja koje moraju zadovoljavati određena svojstva. Zatim ćemo vidjeti što mora vrijediti da bi relacija bila relacija potpunog uređaja. Kao važni pojmovi u matematici izdvajaju se i pojmovi inverzne relacije te kompozicije relacija s kojima ćemo se također upoznati. Drugi dio rada bazira se na funkciji kao posebnom slučaju relacije. Pokazat ćemo da se funkcija može definirati i kao funkcionalna i totalna relacija. Nadalje, objasnit ćemo kako vertikalnim testom možemo provjeriti je li zadana krivulja graf neke funkcije te ćemo proučiti dva važna odnosa između funkcija (jednakost funkcija i restrikciju). Nakon toga definirat ćemo injekciju, surjekciju i bijekciju kao važna svojstva funkcije te horizontalni test kao lakši način provjere injektivnosti funkcije. Kroz tvrdnje i primjere upoznat ćemo se također s kompozicijom funkcija i inverznim funkcijama. Na samom kraju promotrit ćemo monotonost, parnost i periodičnost funkcije.

Ključne riječi

Relacije, relacije ekvivalencije, klase ekvivalencije, relacije uređaja, inverzne relacije, kompozicija relacija, funkcija, injekcija, surjekcija, bijekcija, kompozicija funkcija, inverzna funkcija, monotonost, parnost, periodičnost funkcije.

Abstract

In this paper, we will observe relations and functions. Firstly, we will define the concept of relations and give an example of the application of relations in everyday life. Afterwards, we will analyze the properties of relations both theoretically and practically - through examples. We will focus on equivalence relations and partial order relations that must satisfy certain properties. We will then observe what must be valid for a relation to be a total order relation. The concepts of inverse relation and composition of relations, which we will also get acquainted with, stand out as important concepts in Mathematics. Furthermore, the second part of the paper is based on the function as a special case of the relation. We will show that a function can be defined as both a functional and a total relation. Moreover, we will explain how we can use a vertical test to check whether a given curve is a graph of a function as well as study two important connections between functions (equality of functions and restriction). After that, we will define injection, surjection and bijection as important features of the function and a horizontal test as an easier way to check the injectivity of the function. We will also get acquainted with the composition of functions and inverse functions through claims and examples. At the very end we will observe the monotonicity, parity and periodicity of the function.

Key words

Relations, equivalence relations, equivalence classes, device relations, inverse relations, composition of relations, function, injection, surjection, bijection, composition of functions, inverse function, monotonicity, parity, periodicity of a function.

Sadržaj

Uvod

Relacije i funkcije su predmet izučavanja teorije skupova. Povijest ova dva pojma seže u daleku prošlost. Naime, oduvijek se u raznim oblastima javljala potreba da se između određenih objekata uspostavi veza, da se objekti usporede po nekom kriteriju, da se odrede izvjesne sličnosti između njih itd. U matematici se sve to može uraditi pomoću relacija te su zato one jedan od važnih pojmova koji se izučava dugi niz godina. Primjerice, njemački matematičar Georg Cantor još je u 19. stoljeću proučavao skupove u kojima su definirani odnosi među elementima, odnosno definirana je neka relacija. Posebno su ga zanimale relacije uređaja, koje ćemo, pored relacija ekvivalencije, spominjati u ovom radu. Osim toga, navest ćemo svojstva relacije, pa ih primjerima potkrijepiti. Od velikog značaja u matematici su također inverzna relacija i kompozicija relacija koje se vrlo lako odrede iz unaprijed zadane relacije, što ćemo i vidjeti u ovom radu.
U drugom dijelu završnog rada govorit ćemo o funkcijama. Ovaj pojam počeli su proučavati mnogi znanstvenici još u 14. stoljeću, no većini nije pošlo za rukom precizno ga definirati. Prihvatljiva definicija ovog pojma nastala je tek u 20. stoljeću kada je francuski matematičar Edouard Jean - Baptiste Goursat rekao da je y funkcija od x ako vrijednost od x korespondira vrijednosti od y. Također, zaslužan je i za oznaku $y = f(x)$, koju i danas koristimo za tu korespondenciju. Kako bismo savladali pojam funkcije, temeljni pojam u matematici, potrebno je shvatiti bitne odrednice poput domene, kodomene, pravila pridruživanja... Navedene odrednice, kao i mnoga svojstva funkcije, detaljno ćemo proučiti teorijski i kroz primjere. Pokazat ćemo kako na osnovu grafa, vertikalnim testom, možemo lako odrediti koja krivulja u koordinatnom sustavu predstavlja graf funkcije, a koja ne. Također, vidjet ćemo što je i za što se koristi horizontalni test. Budući da se u prošlosti pojavila potreba i za primjenjivanjem više funkcija zaredom, definiran je pojam kompozicije funkcija za koji se ponekad kaže i *"slaganje funkcija"*, što je intuitivnije. Cilj ovoga rada jeste upoznati se s kompozicijom funkcija, kao i mnogim njenim svojstvima. Kako relacija ima svoju inverznu relaciju, tako i funkcija, kao poseban slučaj relacije, ima svoju inverznu funkciju koja je također predmet ovoga rada.

1 Relacije

Relacije vrlo često koristimo u svakodnevnom životu kada uspostavljamo nekakav odnos između dva skupa. Kako bismo intuitivno bolje razumjeli pojam relacije, najprije ćemo navesti jednostavan primjer u kojem ćemo povezati osobe sa sportom koji one treniraju.

Primjer 1.1. *Neka je $A = \{a, b, c\}$ skup koji sadrži 3 elementa koja predstavljaju osobe a, b i c, a $B = \{n, o, k, r\}$ skup koji sadrži 4 elementa koja smo označili početnim slovom naziva određenog sporta, tj. n - nogomet, o - odbojka, k - košarka i r - rukomet. Između ta dva skupa uspostavimo odnos takav da ako osoba a trenira nogomet pišemo uređeni par (a, n). Najprije napišemo sve mogućnosti koje se mogu pojaviti, što je Kartezijev umnožak $A \times B$ (skup koji se sastoji od svih uređenih parova (a, b) za koje vrijedi da je $a \in A, b \in B$)*

$$A \times B = \{(a, n), (a, o), (a, k), (a, r), (b, n), (b, o), (b, k), (b, r), (c, n), (c, o), (c, k), (c, r)\}.$$

Sada pretpostavimo da osoba a trenira nogomet i rukomet, osoba b samo košarku i osoba c odbojku i rukomet, što "matematički" zapisujemo kao uređene parove $(a, n), (a, r), (b, k), (c, o)$, (c, r). Kada iz skupa $A \times B$ izdvojimo samo prethodno navedene uređene parove, dobivamo skup

$$R = \{(a, n), (a, r), (b, k), (c, o), (c, r)\}$$

koji opisuje jednu relaciju između skupova A i B. ■

Uočimo da je skup R podskup skupa $A \times B$, pa relacije proučavamo kao podskupove Kartezijevog umnoška te ih tako i definiramo.

Definicija 1.1 (Binarna relacija)**.** *Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup $R \subseteq A \times B$ Kartezijevog umnoška $A \times B$ nazivamo* ***binarnom relacijom*** *na skupovima A i B.*
Za element $a \in A$ kažemo da je u relaciji R s elementom $b \in B$ ukoliko je $(a, b) \in R$ i čitamo "a je u relaciji R s b".

Razlikujemo homogene i heterogene binarne relacije. Naime, ako je $A = B$, definiramo Kartezijev umnožak $A \times A$ kao skup svih uređenih parova (a, b) za koje vrijedi $a, b \in A$, pa relaciju $R \subseteq A \times A$ nazivamo **homogenom binarnom relacijom** na skupu A. Ako je $A \neq B$, relaciju $R \subseteq A \times B$ nazivamo **heterogenom binarnom relacijom** na skupovima A i B. Relacije smo definirali kao podskupove Kartezijevog umnoška dva skupa, ali tu definiciju možemo proširiti na podskupove Kartezijevog umnoška $n \in \mathbb{N}$ skupova, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, i tada relaciju nazivamo **n-arnom relacijom**, a ne binarnom kao u slučaju Kartezijevog umnoška dva skupa. U ovom radu bavit ćemo se samo binarnim relacijama, ali sve se može proširiti na n-arne relacije tako da nemamo više uređeni par $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ za koji vrijedi $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ nego uređenu n-torku $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, pri čemu je $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$.
Navedimo nekoliko primjera binarne relacije koja ima geometrijsko značenje.

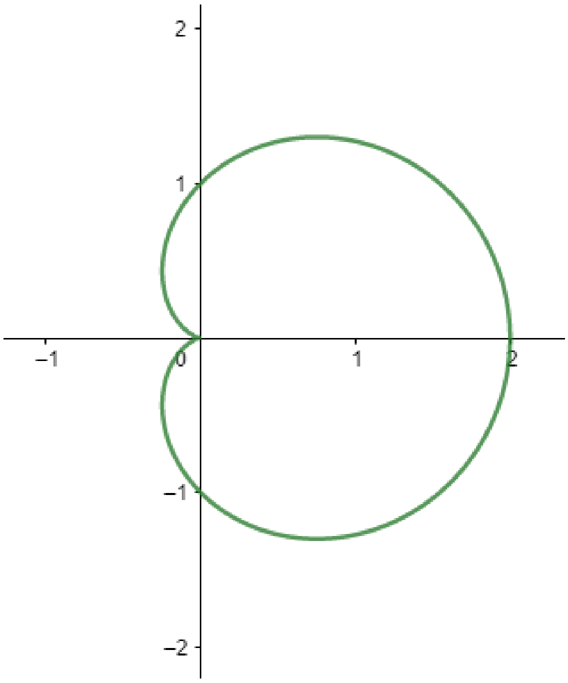
Primjer 1.2. *(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0\}$ označava <u>kardioidu</u>.*

(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ označava <u>jednostranu hiperbolu</u>.

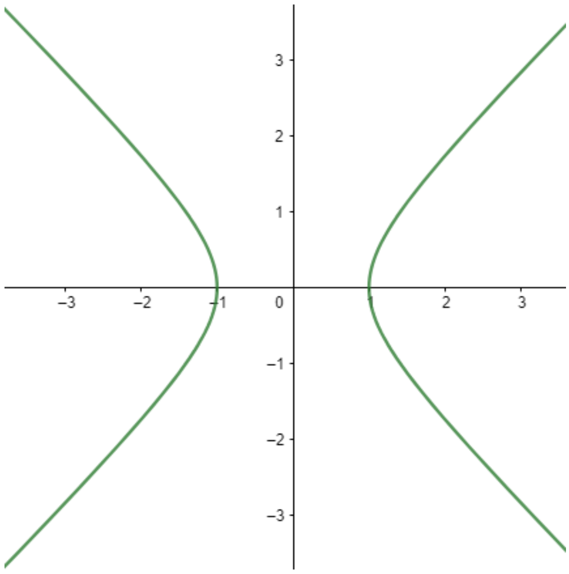
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 5x)^2 - 9(x^2 + y^2) = 0\}$ označava <u>Pascalov puž</u>.

(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 3xy\}$ označava <u>Descartesov list</u>.

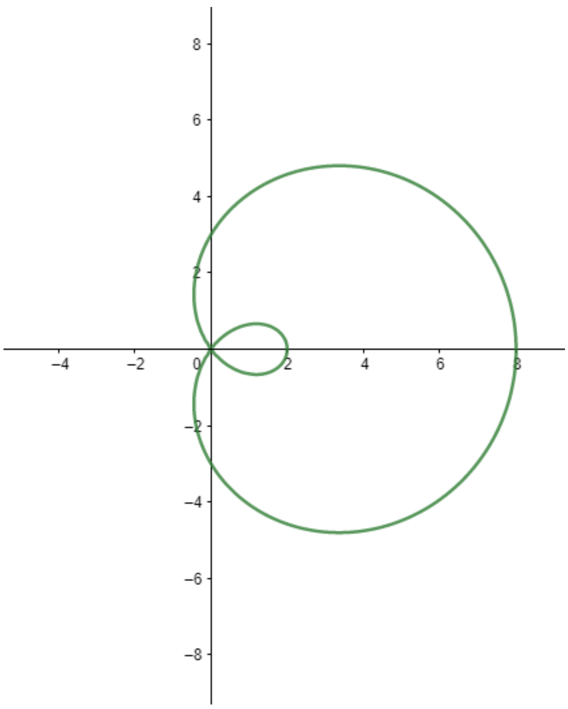
■



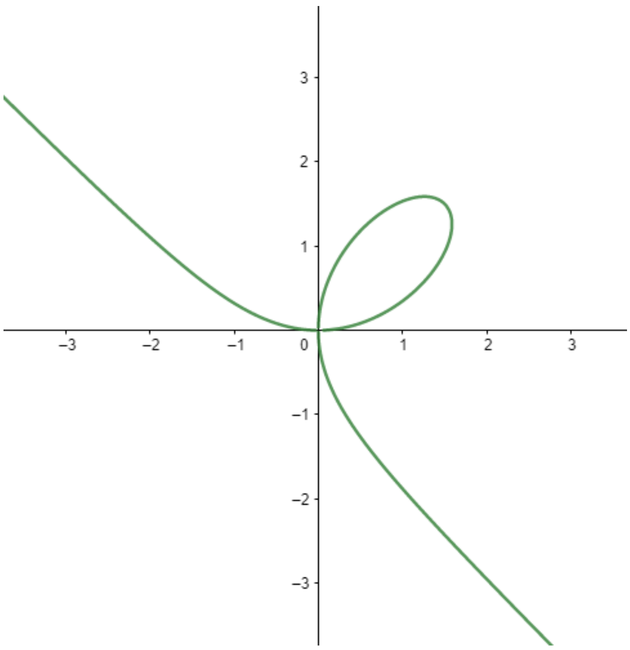
(a) Kardioida



(b) Jednostrana hiperbola



(c) Pascalov puž



(d) Descartesov list

Slika 1: Prikaz relacija iz Primjera 1.2

Binarne relacije možemo prikazati grafički i tablično što ćemo ilustrirati na sljedećem primjeru.

Primjer 1.3. *Neka je $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ i relacija R na skupu $A \times B$ dana s:*

$$R = \{(0, a), (0, b), (1, b), (2, a)\}.$$

Pogledajmo najprije grafički prikaz. Ako je $0 \in A$ u relaciji R s $a \in B$, pišemo $0 \longrightarrow a$, što nam u konačnici daje sljedeći graf:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[r] \arrow[dr] & a \\ 1 \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

Kada binarnu relaciju prikazujemo tablično, ukoliko je $0 \in A$ u relaciji R s $a \in B$, stavimo u tablicu na odgovarajuće mjesto x, pa dobivamo:

R	a	b
2	x	
0	x	x
1		x

■

1.1 Svojstva relacije

U nastavku ćemo se upoznati sa svojstvima relacije te ćemo kroz primjere pokazati koja svojstva zadovoljavaju zadane relacije. Nakon toga ćemo iskazati i dokazati koliko je binarnih relacija na skupu A poznate kardinalnosti.

Definicija 1.2 (Svojstva relacije)**.** *Neka je ρ binarna relacija na skupu A. Kažemo da je relacija ρ:*

- ***refleksivna*** *ako je* $(x, x) \in \rho$, *za svaki* $x \in A$,
- ***irefleksivna*** *ako za svaki* $x \in A$, $(x, x) \notin \rho$,
- ***simetrična*** *ako za svaki* $(x, y) \in A \times A$, $(x, y) \in \rho \Longrightarrow (y, x) \in \rho$,
- ***antisimetrična*** *ako za svaki* $(x, y) \in A \times A$, $(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Longrightarrow x = y$,
- ***tranzitivna*** *ako za sve* $(x, y), (y, z) \in A \times A$, $(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Longrightarrow (x, z) \in \rho$.

Na sljedećim primjerima provjerimo koja svojstva iz Definicije 1.2 imaju zadane relacije.

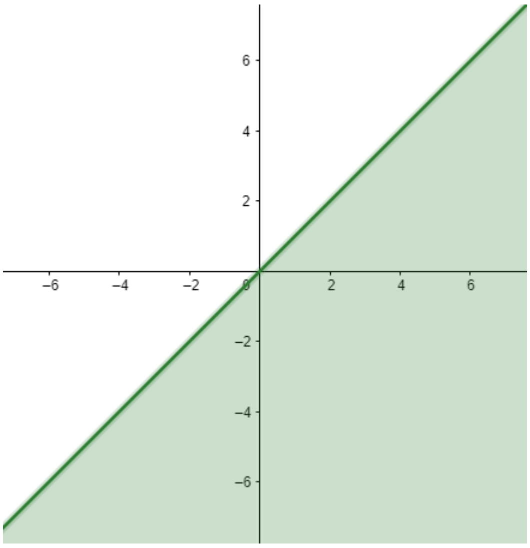
Primjer 1.4. *Neka je dana relacija $R \subseteq S = \{1, 2, 3\}$ s $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.*

Zadana relacija ima sljedeća svojstva:
1. refleksivnost, jer $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$ *tj.* $1R1, 2R2, 3R3$,
2. simetričnost, jer vrijedi $(1, 2) \in R \Longrightarrow (2, 1) \in R$ *tj.* $1R2 \Longrightarrow 2R1$,

3. tranzitivnost, jer vrijedi $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \Longrightarrow (1,1) \in R$ *tj.* $1R2 \wedge 2R1 \Longrightarrow 1R1$,
$(1,2) \in R \wedge (2,2) \in R \Longrightarrow (1,2) \in R$ *tj.* $1R2 \wedge 2R2 \Longrightarrow 1R2$,
$(1,1) \in R \wedge (1,2) \in R \Longrightarrow (1,2) \in R$ *tj.* $1R1 \wedge 1R2 \Longrightarrow 1R2$,
$(2,1) \in R \wedge (1,1) \in R \Longrightarrow (2,1) \in R$ *tj.* $2R1 \wedge 1R1 \Longrightarrow 2R1$,
$(2,1) \in R \wedge (1,2) \in R \Longrightarrow (2,2) \in R$ *tj.* $2R1 \wedge 1R2 \Longrightarrow 2R2$,
$(2,2) \in R \wedge (2,1) \in R \Longrightarrow (2,1) \in R$ *tj.* $2R2 \wedge 2R1 \Longrightarrow 2R1$. ■

Primjer 1.5. *Neka je dana relacija* $R \subseteq \mathbb{R}^2$ *s* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ *tj.* $xRy \Longleftrightarrow x \geq y$.

Geometrijski, danu relaciju možemo prikazati na sljedeći način:



Slika 2: $x \geq y$

Dana relacija ima sljedeća svojstva:
1. refleksivnost, jer $x \geq x \Longrightarrow xRx, \quad \forall x \in R$,
2. antisimetričnost, jer $xRy \wedge yRx \Longrightarrow x \geq y \wedge y \geq x \Longrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in R$,
3. tranzitivnost, jer $xRy \wedge yRz \Longrightarrow x \geq y \wedge y \geq z \Longrightarrow x \geq z \Longrightarrow xRz, \quad \forall x, y, z \in R$. ■

O tome koliko binarnih relacija možemo imati na skupu A govori sljedeći teorem.

Teorem 1.1. *Broj binarnih relacija na skupu* A*, pri čemu je* $|A| = n$ *(kardinalni broj skupa* A *jednak je* n*) je* 2^{n^2}.

Dokaz. Kako je $|A| = n$, onda je $|A \times A| = n \cdot n = n^2$. R je binarna relacija na skupu A, odnosno vrijedi $R \subseteq A \times A$. Broj podskupova skupa koji ima k elemenata jednak je 2^k, što je dokazano u [7, Teorem 1.2.1, str. 11]. Prema prethodnom razmatranju, broj podskupova skupa $A \times A$ je $2^{|A \times A|}$, što je jednako 2^{n^2}. □

Uvjerimo se sada na primjeru da je broj binarnih relacija na skupu A s n elemenata jednak 2^{n^2}.

Primjer 1.6. *Neka je $A = \{1, 2\}$. Tada je $A \times A = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$. Zapišimo sve podskupove skupa $A \times A$ tj. sve moguće binarne relacije:*

$$\underbrace{\begin{array}{l}
\bullet\ \emptyset \\
\bullet\ \{(1,1)\}\quad \{(1,2)\}\quad \{(2,1)\}\quad \{(2,2)\} \\
\bullet\ \{(1,1),(2,2)\}\quad \{(1,1),(1,2)\}\quad \{(1,1),(2,1)\} \\
\quad \{(2,2),(1,2)\}\quad \{(2,2),(2,1)\}\quad \{(1,2),(2,1)\} \\
\bullet\ \{(1,1),(2,2),(1,2)\}\quad \{(1,1),(2,2),(2,1)\} \\
\quad \{(2,2),(1,2),(2,1)\}\quad \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\
\bullet\ \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}
\end{array}}_{16=2^{2^2}}$$

Iz prethodnog zaključujemo da je broj binarnih relacija na zadanom skupu A 16. ■

1.2 Relacije ekvivalencije i klase ekvivalencije

Relacija iz Primjera 1.4 zadovoljava svojstvo refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti. Također, relacija *"biti paralelan"* na skupu svih pravaca u ravnini, relacija *"biti sukladan"* na skupu svih trokuta u ravnini, kao i mnoge druge relacije zadovoljavaju ta tri svojstva istovremeno. Zbog česte pojave relacija s ovim svojstvima postoji zaseban naziv za njih, a to je *"relacija ekvivalencije"*.

Definicija 1.3 (Relacija ekvivalencije)**.** *Binarnu relaciju R nazivamo* ***relacijom ekvivalencije*** *ako ima sljedeća svojstva:*

1) refleksivnost

2) simetričnost

3) tranzitivnost.

Relaciju ekvivalencije često označavamo simbolom $\sim$. Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A i elementi $x, y \in A$ takvi da vrijedi $x \sim y$, onda kažemo da je x ekvivalentan s y.
Jedan od važnijih primjera relacije ekvivalencije u matematici je relacija *"biti jednak"*.
Usko povezan pojam s relacijom ekvivalencije je pojam klase ekvivalencije koji uvodimo u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.4 (Klasa ekvivalencije)**.** *Neka je A neprazan skup i ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Za svaki $a \in A$, skup*

$$[a] = \{x \in A : x\rho a\} \subseteq A$$

svih elemenata iz A koji su u relaciji ρ s elementom a nazivamo ***klasom ekvivalencije*** *relacije ρ određenom elementom a.*
Element a nazivamo ***reprezentantom*** *te klase.*

Pogledajmo na primjerima što bi bile klase ekvivalencije.

Primjer 1.7. *Neka je relacija* $\sim \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, *na skupu* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, *definirana na sljedeći način:*

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc.$$

Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ *određena elementom* (a,b) *je:*

$$\begin{aligned}
[(a,b)] &= \{(c,d) \in \mathbb{N}^2 : (c,d) \sim (a,b)\} \\
&= \{(c,d) \in \mathbb{N}^2 : cb = da\} \\
&= \left\{(c,d) \in \mathbb{N}^2 : d = \frac{cb}{a}\right\} \\
&= \left\{\left(c, \frac{cb}{a}\right) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ : c \in \mathbb{N}\right\},
\end{aligned}$$

a to su zapravo pozitivni racionalni brojevi. ■

Primjer 1.8. *Neka je relacija* $\sim \subseteq (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, *na skupu* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *zadana s:*

$$(a,b) \sim (c,d) \iff b - a^2 = d - c^2.$$

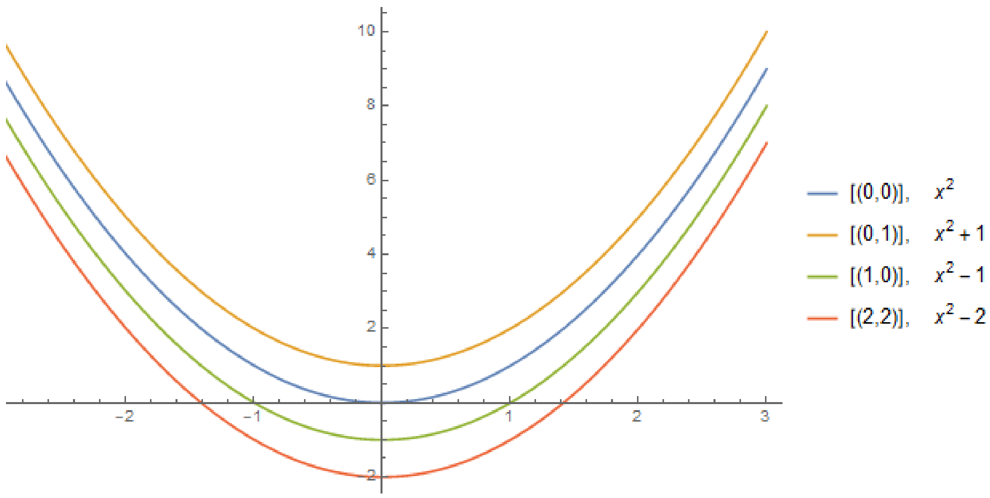
Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ *određena elementom* (a,b) *je:*

$$\begin{aligned}
[(a,b)] &= \{(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (c,d) \sim (a,b)\} \\
&= \{(c,d) \in \mathbb{R}^2 : d - c^2 = b - a^2\} \\
&= \{(c,d) \in \mathbb{R}^2 : d = b - a^2 + c^2\} \\
&= \{(c, b - a^2 + c^2) \in \mathbb{R}^2 : c \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada geometrijsku interpretaciju ove klase ekvivalencije. Na osnovu nekoliko sljedećih, proizvoljno odabranih, uređenih parova

$$\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(c,c^2) : c \in \mathbb{R}\} \\
[(0,1)] &= \{(c,c^2+1) : c \in \mathbb{R}\} \\
[(1,0)] &= \{(c,c^2-1) : c \in \mathbb{R}\} \\
[(2,2)] &= \{(c,c^2-2) : c \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

zaključujemo da su u pitanju parabole čiji su grafovi prikazani na Slici 3.



Slika 3: Familija parabola

■

Svojstva klase ekvivalencije dana su u sljedećem teoremu:

Teorem 1.2 (Teorem o klasama)**.** *Neka je A proizvoljan neprazan skup, $\sim$ relacija ekvivalencije na A i $x, y \in A$. Tada vrijedi:*

1. *ako je $x \nsim y$, onda je $[x] \cap [y] = \emptyset$,*
2. *ako je $x \sim y$, onda je $[x] = [y]$.*

Dokaz. Prvu tvrdnju dokazat ćemo kontradikcijom. Neka je A neprazan skup, $\sim$ relacija ekvivalencije na A i $x, y \in A$ proizvoljni takvi da vrijedi $x \nsim y$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, što znači da postoji $a \in [x] \cap [y]$. Prema definiciji presjeka dva skupa znači da je $a \in [x]$ i $a \in [y]$. Iz $a \in [x]$ i definicije klase ekvivalencije znamo da je $a \sim x$. Analogno dobivamo i $a \sim y$. Kako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A, ona je simetrična i tranzitivna. Iz $a \sim x$ zbog simetričnosti slijedi da je $x \sim a$. Iz $x \sim a$ i $a \sim y$ zbog tranzitivnosti slijedi da je $x \sim y$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $x \nsim y$. Dakle, mora vrijediti $[x] \cap [y] = \emptyset$, što je i trebalo dokazati. $\triangle$
Za drugu tvrdnju primijenit ćemo direktan dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $x \sim y$.
Budući da treba dokazati jednakost dva skupa, moramo dokazati dvije inkluzije: $[x] \subseteq [y]$ i $[y] \subseteq [x]$. Dokazat ćemo najprije da vrijedi $[x] \subseteq [y]$. Znamo da je $[x] \neq \emptyset$, pa možemo uzeti bilo koji element $a \in [x]$, a to znači da je $a \sim x$. Zbog tranzitivnosti relacije ekvivalencije $\sim$, iz $a \sim x$ i $x \sim y$ slijedi da je $a \sim y$ što znači da je $a \in [y]$. Kako je a proizvoljan element sa svojstvom da iz $a \in [x]$ slijedi $a \in [y]$, vrijedi da je $[x] \subseteq [y]$. $(*)$
Zbog simetričnosti relacije $\sim$, iz $x \sim y$ slijedi da je $y \sim x$, pa je i $[y] \subseteq [x]$. $(**)$
Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi tražena jednakost $[x] = [y]$. $\triangle$
$\square$

Dakle, za $x, y \in A$ vrijedi $[x] \cap [y] = \emptyset$ ili $[x] = [y]$ iz čega slijedi da

$$(\forall x \in A)(\exists! [a] \subseteq A)(x \in [a]).$$

Ako u jedan skup stavimo sve različite klase ekvivalencije koje definira relacija ekvivalencije $\sim$, dobivamo skup čiji su elementi po parovima disjunktni, neprazni i unija im je jednaka skupu A, što je po definiciji particija skupa A. Dakle, posljedica Teorema 1.2 dana je s:

Korolar 1.1. *Svaka relacija ekvivalencije na skupu A definira jednu particiju skupa A. Elementi particije su klase ekvivalencije te se u svakom pojedinom elementu particije nalaze oni i samo oni elementi skupa A koji su međusobno ekvivalentni.*

Vrijedi i obrat prethodnog korolara, ali da bismo ga preciznije iskazali, potrebno je definirati što je to kvocijentni skup.

Definicija 1.5 (Kvocijentni skup)**.** *Neka je A proizvoljan neprazan skup, $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A. Particiju skupa A sačinjenu od klasa ekvivalencije relacije $\sim$ nazivamo **kvocijentnim skupom** skupa A po relaciji ekvivalencije $\sim$ i označavamo*

$$A|_{\sim} = \{[a] : a \in A\}.$$

Sada možemo iskazati i obrat prethodnog korolara: *svaka particija skupa A definira jednu relaciju ekvivalencije na skupu A čiji je kvocijentni skup jednak toj particiji*, što tvrdi sljedeći teorem.

Teorem 1.3. *Neka je $\mathcal{P}$ jedna particija skupa A. Tada je relacija $R_\mathcal{P} \subseteq A \times A$ definirana s:*

$$(x, y) \in R_\mathcal{P} \Longleftrightarrow (\exists S \in \mathcal{P})(x \in S \land y \in S)$$

relacija ekvivalencije na skupu A i $A|R_\mathcal{P} = \mathcal{P}$.

Dokaz. Treba pokazati da je relacija $R_\mathcal{P}$ refleksivna, simetrična i tranzitivna.
Neka je $x \in A$. Kako je skup $\mathcal{P}$ jedna particija skupa A, postoji $S \in \mathcal{P}$ tako da je $x \in S$. Po definiciji relacije $R_\mathcal{P}$ iz iskaza teorema slijedi da je $(x, x) \in R_\mathcal{P}$ što znači da je relacija $R_\mathcal{P}$ refleksivna.
Neka su $x, y \in A$ i neka je $(x, y) \in R_\mathcal{P}$. Po definiciji relacije $R_\mathcal{P}$, postoji $S \in \mathcal{P}$ tako da je $x, y \in S$. Tada je i $(y, x) \in R_\mathcal{P}$, pa je relacija $R_\mathcal{P}$ i simetrična. Preostalo je još pokazati tranzitivnost. Neka su $x, y, z \in A$ te $(x, y), (y, z) \in R_\mathcal{P}$. Tada postoje elementi S_1 i S_2 skupa $\mathcal{P}$ takvi da su $x, y \in S_1$ i $y, z \in S_2$. Kako je $y \in S_1$ i $y \in S_2$, to znači da je $y \in S_1 \cap S_2$, pa zbog disjunktnosti elemenata iz $\mathcal{P}$ vrijedi $S_1 = S_2$. Iz prethodnog slijedi da su x i z u istom elementu particije $\mathcal{P}$, tj. da je $(x, z) \in R_\mathcal{P}$. Sada imamo

$$(x, y) \in R_\mathcal{P} \texttt{ i } (y, z) \in R_\mathcal{P} \Longrightarrow (x, z) \in R_\mathcal{P}$$

iz čega zaključujemo da je relacija $R_\mathcal{P}$ tranzitivna. U svakom skupu $S \in \mathcal{P}$ nalaze se oni i samo oni elementi iz A koji su međusobno ekvivalentni, pa je S jedna klasa ekvivalencije. Dakle, vrijedi $A|R_\mathcal{P} = \mathcal{P}$. □

1.3 Relacije uređaja

Poput relacija ekvivalencije, često se pojavljuju i relacije koje umjesto svojstva simetričnosti zadovoljavaju svojstvo antisimetričnosti. Takve relacije su također dobile svoj zaseban naziv i definiciju koju ćemo u nastavku navesti.

Definicija 1.6 (Relacija parcijalnog uređaja)**.** ***Relacija parcijalnog (djelomičnog) uređaja*** *je binarna relacija koja ima sljedeća svojstva:*

1) refleksivnost

2) antisimetričnost

3) tranzitivnost.

Primjer 1.9. *Pogledajmo ponovno relaciju $R \subseteq \mathbb{R}^2$ iz Primjera 1.5, definiranu s:*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}.$$

Budući da smo pokazali da je dana relacija refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, prema Definiciji 1.6, ona je jedan primjer relacije parcijalnog uređaja. ■

Definicija 1.7 (Parcijalno uređen skup)**.** *Uređeni par (A, ρ), gdje je A neprazan skup, a ρ relacija parcijalnog uređaja na skupu A, nazivamo* ***parcijalno (djelomično) uređenim skupom****.*

Primijetimo da u definiciji relacije parcijalnog uređaja nema zahtjeva da mora biti $x \leq y$ ili $y \leq x$, za sve x, y. To znači da mogu postojati neusporedivi elementi x, y, a to su oni elementi za koje ne vrijedi niti $x \leq y$ niti $y \leq x$.
Primjer neusporedivih elemenata nalazimo u skupu $\mathbb{N}$ s parcijalnim uređajem "$|$" (*"biti djeljiv"*). To su primjerice elementi 4 i 7 jer niti vrijedi $4|7$ niti $7|4$. Ovaj primjer nas motivira da definiramo sljedeće:

Definicija 1.8 (Relacija potpunog uređaja)**.** *Neka je ρ relacija parcijalnog uređaja na skupu A. Kažemo da je ρ* ***relacija potpunog (linearnog) uređaja*** *na skupu A ukoliko vrijedi*

$$(\forall x, y \in A)((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho).$$

Definicija 1.9 (Potpuno uređen skup)**.** *Uređeni par (A, ρ), gdje je A neprazan skup, a ρ relacija potpunog uređaja na skupu A, nazivamo* ***potpuno uređenim skupom*** *ili jednostavnije* ***uređenim skupom****.*

Dakle, binarna relacija "$|$" na skupu $\mathbb{N}$ nije relacija potpunog uređaja, dok primjerice binarna relacija "$\leq$" na skupu $\mathbb{R}$ jeste.

1.4 Inverzna relacija

Pojam inverzne relacije možemo lakše shvatiti promatrajući primjerice odnos brata i sestre. Brat će sa svoje točke gledišta opisati njihov odnos uređenim parom (sestra, brat) gdje će na prvo mjesto staviti sestru, dok će sestra njihov odnos opisati uređenim parom (brat, sestra) tako da brata stavi na prvo mjesto. Budući da je u uređenom paru poredak bitan, dobivena dva uređena para nisu jednaka, nego su međusobno inverzna. Na taj način dobivamo inverznu relaciju koju ćemo u nastavku definirati.

Definicija 1.10 (Inverzna relacija)**.** *Neka je dana relacija $R \subseteq A \times B$.* ***Inverzna relacija*** *$R^{-1} \subseteq B \times A$ definirana je s:*

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

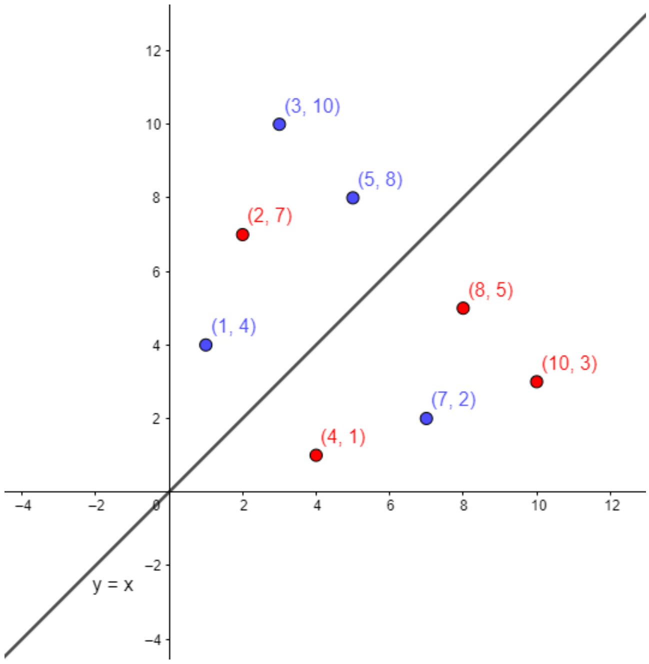
Drugim riječima, inverznu relaciju dobivamo tako da zamijenimo mjesto elementima uređenog para.
Geometrijski to odgovara zrcaljenju s obzirom na pravac $y = x$, u što ćemo se uvjeriti na sljedećem primjeru nakon što odredimo inverznu relaciju.

Primjer 1.10. *Neka je $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ te neka je relacija $R \subseteq A \times B$ dana s $R = \{(1, 4), (3, 10), (5, 8), (7, 2)\}$.*

Inverzna relacija $R^{-1} \subseteq B \times A$ dana je s:

$$R^{-1} = \{(4, 1), (10, 3), (8, 5), (2, 7)\}.$$

Prethodne relacije geometrijski možemo predstaviti na sljedeći način (Slika 4), gdje su plavom bojom označeni elementi skupa R, a crvenom bojom elementi skupa R^{-1}.



Slika 4: Inverzna relacija

Zaista, uočavamo da su točke simetrične s obzirom na pravac $y = x$. ■

Dokažimo sada neka svojstva inverzne relacije.

Teorem 1.4. *Neka su dane binarne relacije $R, S \subseteq X \times Y$. Tada vrijedi:*

$$(S \cap R)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}, \tag{1}$$
$$(S \cup R)^{-1} = S^{-1} \cup R^{-1}, \tag{2}$$
$$(R^{-1})^{-1} = R. \tag{3}$$

Dokaz. Za dokaz jednakosti (1), neka je $(x, y) \in (S \cap R)^{-1}$ proizvoljan. Tada imamo:

$$\begin{aligned}(x, y) \in (S \cap R)^{-1} &\iff (y, x) \in S \cap R \\ &\iff (y, x) \in S \wedge (y, x) \in R \\ &\iff (x, y) \in S^{-1} \wedge (x, y) \in R^{-1} \\ &\iff (x, y) \in S^{-1} \cap R^{-1}.\end{aligned}$$

△

Dokaz jednakosti (2) je analogan. Uzmemo proizvoljan $(x, y) \in (S \cup R)^{-1}$ te jednakost dokažemo sljedećim nizom ekvivalencija:

$$\begin{aligned}(x, y) \in (S \cup R)^{-1} &\iff (y, x) \in S \cup R \\ &\iff (y, x) \in S \vee (y, x) \in R \\ &\iff (x, y) \in S^{-1} \vee (x, y) \in R^{-1} \\ &\iff (x, y) \in S^{-1} \cup R^{-1}.\end{aligned}$$

△

Dokazati jednakost (3) je još jednostavnije. Naime, neka je $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$ proizvoljan. Vrijedi sljedeće:

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \iff (y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R.$$

△

□

1.5 Kompozicija relacija

Kompoziciju relacija promatramo kao generalizaciju kompozicije funkcija (o kojoj ćemo nešto više reći u Poglavlju 2.4), a definiramo je na sljedeći način:

Definicija 1.11 (Kompozicija relacija). *Neka su dane relacije $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$.* ***Kompozicija relacija*** *R i S je*

$$S \circ R = \{(a, c) : a \in A, c \in C \wedge \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Uvijek možemo odrediti kompoziciju relacije R na skupu X sa samom sobom, tj.

$$R \circ R = \{(x, z) \in X \times X : \exists y \in X : xRy \wedge yRz\}.$$

Pogledajmo sada na primjeru kako izgleda kompozicija relacija.

Primjer 1.11. *Neka je $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ te neka je relacija $R \subseteq A \times B$ dana s:*

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}.$$

Nadalje, neka je $C = \{x, y\}$ i relacija $S \subseteq B \times C$ dana s:

$$S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}.$$

Kompozicija relacija R i S dana je s:

$$S \circ R = \{(a, y), (a, x), (b, x)\}.$$

$\blacksquare$

Propozicija 1.1. *Neka je R relacija na skupu X. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Relacija R je tranzitivna.*
2. *$R \circ R \subseteq R$.*

Sada ćemo iskazati jedno važno svojstvo kompozicije relacija koje nam pomaže u dokazima mnogih drugih tvrdnji.

Teorem 1.5. *Neka su A, B, C, D neprazni skupovi i $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $M \subseteq C \times D$ relacije. Tada vrijedi:*

$$(M \circ S) \circ R = M \circ (S \circ R).$$

Dokaz. Kako bismo dokazali tvrdnju ovog teorema, dovoljno je dokazati sljedeće dvije inkluzije:

$$M \circ (S \circ R) \subseteq (M \circ S) \circ R, \qquad (M \circ S) \circ R \subseteq M \circ (S \circ R).$$

Dokazat ćemo da vrijedi $M \circ (S \circ R) \subseteq (M \circ S) \circ R$, dok se druga inkluzija pokaže analogno. Ukoliko je $M \circ (S \circ R) = \emptyset$, tvrdnja je očita, pa pretpostavimo da je $M \circ (S \circ R) \neq \emptyset$. Uzmimo bilo koji uređeni par $(a, d) \in M \circ (S \circ R) \subseteq A \times D$, pri čemu je $a \in A, d \in D$.

Prema Definiciji 1.11 znamo da postoji $c \in C$ tako da je $(a, c) \in S \circ R$ i $(c, d) \in M$. Kako je $(a, c) \in S \circ R$, postoji $b \in B$ takav da je $(a, b) \in R$ i $(b, c) \in S$. Sada imamo

$$(\exists c \in C)((b, c) \in S \wedge (c, d) \in M)$$

što prema Definiciji 1.11 znači da je $(b, d) \in M \circ S$. Nadalje, imamo

$$(\exists b \in B)((a, b) \in R \wedge (b, d) \in M \circ S)$$

što opet prema Definiciji 1.11 znači da je $(a, d) \in (M \circ S) \circ R$. Iz prethodno pokazanog zaključujemo da je $M \circ (S \circ R) \subseteq (M \circ S) \circ R$, što je i trebalo pokazati. □

Iz prethodnog teorema zaključujemo da je kompozicija relacija asocijativna, dok ćemo u sljedećem primjeru vidjeti da nije uvijek komutativna, odnosno da općenito vrijedi:

$$S \circ R \neq R \circ S.$$

Primjer 1.12. *Neka je $A = \{0, 2, 4\}$ te neka su na skupu A zadane dvije relacije R i S s:*

$$R = \{(0, 0), (2, 2), (4, 0), (4, 2)\}, \qquad S = \{(0, 2), (2, 4)\}.$$

Kompozicije danih relacija su:

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\} \\ S \circ R &= \{(0, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}. \end{aligned}$$

Uočavamo da dobivena dva skupa nisu jednaka, odnosno vrijedi

$$\{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\} \neq \{(0, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$$

što povlači da je $S \circ R \neq R \circ S$. ■

Pogledajmo sada na koji način su povezane inverzna relacija i kompozicija relacija.

Teorem 1.6. *Za binarne relacije $R \subseteq X \times Y$ te $S \subseteq Y \times Z$ vrijedi:*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Dokaz. Neka je $(z, x) \in (S \circ R)^{-1}$ proizvoljan. Imamo:

$$\begin{aligned} (z, x) \in (S \circ R)^{-1} &\iff (x, z) \in S \circ R \\ &\iff \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \\ &\iff \exists y \in Y : (y, x) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in S^{-1} \\ &\iff \exists y \in Y : (z, y) \in S^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1} \\ &\iff (z, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

□

2 Funkcije

2.1 Pojam funkcije

Pojam funkcije zapravo je jedan od temeljnih pojmova matematike koji se pojavljuje u 14. stoljeću. Mnogi matematičari su prikazivali varijable nanoseći jednu horizontalno, a drugu vertikalno na graf, ali nisu spominjali ovisnost jedne varijable o drugoj. Pojam *"funkcija"* prvi put se pojavljuje 1673. godine u djelu Gottfrieda Wilhelma Leibniza *"Methodus tangentum inversa, sui de functionibus"*. Funkcija je poseban slučaj binarne relacije, što možemo uočiti iz sljedeće definicije.

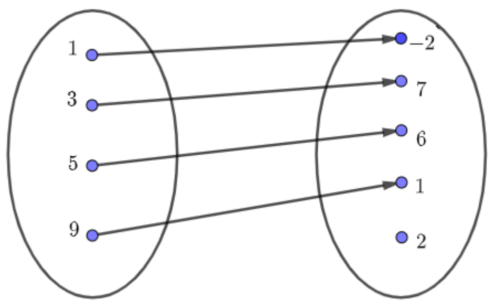
Definicija 2.1 (Funkcija)**.** *Neka su D i K neprazni skupovi.* ***Funkcija (preslikavanje)*** *$f\colon D \to K$ je svaka relacija $f \subseteq D \times K$ koja ima svojstvo da*

$$(\forall x \in D)(\exists! y \in K)((x, y) \in f).$$

Uvjet da je $(x, y) \in f$ pišemo i kao $y = f(x)$.
Neprazan skup D iz Definicije 2.1 nazivamo **domenom funkcije**, a neprazan skup K **kodomenom funkcije**. Vrijednost varijable y se mijenja u ovisnosti o varijabli x, pa varijablu y nazivamo **zavisnom varijablom/vrijednošću funkcije**, a varijablu x **nezavisnom varijablom/argumentom**.
Važno je napomenuti da treba razlikovati oznake f i $f(x)$. Naime, $f(x)$ je vrijednost funkcije f u x, dakle, to je jedan element kodomene K. Stoga, nije ispravno reći "funkcija $f(x)$".

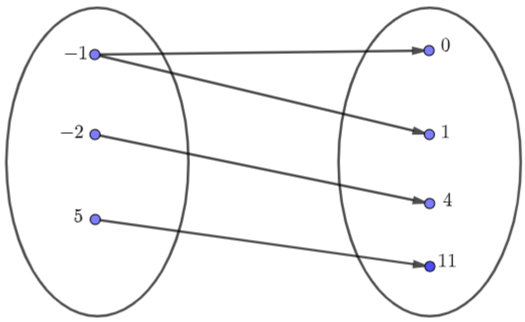
Pogledajmo sada primjer relacije koja zadovoljava svojstvo iz Definicije 2.1 te dva primjera relacije koja ga ne zadovoljava.

Primjer 2.1. *(a) Neka su dani skupovi $A = \{1, 3, 5, 9\}$ i $B = \{2, 7, 6, 1, -2\}$ te relacija $R = \{(1, -2), (3, 7), (5, 6), (9, 1)\} \subseteq A \times B$.*
Iz Slike 5 uočavamo da je svakom elementu domene A pridružen točno jedan element kodomene B, što povlači da je dana relacija R funkcija.



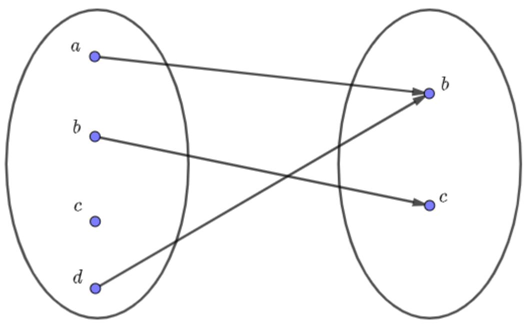
Slika 5: Relacija koja jeste funkcija

(b) Neka su $A = \{-1, -2, 5\}$ i $B = \{0, 1, 4, 11\}$ skupovi te neka je dana relacija R na skupu $A \times B$ s $R = \{(-1, 0), (-1, 1), (-2, 4), (5, 11)\}$.
Relacija R nije funkcija jer su elementu -1 iz domene A pridružena dva elementa kodomene B, što je ilustrirano na Slici 6.



Slika 6: Relacija koja nije funkcija

(c) *Neka su dani skupovi $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c\}$ i relacija $R = \{(a, b), (b, c), (d, b)\}$ na skupu $A \times B$.*
Slika 7 jasno prikazuje da relacija R nije funkcija jer elementu domene $c \in A$ nije pridružen niti jedan element kodomene B, pa svojstvo iz Definicije 2.1 nije zadovoljeno.



Slika 7: Relacija koja nije funkcija

■

Svojstva koja može imati bilo koja binarna relacija dana su u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.2. *Neka su A i B neprazni skupovi te $R \subseteq A \times B$ relacija. Relacija R je:*

- ***injektivna*** *ako vrijedi*

$$(\forall x, x' \in A)(\forall y \in B)((x, y) \in R \wedge (x', y) \in R \Rightarrow x = x'),$$

- ***funkcionalna*** *ako vrijedi*

$$(\forall x \in A)(\forall y, y' \in B)((x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'),$$

- ***surjektivna*** *ako vrijedi*

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)((x, y) \in R),$$

- ***totalna*** *ako vrijedi*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x, y) \in R).$$

Poznavajući prethodna svojstva, funkciju možemo definirati i kao relaciju $f \subseteq A \times B$ koja je funkcionalna i totalna.
Definirat ćemo sada dva važna pojma vezana za funkcije.

Definicija 2.3 (Slika funkcije)**.** *Neka je dana funkcija $f \colon D \to K$.* ***Slika funkcije*** *f je skup svih vrijednosti funkcije f, tj.*

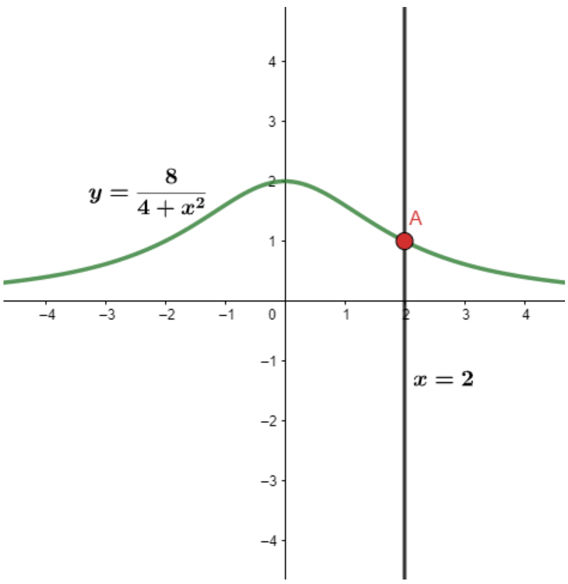
$$Im(f) = f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq K.$$

Definicija 2.4 (Graf funkcije)**.** *Neka je dana funkcija $f \colon D \to K$.* ***Graf funkcije*** *f je skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, tj.*

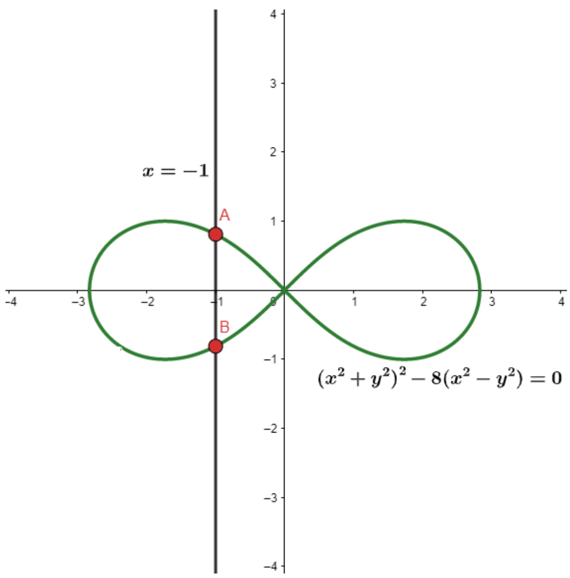
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times K.$$

2.1.1 Vertikalni test

Ne predstavljaju sve krivulje u koordinatnom sustavu graf funkcije. Da bi krivulja bila graf funkcije mora vrijediti uvjet iz definicije funkcije, odnosno $(\forall x \in D)(\exists! y \in K)((x, y) \in f)$. Vertikalnim testom najlakše možemo provjeriti vrijedi li prethodni uvjet. Ukoliko svaki vertikalni pravac (pravac koji je paralelan s osi y) siječe krivulju najviše u jednoj točki, krivulja predstavlja graf funkcije. Ako postoji vertikalni pravac koji siječe krivulju u dvije ili više točaka, onda ta krivulja nije graf funkcije.



(a) "Versiera" Marije Agnesi - graf funkcije



(b) Lemniskata - nije graf funkcije

2.2 Jednakost funkcija i restrikcija

Za zadane funkcije možemo provjeriti jesu li one u nekakvom odnosu promatrajući njihove domene, kodomene i pravila pridruživanja. Funkcije mogu biti jednake ili jedna funkcija može biti restrikcija druge. Uvjeti koji moraju biti zadovoljeni dani su u sljedećim definicijama.

Definicija 2.5 (Jednakost funkcija)**.** *Kažemo da su funkcije $f\colon D \to K$ i $g\colon D' \to K'$* ***jednake*** *ukoliko vrijedi:*

1) $D = D'$ (domene su im jednake)

2) $K = K'$ (kodomene su im jednake)

3) $f(x) = g(x), \quad$ za svaki $x \in D = D'$ (pravila pridruživanja su im jednaka).

U sljedećem primjeru definirat ćemo neke funkcije te ispitati njihovu jednakost.

Primjer 2.2. *(a) Neka su funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x$ te $g(x) = x^3 + 1$.*
Možemo uočiti da vrijedi:
1) domene funkcija f i g su jednake ($\mathbb{R} = \mathbb{R}$)
2) kodomene funkcija f i g su jednake ($\mathbb{R} = \mathbb{R}$)
3) pravila pridruživanja nisu jednaka ($x \neq x^3 + 1$).
Budući da nije zadovoljen treći uvjet iz Definicije 2.5, funkcije f i g nisu jednake.

(b) Neka su funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2$.
Očito je da prvi uvjet iz Definicije 2.5 nije zadovoljen jer vrijedi $\mathbb{N} \neq \mathbb{R}$.
Stoga, ne moramo ni provjeravati druga dva uvjeta, nego možemo odmah zaključiti da funkcije f i g nisu jednake.

■

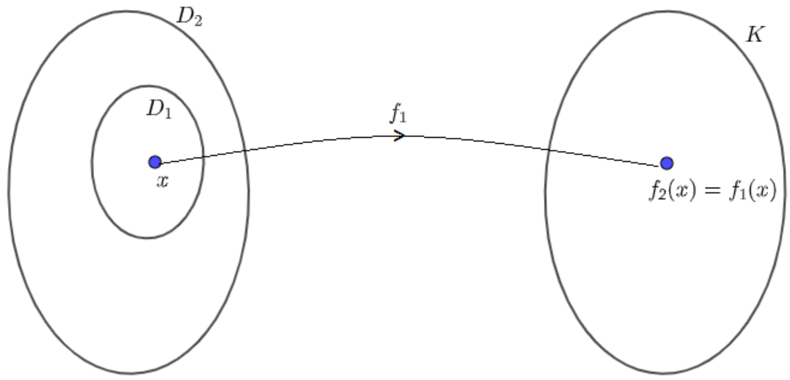
U Primjeru 2.2 (*b*), iako funkcije nisu jednake, možemo uočiti drugu vrstu veze između njih. Zaključili smo da domene nisu jednake, pa je prirodno pitati se u kom su onda odnosu. Znamo da je skup prirodnih brojeva podskup skupa realnih brojeva tj. da vrijedi $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Zatim pogledajmo što je s kodomenama i pravilima pridruživanja. Uočavamo da su kodomene jednake jer je $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ te je očito i da su pravila pridruživanja jednaka. Ukoliko vrijede prethodna tri uvjeta, kažemo da je funkcija f restrikcija funkcije g na skup $\mathbb{N}$, što je preciznije iskazano u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.6 (Restrikcija funkcije)**.** *Neka su D_1, D_2 i K neprazni skupovi takvi da vrijedi $D_1 \subseteq D_2$. Kažemo da je funkcija $f_1\colon D_1 \to K$* ***restrikcija funkcije*** *$f_2\colon D_2 \to K$ na skup D_1 ako vrijedi:*

$$f_1(x) = f_2(x), \quad \text{za svaki } x \in D_1.$$

Ponekad kažemo i da je f_2 ***proširenje funkcije*** *f_1 na skup D_2.*

Dakle, kod restrikcije funkcije radi se o istoj funkciji koju sada promatramo na manjoj domeni, što vidimo i na Slici 8.



Slika 8: Restrikcija funkcije f_2 na skup D_1

Općenito, restrikcija na zadani skup je jedinstveno određena, dok proširenje nije, što možemo uočiti na sljedećem primjeru.

Primjer 2.3. *Neka je funkcija $f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana s $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$. Jedno proširenje funkcije f_1 je funkcija f_2, a drugo proširenje funkcija f_2' dane s:*

$$f_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_2 = \begin{cases} x+1 & ,x \in [-1,0] \\ \sqrt{1-x^2} & ,x \in [0,1] \end{cases},$$

$$f_2'\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_2' = \begin{cases} 1 & ,x \in [-1,0] \\ \sqrt{1-x^2} & ,x \in [0,1] \end{cases}.$$

Očito je da funkcije f_2 i f_2' nisu jednake jer su im pravila pridruživanja različita na segmentu $[-1,0]$, pa smo pronašli dvije funkcije koje su proširenje funkcije f_1. ■

2.3 Injekcija, surjekcija i bijekcija

U ovom dijelu rada bavit ćemo se bitnim osobinama koje funkcija može imati. Riječ je o tri vrlo korisna pojma: injekciji, surjekciji i bijekciji. Najprije ćemo ih definirati, a zatim ilustrirati kombinacije koje se mogu pojaviti, a to su: da je funkcija surjekcija, ali nije injekcija, da je funkcija injekcija, ali nije surjekcija, da funkcija nije niti injekcija, niti surjekcija i da je funkcija i injekcija i surjekcija što onda povlači da je funkcija bijekcija.

Definicija 2.7 (Injekcija)**.** *Neka je dana funkcija $f\colon D \to K$. Funkcija f je* ***injekcija*** *ako različite elemente domene D preslikava u različite elemente kodomene K, tj.*

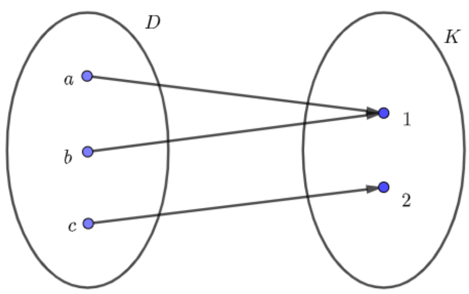
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definicija 2.8 (Surjekcija)**.** *Neka je dana funkcija $f\colon D \to K$. Funkcija f je* ***surjekcija*** *ako je svaki element kodomene K slika nekog elementa domene D, tj.*

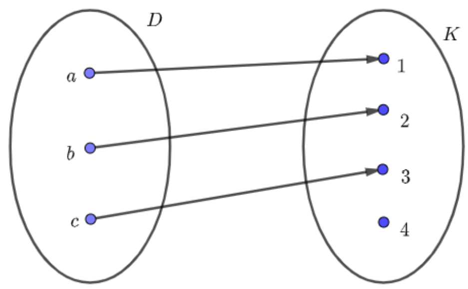
$$(\forall y \in K)(\exists x \in D)(f(x) = y).$$

Definicija 2.9 (Bijekcija)**.** *Neka je dana funkcija $f\colon D \to K$. Funkcija f je* ***bijekcija*** *ako je i injekcija i surjekcija, tj.*

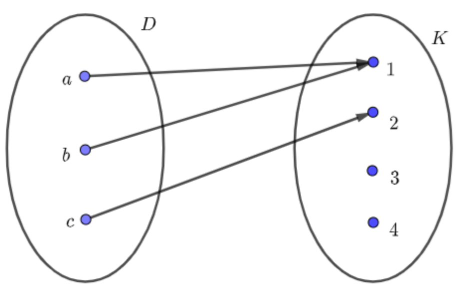
$$(\forall y \in K)(\exists! x \in D)(f(x) = y).$$



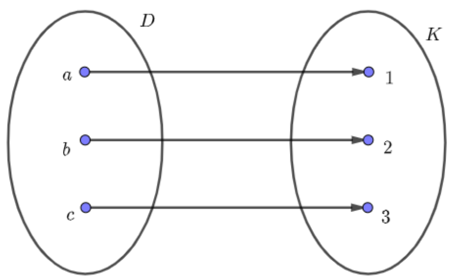
(a) Surjekcija, ali nije injekcija



(b) Injekcija, ali nije surjekcija



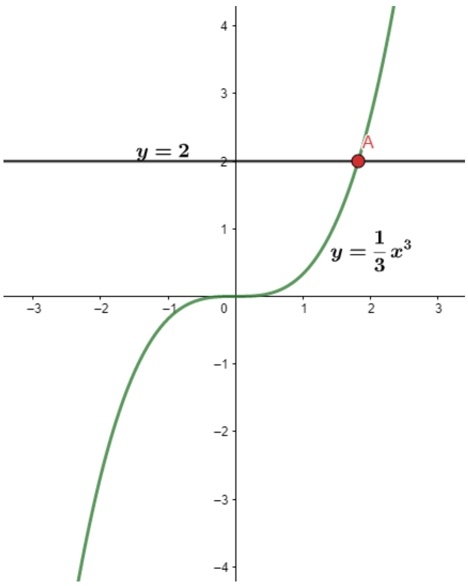
(c) Nije niti surjekcija, niti injekcija



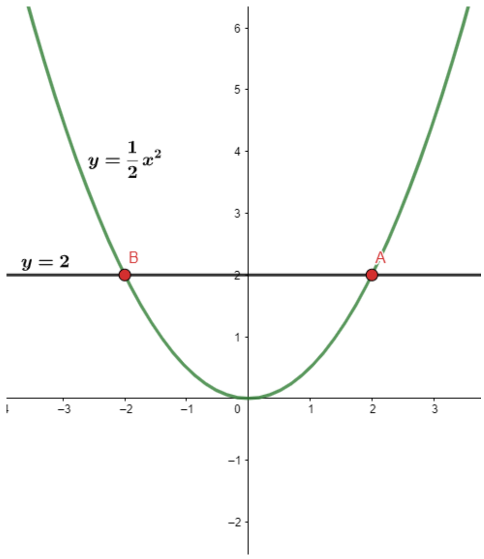
(d) Injekcija i surjekcija $\Rightarrow$ bijekcija

2.3.1 Horizontalni test

Horizontalnim testom možemo grafički odrediti koji graf funkcije predstavlja injekciju. Ukoliko svaki horizontalni pravac (pravac paralelan s osi x) siječe dani graf funkcije najviše u jednoj točki, onda je ta funkcija injekcija. Ako postoji horizontalni pravac koji siječe graf u dvije ili više točaka, tada se različite vrijednosti varijable x preslikavaju u isti y iz kodomene što znači da funkcija nije injekcija, pa onda niti bijekcija.



(e) Kubna parabola - injekcija



(f) Parabola - nije injekcija

2.4 Kompozicija funkcija

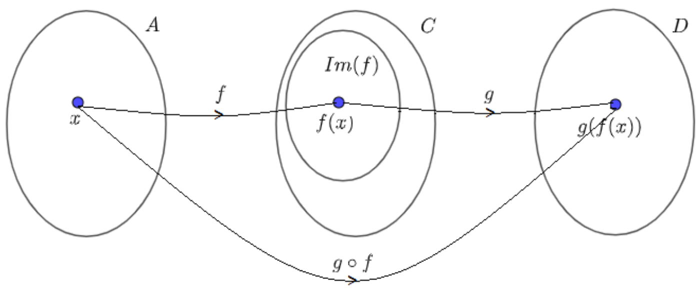
Kompozicija funkcija je jedna od važnijih operacija nad funkcijama i vrlo je korištena. Laički rečeno, to je operacija u kojoj jedna funkcija djeluje na rezultat druge funkcije, pri čemu je bitan poredak funkcija.
Primjerice, kalkulator radi na taj način. Ukoliko želimo izračunati na kalkulator koliko je $\sqrt[3]{\cos 25^\circ}$, prvo ćemo izračunati koliko je $\cos 25^\circ$, pa na taj rezultat primijeniti $\sqrt[3]{}$. Dakle,

1. $\cos 25^\circ = 0.906307787$
2. $\sqrt[3]{0.906307787} = 0.967739728$

Definicija 2.10 (Kompozicija funkcija)**.** *Neka su zadane funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon C \to D$ takve da vrijedi da je slika funkcije f podskup domene funkcije g tj. $Im(f) \subseteq C$. Tada funkciju $h\colon A \to D$ definiranu s:*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

*nazivamo **kompozicijom funkcija** f **i** g.*



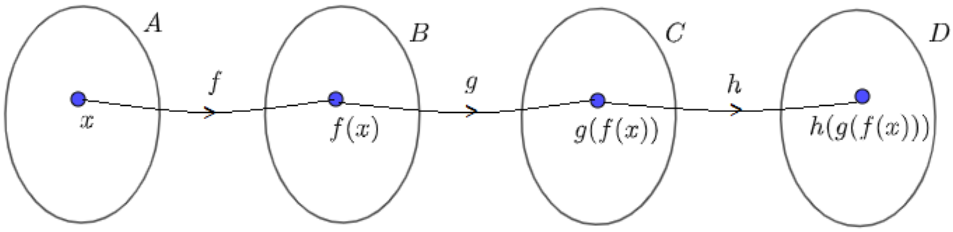
Slika 9: Kompozicija funkcija f i g

2.4.1 Svojstva kompozicije funkcija

Kompozicija funkcija, kao i kompozicija relacija, ima svojstvo asocijativnosti, dok svojstvo komutativnosti također općenito ne vrijedi. U sljedećem teoremu dokazat ćemo da je zadovoljeno svojstvo asocijativnosti te ćemo navesti primjer dvije funkcije čija kompozicija nije komutativna.

Teorem 2.1. *Za kompoziciju funkcija vrijedi asocijativnost, tj. ako je $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ i $h\colon C \to D$, onda je*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$



Dokaz. Dokaz slijedi iz definicije kompozicije funkcija:

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \quad x \in A\\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \quad x \in A.\end{aligned}$$

□

Primjer 2.4. *Neka je $f(x) = x^2 + x + 3$, $g(x) = \sin x$ i $h(x) = \frac{1}{x}$. Odredimo $((h \circ g) \circ f)(x)$ i $(h \circ (g \circ f))(x)$.*

Iz pravila pridruživanja funkcija f, g i h dobivamo:

$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x^2 + x + 3)\\ &= h(g(x^2 + x + 3)) = h(\sin(x^2 + x + 3)) = \frac{1}{\sin{(x^2 + x + 3)}}\\ (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = \frac{1}{(g \circ f)(x)} = \frac{1}{g(f(x))}\\ &= \frac{1}{g(x^2 + x + 3)} = \frac{1}{\sin(x^2 + x + 3)}.\end{aligned}$$

■

Općenito, za kompoziciju funkcija ne vrijedi komutativnost, odnosno vrijedi da je

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Uvjerimo se da je tako na sljedećem primjeru.

Primjer 2.5. *Neka je* $f(x) = x^3 + 5$ *i* $g(x) = \frac{2}{x}$. *Lako je odrediti kompozicije*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 + 5 = \left(\frac{2}{x}\right)^3 + 5 = \frac{8}{x^3} + 5$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2}{f(x)} = \frac{2}{x^3+5},$$

iz kojih zaključujemo da za kompoziciju funkcija zaista ne vrijedi svojstvo komutativnosti. ■

Sljedeći teorem tvrdi da svojstva injektivnosti i surjektivnosti ostaju sačuvana u kompoziciji.

Teorem 2.2. *Neka su* $f\colon A \to B$ *i* $g\colon B \to C$ *zadane funkcije. Tada vrijedi:*

1. *ako su* f *i* g *surjekcije, onda je i* $g \circ f$ *surjekcija,*
2. *ako su* f *i* g *injekcije, onda je i* $g \circ f$ *injekcija,*
3. *ako su* f *i* g *bijekcije, onda je i* $g \circ f$ *bijekcija.*

Dokaz.
1. Neka je $c \in C$. Kako je g surjekcija, postoji $b \in B$ za koji vrijedi $g(b) = c$, a kako je f surjekcija, postoji $a \in A$ takav da je $f(a) = b$.
Tada je $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, pa je $g \circ f$ također surjekcija. △
2. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_1 \neq a_2$. Kako je f injekcija, vrijedi da je $f(a_1) \neq f(a_2)$. Kako je g injekcija, vrijedi i da je $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$, odnosno i $g \circ f$ je injekcija. △
3. Dokaz slijedi iz prve dvije tvrdnje. △

□

Teorem 2.3. *Neka su* $f\colon A \to B$ *i* $g\colon B \to C$ *zadane funkcije. Tada vrijedi:*

1. *ako je* $g \circ f$ *injekcija, onda je* f *injekcija,*
2. *ako je* $g \circ f$ *surjekcija, onda je* g *surjekcija.*

Dokaz.
1. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_1 \neq a_2$. Kako je $g \circ f$ injekcija, tada vrijedi $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$ odnosno $(g(f(a_1)) \neq (g(f(a_2))$, pa je $f(a_1) \neq f(a_2)$ što znači da je f injekcija. △
2. Uzmimo proizvoljan $c \in C$. Kako je $g \circ f$ surjekcija, tada postoji $a \in A$ takav da je $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Međutim, postoji $b \in B$ takav da je $f(a) = b$ i $g(b) = c$, pa je g surjekcija. △

□

2.5 Inverzna funkcija

Funkcijama opisujemo mnogobrojne odnose među veličinama, kao što je primjerice odnos volumena V i radijusa r kugle opisan s:

$$V(r) = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

U nekim istraživanjima potrebno je imati obrnuti/inverzni odnos koji će omogućiti da se izračuna radijus r kugle koji ovisi o volumenu V kugle:

$$r(V) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi}.$$

Prethodni primjer nas motivira da uvedemo pojam inverzne funkcije.

Definicija 2.11 (Inverzna funkcija)**.** *Neka je funkcija $f\colon D \to K$ bijekcija. Funkcija $g\colon K \to D$ je* ***inverzna funkcija*** *funkcije f ako vrijedi:*

1) $g \circ f = i_D$

2) $f \circ g = i_K$

i označava se s f^{-1}.

Međutim, nema svaka funkcija inverznu funkciju. Uvjerimo se u to na sljedećem primjeru.

Primjer 2.6. *Pokušajmo pronaći inverznu funkciju funkcije $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, definirane s $f(x) = x^2$.*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ x &= (f^{-1}(x))^2 \qquad /\sqrt{} \\ \pm\sqrt{x} &= f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Uočavamo da bismo za svaku vrijednost varijable y imali pridružene dvije vrijednosti varijable x, a to onda, prema definiciji, ne bi bila funkcija, pa inverzna funkcija funkcije f definirane na cijelom $\mathbb{R}$ ne postoji. Međutim, ukoliko funkciju f restringiramo na $[0,\infty)$, tada funkcija f postaje bijekcija te za takvu funkciju postoji inverzna funkcija f^{-1}. ■

Teorem 2.4. *Ako je funkcija $f\colon D \to K$ bijekcija, tada postoji funkcija $g\colon K \to D$ koja je inverzna funkcija za f.*

Dokaz. Treba dokazati da postoji funkcija g koja zadovoljava uvjete *1)* i *2)* iz Definicije 2.11. Kako je f bijekcija, za svaki $y \in K$ postoji jedinstveni $x \in D$ takav da je $f(x) = y$, pa se može pisati $x = g(y)$ i na taj način definiramo funkciju $g\colon K \to D$. Imamo da za svaki $y \in K$ vrijedi

$$g(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Pokažimo sada da su uvjeti iz definicije zadovoljeni:
$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = i_K(y)$,
za svaki $x \in D$, $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = i_D$.
Kako su uvjeti zadovoljeni, ovako definirana funkcija g je inverzna funkcija za funkciju f. □

Inverzna funkcija, ukoliko postoji, je jedinstvena. Dokažimo to.

Teorem 2.5. *Funkcija $g\colon K \to D$ iz Definicije 2.11 je jedinstvena.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji funkcija $h\colon K \to D$ koja je također inverzna funkcija funkcije $f\colon D \to K$. Treba pokazati da je tada $h = g$. Budući da za kompoziciju funkcija vrijedi asocijativnost, imamo: $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$. Kako smo pretpostavili da su g i h inverzne funkcije od f, iskoristimo definiciju inverzne funkcije koja daje slijed jednakosti:

$$h = h \circ i_K = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = i_D \circ g = g.$$

Time smo dokazali da je $h = g$. □

Teorem 2.6. *Ako su $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ bijekcije, tada kompozicija $g \circ f\colon A \to C$ ima inverznu funkciju za koju vrijedi da je*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{4}$$

Dokaz. Budući da je kompozicija dvije bijekcije također bijekcija, a bijekcija ima inverznu funkciju, $g \circ f$ ima inverznu funkciju $(g \circ f)^{-1}$. Da bismo dokazali da vrijedi jednakost (4), treba dokazati da su zadovoljeni uvjeti iz Definicije 2.11:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = i_A$$
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = i_C.$$

Kako vrijedi asocijativnost za kompoziciju funkcija i kako je g^{-1} inverzna funkcija od g, a f^{-1} inverzna funkcija od f, imamo:

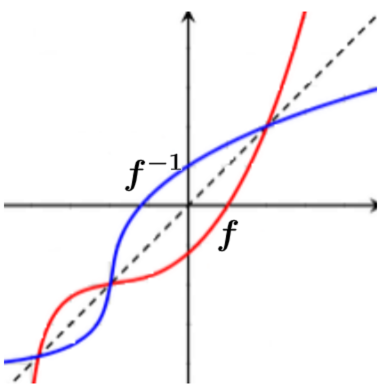
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ (i_B) \circ f = f^{-1} \circ (i_B \circ f) = f^{-1} \circ f = i_A$$
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ (i_B) \circ g^{-1} = g \circ (i_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = i_C.$$

□

Postupak traženja inverzne funkcije možemo opisati u sljedeća tri jednostavna koraka:

1. Provjerimo je li zadana funkcija $y = f(x)$ bijekcija te ako jeste idemo na 2. korak.
2. Riješavamo jednadžbu $y = f(x)$ po nepoznanici x i dobivamo $x = f^{-1}(y)$.
3. Zamijenimo varijable x i y te dobivamo inverznu funkciju $y = f^{-1}(x)$.

Graf inverzne funkcije je simetričan grafu zadane funkcije s obzirom na pravac $y = x$, što se vidi iz Slike 10.



Slika 10: Graf funkcije f i graf njene inverzne funkcije f^{-1}

Budući da smo se upoznali s pojmovima funkcije i inverzne funkcije te njihovim osnovnim svojstvima, dokazat ćemo još jedan teorem koji daje svojstva slike i inverzne slike.

Teorem 2.7. *Neka su D i K neprazni skupovi, $f\colon D \to K$ funkcija te $A, B \subseteq D$, $E, F \subseteq K$ proizvoljni skupovi. Tada vrijedi:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \tag{5}$$
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B), \tag{6}$$
$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B), \tag{7}$$
$$f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F), \tag{8}$$
$$f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F), \tag{9}$$
$$f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F). \tag{10}$$

Ako je funkcija f injekcija vrijedi jednakost u (6) *i* (7)*.*

Dokaz. Da bismo dokazali jednakost (5) potrebno je dokazati inkluzije:

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B), \quad f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B).$$

Imamo:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Longleftrightarrow (\exists x \in A \cup B)(y = f(x)) \\ &\Longleftrightarrow (\exists x \in A \texttt{ ili } \exists x \in B)(y = f(x)) \\ &\Longleftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \texttt{ ili } (\exists x \in B)(y = f(x)) \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \texttt{ ili } y \in f(B) \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Smjer "$\Longrightarrow$" dokazuje inkluziju $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$,
a smjer "$\Longleftarrow$" inkluziju $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$, pa je time dokazana jednakost (5). △
Dokažimo sada da je

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longrightarrow (\exists x \in A \cap B)(y = f(x)) \\ &\Longrightarrow (\exists x \in A \texttt{ i } \exists x \in B)(y = f(x)) \\ &\Longrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \texttt{ i } (\exists x \in B)(y = f(x)) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \texttt{ i } y \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

△

Dokazat ćemo sada obratom po kontrapoziciji da vrijedi

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B).$$

Ako je $y \in f(A) \setminus f(B)$, tada je $y \in f(A)$ i $y \notin f(B)$. Iz definicije slike znamo da postoji $x \in A$ takav da je $y = f(x)$. Ako je $x \in B$, tada je $y = f(x) \in f(B)$. Obratom po kontrapoziciji zaključujemo da $y \notin f(B)$ povlači da $x \notin B$. Dakle, imamo da je $y = f(x)$, pri čemu je $x \in A$ i $x \notin B$ odnosno $x \in A \setminus B$, što znači da je $y \in f(A \setminus B)$. △

Jednakost (8) dokazat ćemo sljedećim nizom ekvivalencija:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(E \cup F) &\Longleftrightarrow f(x) \in E \cup F \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in E \texttt{ ili } f(x) \in F \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(E) \texttt{ ili } x \in f^{-1}(F) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F). \end{aligned}$$

△

Analogno se dokazuju i jednakosti

$$\begin{aligned} f^{-1}(E \cap F) &= f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F), \\ f^{-1}(E \setminus F) &= f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F). \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je f injekcija i pokažimo da vrijedi i inkluzija

$$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B),$$

što će značiti da vrijedi jednakost u (6).
Neka je $y \in f(A) \cap f(B)$, iz čega slijedi da je $y = f(a)$ i $y = f(b)$ za neke $a \in A, b \in B$. Dakle, imamo $f(a) = y = f(b)$, pa iz injektivnosti funkcije f slijedi da je $a = b \in A \cap B$ i $y \in f(A \cap B)$, što daje traženu inkluziju. △
Za dokaz jednakosti u (7) potrebno je još dokazati da vrijedi

$$f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B).$$

Pretpostavimo da je f injekcija i neka je $y \in f(A \setminus B)$. Tada postoji $x \in A \setminus B$ i $y = f(x) \in f(A)$. Kako $x \notin B$, a f je injekcija, bit će $f(x) \in f(A) \setminus f(B)$, iz čega slijedi tražena inkluzija. △

□

Sljedećim primjerom ćemo potkrijepiti tvrdnju prethodnog teorema, preciznije da jednakosti u (6) i (7) ne vrijede ukoliko funkcija f nije injekcija.

Primjer 2.7. *Neka je funkcija $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{0, 1\}$ dana s $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ te neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{3\}$.*

Uočavamo da zadana funkcija nije injekcija jer različitim elementima domene pridružuje isti element kodomene. Odredimo najprije $f(A)$ i $f(B)$.

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) : x \in A\} = \{f(1), f(2)\} = \{0, 0\} = \{0\}, \\ f(B) &= \{f(x) : x \in B\} = \{f(3)\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Pogledajmo sada presjek:

$$f(A) \cap f(B) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\},$$

dok s druge strane imamo $A \cap B = \emptyset$, pa je

$$f(A \cap B) = \emptyset.$$

Time smo pokazali da u ovom primjeru vrijedi

$$f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B).$$

Provjerimo još vrijedi li jednakost u (7).
Lako se dobiva da je $A \setminus B = A = \{1, 2\}$, *iz čega zaključujemo*

$$f(A \setminus B) = f(A) = \{0\}.$$

S druge strane je

$$f(A) \setminus f(B) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset$$

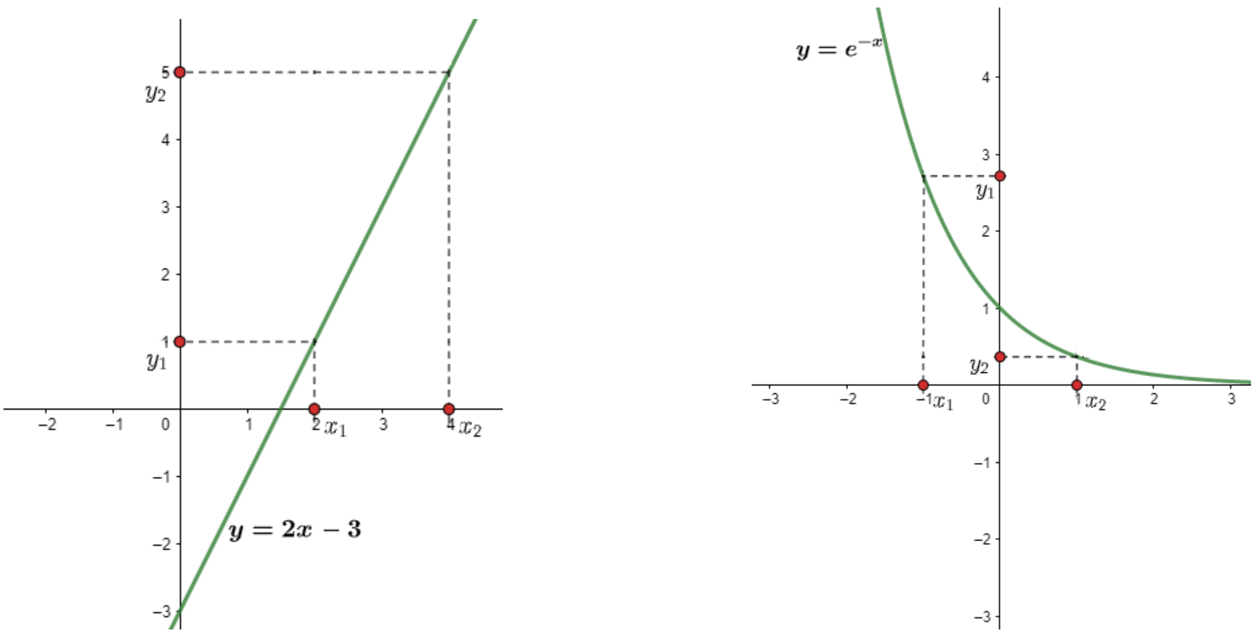
te iz prethodnog vidimo da vrijedi

$$f(A) \setminus f(B) \subsetneq f(A \setminus B).$$

■

2.6 Monotonost funkcije

Promatrajući grafove funkcija na Slici 11 možemo uočiti da krivulja koja predstavlja graf funkcije može biti uzlazna ili silazna, što za funkciju znači da je rastuća ili padajuća. Taj pojam se u matematici jednom riječju naziva monotonost funkcije.



(a) Strogo monotono rastuća funkcija

(b) Strogo monotono padajuća funkcija

Slika 11: Grafovi strogo monotono rastuće i padajuće funkcije

Definicija 2.12. *Kažemo da je funkcija* $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***monotono rastuća*** *na intervalu* $(a, b) \subseteq D$ *ako*

$$(x_1, x_2 \in (a, b)) \wedge (x_1 < x_2) \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Ukoliko vrijedi stroga nejednakost $f(x_1) < f(x_2)$*, onda kažemo da je funkcija* f ***strogo monotono rastuća*** *na intervalu* (a, b)*.*

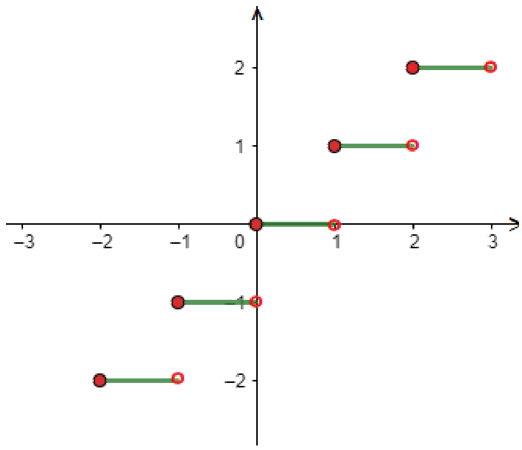
U nastavku navodimo primjere strogo monotono rastuće i monotono rastuće funkcije.

Primjer 2.8. *(a) Funkcija* $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$*, definirana s* $f(x) = x^2$ *je primjer strogo monotono rastuće funkcije.*

(b) Primjer monotono rastuće funkcije je funkcija "najveće cijelo" definirana na sljedeći način:

$$[\cdot]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad [x] = \textit{najveći cijeli broj} \leq x.$$

Npr. $[1.4] = 1$, $[1] = 1$, $[-2.1] = -3$.
Ova funkcija ima zanimljiv graf (Slika 12) koji podsjeća na stepenice, pa se funkcija još naziva i "stepenasta funkcija".



Slika 12: Graf monotono rastuće funkcije

■

Definicija 2.13. *Kažemo da je funkcija* $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***monotono padajuća*** *na intervalu* $(a, b) \subseteq D$ *ako*

$$(x_1, x_2 \in (a, b)) \wedge (x_1 < x_2) \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ukoliko vrijedi stroga nejednakost $f(x_1) > f(x_2)$*, onda kažemo da je funkcija* f ***strogo monotono padajuća*** *na intervalu* (a, b)*.*

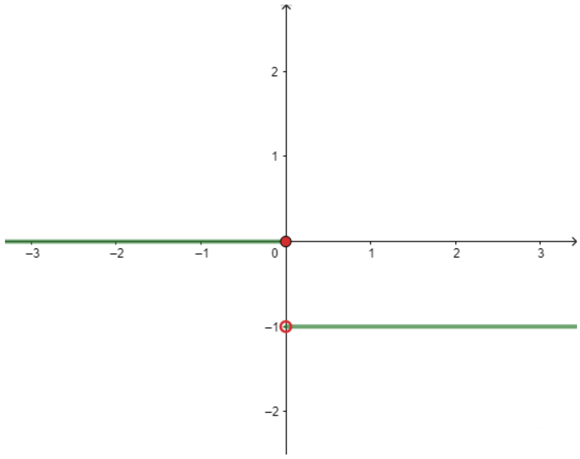
Pogledajmo sada primjere strogo monotono padajuće i monotono padajuće funkcije.

Primjer 2.9. *(a) Primjer strogo monotono padajuće funkcije je funkcija* $f\colon [1, \infty) \to [-1, -\infty)$*, definirana s* $f(x) = -x^3$*.*

(b) Monotono padajuća funkcija je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0\}$, definirana s:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ -1 & , x > 0 \end{cases}$$

čiji je graf prikazan na Slici 13.



Slika 13: Graf monotono padajuće funkcije

■

2.7 Parnost i neparnost funkcije

Svojstvo parnosti funkcije razmatramo samo ako je domena funkcije skup simetričan s obzirom na ishodište. Iz tog razloga najprije trebamo definirati kada je to skup simetričan s obzirom na ishodište.

Definicija 2.14. *Za skup $D \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* ***simetričan*** *s obzirom na ishodište ako za $x \in D$ vrijedi da je i $-x \in D$.*

Sada možemo definirati kada je funkcija parna, a kada neparna.

Definicija 2.15. *Neka je D simetričan skup. Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$* ***parna*** *ako je:*

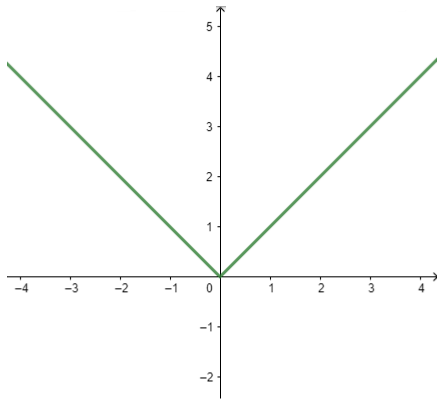
$$f(-x) = f(x), \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ ***neparna*** *ako je:*

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{za svaki } x \in D.$$

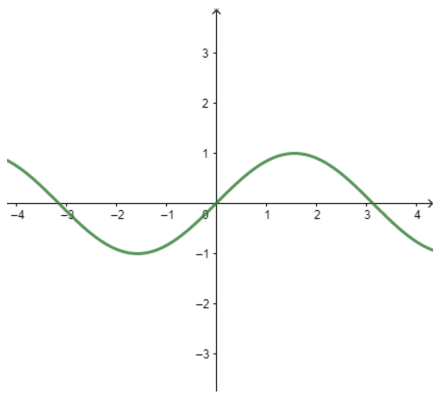
Moguće je i da funkcija nije niti parna niti neparna, što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru, u kojem ćemo također navesti i primjer parne te neparne funkcije.

Primjer 2.10. *(a) Funkcija* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$*, definirana s* $f(x) = |x|$ *je parna, jer je* $|-x| = |x|$.



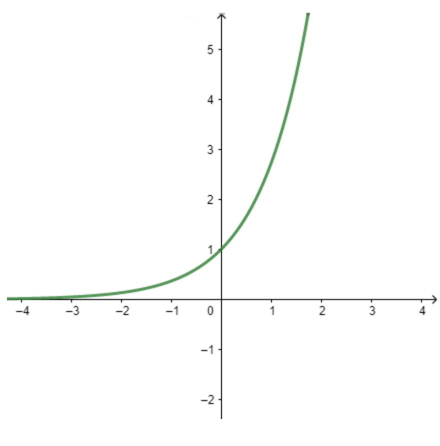
Slika 14: Graf parne funkcije $x \mapsto |x|$

(b) Funkcija $f \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$*, definirana s* $f(x) = \sin x$ *je neparna, jer je* $\sin(-x) = -\sin x$.



Slika 15: Graf neparne funkcije $x \mapsto \sin x$

(c) Primjer funkcije koja nije niti parna niti neparna je funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, definirana s* $f(x) = e^x$*, jer je* $e^{-x} \neq e^x$ *i* $e^{-x} \neq -e^x$.



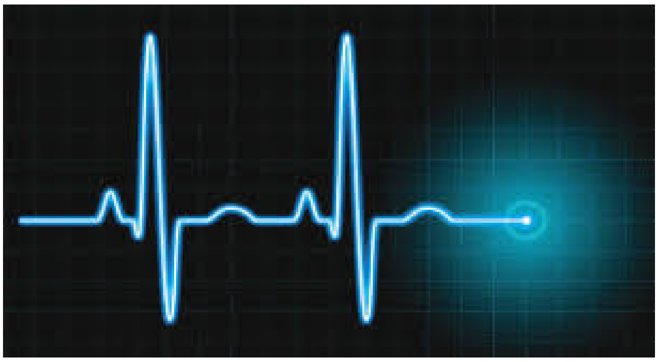
Slika 16: Graf funkcije $x \mapsto e^x$ koja nije niti parna niti neparna

■

Iz Slike 14 uočavamo da je graf parne funkcije osno simetričan s obzirom na os y, dok iz Slike 15 možemo primijetiti da je graf neparne funkcije centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

2.8 Periodičnost funkcije

Periodičnost je pojava s kojom se vrlo često susrećemo u svakodnevnom životu. Primjerice, izmjena dana i noći je periodična, izmjena godišnjih doba također je periodična. Vizualan prikaz periodičnosti je grafički zapis funkcija srca, elektrokardiogram (EKG), koji se nalazi na Slici 17.



Slika 17: Elektrokardiogram

Definicija 2.16. *Kažemo da je funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$ ***periodična*** *ako postoji pozitivan broj* $T \in \mathbb{R}$ *takav da je:*

$$f(x+T) = f(x), \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Najmanji od brojeva T *za koji vrijedi prethodna jednakost nazivamo* ***temeljnim*** *ili* ***osnovnim periodom*** *funkcije* f.

Uočimo da ukoliko je T period funkcije f, onda je i nT, $n \in \mathbb{N}$ period iste funkcije f.
Također, pitanje koje se nameće jeste ako su f i g periodične funkcije, jesu li i $f \pm g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ periodične funkcije. Odgovor je potvrdan, naime, prema [9, str. 205] ako su funkcije f i g periodične s istim temeljnim periodom T, onda su i $f \pm g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ periodične funkcije s istim temeljnim periodom T.
Navedimo sada nekoliko primjera periodičnih funkcija.

Primjer 2.11. *Osnovni primjeri periodičnih funkcija koji se spominju još u srednjoj školi jesu trigonometrijske funkcije.*
Funkcije

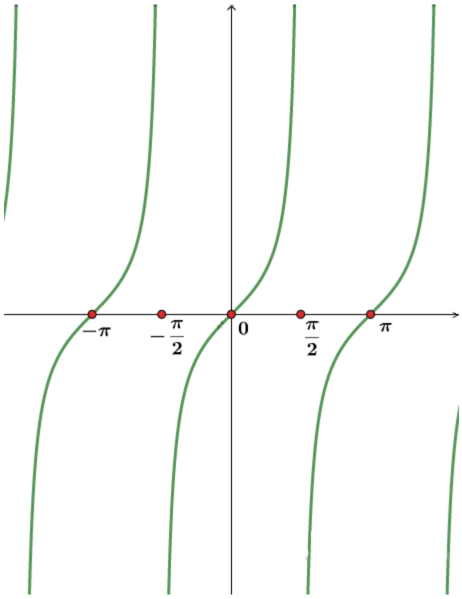
$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R} \to [-1,1], \quad f(x) = \sin x, \\ g&\colon \mathbb{R} \to [-1,1], \quad g(x) = \cos x \end{aligned}$$

su periodične funkcije s temeljnim periodom 2π, *dok su funkcije*

$$\begin{aligned} h&\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \tan x, \\ k&\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = \cot x \end{aligned}$$

periodične funkcije s temeljnim periodom π.

Na Slici 18 nalazi se graf funkcije $h\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, *definirane s* $h(x) = \tan x$ *iz kojeg se lako vidi da je dana funkcija periodična s temeljnim periodom* π.



Slika 18: Graf periodične funkcije $x \mapsto \tan x$ s temeljnim periodom π

$\blacksquare$

Literatura

[1] M. Klaričić Bakula i S. Braić, *Uvod u matematiku*, Split, 2011./2012.
http://mapmf.pmfst.unist.hr/~alastre/domaci/um/UvoduMatematiku%20-%20konacna%20verzija.pdf

[2] D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*
https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/uum.pdf

[3] P. L. Clark, *Lecture notes on relations and functions*, web izdanje, 2016.
http://math.uga.edu/~pete/3200relationsfunctions.pdf

[4] D. Jukić i R. Scitovski, *Matematika I*, PTF i ETF, Osijek, 1998.
https://www.mathos.unios.hr/integralni/Jukic_Scitovski.pdf

[5] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[6] Š. Ungar, *Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku*, online prezentacija, Osijek, 2016.
https://www.mathos.unios.hr/~sime/HR/skupovi/skupovi-slides.pdf

[7] I. Nakić, *Diskretna matematika*, PMF - MO, 2011./2012.
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf

[8] D. Jankov Maširević, *Zbirka riješenih zadataka iz teorije mjere i integracije*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.
http://www.mathos.unios.hr/images/uploads/33.pdf

[9] B. Dakić, *Periodične funkcije*, Matematika i škola, broj 45, Zagreb, 2008.
https://www.halapa.com/odmor/pravipdf/periodika.pdf