Banachov teorem o fiksnoj točki

Derner, Ana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Derner

Banachov teorem o fiksnoj točki

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Derner

Banachov teorem o fiksnoj točki

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Dragan Jukić

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom završnom radu reći ćemo nešto o Banachovom kontrakcijskom principu koji je poznat pod imenom Banachovom teorem o fiksnoj točki. Definirat ćemo potpunost metričkih prostora i navesti neke primjere. Na kraju samog rada spomenut ćemo neke primjene Banachovog teorema.

Ključne riječi

potpuni metrički prostori, konveregncija, Banachov teorem, fiksna točka

Banach fixed point theorem

Summary

In this paper work we will tell something about Banach's contraction principle which is also known as Banach fixed point theorem. We will define complete metric spaces and provide it with some examples. At the end we will say something about Banach theorem applications.

Key words

complete metric space, convergence, Banach theorem, fixed point

Sadržaj

Uvod **i**

1 Potpuni metrički prostori **1**

2 Banachov teorem o fiksnoj točki **6**

3 Primjene Banachovog teorema o fiksnoj točki **10**

3.1 Dokaz Picardovog teorema za rješenje diferencijalnih jednadžbi 10

3.2 Newtonova metoda za pronalaženje nultočke jednadžbe f(x)=0 11

3.3 Riješavanje Volterrovih integralnih jednadžbi 12

Literatura **15**

Uvod

Banachov [1] teorem o fiksnoj točki samo je jedan od kontrakcijskih principa. Zbog svoje jednostavnosti ima široku primjenu u matematičkoj analizi. Najviše se primjenjuje u teoriji diferencijalnih i integralnih jednadžbi, ali je i važan alat u teoriji metričkih prostora. Banachov teorem nam garantira postojanje i jedinstvenost fiksnih točaka određenih preslikavanja iz metričkog prostora u samog sebe te nam daje konstruktivnu metodu pronalaženja tih točaka. Sama ideja teorema poznata je još ranije. Naime, princip se prvi put pojavio u eksplicitnoj formi u doktorskom radu Stefana Banacha 1920.godine po kome je teorem i dobio ime.

U prvom dijelu ovog rada definirat ćemo potpune metričke prostore te reći nešto o upotpunjenju metričkog prostora. Pokazat ćemo da je upotpunjene jedinstveno te da svaki metrički prostor ima upotpunjenje. Zatim ćemo definirati kontrakciju te izreći Banachov teorem o fiksnoj točki. Navest ćemo još neke varijante Banachovog teorema. Na samom kraju ćemo navesti neke primjene Banachovog teorema.

[1] Stefan Banach(1892.-1945.), poljski matematičar

1 Potpuni metrički prostori

Prije nego što definiramo potpune metričke prostore potrebno je reći nešto o Cauchyjevim[2] nizovima i njihovoj konvergneciji.

Definicija 1. *Neka je (X,d) metrički prostor. Za niz $(x_n) \in X$ kažemo da konvergira prema $x_0 \in X$ ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0. \tag{1}$$

U tom slučaju broj x nazivamo limesom niza (x_n).

Definicija 2. *Za niz (x_n) u metričkom prostoru (X,d) kažemo da je Cauchyjev niz ako vrijedi*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})[(m,n \geq N) \Rightarrow (d(x_n, x_m) < \varepsilon)].$$

Teorem 1. *([5]) Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X,d) je Cauchyjev niz.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_n) niz koji konvergira prema x. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da $d(x_n, x) < \varepsilon$ za svaki $n \geq N$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $m, n \geq N$. Tada je

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stoga je niz (x_n) Cauchyjev. □

Teorem 2. *([2]) Niz (x_n) u euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ je konvergentan onda i samo onda ako je on Cauchyjev niz.*

Definicija 3. *Metrički prostor (X,d) je potpun ako svaki Cauchyjev niz iz X konvergira prema nekoj točki iz X.*

Definicija 4. *Potpun normiran prostor nazivamo Banachovim prostorom.*

Primjer 1. *Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standardnom metrikom $d(x,y) = |x - y|$ je potpun metrički prostor.*

Teorem 3. *([1]) Skup $C[a,b]$ svih neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$ je potpun metrički prostor s uniformnom metrikom*

$$d(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je skup $C[a,b]$ s tako definiranom metrikom zaista metrički prostor, a zatim ćemo pokazati da je on i potpun. Kako bismo pokazali da je $(C[a,b], d)$ metrički prostor trebamo pokazati da preslikavanje d zadovoljava aksiome metrike (vidi [1]). Kako aksiomi *a)* i *b)* očito vrijede preostaje pokazati da d zadovoljava nejednakost trokuta. Ona slijedi iz sljedećeg izraza

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq d(f,g) + d(g,h)$$

[2] Augustin Louis Cauchy(1789.-1857.), francuski matematičar

tj.

$$d(f,h) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - h(x)| \le d(f,g) + d(g,h).$$

Pokažimo sada potpunost. Pretpostavimo da je (f_n) Cauchyjev niz u $(C[a,b],d)$. Kako bismo pokazali da je navedni prostor potpun trebamo pronaći funkciju $f \in C[a,b]$ za koju će niz (f_n) konvergirati k f. Kako je (f_n) Cauchyjev niz vrijedi sljedeće:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})[(m,n \ge N) \Rightarrow \forall x \in [a,b] \max_{a\le x\le b} |f_m(x) - f_n(x) < \varepsilon)].$$

Zato je i

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b],\ \forall m,n \ge N,$$

odakle slijedi da je za svaki $x \in [a,b]$ niz $(f_n(x))$ Cauchyjev pa funkciju f na $[a,b]$ možemo definirati na sljedeći način

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [a,b]. \tag{2}$$

Preostaje još za pokazati da je f neprekidna. Neka je $x_0 \in [a,b]$, a $\varepsilon > 0$. Znamo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da kada pustimo $\lim\limits_{m\to\infty}$ vrijedi

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b],\ \forall n \ge N.$$

Kako je f_N neprekidna u x_0 možemo za isti ε pronaći $\delta > 0$ takav da

$$x \in [a,b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Pomoću (2), (3) te za $n \ge N$ i $x \in [a,b]$ dobivamo sljedeće

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Ovime smo pokazali neprekidnost funkcije f u proizvoljnoj točki x_0 pa samim time i neprekidnost na $[a,b]$. □

Primjer 2. *Ako* 0 *uklonimo iz skupa* $\mathbb{R}$, *onda skup* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *nije potpun metrički prostor sa standardnom metrikom* $d(x,y) = |x-y|$. *Zaista, niz* $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *je Caucyjev u skupu* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, *ali nema limes u* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Teorem 4. *([5]) Neka je* (X,d) *metrički prostor. Skup* $A \subseteq X$ *je zatvoren onda i samo onda ako svaki niz* (x_n) *iz* A *koji konvergira u* X *ima limes u* A.

Teorem 5. *([5]) Neka je* (X,d) *potpun metrički prostor. Skup* $A \subseteq X$ *je zatvoren ako i samo ako je* (A,d) *potpun metrički prostor.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je (x_n) Cauchyjev niz iz A. Tada je (x_n) ujedno i Cauchyjev niz iz X, pa zbog potpunosti prostora (X,d) postoji točka $x_0 \in X$ prema kojoj (x_n) konvergira. Zbog zatvorenosti skupa A je $x_0 \in A$, što pokazuje da (x_n) konvergira u (A,d).

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je (A,d) potpun metrički prostor. Dovoljno je pokazati da svaki niz (x_n) iz A koji konvergira u X ima limes u A. Neka je (x_n) niz u A koji konvergira prema x_0 iz X. Tada je (x_n) ujedno i niz u X koji konvergira prema x_0. Niz (x_n) je Cauchyjev niz pa zbog potpunosti prostora (A,d) postoji točka a_0 iz A prema kojoj on konvergira. Zbog jedinstvenosti limesa je $a_0 = x_0$. □

Primjer 3. *Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je potpun metrički prostor.*

Primjer 4. *Prostor racionalnih brojeva $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije potpun jer nije zatvoren u $\mathbb{R}$.*

Definicija 5. *Neka je A neprazan podskup metričkog prostora (X, d). Diametar skupa A se definira kao*

$$\mathrm{diam(A)} = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Teorem 6. *([5]) Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Ako je (F_n) niz nepraznih zatvorenih podskupova od X takvih da je $F_{n+1} \subseteq F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $(\mathrm{diam}(F_n))$ konvergira prema 0, onda je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednočlan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) potpun metrički prostor. Neka je (F_n) niz nepraznih zatvorenih podskupova skupa X takvih da vrijedi

$$F_{n+1} \subseteq F_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

i $(\mathrm{diam}(F_n))$ konvergira k 0. Trebamo pokazati da je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

jednočlan skup. Pokažimo najprije da je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ uzmemo $x_n \in F_n$. Kako $(\mathrm{diam}(F_n))$ konvergira k 0, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{diam}(F_N) < \varepsilon$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $m, n \geq N$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $m > n$. Tada je $x_m \in F_m \subseteq F_N, x_n \in F_n \subseteq F_N$. Stoga je

$$d(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(F_N) < \varepsilon.$$

Prema tome (x_n) je Cauchyjev niz u X. Kako je X potpun, iz toga slijedi da (x_n) konvergira u X. Neka je

$$x := \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Sada ćemo pokazati da je

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Neka je $x_m \in F_m \subseteq F_n$ za bilo koji $m \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $(x_n, x_{n+1}, \dots)$ niz u F_n i podniz od (x_n), onda on konvergira prema x. To implicira da je $x \in \overline{F}_n = F_n$. Time smo pokazali da je $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Preostalo je još pokazati da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednočlan skup. Pretpostavimo da su

$$x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Kako su $x, y \in F_N$ vrijedi

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon.$$

Dakle, $d(x, y) = 0$ što znači da je $x = y$. □

Definicija 6. *Najmanji potpuni metrički prostor koji sadrži dani metrički prostor* (X, d) *nazivamo upotpunjenje metričkog prostora* (X, d).

Definicija 7. *Neka je* X *topološki prostor. Za skup* D *iz* X *kažemo da je gust na* X *ako je* $\mathrm{ClD} = X$.

Definicija 8. *Za potpun metrički prostor* (Y, d) *kažemo da je upotpunjenje metričkog prostora* (X, d) *ako je* (X, d) *potprostor od* (Y, d) *i* $X \subset Y$ *gust u skupu* Y.

Definicija 9. *Kažemo da je metrički prostor* (X_1, d_1) *izometričan s obzirom na metrički prostor* (X_2, d_2) *ako postoji bijektivno preslikavanje* $f : X_1 \to X_2$ *takvo da vrijedi*

$$d_2(f(a), f(b)) = d_1(a, b),\ \forall a, b \in X_1.$$

U ovom slučaju se preslikavenje $f : X_1 \to X_2$ *zove izometrija.*

Lema 1. *([1]) Sljedeća nejednakost vrijedi za sve četiri točke* a, b, u, v *metričkog prostora* (X, d)

$$|d(a, b) - d(u, v)| \leq d(a, u) + d(b, v). \tag{4}$$

Propozicija 1. *([1]) Ako su metrički prostori* (Y_1, d_1) *i* (Y_2, d_2) *upotpunjenja istog metričkog prostora* (X, d)*, onda su oni izomterični.*

Dokaz. Neka su metrički prostori (Y_1, d_1) i (Y_2, d_2) upotpunjenja istog metričkog prostora (X, d). Trebamo pokazati da su oni izometrični, to jest pronaći bijektivno preslikavanje $f : Y_1 \to Y_2$ takvo da vrijedi

$$d_2(f(y_1'), f(y_1'')) = d_1(y_1', y_1''),\ \forall y_1', y_1'' \in Y_1. \tag{5}$$

Konstruirajmo izometriju $f : Y_1 \to Y_2$ takvu da $\forall x \in X$ vrijedi $f(x) = x$. Tada je $d_2(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) = d_1(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$. Ako je $y_1 \in Y_1 \backslash X$, onda je y_1 gomilište skupa X, jer je X gust u Y_1. Neka je (x_n) niz točaka iz X koji konvergiraju prema y_1 u d_1 metrici. Kako je navedni niz Cauchyjev u d_1 metrici, onda je on i Cauchyjev niz u prostoru (Y_2, d_2). Tvrdnja proizlazi iz jednakosti metrika d_1, d_2 i d na skupu X. Sada iz potpunosti prostora (Y_2, d_2) slijedi da ovaj niz ima limes $y_2 \in Y_2$ i on je jedinstven. Kako bi provjerili je li preslikavanje f surjektivno uzmimo da je $f(y_1) = y$. Takvo preslikavanje $f : Y_1 \to Y_2$ je surjektivno jer za bilo koju točku $y_2 \in Y_2 \backslash X$, kao i $y_1 \in Y_1 \backslash X$, vrijedi da je limes Cauchyjevog niza točaka iz X. Provjerimo vrijedi li (5). Ako y_1' i y_1'' pripadaju X, onda je gornja jednakost zadovoljena. U općem slučaju uzimamo dva niza (x_n') i (x_n'') koji konvergiraju prema y_1', odnosno y_1''. Iz nejednakosti (4) slijedi

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n \to \infty} d_1(x_n', x_n'')$$

tj.

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n''). \tag{6}$$

Iz toga proizlazi da ovi nizovi konvergiraju prema $y_2' = f(y_1')$, odnosno $y_2'' = f(y_2'')$ u prostoru (Y_2, d_2). Stoga je

$$d_2(y_2', y_2'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n''). \tag{7}$$

Usporedimo li relacije (6) i (7) dobili smo upravo realciju (5). Ta jednakost nam govori da je preslikavanje $f : Y_1 \to Y_2$ injektivno te je time kompletiran dokaz da je f izometrija. $\square$

Napomena 1. *Ovom propozicijom pokazali smo da je upotpunjenje jedinstveno.*

Propozicija 2. *([1]) Svaki metrički prostor ima upotpunjenje.*

Dokaz. Neka je (X, d_x) metrički prostor. Ako je (X, d_x) potpun dokaz je gotov jer je tada on sam svoje upotpunjenje. Pretpostavimo da (X, d_x) nije potpun. Tada nam prethodna propozicija govori kako konstruirati njegovo upotpunjenje. Neka su (x_n') i (x_n'') Caucyjevi nizovi u prostoru (X, d_x). Ta dva niza su ekvivalentna ako vrijedi $d_x(x_n', x_n'') \to 0$ kada $n \to \infty$. Lako se pokaže da je relacija ekvivalentnosti relacija ekvivalencije. Označimo s S skup svih ekvivalentnih klasa Caucyjevih nizova te uvedimo metriku pomoću sljedećeg pravila: ako su s' i s'' elementi skupa S ,a (x_n') i (x_n'') nizovi iz klasa s' ,odnosno s'' neka vrijedi

$$d(s', s'') = \lim_{n\to\infty} d_x(x_n', x_n''). \tag{8}$$

Iz nejednakosti (4) sljedi da je ova definicija dobra. Limes sa desne strane postoji i ne ovisi o izboru niza (x_n') i (x_n'') iz klasa s', odnosno s'', a funkcija $d(s', s'')$ zadovoljava sve aksiome metrike. Dobiveni metrički prostor (S, d) je traženo upotpunjenje prostora (X, d_x). Zaista, (X, d_x) je izometrija s obzirom na prostor (S_x, d), gdje je (S_x, d) potprostor prostora (S, d). Kako se prostor (S, d) sastoji od ekvivalentnih klasa Cauchyjevih nizova koji sadrže konstantan niz (x_n), prirodno je identificirati takvu klasu $s \in S$ sa točkom $x \in X$. Očito je preslikavanje $f : (X, d_x) \to (S_x, d)$ izometrija. Preostalo je za pokazati da je (S_x, d) gust u (S, d) te da je (S, d) potpun metrički prostor.

Pokažimo prvo da je (S_x, d) gust u (S, d). Neka je s proizvoljan element skupa S i (x_n) Cauchyjev niz u (X, d_x) koji pripada klasi $s \in S$.

Za $\varepsilon_n = f(x_n), n \in \mathbb{N}$, dobijemo niz (ε_n) točaka iz (S_x, d) kojemu je $s \in S$ limes što možemo vidjeti iz (8).

Preostaje pokazati da je prostor (S, d) potpun. Neka je (s_n) bilo koji Cauchyjev niz iz prostora (S, d). Za svaki $n \in \mathbb{N}$ biramo element ε_n iz (S_x, d) takav da je $d(s_n, \varepsilon_n) < \frac{1}{n}$ pa iz toga slijedi da je niz (ε_n) Cauchyjev. U tom slučaju će i niz $(x_n) = (f^{-1}(\varepsilon_n))$ biti Cauchyjev niz. Niz (x_n) definira element $s \in S$ za koji će niz (s_n), zbog relacije (8), konvergirati.

$\square$

2 Banachov teorem o fiksnoj točki

Definicija 10. *Neka su* (X, d_x) *i* (Y, d_y) *metrički prostori. Za preslikavanje* $f : X \to Y$ *kažemo da je Lipschitzovo*[3] *ili da ima Lipschitzovo svojstvo ako postoji konstanta* $\lambda > 0$ *takva da za bilo koje dvije točke* $x_1, x_2 \in X$ *vrijedi*

$$d_y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_x(x_1, x_2). \tag{9}$$

Konstantu λ *još nazivamo Lipschitzova konstanta.*

Napomena 2. *Uočimo, ako je* $\lambda > 0$ *Lipschitzova konstanta za* f*, onda će i svaki* $n \geq \lambda$ *biti Lipschitzova konstanta za funkciju* f.

Definicija 11. *Neka je* $f : X \to X$ *proizvoljno preslikavanje. Za točku* $x \in X$ *kažemo da je fiksna točka preslikavanja* f*, ako vrijedi* $f(x) = x$.

Definicija 12. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Za funkciju* $f : X \to X$ *kažemo da je kontrakcija ako postoji broj* q*,* $0 < q < 1$ *takav da vrijedi*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq q d(x_1, x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

U tom slučaju broj q *nazivamo konstantom kontrakcije.*

Teorem 7. *(Banachov teorem o fiksnoj točki)([2])*

Neka je (X, d) *potpun metrički prostor i* $f : X \to X$ *kontrakcija s koeficjentom kontrakcije* q*. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) Postoji jedna jedina fiksna točka $x \in X$ *za preslikavanje* f.

(ii) Za svaku točku $x_1 \in X$ *niz* (x_n)*,* $x_n = f^{n-1}(x_1)$*, konvergira prema fiksnoj točki* x*; pri čemu je* $f^1 = f$*,* $f^k = f \circ f^{k-1}$.

(iii) Vrijedi

$$d(x_n, x) \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} d(x_1, f(x_1)), \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Odaberimo proizvoljnu točku $x_1 \in X$ te induktivno definiramo niz (x_n) iz X formulom

$$x_{n+1} = f(x_n), \ n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

tako da je $x_{n+1} = f^n(x_1)$. Dokazat ćemo da je niz (x_n) Cauchyjev niz.

Prvo pokažimo indukcijom po n da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{n-1} d(x_1, x_2). \tag{11}$$

Za $n = 1$ tvrdnja (11) je očito ispunjena. Za $n + 1$ dobivamo, prema (10), (12) i pretpostavci indukcije (11),

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1}) \leq q d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_1, x_2),$$

[3]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz(1832.-1903.), njemački matematičar

pa je (11) dokazano.

Kako je po nejednakosti mnogokuta

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}),$$

to prema (11) vrijedi

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq q^{n-1}(1 + q + q^2 + \cdots q^{k-1})d(x_1, x_2), \ n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Kako je

$$1 + q + \cdots q^{k-1} \leq \frac{1}{1-q}.$$

dobivamo

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} d(x_1, x_2). \tag{13}$$

Budući je $0 < q < 1$ povlači $\lim_n q^n = 0$, to iz (13) zaključujemo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da za svaki $k \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ povlači $d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$ tj. da je niz zaista Cauchyjev niz.

Kako je po pretpostavci prostor (X, d) potpun, a niz (x_n) Cauchyjev iz toga slijedi da (x_n) konvergira prema nekoj točki $y \in X$. Iz (12) i (10) dobivamo

$$d(y, f(y)) \leq d(y, x_n) + d(x_n, f(y)) = d(y, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(y)) \leq d(y, x_n) + qd(x_{n-1}, y). \tag{14}$$

Budući da (x_n) konvergira prema y, to $(d(y, x_n)) \to 0$ i $(d(x_{n-1}, y) \to 0$ pa iz (14) slijedi

$$d(y, f(y)) = 0,$$

tj. $f(y) = y$, što pokazuje da je $y \in X$ fiksna točka za preslikavanje f.

Kako bismo pokazali jedinstvenost fiksne točke uzmimo $z \in X$ takav da je $f(z) = z$. U tom slučaju vrijedi sljedeće

$$d(y, z) = d(f(y), f(z)) \leq qd(y, z). \tag{15}$$

Kako je $q < 1$, to (15) povlači $d(y, z) = 0$, tj. $y = z$, što dokazuje jedinstvenost fiksne točke y. Time su tvrdnje (i), (ii) dokazane.

Ako u (13) djelujemo s limesom kada $k \to \infty$ vidimo da $(d(x_n, x_{n+k})) \to d(x_n, y)$ pa (13) prelazi u

$$d(x_n, y) \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} \cdot d(x_1, f(x_1)),$$

te je time i tvrdnja (iii) dokazana. □

Napomena 3. *Ako je (X, d) potpun metrički prostor, a preslikavanje $f : X \to X$ ima svojstvo da je*

$$d(f(x), f(x_1)) < d(x, x_1), \ \forall x, x_1 \in X, x \neq x_1$$

onda se općenito ne može zaključiti da postoji fiksna točka. To možemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 5. *Preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dano formulom $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ nema fiksne točke iako za $x \neq x_1$ vrijedi*

$$|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|.$$

Zamjenimo li u Banachovom teoremu niz (x_n) s nizom (y_n) za koji vrijedi da je $y_0 = x_1$, a y_{n+1} je aproksimacija $f(y_n)$ tada nas zanima pod kojim uvjetima će vrijediti da $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Sljedeći teorem daje te uvjete.

Teorem 8. *([4]) Neka je (X, d) potpun metrički prostor, $f : X \to X$ kontrakcija s Lipschitzovom konstantom $\lambda \in (0, 1)$. Pretpostavimo da je $x \in X$ fiksna točka preslikavanja f. Neka je (ε_n) niz pozitivnih brojeva za koje vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, a $y_0 \in X$. Neka $(y_n) \subseteq X$ zadovoljava*

$$d(y_{n+1}, f(y_n)) \leq \varepsilon_n.$$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Dokaz. Neka je $y_0 = x_0$. Uočimo sljedeće

$$\begin{aligned} d(f^{m+1}(x_0), y_{m+1}) &\leq d(f(f^m(x_0)), f(y_m)) + d(f(y_m), y_{m+1}) \\ &\leq \lambda d(f^m(x_0), y_m) + \varepsilon_m, \end{aligned}$$

što implicira

$$d(f^{m+1}(x_0), y_{m+1}) \leq \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} \varepsilon_i.$$

Stoga,

$$\begin{aligned} d(y_{m+1}, x) &\leq d(y_{m+1}, f^{m+1}(x_0)) + d(f^{m+1}(x_0), x) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} \varepsilon_i + d(f^{m+1}(x_0), x). \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq N$ je $\varepsilon_m \leq \varepsilon$. Prema tome vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} \varepsilon_i &= \sum_{i=0}^{N} \lambda^{m-i} \varepsilon_i + \sum_{i=N+1}^{m} \lambda^{m-i} \varepsilon_i \\ &\leq \lambda^{m-N} \sum_{i=0}^{N} \lambda^{N-i} \varepsilon_i + \varepsilon \sum_{i=N+1}^{m} \lambda^{m-i} \end{aligned}$$

Stoga,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} \varepsilon_i \leq \varepsilon \Big(\frac{\lambda^{N+1}}{1-\lambda} \Big).$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, a $\lim\limits_{m\to\infty} d(f^{m+1}(x_0), x) = 0$ zaključujemo da je $\lim\limits_{m\to\infty} y_{m+1} = x$. $\square$

Sljedeći teorem daje vezu između funkcije koja je kontrakcija i postojanja jedinstvene fiksne točke. Naime, za postojanje jedinstvene fiksne točke dovoljno je za pretpostaviti da je f funkcija takva da je f^N kontrakcija.

Teorem 9. *([4]) Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Pretpostavimo da je $f : X \to X$ preslikavanje za koje je f^N kontrakcija za neke pozitivne brojeve N. Tada f ima jedinstvenu fiksnu točku.*

Dokaz. Po Banachovom teoremu f^N ima jedinstvenu fiksnu točku x pa vrijedi

$$f^{N+1}(x) = f(f^N(x)) = f(x).$$

Iz toga slijedi da je $f(x)$ također fiksna točka od f^N. Kako je fiksna točka jedinstvena, onda mora vrijediti da je $f(x) = x$. Također, ako je $f(y) = y$, onda je $f^N(y) = y$ pa zbog jedinstvenosti fiksne točke slijedi da je $x = y$. $\square$

Sljedeći teorem govori pod kojim uvjetima će postojati jedinstvena fiksna točka nekog preslikavanja ako su na metričkom prostoru definirane dvije metrike.

Teorem 10. *([4]) Neka je X metrički prostor na kojem su definirane metrike d i ρ takve da za svaki $x, y \in X$ vrijedi $\rho(x, y) \leq d(x, y)$. Neka je (X, ρ) potpun, a preslikavanje $f : X \to X$ neprekidno s obzirom na metriku ρ i kontrakcija s obzirom na metriku d. Tada preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu točku iz X.*

Definicija 13. *Neka je X metrički prostor. Za potprostor $K \subseteq X$ kažemo da je kompaktan ako svaki niz (x_n) u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K.*

Teorem 11. *([4]) Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i $f : X \to X$ kotrakcija. Tada f ima jedinstvenu fiksnu točku x, i za svaki $x_1 \in X$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f^n(x_1) = x$.*

Dokaz. Uvedimo preslikavanje $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ za koje vrijedi

$$\psi(x_1) = d(x_1, f(x_1)), \ x_1 \in X.$$

Tada je ψ neprekidna i omeđena pa pretpostavimo da je njen minimum u nekoj točki $x \in X$. Kako je $x \neq f(x)$ vrijedi da je

$$\psi(f(x)) = d(f(x), f^2(x)) < d(x, f(x)) = \psi(x).$$

Prethodni izraz vrijedi samo u slučaju kada je $x = f(x)$. Neka je $x_1 \in X$ te promotrimo niz $(d(f^N(x_1), x))$. Ako je $f^N(x_1) \neq x$ vrijedi

$$d(f^{n+1}(x_1), x) = d(f^{n+1}(x_1), f(x)) \leq d(f^N(x_1), x),$$

pa je niz $(d(f^N(x_1), x))$ strogo padajući. Zbog toga limes

$$r = \lim_{n\to\infty} d(f^N(x_1), x)$$

postoji i $r \geqslant 0$. Iz kompaktnosti prostora X slijedi da niz $((f^N(x_1))$ ima konvergentan podniz $(f^{n_k}(x_1))$ čiji je limes $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_1) = z \in X$. Kako je $((f^n(x_1))$ padajući niz,

$$r = d(z, x) = \lim_{k\to\infty} d(f^{n_k}(x_1), x) = d(f(z), x).$$

Ako je $z \neq x$ onda je $d(f(z), x) = d(f(z), f(x)) < d(z, x)$. To dokazuje da bilo koji konvergentan podniz od $(f^n(x_1))$ konvergira k x, pa to mora biti i slučaj kada je $\lim_{n\to\infty} f^n(x_1) = x$. $\square$

3 Primjene Banachovog teorema o fiksnoj točki

U ovome poglavlju navest ćemo neke primjene Banachovog teorema.

3.1 Dokaz Picardovog teorema za rješenje diferencijalnih jednadžbi

Teorem 12. *([1]) Ako je funkcija $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ takva da je*

$$|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leq M|v1 - v2|,$$

gdje je M konstanta, tada za početni uvjet

$$y(x_0) = y_0, \tag{16}$$

postoji okolina $U(x_0)$ točke $x_0 \in \mathbb{R}$ i jedinstvena funckija $y = y(x)$ definirana na $U(x_0)$ koja zadovoljava jednadžbu

$$y' = f(x, y) \tag{17}$$

i početni uvjet $y(x_0) = y_0$.

Dokaz. Jednadžbu (16) i uvjet (17) možemo napisati u sljedećem obliku

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{18}$$

Desnu stranu prethodne jednakosti označimo s $A(y)$. Tada je $A : C(V(x_0), \mathbb{R}) \to C(V(x_0), \mathbb{R})$, gdje je $C(V(x_0), \mathbb{R})$ skup neprekidnih funkcija definiranih na okolini $V(x_0)$ od x_0. Kako je $C(V(x_0), \mathbb{R})$ metrički prostor s uniformnom metrikom vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} d(Ay_1, Ay_2) &= \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \right| \\ &\leq \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|dt \right| \\ &\leq M|x - x_0| d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $|x - x_0| \leq \frac{1}{2M}$. Tada je nejednakost

$$d(Ay_1, Ay_2) \leq \frac{1}{2} d(y_1, y_2)$$

ispunjena na odgovarajućem zatvorenom intervalu I, gdje je

$$d(y_1, y_2) = \max_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Iz toga slijedi da je

$$A : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$$

kontrakcija potpunog metričkog prostora $(C(I, \mathbb{R}), d)$ u sebe sama pa prema Banachovom principu mora imati jedinstvenu fiksnu točku $y = Ay$. $\square$

Primjer 6. *Pomoću prethodnog teorema pronađimo riješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$ uz početni uvjet $y(x_0) = y_0$. U ovom primjeru princip možemo primjeniti za barem*

$|x - x_0| \leq q < 1$. Krećemo od početne aproksimacije $y(x) \equiv 0$ te konstruiramo niz aproksimacija $0, y_1 = A(0), \ldots, y_{n+1}(t) = A(y_n(t)), \ldots,$ gdje je

$$A(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(t)dt.$$

Dobivamo sljedeće

$$\begin{array}{ccc} y_1(t) & = & y_0 \\ y_2(t) & = & y_0(1 + (x - x_0)), \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & , \\ y_{n+1} & = & y_0(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n), \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \end{array}$$

iz čega je očito da je $y(x) = y_0 e^{x - x_0}$ rješenje naše početne jednadžbe.

3.2 Newtonova metoda za pronalaženje nultočke jednadžbe f(x)=0

Neka je f realna konveksna funkcija definirana na segmentu $[a, b]$ za koju vrijedi sljedeće:

1) f ima pozitivnu derivaciju na $[a, b]$

2) f na rubovima segmenta $[a, b]$ poprima vrijednosti suprotnog predznaka tj. vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Tada postoji jedinstvena točka ξ iz segmenta $[a, b]$ za koju vrijedi da je $f(\xi) = 0$. Kako bi pronašli tu točku koristit ćemo se Newtonovom[4] metodom ili metodom tangenti koja kaže sljedeće: uzmimo početnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$ te razvijmo funkciju f u Taylorov[5] red u okolini točke x_0. Zadržimo li se samo na linearnom članu tada smo funkciju f u okolini točke x_0 aproksimirali linearnom funkcijom

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

čiji graf je tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$. Zatim pronađemo točku

$$x_1 = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_0)$$

u kojoj tangenta sijeće x os. S x_1 označimo prvu aproksimaciju naše nultočke ξ te navedeni postupak ponovimo zamjenjujući x_0 s x_1. Na taj način dobivamo niz točaka

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n) \tag{19}$$

[4]Isaac Newton(1642.-1717.), engleski fizičar, matematičar i astronom
[5]Brook Taylor(1685.-1731.), engleski matematičar

koji monotono teži k nultočki ξ.
Primjerice, ako je $f(x) = x^k - \xi$ tada tražimo nultočku oblika $\sqrt[k]{\xi}$, $\xi > 0$ pa izraz (19) ima sljedeći oblik

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - \xi}{k x_n^{k-1}},$$

koj za $k = 2$ postaje poznati izraz

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{\xi}{x_n}).$$

Ako niz (19) zamjenimo nizom

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_n)$$

tada se gornja metoda naziva modificirana Newtonova metoda.

Pogledajmo sada preslikavanje $x \to A(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x)$. Iz Lagrangeovog[6] teorema slijedi

$$|A(x_2) - A(x_1)| = |[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(\varepsilon)| \cdot |x_2 - x_1|,$$

gdje je ε točka koja leži između x_1 i x_2. Ako vrijede uvjeti $A(I) \subset I$ i

$$|[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(x)| \leq q < 1$$

na nekom zatvorenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$ onda je preslikavanje $A : I \in I$ definirano s

$$x \to A(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x)$$

kontrakcija na I te postoji jedinstvena fiksna točka u I. Uočimo da je uvjet $A(\xi) = \xi$ ekvivalentan uvjetu $f(\xi) = 0$. Dakle, kada uvjeti $A(I) \subset I$ i $|[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(x)| \leq q < 1$ vrijede za neku funkciju f tada modificirana Newtonova metoda konvergira prema nultočki $x = \xi$ funkcije f pomoću kontrakcijskog principa.

3.3 Riješavanje Volterrovih integralnih jednadžbi

Zanima nas postojanje rješenja sljedeće Volterrove[7] integralne jednadžbe ([3])

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_\Omega F(t,x,s,y,u(s,y))dyds, (t,x) \in D, \tag{20}$$

gdje $f : D \to \mathbb{R}^N$, $F : D \times D \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $D = [0,T] \times \Omega, T > 0$ i Ω neprazan, omeđen i zatvoren posdkup Euklidskog prostora $\mathbb{R}^N$ s uobičajnom euklidskom normom $|| \cdot ||$.

Neka je S skup svih funkcija $\phi : D \to \mathbb{R}^N$, koje su neprekidne na D i zadovoljavaju sljedeći uvjet

$$||\phi(t,x)|| = O(\exp(\mu(t + ||x||))), (t,x) \in D, \tag{21}$$

[6]Joseph-Louis Lagrange(1736.-1813.), talijanski matematičar i astronom
[7]Vito Volterra(1860.-1940.), talijanski matematičar i fizičar

gdje je $\mu > 0$ konstanta. U prostor S uvedemo uniformnu normu zadanu s:

$$|\phi| = \sup_{(t,x)\in D} [||\phi(t,x)|| \exp(-\mu(t + ||x||))], \phi \in S.$$

Tada je $(S, |\cdot|)$ Banachov prostor [8]. Iz (21) slijedi da postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$||\phi(t,x)|| \leq M \exp(\mu(t + ||x||),\ (t,x) \in D.$$

Stoga imamo sljedeće

$$|\phi| \leq M, \phi \in S. \tag{22}$$

Jednadžbu (20) promatramo pod sljedećim pretpostavkama:

(A1) Preslikavanja $f : D \to \mathbb{R}^N$ i $F : D \times D \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ su neprekidna.

(A2) Postoji funkcija $h : D \times D \to [0, \infty)$ takva da vrijedi

$$||F(t,x,s,y,u_1) - F(t,x,s,y,u_2)|| \leq h(t,x,s,y)||u_1 - u_2||,\ \forall (t,x,s,y,u_i) \in D \times D \times \mathbb{R}^N, i = 1,2.$$

(A3) Postoji konstanta $Q \in (0,1)$ takva da

$$\int_0^t \int_\Omega h(t,x,s,y) \exp(\mu(s + ||y||)) dyds \leq Q \exp(\mu(t + ||x||)),\ (t,x) \in D.$$

(A4) Postoji konstanta $N > 0$ takva da

$$||f(t,x)|| + \int_0^t \int_\Omega ||F(t,x,s,y,0)|| dyds \leq N \exp(\mu(t + ||x||)),\ (t,x) \in D.$$

Sada imamo sljedeće:

Teorem 13. *(vidi [3]) Pod pretpostavkama (A1) − (A4) , (20) ima jedinstveno rješenje $u^* \in S$. Štoviše, za svaki $u_0 \in S$, Picardov[9] niz (u_n) definiran s*

$$u_{n+1}(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_\Omega F(t,x,s,y,u_n(s,y)) dyds,\ (t,x) \in D$$

kovergira u normu $|\cdot|$ prema u^*.

Dokaz. Neka je

$$(Tu)(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_\Omega F(t,x,s,y,u(s,y)) dyds,\ u \in S,\ (t,x) \in D.$$

Trebamo pokazati da T preslika S u samog sebe. Neka je u elemnt iz S. Lako je za uočiti da je $Tu : D \to \mathbb{R}^N$ neprekidno preslikavanje. Trebamo provjeriti da li je zadovoljen uvjet (21). Koristeći se danim pretpostavkama, za sve $(t,x) \in D$, imamo

[8] za dokaz pogledati Czerwik, S., Special solutions of a functional equation, Ann. Polon. Math., 31 (1975), 141-144.

[9] Charles Émile Picard(1856.-1941.), francuski matemamtičar

$$\begin{aligned}
||(Tu)(t,x)|| &\leq ||f(t,x)|| + \int_0^t \int_\Omega ||F(t,x,s,y,u(s,y))||dyds \\
&\leq ||f(t,x)|| + \int_0^t \int_\Omega ||F(t,x,s,y,u(s,y)) - F(t,x,s,y,0))||dyds + \\
\int_0^t \int_\Omega ||F(t,x,s,y,0)||dyds & \\
&\leq \int_0^t \int_\Omega h(t,x,s,y)||u(s,y)||dyds + N\exp(\mu(t+||x||)) \\
&\leq M\int_0^t \int_\Omega h(t,x,s,y)\exp(\mu(s+||y||))dyds + N\exp(\mu(t+||x||)) \\
&\leq (MQ+N)\exp(\mu(t+||x||)).
\end{aligned}$$

Uvjet (21) je zadovoljen te je preslikavanje T dobro definirano. Provjeravamo da li je preslikavanje T kontrakcija. Neka su $(u,v) \in S$. Za sve $(t,x) \in S$ imamo

$$\begin{aligned}
||(Tu-Tv)(t,x)|| &\leq \int_0^t \int_\Omega ||F(t,x,s,y,u(s,y)) - F(t,x,s,y,v(s,y)))||dyds \\
&\leq \int_0^t \int_\Omega h(t,x,s,y)||u(s,y)-v(s,y)||dyds \\
&\leq \Big(\int_0^t \int_\Omega h(t,x,s,y)\exp(-\mu(t+||x||))dyds\Big)|u-v| \\
&\leq Q\exp(\mu(t+||x||))|u-v|. \qquad (23)
\end{aligned}$$

Stoga je,

$$||(Tu-Tv)(t,x)||\exp(-\mu(t+||x||)) \leq Q|u-v|.$$

Dakle,

$$|Tu-Tv| \leq Q|u-v|, (u,v) \in S \times S$$

Sada, po Banachovom teoremu o fiksnoj točki, preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu točku $u^* \in S$. Štoviše, za svaki $u_0 \in S$, Picardov niz $(T^n u_0)$ konvergira k u^* u $(S, |\cdot|)$. To upotpunjuje dokaz teorema. □

Literatura

[1] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer, 2016.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[3] P. Agarwal, M. Jleli, B. Sammet, *Fixed Point Theory in Metric Spaces* , Springer, 2018.

[4] M.A Khamsi, W.A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory* , John Wiley and Sons, Kanada, 2001.

[5] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF, Zagreb, 2002.

[6] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Sveučilište u Osijeku-Odjel za Matematiku, Osijek, 2015.

[7] D. Bakić, *Normirani prostori*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2016.