

# Graf hiperkocke

---

**Klarić, Martina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:542918>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2021-01-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Mathematics Osijek](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij Financijske matematike i statistike

Martina Klarić  
*Graf hiperkocke*

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij Financijske matematike i statistike

Martina Klarić  
*Graf hiperkocke*

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2020.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi teorije grafova</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Hiperkocka</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Elementarna svojstva hiperkocke</b>	<b>9</b>
4.1	Broj vrhova i bridova, regularnost . . . . .	9
4.2	Vršna i bridna povezanost . . . . .	9
4.3	Bipartitnost, kromatski i bridno kromatski broj . . . . .	10
4.4	Dijametar i Wienerov indeks . . . . .	12
4.5	Hamiltonov i Eulerov graf . . . . .	13
4.5.1	Broj Hamiltonovih ciklusa . . . . .	14
4.6	Bipancikličnost hiperkocke . . . . .	16
4.7	Savršeno sparivanje . . . . .	17
4.8	Planarnost i genus . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Podgrafovi hiperkocke</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Spektar hiperkocke</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Grupa automorfizama od <math>Q_n</math></b>	<b>27</b>
<b>8</b>	<b>Nezavisni i dominacijski skupovi, pokrivači</b>	<b>29</b>
<b>9</b>	<b>Smještenje grafova na hiperkocku</b>	<b>33</b>
9.1	Izomorfno smještenje . . . . .	33
9.2	Izometrijsko smještenje . . . . .	38
	<b>Literatura</b>	<b>42</b>
	<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>44</b>
	<b>Title, summary and keywords</b>	<b>45</b>
	<b>Životopis</b>	<b>46</b>

# 1 Uvod

Značajnim napretkom tehnologije povećan je i interes za hiperkockama. Naime, sve je više superračunala koja pri radu koriste više procesora, što znači i mogućnost paralelnog izvršavanja većeg broja zadataka. Svaki procesor obavlja određene zadatke i komunicira sa svojom internom memorijom, ali i s ostalim procesorima i njihovim memorijama. Radi brže komunikacije, procesori su najčešće povezani u obliku hiperkocke (vrhovi predstavljaju procesore zajedno s lokalnim memorijama, a bridovi komunikacijske kanale). Poželjno je da gubitak vremena u komunikaciji između procesora i pristupu podacima bude što je moguće manji, gdje su od velike važnosti visoka povezanost i mali dijametar hiperkocke. Također, visoka povezanost i regularnost osiguravaju normalan rad ostalih procesora u slučaju da dođe do kvara na jednom ili više njih. Nadalje, zbog mogućnosti definiranja hiperkocke rekursivno Kartezijevim produktom potpunog grafa s dva vrha i hiperkocke manje dimenzije, hiperkocka podržava algoritam rekursivnog raščlanjivanja problema na dva ili više manjih problema, sve dok ne postanu jednostavni toliko da ih se može direktno riješiti. Vezano za procesore, to znači da se jedan veliki problem može podijeliti na nekoliko različitih jednostavnih potproblema koje će izvršavati različiti procesori. Također, ovakav način podjele problema ili zadataka možemo promatrati u okviru podkocki koje će biti opisane u radu, na način da nekoliko procesora (ovisi koliko vrhova ima podkocka koju promatramo) zajednički obavlja neki manji problem, odnosno zadatak. Vrlo važno svojstvo je i mogućnost smještenja velikog broja grafova na hiperkocku, posebice mreža raznih dimenzija i stabala, koje će biti objašnjeno u posljednjem poglavlju, a znači da se algoritmi prilagođeni računalima takve strukture mogu lako implementirati u hiperkocki. Na početku rada navedeni su neki osnovni pojmovi iz teorije grafova, kao i precizna definicija hiperkocke. Nadalje, opisana su najpoznatija i najkorisnija svojstva hiperkocki, a na samom kraju rada opisan je problem smještenja određenih grafova na hiperkocku.

## 2 Osnovni pojmovi teorije grafova

U ovom odjeljku definirat ćemo neke osnovne pojmove iz područja teorije grafova te ćemo navesti neke tvrdnje koje će za svrhu imati lakše razumijevanje rada. Krenut ćemo s definicijom grafa.

**Definicija 2.1.** Graf  $G$  je uređena trojka  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  nepraznog skupa  $V(G)$  vrhova od  $G$ , skupa bridova  $E(G)$  koji je disjunktan s  $V(G)$  te funkcije incidencije  $\psi_G$  koja svakom bridu od  $G$  pridružuje neuređeni par vrhova od  $G$ .

Neki brid može spajati vrh sa samim sobom. U tom slučaju govorimo o *petlji*. Također, neka dva različita vrha mogu biti spojena s više bridova. Tada govorimo o *višestrukim bridovima*. Grafovi koji sadrže i petlje i višestruke bridove nazivaju se *pseudografovi*, a oni koji ne sadrže petlje ni višestruke bridove zovu se *jednostavni grafovi*. U ovome radu baviti ćemo se grafovima koji će uglavnom biti jednostavni.

**Definicija 2.2.** Šetnja u grafu  $G$  je netrivialan konačan niz

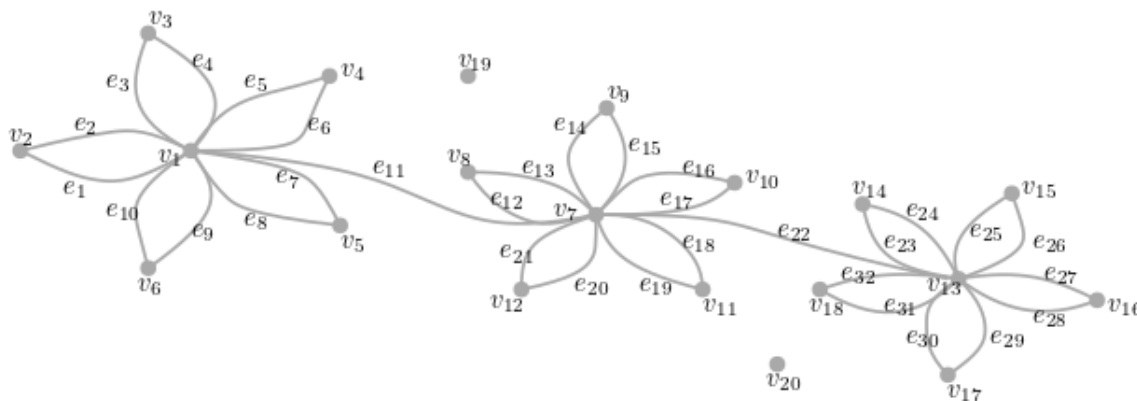
$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k,$$

čiji su članovi naizmjenice vrhovi  $v_i$  i bridovi  $e_i$ , tako da su krajevi od  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$  za svako  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Duljina šetnje je broj bridova koji se u njoj pojavljuju. Duljina šetnje  $W$  iz prethodne definicije jednaka je  $k$ . Šetnja je zatvorena ako počinje i završava u istom vrhu. Ako su svi bridovi u šetnji  $W$  međusobno različiti, onda je  $W$  *staza*. Put  $P_k$  je šetnja duljine  $k$  u kojoj su svi vrhovi i bridovi međusobno različiti. Zatvorenu šetnju duljine  $k$  u kojoj su svi vrhovi osim početnog i krajnjeg međusobno različiti, zovemo *ciklus* i označavamo s  $C_k$ . Duljina najkraćeg ciklusa u grafu  $G$  zove se *struk grafa* i označava se s  $g(G)$ . Udaljenost  $d_G(u, v)$  dvaju vrhova  $u$  i  $v$  u grafu  $G$  je duljina najkraćeg  $(u, v)$ -puta u  $G$ . Dijametar grafa  $G$ , u oznaci  $diam(G)$ , je najveća udaljenost među vrhovima grafa  $G$ , odnosno duljina puta najveće duljine u  $G$ .

Ako je bridu  $e$  pridružen par vrhova  $u, v$ , onda kažemo da je vrh  $u$  ( $v$ ), incidentan bridu  $e$ . U jednostavnom grafu *stupanj*  $d_G(v)$  vrha  $v$  grafa  $G$  definiramo kao broj bridova incidentnih s  $v$ , a za vrhove  $u$  i  $v$  kažemo da su susjedni. Izolirani vrh je vrh čiji je stupanj nula, tj. ne postoji brid s kojim je incidentan.

**Definicija 2.3.** Graf  $G$  je *povezan* ako  $d_G(u, v) < \infty \forall u, v \in V(G)$ . U suprotnom kažemo da je  $G$  *nepovezan*.

Slika 1: Primjer nepovezanog multigrafa  $G$ 

Na slici 1 prikazan je nepovezan multigraf  $G$  sa skupom vrhova  $V(G) = \{v_1, \dots, v_{19}, v_{20}\}$  i skupom bridova  $E(G) = \{e_1, \dots, e_{31}, e_{32}\}$ . Primijetimo da  $G$  nije povezan jer sadrži izolirane vrhove  $v_{19}$  i  $v_{20}$ . Nadalje, "latice" koje vidimo na slici su ciklusi  $C_2$ . Navedimo primjere šetnje, puta i ciklusa u  $G$ :

$$W_5 = v_2 e_1 v_1 e_5 v_4 e_6 v_1 e_{11} v_7 e_{17} v_{10},$$

$$P_4 = v_5 e_7 v_1 e_{11} v_7 e_{22} v_{13} e_{29} v_{17},$$

$$C_2 = v_7 e_{16} v_{10} e_{17} v_7.$$

U nastavku ćemo se navesti neke vrste grafova koje ćemo koristiti u radu. Jednostavan povezan graf koji ne sadrži cikluse naziva se *stablo*. *Korijensko stablo* je stablo u kojem je jedan vrh istaknut kao početni i zove se korijen. *Binarno stablo* je usmjerenno korijensko stablo<sup>1</sup> u kojemu za svaki vrh postoje najviše dva brida kojima je taj vrh početni. Visina stabla je broj bridova na putu od korijena do najdubljeg lista<sup>2</sup>. Oznaka za binarno stablo visine  $h$  je  $T_h^{(2)}$ .

Za graf kažemo da je *k-partitan* ako mu se skup vrhova može particionirati u  $k \geq 1$  skupova tako da nijedan brid nema oba kraja u istoj particiji.

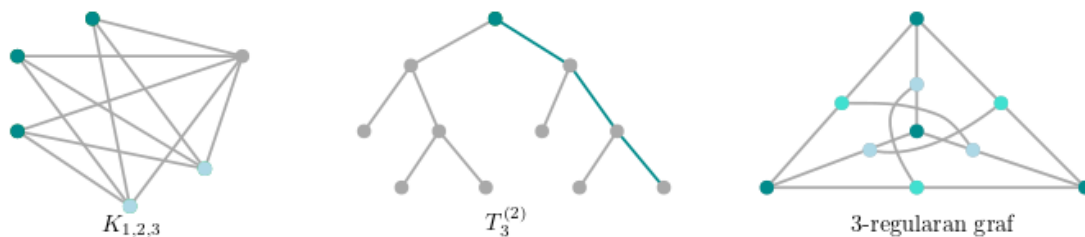
Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom zove se *potpun graf*. Potpun graf s  $n$  vrhova označavamo s  $K_n$ .

*Potpun k-partitan graf* je jednostavan  $k$ -partitan graf s najvećim brojem bridova.

<sup>1</sup>Usmjereni graf je onaj u kojemu svaki brid ima smjer, odnosno jedan kraj brida je početni vrh, a drugi kraj je krajnji vrh.

<sup>2</sup>List je vrh stupnja jedan. Dubina nekog vrha je broj bridova na putu od tog vrha do korijena

Graf je  $k$ -regularan ako mu je stupanj svakog vrha jednak  $k$ . Graf je regularan ako je  $k$ -regularan za neko  $k$ . Svaki potpun graf s  $n$  vrhova je  $(n - 1)$ -regularan graf. Kubični graf je 3-regularan graf. Na slici 2 prikazan je potpun 3-partitan graf  $K_{1,2,3}$  pri čemu su istom bojom obojeni vrhovi koji pripadaju istoj particiji. U sredini se nalazi binarno stablo  $T_3^{(2)}$  s 11 vrhova među kojima je 6 listova. Plavi vrh je korijenski, a visina stabla je 3. Posljednji graf na slici je kubični graf.



Slika 2: Neki specijalni grafovi

**Definicija 2.4.** Graf  $H$  je podgraf od  $G$  i pišemo  $H \subseteq G$ , ako je  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$ , a funkcija  $\psi_H$  je restrikcija od  $\psi_G$  na  $E(H)$ .

Ako je  $H$  podgraf od  $G$  i  $H \neq G$ , onda je  $H$  pravi podgraf od  $G$  u oznaci  $H \subset G$ . Podgraf grafa  $G$  zove se razapinjujući podgraf od  $G$  ako ima jednak broj vrhova kao i  $G$ . Podgrafove od  $G$  možemo dobiti uklaňanjem nekih vrhova ili bridova iz  $G$ . Pritom treba naglasiti da uklaňanje vrha iz grafa za posljedicu ima uklaňanje svih bridova incidentnih tome vrhu. Neka je  $V' \subseteq V(G)$ ,  $V' \neq \emptyset$ . Podgraf  $H$  od  $G$  čiji je skup vrhova  $V'$  i za koji vrijedi

$$\forall u, v \in V(H), uv \in E(H) \Leftrightarrow uv \in E(G)$$

zove se *inducirani podgraf* od  $G$  i označava se s  $G[V']$ .

Posebni tipovi induciranih podgrafova nekog grafa su klike. *Klika* u grafu  $G$  je svaki podgraf od  $G$  koji je potpun, drugim riječima svaki podgraf od  $G$  u kojem su svaka dva vrha spojena bridom.

Svakom grafu možemo particionirati skup vrhova  $V$  na skupove  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tako da su dva vrha  $u, v \in V$  povezana u  $G$  ako i samo ako postoji neki  $i \in \{1, \dots, n\}$  takav da vrijedi  $u, v \in V_i$ . Inducirani podgrafovi  $G[V_1], \dots, G[V_n]$  zovu se *komponente povezanosti* grafa  $G$ . To su ujedno i maksimalni povezani podgrafovi tog grafa.



Spomenimo još neke važne definicije vezane uz povezanost grafa. Za graf  $G$  kažemo da je  $k$ -povezan ako je podgraf dobiven uklanjanjem manje od  $k$  vrhova iz  $G$  povezan graf. Primjerice, kubični graf na slici 2 je 3-povezan.

*Vršna povezanost* grafa  $G$  je najmanji broj vrhova koje je potrebno ukloniti iz  $G$  da bi on postao nepovezan ili trivijalan<sup>3</sup>. Vršnu povezanost grafa  $G$  označavamo s  $\kappa(G)$ . Uočimo da za graf  $G$  na slici 1 vrijedi  $\kappa(G) = 0$  s obzirom da je  $G$  nepovezan. Ako bismo zanemarili izolirane vrhove i označili novi graf s  $G'$ , onda bi vrijedilo  $\kappa(G') = 1$ , jer bi izbacivanjem vrha  $v_1$  graf postao nepovezan.

*Bridna povezanost* grafa  $G$  je najmanji broj bridova koje je potrebno ukloniti iz  $G$  kako bi on postao nepovezan ili trivijalan (oznaka  $\kappa'(G)$ ). Na primjeru grafa  $K_{1,2,3}$  (slika 2) možemo vidjeti kako će uklanjanjem svih bridova incidentnim s jednim vrhom iz zelene particije graf postati nepovezan, tj.  $\kappa'(G) = 3$ .

---

<sup>3</sup>Trivijalan graf je graf s točno jednim vrhom i niti jednim bridom.

### 3 Hiperkocka

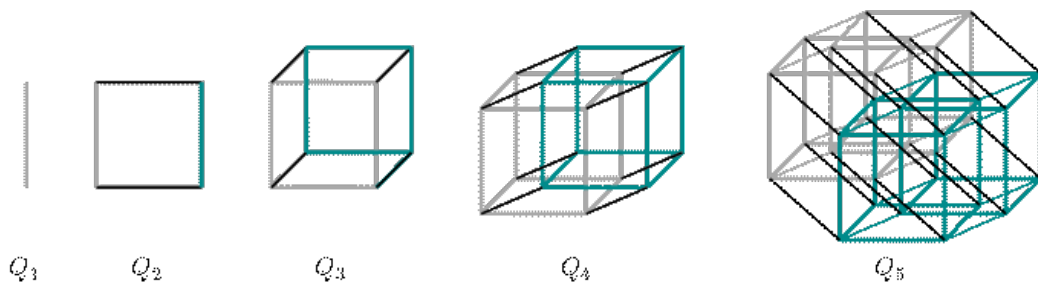
U području geometrije, hiperkocku smatramo  $n$ -dimenzionalnim analogonom kvadrata ( $n = 2$ ), odnosno kocke ( $n = 3$ ). Radi se, dakle, o višedimenzionalnom objektu kojeg je teško zamisliti u 4 ili više dimenzija s obzirom da živimo u trodimenzionalnom (3D) prostoru. Znamo da u 2D prostoru kroz jednu točku možemo povući najviše dva međusobno okomita pravca. U 3D prostoru možemo odabrati neku točku  $O$  i kroz nju provući tri međusobno okomita pravca. Svaka naša pozicija može se odrediti pomoću tri koordinate koje obično označavamo s  $x$ ,  $y$  i  $z$ , tj. pozicija je uređena trojka brojeva  $(x, y, z)$ , pri čemu je pozicija točke  $O$  uređena trojka  $(0, 0, 0)$ . Pokušajmo si sada zamisliti da u prostoru u kojem smo kroz jednu točku povukli tri međusobno okomita pravca  $x$ ,  $y$  i  $z$  istom točkom provučemo i četvrti pravac  $w$  okomit na ova tri. U ovakvom prostoru, svaku našu poziciju mogli bismo odrediti uređenom četvorkom brojeva  $(x, y, z, w)$  i to bi bio 4D prostor. Slično bismo definirali proizvoljan  $n$ D prostor.

Pokušajmo sada objasniti strukturu hiperkocke u proizvoljnom  $n$ D prostoru,  $n \geq 0$ . U 0D prostoru hiperkocka je jedinstvena točka. U 1D prostoru, hiperkocka je segment. U ravnini, dakle u 2D prostoru, to će biti kvadrat, odnosno površina omeđena s četiri 1D hiperkocki, tj. sukladnih segmenata. U 3D prostoru imat ćemo kocku, volumen omeđen sa šest kvadrata, odnosno 2D hiperkocki od kojih je svaka preko četiri 1D hiperkocki spojena s četiri druga kvadrata. U 4D prostoru hiperkocku ćemo zvati još i *teserakt* (prijevod sa starogrčkog jezika: "četiri zrake") koja je tijelo sastavljeno od osam 3D hiperkocki, od kojih svaka pomoću svojih šest kvadratnih stranica dodiruje po šest drugih 3D hiperkocki. Možemo reći da se teserakt odnosi prema kocki kao kocka prema kvadratima, odnosno kao kvadrati prema segmentima. Ova pojašnjenja služe za shvaćanje  $n$ D hiperkocke  $n \geq 1$  kao objekta sastavljenih od hiperkocki nižih dimenzija.

U ovome radu govorit ćemo o **grafu hiperkocke** kao 1 – *skeletonu* hiperkocke. 1-skeleton nekog  $n$ -dimenzionalnog objekta je *topološki graf* tog objekta, tj. reprezentacija tog objekta u ravnini tako da su mu vrhovi predstavljeni točkama ravnine, a bridovi Jordanovim lukovima koji spajaju parove tih točaka. Na ovaj način smo se iz geometrije i geometrijskog shvaćanja hiperkocke pomakli u područje teorije grafova.

U nastavku rada graf hiperkocke ćemo radi jednostavnosti zvati  $n$ -dimenzionalnom hiperkockom, odnosno kraće  $n$ -kockom i označavat ćemo ju s  $Q_n$ ,  $n \geq 0$ .

Na slici 3 za  $n \geq 2$ , sivom i plavom bojom su označene  $(n - 1)$ -kocke

Slika 3: Hiperkocke  $Q_n$  za  $n = 1, \dots, 5$ 

$Q_{n-1}$  koje se pojavljuju u  $Q_n$  kao njeni podgrafovi, a crnom bojom označeni su bridovi koji spajaju te dvije kopije. Iz ovakvog prikaza je jasno da se  $Q_n$ ,  $n \geq 1$  sastoji od dvije kopije  $(n-1)$ -kocki, pri čemu je svaki vrh jedne kopije spojen bridom sa odgovarajućim vrhom iz druge kopije.

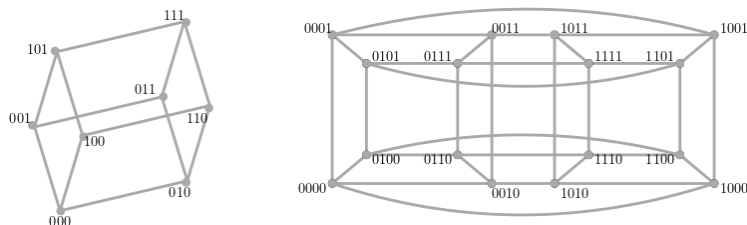
Prije nego formalno definiramo  $n$ -kocku, potrebno je uvesti određene oznake i pojmove. Neka je  $e_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  jedinični vektor u  $\mathbb{Z}_2^n$  s jedinicom na  $i$ -toj koordinati. Za  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ , broj  $d_H(u, v)$  označava *Hammingovu udaljenost* vektora  $u$  i  $v$ , a predstavlja broj koordinata u kojima se ta dva vektora razlikuju:

$$d_H(u, v) = |\{i \in \mathbb{N} | u_i \neq v_i\}|. \quad (1)$$

Slijedi definicija  $n$ -kocke.

**Definicija 3.1.**  $N$ -dimenzionalna hiperkocka  $Q_n$  je neusmjeren graf sa skupom vrhova  $V(Q_n) = \mathbb{Z}_2^n = \{0, 1\}^n$  i skupom bridova  $E(Q_n) = \{uv | u \oplus v = e_i \text{ za neki } i \in \{1, \dots, n\}\} = \{uv | d_H(u, v) = 1\}$ , gdje je  $\oplus$  oznaka za zbrajanje u  $\mathbb{Z}_2^n$ .

Dakle, dva vrha u  $Q_n$  su susjedna ako se odgovarajuće  $n$ -torke razlikuju u točno jednoj koordinati. Sljedeća slika ilustrira ovakav način označavanja vrhova na hiperkockama  $Q_3$  i  $Q_4$ .

Slika 4: Grafovi  $Q_3$  (lijevo) i  $Q_4$  (desno) s označenim vrhovima

$N$ -kocku možemo definirati i pomoću Kartezijevog produkta grafova.

*Kartezijev produkt*  $G \square H$  *grafova*  $G$  i  $H$  je graf sa skupom vrhova  $V(G) \times V(H)$ , pri čemu su dva vrha  $(u, u')$  i  $(v, v')$  susjedna u  $G \square H$  ako i samo ako vrijedi

$$(u = v \text{ i } u' \text{ je susjed s } v') \text{ ili } (u' = v' \text{ i } u \text{ je susjed s } v).$$

Sada  $N$ -dimenzionalnu hiperkocku  $Q_n$ ,  $n \geq 1$ , možemo definirati rekurzivno pomoću Kartezijevog produkta dva grafa kako slijedi:

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_2, \\ Q_2 &= K_2 \square Q_1, \\ &\vdots \\ Q_n &= K_2 \square Q_{n-1}. \end{aligned}$$

## 4 Elementarna svojstva hiperkocke

### 4.1 Broj vrhova i bridova, regularnost

S obzirom da je svaki vrh  $n$ -kocke  $Q_n$  uređena  $n$ -toraka nula i jedinica, broj vrhova u  $Q_n$  jednak je broju svih takvih  $n$ -torki. Dakle, na svaku od  $n$  pozicija možemo staviti 0 ili 1 pa imamo 2 načina za izbor broja na jednoj poziciji. Kako imamo ukupno  $n$  pozicija, prema principu produkta, imamo ukupno  $2^n$  načina za izbor broja na svih  $n$ -pozicija pa dobivamo  $|V(Q_n)| = 2^n$ .

Za brojanje bridova koristit ćemo vrlo jednostavnu i jednu od najosnovnijih tvrdnji iz područja teorije grafova koja kaže da je suma stupnjeva svih vrhova u nekom grafu jednaka dvostrukom broju bridova.

Proizvoljan vrh u  $Q_n$  susjed je svim vrhovima koji se od njega razlikuju u točno jednoj koordinati. To znači da mu je jedan susjed vrh koji se od njega razlikuje u prvoj koordinati, drugi susjed se razlikuje od njega u drugoj koordinati, ...,  $n$ -ti susjed se od njega razlikuje u posljednjoj  $n$ -toj koordinati. Slijedi da je stupanj svakog vrha u  $Q_n$  jednak  $n$ , odnosno  $Q_n$  je  $n$ -regularan graf. Dakle, niz stupnjeva u  $Q_n$  je  $(n, n, \dots, n)$  pa je

$$|E(Q_n)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^n} n = \frac{1}{2} n 2^n = n 2^{n-1}.$$

### 4.2 Vršna i bridna povezanost

Pojam vršne i bridne povezanosti grafa definirali smo u odjeljku 2 pa ćemo ovaj pododjeljak odmah započeti s važnom tvrdnjom koja povezanost grafa dovodi u vezu s najmanjim stupnjem grafa. Najmanji stupanj grafa  $G$  je  $\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ .

**Teorem 4.1.** [Whitney] *Za proizvoljan graf  $G$  vrijedi:*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G). \quad (2)$$

Dokaz teorema 4.1 nalazi se u [22]. Iz njega je jasno da velika povezanost grafova zahtijeva i velik najmanji stupanj, ali obrat ne vrijedi. S obzirom da smo pokazali da je  $Q_n$   $n$ -regularan graf, vrijedi  $\delta(Q_n) = n$  pa imamo:

$$\kappa(Q_n) \leq \kappa'(Q_n) \leq n. \quad (3)$$

Vrijedi puno jača tvrdnja [22]:

**Teorem 4.2.** *Za hiperkocku  $Q_n$  vrijedi*

$$\kappa(Q_n) = \kappa'(Q_n) = n. \quad (4)$$

*Dokaz.* Dokazat ćemo da je  $\kappa(Q_n) = n$ . Time je dokaz teorema završen jer kombiniranjem ove tvrdnje s Whitneyevim teoremom odmah slijedi i  $\kappa'(Q_n) = n$ . Ako iz  $Q_n$  uklonimo  $n$  susjeda nekog proizvoljno odabranog vrha  $v$ , dobit ćemo graf u kojemu je  $v$  izoliran vrh, tj. graf koji je nepovezan. Stoga odmah znamo da vrijedi  $\kappa(Q_n) \leq n$ . Ostaje pokazati  $\kappa(Q_n) \geq n$ . To ćemo učiniti tako da pokažemo da je svaki separacijski skup<sup>4</sup>  $S$  grafa  $Q_n$  kardinalnosti najmanje  $n$ . Koristit ćemo indukciju po  $n$ .

Baza indukcije:  $n \in \{0, 1\}$ . Za  $n \leq 1$ ,  $Q_n$  je potpun graf s  $(n + 1)$  vrhova pa je  $\kappa(Q_n) = n$ .

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $Q_{n-1}$   $n \geq 2$ , tj.  $\kappa(Q_{n-1}) = n - 1$ .

Korak indukcije: Dokažimo tvrdnju za  $Q_n$ . Koristit ćemo strukturu hiperkocke  $Q_n$  kao grafa nastalog od dvije kopije  $(n - 1)$ -kocki  $Q_{n-1}^1$  i  $Q_{n-1}^2$  s dodatnim bridovima koji spajaju svaki vrh iz  $Q_{n-1}^1$  s odgovarajućim vrhom u  $Q_{n-1}^2$ , kao što je vidljivo na slici 3. Neka je  $S$  separacijski skup u  $Q_n$ . Neka su grafovi  $Q_{n-1}^1 - S$  i  $Q_{n-1}^2 - S$  povezani. Tada vrijedi  $|Q_{n-1}^1 \cap S| < n - 1$  i  $|Q_{n-1}^2 \cap S| < n - 1$ . No, zbog  $|S| \leq n$  zaključujemo da je u svakoj kopiji  $(n - 1)$ -kocke najmanje 2, a najviše  $n - 2$  vrhova iz  $S$ . Graf  $Q_n - S$  ostat će povezan osim ako  $S$  ne sadrži barem jedan kraj (vrh) svakog od bridova koji spajaju  $Q_{n-1}^1$  i  $Q_{n-1}^2$ . Takav slučaj zahtijeva  $|S| \geq 2^{n-1}$ , a lako se provjeri da za  $n \geq 2$  vrijedi nejednakost  $2^{n-1} \geq n$ . Zaključujemo  $|S| \geq n$ . Ako pretpostavimo da npr.  $Q_{n-1}^1 - S$  nije povezan, onda prema pretpostavci indukcije znamo da  $S$  sadrži najmanje  $n - 1$  vrhova koji su u  $Q_{n-1}^1$ . Ako  $S$  ne sadrži vrhove iz  $Q_{n-1}^2$ , onda je  $Q_{n-1}^2 - S$  povezan i svi vrhovi grafa  $Q_{n-1}^2 - S$  imaju susjedne vrhove u  $Q_{n-1}^2 - S$ , što znači da je  $Q_n - S$  povezan graf. Prema tome,  $S$  mora sadržavati i vrhove iz  $Q_{n-1}^2$  pa mora vrijediti  $|S| \geq n$ , što je i trebalo dokazati.  $\square$

### 4.3 Bipartitnost, kromatski i bridno kromatski broj

U odjeljku 2 smo definirali  $k$ -partitan graf. Ukoliko je  $k = 2$ , za takav graf kažemo još da je i *bipartitan*. Dakle, to je graf čiji se skup vrhova može particionirati u dva podskupa tako da svaki brid ima krajeve koji se nalaze u različitim particijama.

Pokazat ćemo da je  $Q_n$  bipartitan graf. Za proizvoljan vrh iz  $Q_n$  ćemo reći da je paran (neparan) ako je suma njegovih koordinata paran (neparan) broj. Svojstvo bipartitnosti grafa  $Q_n$  možemo pokazati na nekoliko načina. Najjednostavniji način je onaj koji ne koristi nikakve pomoćne tvrdnje, tj. treba

<sup>4</sup>Separacijski skup ili vršni rez grafa  $G$  je podskup  $S \subset V(G)$  takav da je  $G - S$  nepovezan graf. Ukoliko je  $|S| = k$ , govorimo o  $k$ -vršnom rezu.

samo "na pametan način" biparticionirati skup  $V(Q_n)$ . To možemo tako da u jedan skup biparticije stavimo sve parne, a u drugi skup sve neparne vrhove. U tom slučaju neće biti susjednih vrhova iste parnosti jer bi to podrazumijevalo spajanje bridom neka dva vrha koji se razlikuju u više od jedne koordinate. Primijetimo da su skupovi ovakve biparticije jednakobrojni, tj. u  $Q_n$  imamo polovicu parnih i polovicu neparnih vrhova.

Bipartitnost hiperkocke možemo pokazati i koristeći tvrdnju koja povezuje bipartitnost grafa s egzistencijom neparnih ciklusa u njemu.

**Teorem 4.3.** *Graf  $G$  je bipartitan ako i samo ako ne sadrži cikluse neparne duljine.*

Dokaz teorema može se pronaći u [9].

Treba, dakle, pokazati da  $Q_n$  ne sadrži cikluse neparne duljine. Pretpostavimo suprotno i neka je  $C$  ciklus neparne duljine u  $Q_n$ . Napraviti ćemo obilazak tog ciklusa tako da krenemo iz parnog vrha. Svaki susjed parnog vrha mora biti neparan vrh jer se jedino u tom slučaju vrhovi mogu razlikovati u točno jednoj koordinati. Stoga ćemo iz parnog vrha bridom doći u neki neparan vrh. Slično, svaki susjed neparanog vrha mora biti paran vrh pa ćemo obilazeći  $C$  naizmjenično posjećivati parne i neparne vrhove. S obzirom da je  $C$  neparne duljine, pri završetku obilaska doći ćemo u situaciju da smo posjetili redom ili dva parna ili dva neparna vrha, odnosno, postojat će brid između dva vrha iste parnosti. No, to je nemoguće jer vrhovi u  $Q_n$  mogu biti spojeni bridom ako i samo ako se razlikuju u jednoj koordinati. Stoga u  $Q_n$  nema neparnih ciklusa pa je  $Q_n$  bipartitan graf.

Spomenimo još i problem bojenja vrhova i bridova hiperkocke. Općenito, problem bojenja nekog grafa odnosi se na postupak dodjeljivanja boja elementima grafa uz određena ograničenja. Prilikom bojenja vrhova grafa svakom vrhu potrebno je pridružiti jednu boju pazeći pritom da susjedni vrhovi nisu obojeni istom bojom. Ako smo na takav način uspjeli obojiti sve vrhove nekog grafa  $G$  koristeći  $k$  boja, onda kažemo da je  $G$   $k$ -bojiv. Minimalan broj  $k$  za koji je graf  $G$   $k$ -bojiv zove se *kromatski broj* grafa  $G$  i označava s  $\chi(G)$ . Sličan problem odnosi se na bojenje bridova grafa. Treba paziti da susjedni bridovi, tj. bridovi incidentni s istim vrhom nisu obojeni istom bojom. Ako smo za takvo bojenje bridova od  $G$  koristili  $k$  boja, onda kažemo da je  $G$   $k$ -bridno bojiv. Najmanji takav  $k$  zovemo *bridno kromatski broj* ili *kromatski indeks* od  $G$  i označavamo ga s  $\chi'(G)$ .

S obzirom da jedino prazan graf<sup>5</sup> ima kromatski broj jednak jedan, za svaki graf  $G$  s najmanje dva brida vrijedi  $\chi(G) \geq 2$ . Iz svojstva bipartitnosti hiperkocke  $Q_n$  lako je ustanoviti da vrijedi  $\chi(Q_n) = 2$ . Dovoljno je sve

<sup>5</sup>Prazan graf je graf koji nema niti jedan brid.

vrhove jednog skupa biparticije obojiti jednom bojom, a preostale vrhove nekom drugom bojom.

Odrediti bridno kromatski broj od  $Q_n$  nije tako jednostavno. Tu treba koristiti Königov teorem čiji se dokaz može pogledati u [9].

**Teorem 4.4.** [König] Za bipartitan graf  $G$  vrijedi  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , pri čemu je  $\Delta(G)$  maksimalan stupanj vrha u grafu.

S obzirom da je  $Q_n$   $n$ -regularan graf, to je  $\Delta(Q_n) = n$  pa je  $\chi'(Q_n) = n$ .

#### 4.4 Dijametar i Wienerov indeks

U ovom pododjeljku bavit ćemo se udaljenostima među vrhovima u  $Q_n$ . Dijametar nekog grafa definirali smo u odjeljku 2 kao najveću udaljenost među vrhovima. Općenito, udaljenost između neka dva vrha  $n$ -kocke jednaka je broju koordinata u kojima se odgovarajuće  $n$ -torke razlikuju. To se lako može dokazati matematičkom indukcijom po  $n$ . Ako izdvojimo neki vrh u  $Q_n$ , njemu najudaljeniji vrh bit će onaj koji se od njega razlikuje u svim koordinatama. Primjerice, ako uzmemo vrh  $(0, \dots, 0)$ , onda postoji put duljine  $n$  do vrha  $(1, \dots, 1)$ :

$$(0, 0, \dots, 0) - (1, 0, \dots, 0) - (1, 1, \dots, 0) - \dots - (1, 1, \dots, 1, 1).$$

Od svih najkraćih puteva između vrhova u  $Q_n$ , ovakav put ima najveću duljinu pa zaključujemo da vrijedi  $\text{diam}(Q_n) = n$ .

U nastavku ćemo odrediti ukupnu udaljenost vrhova u  $n$ -kocki. U literaturi se ta veličina još zove *Wienerov indeks* i označava se s  $W(G)$ :

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_G(u,v).$$

Za računanje Wienerova indeksa opet ćemo se koristiti činjenicom da  $Q_n$  možemo rastaviti na dvije disjunktne  $(n-1)$ -dimenzionalne hiperkocke  $Q_{n-1}^1$  i  $Q_{n-1}^2$  koje su spojene s dodatnih  $2^{n-1}$  bridova. Neka su  $v_i^1 \in V(Q_{n-1}^1)$  i  $v_i^2 \in V(Q_{n-1}^2)$  susjedi, što znači da se razlikuju u točno jednoj koordinati. Označimo ukupnu udaljenost vrhova  $v_i^1$  do svih vrhova grafa  $Q_n$  s

$$d_i^1(Q_n) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} (v_i^1, v_j), \quad i = 1, \dots, 2^{n-1}.$$



Prema prethodnoj oznaci, udaljenost vrha  $v_i^1$  do svih vrhova u  $Q_{n-1}^1$  jednaka je  $d_i^1(Q_{n-1})$ . Nadalje, udaljenost  $v_i^1$  do bilo kojeg vrha  $v_j^2$  iznosi  $d(v_i^2, v_j^2) + 1$ , s obzirom da se vektori pridruženi vrhovima  $v_i^1$  i  $v_j^2$  moraju razlikovati u točno  $d(v_i^2, v_j^2) + 1$  koordinata. Ukupna udaljenost  $v_i^1$  do svih  $2^{n-1}$  vrhova u  $Q_{n-1}^2$  iznosi

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} (d(v_i^2, v_j^2) + 1) = d_i^1(Q_{n-1}) + 2^{n-1}.$$

Iz prethodnog rezultata slijedi da je  $d_i^1(Q_n) = 2d_i^1(Q_{n-1}) + 2^{n-1}$ , odakle indukcijom slijedi  $d_i^1(Q_n) = n2^{n-1}$ . Sada je

$$\sum_{i=1}^{2^n} d_i^1(Q_n) = 2^n d_i^1(Q_n) = 2W(Q_n),$$

jer sumacijom računamo udaljenost između svaka dva vrha dva puta. Slijedi da je Wienerov indeks  $n$ -dimenzionalne hiperkocke jednak [13]

$$W(Q_n) = n2^{2n-2}.$$

## 4.5 Hamiltonov i Eulerov graf

Ranije smo utvrdili da je  $n$ -dimenzionalna hiperkocka bipartitan graf pa ne sadrži neparne cikluse. S obzirom da je još i jednostavan graf, za  $n \geq 2$  struk  $g(Q_n)$  ne može biti manji od četiri. Zaključujemo  $g(Q_n) = 4$ , a ovo je očito jer je  $Q_2 = C_4$ , a za  $n \geq 3$  sve hiperkocke  $Q_n$  sadrže  $Q_2$  kao inducirani podgraf. Kako naći najdulji ciklus u  $Q_n$ ? Pokazat ćemo da u  $Q_n$  postoji ciklus koji sadrži sve njegove vrhove. Općenito, ciklus u grafu koji sadrži sve njegove vrhove zove se *Hamiltonov ciklus*. Graf koji sadrži takav ciklus zove se *Hamiltonov graf*, a posebno je zanimljivo baviti se problemom egzistencije Hamiltonovih ciklusa u grafu jer do danas nema rezultata koji bi karakterizirao Hamiltonove grafove.

**Teorem 4.5.** *Za  $n \geq 2$  hiperkocka  $Q_n$  je Hamiltonov graf.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti indukcijom po  $n \geq 2$ . Za  $n = 2$  vrijedi  $Q_2 = C_4$  pa je  $Q_2$  Hamiltonov graf. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $Q_n$  i pokažimo da vrijedi za  $Q_{n+1}$ . Označimo s  $Q_n^1$  i  $Q_n^2$  disjunktne  $n$ -dimenzionalne hiperkocke sadržane u  $Q_{n+1}$ . Prema pretpostavci indukcije, one su Hamiltonovi grafovi. Neka je  $v_1, \dots, v_{2^n}$  Hamiltonov ciklus u  $Q_n^1$ , a  $w_1, \dots, w_{2^n}$  Hamiltonov ciklus u  $Q_n^2$  i neka su oznake vrhova obaju ciklusa takve da vrijedi  $v_i w_i \in E(Q_{n+1})$ ,  $i = 1, \dots, 2^{n-1}$ . Lako je sada konstruirati Hamiltonov ciklus u  $Q_{n+1}$ :

$$v_1, \dots, v_{2^n}, w_{2^n}, w_{2^n-1}, \dots, w_1.$$

S obzirom da imamo brid  $v_1w_1$ , dobili smo Hamiltonov ciklus u  $Q_{n+1}$ .  $\square$

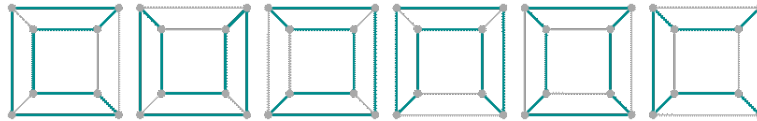
Spomenimo još i Eulerove grafove. *Eulerov graf* je graf u kojemu postoji zatvorena staza koja prolazi svakim bridom točno jednom. Eulerovi grafovi su davno karakterizirani:

**Teorem 4.6.** *Povezan graf je Eulerov ako i samo ako su mu svi vrhovi parnog stupnja.*

Dokaz teorema može se pronaći u [9]. Sada je jasno da je  $Q_n$  Eulerov graf samo za parne  $n$ .

#### 4.5.1 Broj Hamiltonovih ciklusa

Za dva Hamiltonova ciklusa kažemo da su različiti ako postoji barem jedan brid koji se pojavljuje u jednom, ali ne i u drugom ciklusu. Označimo s  $h_n$  broj različitih Hamiltonovih ciklusa u hiperkocki  $Q_n$ . Za  $n \leq 3$ ,  $h_n$  možemo dobiti direktnim prebrojavanjem. Očito vrijedi  $h_2 = 1$ , a za  $Q_3$  prebrojavanjem dobijemo  $h_3 = 6$  i to su sljedeći ciklusi:



Slika 5: Različiti Hamiltonovi ciklusi u  $Q_3$

Prebrojavanje različitih Hamiltonovih ciklusa za  $n \geq 4$  je vrlo složen problem pa ćemo navesti samo gornje i donje granice broja  $h_n$ . Rezultati su preuzeti iz [10].

**Lema 4.7.** *Neka  $T_n$  označava broj različitih Hamiltonovih ciklusa koji prolaze danim bridom iz  $Q_n$ . Tada vrijedi*

$$T_n = \frac{2h_n}{n}.$$

*Dokaz.* Primijetimo da  $T_n$  ne ovisi o izboru brida. Ukupan broj bridova u  $Q_n$  je  $n2^{n-1}$  pa je ukupan broj Hamiltonovih ciklusa, brojeći i njihove kratnosti, jednak  $n2^{n-1}T_n$ . Kako svaki Hamiltonov ciklus sadrži  $2^n$  bridova, slijedi

$$h_n = \frac{n2^{n-1}T_n}{2^n} = \frac{nT_n}{2}.$$

$\square$

Kao i ranije,  $Q_n$  promatramo kao dvije disjunktne  $(n-1)$ -kocke  $Q_{n-1}^1$  i  $Q_{n-1}^2$  čiji su odgovarajući vrhovi spojeni dodatnim bridovima. Pretpostavimo sada da neki Hamiltonov ciklus u  $Q_{n-1}^1$  prolazi nekim unaprijed odabranim bridom. Takvih ciklusa ima  $T_n$ . Također pretpostavimo da neki Hamiltonov ciklus u  $Q_{n-1}^2$  prolazi bridom koji odgovara odabranom bridu iz  $Q_{n-1}^1$ . Ako umjesto ta dva brida, uzmemo dva brida koji ne pripadaju  $Q_{n-1}^1$  i  $Q_{n-1}^2$ , a čiji su krajevi identični krajevima ovih ranije odabranih bridova, dobit ćemo novi Hamiltonov ciklus u  $Q_n$ . S obzirom da početni brid možemo izabrati na  $(n-1)2^{n-2}$  načina, slijedi:

$$h_n \geq (n-1)2^{n-2}T_{n-1}^2.$$

Koristeći lemu 4.7, dobivamo  $T_{n-1}^2 = \frac{2^2 h_{n-1}^2}{(n-1)^2}$ , iz čega slijedi

$$h_n \geq \frac{2^n h_{n-1}^2}{n-1}.$$

Dobivena nejednakost je rekurzivna relacija koja uz poznate početne uvjete  $h_2 = 1$  i  $h_3 = 6$  daje:

$$h_4 \geq \frac{2^4 6^2}{3}, \quad h_5 \geq \frac{2^5}{4} \cdot \frac{2^4 6^2}{3}, \quad \dots \quad (5)$$

Konačno, za  $h_n$ ,  $n \geq 4$  dobivamo

$$h_n \geq \frac{2^{\sum_{i=1}^{n-3} (n+1-i)2^{i-1}} 6^{2^{n-3}}}{\prod_{i=1}^{n-3} (n-i)^{2^{i-1}}}. \quad (6)$$

Uz određene manipulacije koje se mogu pogledati u [10], donju granicu (6) možemo značajno poboljšati. Naime, za  $n \geq 5$  vrijedi:

$$h_n > \frac{2^{(2^{n-2}+2^{n-3}-2-n)} 1344^{2^{n-4}}}{\prod_{i=0}^{n-5} (n-1-i)^{2^i}}. \quad (7)$$

Da bismo pronašli gornju granicu za  $h_n$ , koristit ćemo svojstvo parnosti i neparnosti vrhova hiperkocke  $Q_n$  koje smo objasnili još u potpoglavlju 4.3 prilikom dokaza bipartitnosti hiperkocke. Jasno je da svaki brid u  $Q_n$  spaja neparan vrh s parnim. Bridovi u proizvoljno odabranom Hamiltonovom ciklusu mogu biti određeni pomoću parova bridova koji su incidenti sa svakim parnim vrhom. Za svaki od ukupno  $2^{n-1}$  parnih vrhova postoji  $\binom{n}{2}$  mogućih parova bridova incidentnih s njim. Za svaki Hamiltonov ciklus, izbor parova bridova za sve osim jednog parnog vrha jedinstveno određuje dva brida incidentna s preostalim parnim vrhom. Stoga vrijedi:

$$h_n \leq \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^{2^{n-1}-1}.$$

## 4.6 Bipancikličnost hiperkocke

Još jedno zanimljivo svojstvo hiperkocke jest bipancikličnost. Najprije ćemo navesti definiciju pancikličnog grafa.

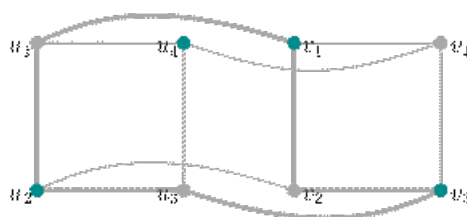
**Definicija 4.1.** Za graf  $G$  s  $n$  vrhova kažemo da je *pancikličan* ako sadrži cikluse  $C_l$  za sve  $l = g(G), \dots, n$ .

S obzirom da bipartitni grafovi ne sadrže neparne cikluse, za njih ne vrijedi svojstvo pancikličnosti. Stoga je uveden pojam bipancikličnosti.

**Definicija 4.2.** Za graf  $G$  s  $n$  vrhova kažemo da je bipancikličan ako sadrži sve parne cikluse  $C_l$ ,  $g(G) \leq l \leq n$ .

**Teorem 4.8.** Za  $n \geq 2$  hiperkocka  $Q_n$  je bipancikličan graf.

*Dokaz.* Treba pokazati da  $n$ -kocka  $Q_n$  sadrži cikluse duljine  $4, 6, 8, \dots, 2^n$ . Za početak, označimo s  $Q_{n-1}^1$  i  $Q_{n-1}^2$  dvije disjunktne  $(n-1)$ -dimenzionalne hiperkocke sadržane u  $Q_n$ . Prema teoremu 4.5 hiperkocka  $Q_{n-1}^1$  sadrži Hamiltonov ciklus pa onda i Hamiltonov put (dovoljno je ukloniti jedan brid iz Hamiltonova ciklusa da bi se dobio Hamiltonov put)  $P_u = u_1 u_2 \dots u_{2^{n-1}}$ . S  $P_v$  označimo kopiju Hamiltonova puta  $P_u$  u  $Q_{n-1}^2$ ,  $P_v = v_1 v_2 \dots v_{2^{n-1}}$ . Za  $k \geq 2$  ciklus duljine  $2k$  možemo konstruirati tako da uzmemo prvih  $k$  vrhova puta  $P_u$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_k$  i odgovarajući dio puta  $P_v$ , odnosno  $v_1, v_2, \dots, v_k$  te ih spojimo bridovima tako da dobijemo ciklus  $u_1 u_2 \dots u_k v_k v_{k-1} \dots v_1 u_1$ . Slika 6 ilustrira konstrukciju ciklusa na primjeru  $Q_3$ . Deblji sivo označeni bridovi pripadaju ciklusu  $u_1 u_2 u_3 v_3 v_2 v_1 u_1$  dobivenom od putova  $u_1 u_2 u_3$  i  $v_1 v_2 v_3$ . Slično možemo konstruirati  $C_4$  ( $u_1 u_2 v_2 v_1 u_1$ ) i  $C_8$  ( $u_1 u_2 u_3 u_4 v_4 v_3 v_2 v_1 u_1$ ).  $\square$



Slika 6: Ciklus  $C_6$  u  $Q_3$

## 4.7 Savršeno sparivanje

Objasnimo najprije pojam sparivanja u grafu.

**Definicija 4.3.** Podskup  $M$  skupa bridova  $E(G)$  grafa  $G$  zovemo *sparivanje* u  $G$  ako je svaki vrh iz  $V(G)$  incidentan s najviše jednim bridom iz  $M$ . Sparivanje  $M$  u grafu  $G$  je najveće ako u  $G$  ne postoji sparivanje koje ima veći broj bridova od  $M$ .

Za vrh  $v \in V(G)$  kažemo da je  $M$ -zasićen ako je kraj nekog brida iz  $M$ . Sparivanje  $M$  je *savršeno sparivanje* u  $G$  ako je svaki vrh  $v \in V(G)$   $M$ -zasićen. Uočimo kako je svako savršeno sparivanje ujedno i najveće, dok obrat općenito ne vrijedi. U nastavku ćemo navesti dva veoma poznata rezultata koji se odnose na bipartitne grafove. Ovdje ćemo ih samo iskazati, dokazi se nalaze u [14].

**Teorem 4.9.** (*P.Hall, 1935.*) *Bipartitni graf  $G$  s biparticijom  $(X, Y)$  sadrži sparivanje koje zasićuje svaki vrh u  $X$  ako i samo ako za svaki  $S \subseteq X$  vrijedi*

$$|N(S)| \geq |S|,$$

*pri čemu je  $N(S) \subseteq Y$  skup svih vrhova koji su susjedi vrhovima iz  $S$ .*

Ukoliko  $X$  i  $Y$  imaju jednak broj vrhova, onda je sparivanje iz teorema 4.9 ujedno i savršeno sparivanje.

**Korolar 4.9.1.** (*Frobenius, 1917.*) *Za  $k > 0$ ,  $k$ -regularan bipartitan graf ima savršeno sparivanje.*

**Teorem 4.10.** *Neka je  $G$   $k$ -regularan bipartitan graf s  $2n$  vrhova. Tada vrijedi*

$$\Phi(G) \geq n! \left(\frac{k}{n}\right)^n,$$

*pri čemu  $\Phi(G)$  označava broj savršenih sparivanja u  $G$ .*

**Teorem 4.11.** *Neka je  $G$  jednostavan  $k$ -regularan bipartitan graf s  $2n$  vrhova. Tada vrijedi*

$$\Phi(G) \leq (k!)^{\frac{n}{k}}.$$

Dokazi teorema 4.10 i 4.11 mogu se pronaći u [21].

S obzirom da je  $n$ -dimenzionalna hiperkocka  $Q_n$   $n$ -regularan i bipartitan graf, to prema korolaru 4.9.1 ima savršeno sparivanje. Prebrojavanje savršenih sparivanja u nekom grafu je vrlo težak problem. Ne postoji algoritam koji bi mogao izračunati taj broj u polinomnom vremenu. Mi ćemo se pozvati na teoreme 4.10 i 4.11 i predstaviti donju i gornju granicu broja savršenih sparivanja grafa  $Q_n$ . Vrijedi

$$(2^{n-1})! \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}} \leq \Phi(Q_n) \leq (n!)^{\frac{2^{n-1}}{n}}.$$

## 4.8 Planarnost i genus

Za graf kažemo da je *planaran* ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Za planaran graf kažemo da je *ravninski* ako je smješten u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takvo smještenje grafa u ravnini zovemo *ravninsko smještenje*.

Ravninski graf  $G$  dijeli ravninu na područja čija se zatvorenja zovu *strane* od  $G$ . Dakle, strana grafa je dio ravnine koji je omeđen vrhovima i bridovima i u tom slučaju govorimo o incidentnosti strane s vrhovima i bridovima koji ju omeđuju. *Rub* strane ravninskog grafa čine oni bridovi i vrhovi koji su incidentni s tom stranom. Ukoliko je graf povezan, tada je rub strane zatvorena šetnja u kojoj je svaki rezni brid<sup>6</sup> prijeđen dvaput. Duljina takve šetnje zove se stupanj strane. Svaki planaran graf sadrži točno jednu neomeđenu stranu koja se zove vanjska strana. Na slici 7 označene su strane hiperkocki  $Q_1, Q_2$  i  $Q_3$  slovima  $f_i, 2 \leq i \leq 6$ , pri čemu je  $f_1$  označena vanjska strana.

Slijede rezultati koji su važni za zaključivanje o planarnosti grafa  $Q_n$ . Njihovi dokazi nalaze se u [9], a baziraju se na pojmu *Eulerove karakteristike*  $\chi$  koja se za graf  $G$  s  $\phi(G)$  strana (ovdje strana ovisi o vrsti plohe na koju je graf smješten bez presijecanja bridova) računa po formuli:

$$|V(G)| - |E(G)| + \phi(G) = \chi(G). \quad (8)$$

**Teorem 4.12.** (*Eulerova formula*) *Neka je  $G$  povezan planaran graf s  $n$  vrhova,  $m$  bridova i  $f$  strana. Tada vrijedi*

$$n - m + f = 2.$$

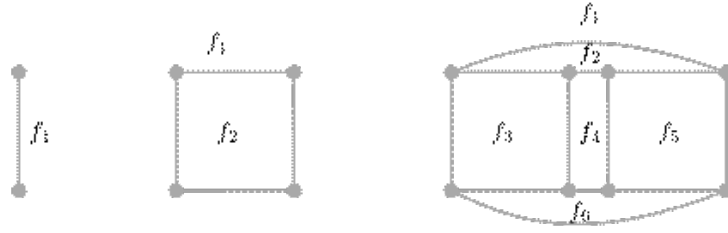
**Korolar 4.12.1.** *Ako je  $G$  povezan planaran jednostavan graf s  $n \geq 3$  vrhova i  $m$  bridova, vrijedi  $m \leq 3n - 6$ . Ako  $G$  ne sadrži trokute, tada je  $m \leq 2n - 4$ .*

Uzimajući u obzir navedene rezultate, nije teško zaključiti da je graf  $Q_n$  planaran samo za  $n \leq 3$  (vidi sliku 7).

Ukoliko bi npr.  $Q_4$  bio planaran, onda bi prema korolaru 4.12.1, uzevši u obzir da  $Q_4$  ne sadrži trokute, vrijedilo  $|E(Q_4)| \leq 2|V(Q_4)| - 4$ , a to ne može biti jer  $32 \not\leq 2 \times 16 - 4$ . Slično zaključujemo i o neplanarnosti grafa  $Q_n$  za  $n > 4$ .

Osim u ravninu, grafove možemo smjestiti na različite plohe, orijentabilne ili neorijentabilne. Za orijentabilne plohe vrijedi formula (8), pri čemu je  $\chi(G) = 2 - 2g(G)$ , a  $\phi(G)$  je broj strana grafa smještenog na tu plohu.

<sup>6</sup>Rezni brid grafa je brid čijim se uklanjanjem povećava broj komponenti povezanosti grafa.



Slika 7: Ravninsko smještenje hiperkocke  $Q_n$ ,  $1 \leq n \leq 3$  s označenim stranama.

**Definicija 4.4.** Najmanji prirodan broj  $n$  za koji se graf  $G$  može smjestiti na sferu s  $n$  ručki tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima zove se *genus* grafa i označava s  $g(G)$ .

Za graf koji se može smjestiti na sferu s  $n$  ručki kažemo još i da je  $S_n$  smjestiv. Na primjer, planarni grafovi su  $S_0$  smjestivi jer se mogu smjestiti na sferu bez presijecanja bridova. Zaključujemo da vrijedi  $g(Q_n) = 0$  za  $n \leq 3$ . Za određivanje genusa hiperkocki  $Q_n$ ,  $n \geq 4$  u [5] je iskazan i dokazan sljedeći teorem.

**Teorem 4.13.** Za  $n \geq 2$ , genus grafa  $Q_n$  dan je formulom:

$$g(Q_n) = (n - 4)2^{n-3} + 1.$$

*Dokaz.* Kako je  $Q_n$  povezan graf koji ne sadrži trokute, vrijedi da je stupanj svake strane, pri smještanju  $Q_n$  na odgovarajuću plohu, najmanje 4. Kako je svaki brid incidentan s dvije strane, vrijedi nejednakost  $2|E(Q_n)| \geq 4\phi(Q_n)$ , odnosno  $\phi(Q_n) \leq \frac{1}{2}|E(Q_n)|$ . Koristeći Eulerovu formulu  $|V(Q_n)| - |E(Q_n)| + \phi(Q_n) = 2 - 2g(Q_n)$ , dobivamo sljedeće:

$$g(Q_n) \geq \frac{|E(Q_n)|}{4} - \frac{|V(Q_n)|}{2} + 1 = \frac{n2^{n-1}}{4} - 2^{n-1} + 1 = (n - 4)2^{n-3} + 1.$$

Potrebno je još dokazati obrnutu nejednakost kako bi dokaz bio kompletan. U tu svrhu koristimo propoziciju koja je iskazana i dokazana u [5], a glasi

**Propozicija 4.14.** Hiperkocka  $Q_n$  se može smjestiti na orijentabilnu plohu genusa  $(n - 4)2^{n-3} + 1$  tako da svaki ciklus duljine 4 čiji se vrhovi razlikuju samo u prvoj i u zadnjoj koordinati čini jednu stranu grafa.

S obzirom da je ovo jača tvrdnja od one koju trebamo dokazati, gotovi smo s dokazom o genusu hiperkocke  $Q_n$ .  $\square$

Prethodna definicija podrazumijevala je genus orijentabilne plohe, ali postoji i pojam genusa neorijentabilne plohe, primjerice Kleineove boce, a koji se označava s  $\tilde{g}$ . Takav genus se definira kao najmanji cijeli broj  $n$  za koji je

graf smjestiv na neorijentabilnu plohu koja ima  $n$  presjeka. Neorijentabilni genus hiperkocke  $Q_n$  nađen je davne 1978. godine [16]. Mi ćemo ga ovdje navesti bez dokaza.

**Teorem 4.15.** *Za svaki  $n \geq 1$  vrijedi:*

$$\tilde{g}(Q_n) = \begin{cases} 1, & n \leq 3 \\ 3 + 2^{n-2}(n-4), & n = 4, 5 \\ 2 + 2^{n-2}(n-4), & n \geq 6. \end{cases}$$



## 5 Podgrafovi hiperkocke

Razna svojstva kocke  $Q_n$  navedena u odjeljku 4 impliciraju postojanje raznih specijalnih podgrafova.

**Korolar 5.0.1.** [25] *Za  $n \geq 1$ , hiperkocka  $Q_n$ , sadrži 1–regularan razapinjući podgraf.*

*Dokaz.* Za  $n = 1$   $Q_1$  je put s dva vrha pa tvrdnja vrijedi. Za  $n \geq 2$  tvrdnja slijedi iz korolara 4.9.1 prema kojem  $Q_n$  ima savršeno sparivanje. Primijetimo da je savršeno sparivanje 1–regularan razapinjući podgraf od  $Q_n$ .  $\square$

**Korolar 5.0.2.** [25] *Hiperkocka  $Q_n$ , za  $n \geq 2$  sadrži 2–regularan 2–povezan razapinjući podgraf.*

*Dokaz.* U pododjeljku 4.5 pokazali smo da za  $n \geq 2$  hiperkocka  $Q_n$  sadrži Hamiltonov ciklus, što je upravo 2–regularan i 2–povezan razapinjući podgraf.  $\square$

**Teorem 5.1.** *Neka je  $n \geq 3$ . Tada za svaki  $k \in \mathbb{N}$ ,  $3 \leq k \leq n$ , hiperkocka  $Q_n$  sadrži razapinjući  $k$ –regularan,  $k$ –povezan i bipancikličan podgraf.*

Dokaz se može pronaći u [25], a temelji se na tvrdnji da svaka hiperkocka sadrži kvadratnu mrežu kao razapinjući podgraf i da je svaka kvadratna mreža netrivialne dimenzije bipancikličan graf. S obzirom da se svaka hiperkocka  $Q_n$  može prikazati kao  $Q_n = Q_m \square Q_{n-m}$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , to je razapinjući podgraf od  $Q_n$  definiran kao Kartezijev produkt  $Q_m$  i Hamiltonova ciklusa u  $Q_{n-m}$  bipancikličan jer sadrži kvadratnu mrežu  $P_{2^m} \square P_{2^{n-m}}$  kao razapinjući podgraf.

Od induciranih podgrafova hiperkocke posebno su zanimljivi put i ciklus. Problem određivanja najduljih induciranih puteva u hiperkocki  $Q_n$  u literaturi je poznat kao *The snake in the box* problem, a problem određivanja najduljih induciranih ciklusa u  $Q_n$  poznat je kao *The coil in the box* problem. Za sada su takve duljine poznate jedino za  $n \leq 8$  i dane su u tablici 1. Izračunate su korištenjem računala. Duljina najduljeg induciranog puta u  $Q_n$  označena je sa  $s_n$ , a duljina najduljeg induciranog ciklusa s  $c_n$ . Davne 1970. godine [13] pronađene su donje i gornje granice za  $c_n$ ,  $n \geq 6$ :

$$\frac{7(2^n)}{4(n-1)} \leq c_n \leq 2^{n-1} - \frac{2^n - 12}{7n(n-1)^2 + 2}. \quad (9)$$

Otada se mnogi znanstvenici bave ovim problemom, a uglavnom su uspjeli naći neke specijalne donje granice za  $s_n$  i  $c_n$ ,  $9 \leq n \leq 21$ . Za  $n \geq 21$  nađena je opća donja granica za  $c_n$  [3] :

$$c_n \geq \frac{77}{256} 2^n.$$

$n$	$s_n$	$c_n$
1	1	0
2	2	4
3	4	6
4	7	8
5	13	14
6	26	26
7	50	48
8	98	96

Tablica 1: Poznate duljine  $s_n$  i  $c_n$  u grafu hiperkocke  $Q_n$

Još jedna vrsta podgrafova od  $Q_n$  koje ćemo promatrati su oni podgrafovi koji su i sami hiperkocke, a zvat ćemo ih podkocke. Posebno će nas zanimati ukupan broj podkocki dimenzije  $r \leq n$  u grafu  $n$ -dimezionalne hiperkocke. Koristeći se istim načinom označavanja vrhova kao u  $Q_n$ , skup vrhova  $r$ -dimezionalne podkocke  $Q_r$  možemo dobiti tako da  $n - r$  koordinata fiksiramo, a preostalih  $r$  bit će sve moguće kombinacije nula i jedinica. Bridovi se nasljeđuju iz  $Q_n$ .

Neka je  $0 \leq r \leq n$ . Poznavajući osnove kombinatorike, nije teško zaključiti da  $r$  koordinata možemo odabrati na  $\binom{n}{r}$  načina, a za fiksiranje preostalih  $n - r$  imamo  $2^{n-r}$  načina. Zaključujemo da ukupan broj  $r$ -dimezionalnih podkocki od  $Q_n$  iznosi

$$\binom{n}{r} 2^{n-r}.$$

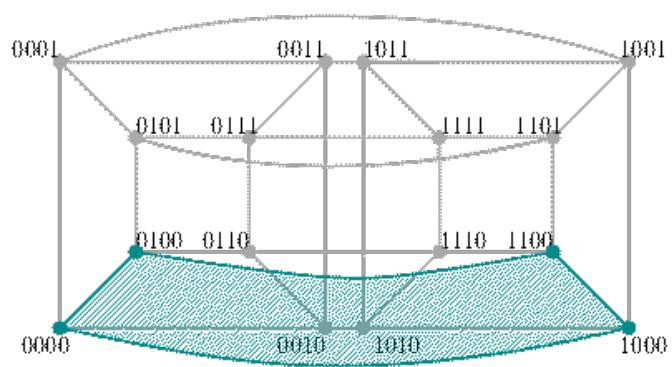
Sada je jasno da je ukupan broj svih hiperkocki sadržanih u  $Q_n$  jednak

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 2^{n-r} = 3^n.$$

Primjerice, ako želimo naći neku dvodimezionalnu podkocku od  $Q_4$ , onda najprije trebamo odabrati dvije koordinate koje će biti promjenjive i označiti ih npr. s  $*$ . Neka su to prve dvije koordinate. Preostale dvije fiksiramo tako da budu jednake 0. Tada je skup vrhova podkocke  $Q_4$

$$V(Q) = \{(*, *, 0, 0) \mid *, * \in \{0, 1\}\},$$

a bridovi su naslijeđeni iz  $Q_4$ . Takva podkocka od  $Q_4$  prikazana je na slici 8.



Slika 8: Podkocka  $Q_2$  sadržana u  $Q_4$

## 6 Spektar hiperkocke

Važnu ulogu u proučavanju grafova i njihovih svojstava imaju i matrice koje im možemo pridružiti. Njih je jako puno i uglavnom imaju vrlo specijalnu strukturu. Od posebne je važnosti poznavati sve ili neke svojstvene vrijednosti tih matrica jer se pomoću njih mogu donijeti zaključci o strukturi danog grafa. Mi ćemo se ovdje baviti matricom susjedstva jer je to osnovna matrica koja se može pridružiti nekom grafu. Zanimat će nas spektar te matrice, odnosno skup svih njenih svojstvenih vrijednosti zajedno s kratnostima. Navest ćemo neke osnovne definicije, a više o ovoj temi može se pročitati u [7].

**Definicija 6.1.** Matrica susjedstva grafa  $G$  s  $n$  vrhova je kvadratna  $n \times n$  matrica  $A = A(G) = [a_{ij}]$ , gdje je  $a_{ij}$  broj bridova između vrhova  $v_i$  i  $v_j$ , za  $i, j = 1, \dots, n$ .

Uočimo da će u slučaju jednostavnog grafa elementi matrice susjedstva biti jedinice ili nule, ovisno o tome jesu li dva vrha susjedna ili nisu. S obzirom da graf hiperkocke ne sadrži petlje, na glavnoj dijagonali bit će nule. Također, primijetimo i da će zbroj elemenata u  $i$ -tom retku biti jednak stupnju vrha  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definicija 6.2.** Neka je  $A$  kvadratna  $n \times n$  matrica. Polinom stupnja  $n$  dan s  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ , zove se *karakteristični polinom* matrice  $A$ , pri čemu je  $I$  jedinična matrica<sup>7</sup> reda  $n$ .

*Svojstvene vrijednosti* matrice  $A$  su korijeni karakteristične jednadžbe  $\det(\lambda I - A) = 0$ , a broj pojavljivanja određene svojstvene vrijednosti kao korijena jednadžbe je njena algebarska kratnost.

Odredimo spektar hiperkocke  $Q_n$ . Najprije je potrebno odrediti matricu susjedstva grafa  $Q_n$ . Hiperkocka  $Q_1$  ima  $2^1 = 2$  vrha pa je njoj pridružena matrica susjedstva reda 2 i izgleda ovako:

$$A(Q_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako pogledamo matricu susjedstva hiperkocke  $Q_2$ , onda je jasno da njenom podjelom na blokove  $2 \times 2$  dobivamo matrice susjedstva od  $Q_1$  na glavnoj dijagonali, dok su na sporednoj jedinične matrice reda 2:

$$A(Q_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} A(Q_1) & & I & \\ \hline I & & A(Q_1) & \end{array} \right].$$

<sup>7</sup>Identiteta ili jedinična matrica je kvadratna matrica kojoj su elementi na glavnoj dijagonali jedinice, a svi ostali elementi jednaki su nuli

Za hiperkocku  $Q_3$  matrica susjedstva je oblika:

$$A(Q_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A(Q_2) & I \\ \hline I & A(Q_2) \end{array} \right].$$

Dakle, matrica susjedstva grafa  $Q_3$  je reda  $2^3 = 8$ , a promatrana kao blok matrica reda 2 na glavnoj dijagonali sadrži matrice susjedstva grafa  $Q_2$ , a na sporednoj jedinične matrice reda  $2^2 = 4$ . Matrica susjedstva hiperkocke  $Q_4$  je reda  $2^4 = 16$ , a može se prikazati kao blok matrica reda 2 s matricama  $A(Q_3)$  na glavnoj i jediničnim reda  $2^3 = 8$  na sporednoj dijagonali. Induktivno zaključujemo kako se  $A(Q_n)$  može dobiti rekurzivno iz  $A(Q_{n-1})$ , tj.

$$A(Q_n) = \left[ \begin{array}{c|c} A(Q_{n-1}) & I \\ \hline I & A(Q_{n-1}) \end{array} \right],$$

pri čemu je  $I$  reda  $2^{n-1}$ .

Svojstvene vrijednosti određujemo kao korijene karakteristične jednadžbe  $\det(\lambda I - A) = 0$ , pa za  $Q_1$  vrijedi

$$\det(\lambda I_2 - A(Q_1)) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

iz čega slijedi  $\lambda^2 = 1$  pa su svojstvene vrijednosti od  $A(Q_1)$  jednake  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Za  $Q_2$  dobivamo

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

pa su svojstvene vrijednosti od  $A(Q_2)$  0, 2 i -2 s kratnostima redom 2, 1, 1. Istim principom se dobivaju i svojstvene vrijednosti matrica susjedstva grafova  $Q_3, Q_4, Q_5$  i one su navedene u tablici 2.

$n$	1	2	3	4	5
$\lambda$	-1,1	-2,0,2	-3,-1,1,3	-4,-2,0,2,4	-5,-3,-1,1,3,5
<i>kratnosti</i>	1,1	1,2,1	1,3,3,1	1,4,6,4,1	1,5,10,10,5,1

Tablica 2: Svojstvene vrijednosti i pripadne kratnosti matrice susjedstva  $n$ -kocke za  $n \leq 5$

**Teorem 6.1.** *Za  $n \geq 1$  hiperkocka  $Q_n$  ima  $n + 1$  različitih svojstvenih vrijednosti*

$$-n, -n + 2, -n + 4, -n + 6, \dots, n - 6, n - 4, n - 2, n$$

*s kratnostima redom  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ .*

*Dokaz.* Prema [13], spektar Kartezijevog produkta dva grafa je suma njihovih spektara. Drugim riječima, ako su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa  $G$ , a  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa  $H$ , njihovi spektri su dani s  $S(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $S(H) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ , a spektar Kartezijevog produkta  $S(G \square H) = S(G) + S(H) = \{\lambda_i + \mu_j\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Zbog  $K_2 = Q_1$ ,  $S(K_2) = S(Q_1) = \{-1, 1\} = \{(-1)^{(1)}, 1^{(1)}\}$ , pri čemu  $\lambda^{(k)}$  označava svojstvenu vrijednost  $\lambda$  kratnosti  $k$ . Nadalje,

$$S(Q_2) = S(Q_1 \square K_2) = \{-1 - 1, 1 - 1, -1 + 1, 1 + 1\} = \{-2, 0, 0, 2\} = \{(-2)^{(1)}, 0^{(2)}, 2^{(1)}\}$$

$$S(Q_3) = S(Q_2 \square K_2) = \{-2 - 1, 0 - 1, 0 - 1, 2 - 1, -2 + 1, 0 + 1, 0 + 1, 2 + 1\} = \{-3, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 3\} = \{(-3)^{(1)}, (-1)^{(3)}, 1^{(3)}, 3^{(1)}\}$$

...

$$S(Q_n) = \{(-n)^{\binom{n}{0}}, (-n + 2)^{\binom{n}{1}}, \dots, (n - 2)^{\binom{n}{n-1}}, n^{\binom{n}{n}}\}$$

□

## 7 Grupa automorfizama od $Q_n$

U nastavku ćemo odrediti red grupe automorfizama hiperkočke, a potom navesti još neka svojstva hiperkočke usko vezana za automorfizme.

**Definicija 7.1.** *Automorfizam* jednostavnog grafa  $G$  je bijekcija  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  takva da za svaka dva vrha  $u, v \in V(G)$  vrijedi  $uv \in E(G)$  ako i samo ako  $f(u)f(v) \in E(G)$ .

Svi automorfizmi od  $G$  čine grupu  $Aut(G)$  koja je podgrupa simetrične grupe  $Sim(V(G))$ , odnosno  $Aut(G)$  je podgrupa grupe permutacija od  $V(G)$ .

Promatramo djelovanje grupe  $G$  na skup  $V(G)$ :

- *Orbita* elementa  $x \in V(G)$  je skup  $Gx = \{gx, g \in G\}$ .
- *Stabilizator* elementa  $x \in V(G)$  je skup  $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ .

Stabilizator svakog elementa je podgrupa grupe  $G$ . Iz [24] je poznato da za  $G = Aut(Q_n)$  vrijedi  $|G_x| = n!$  i  $|Gx| = |V(Q_n)|$ , što je ključno u dokazivanju reda grupe  $Aut(Q_n)$ .

**Teorem 7.1.** (*O stabilizatoru i orbiti*) *Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $V$ . Tada za svaki  $x \in V$  vrijedi:*

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|.$$

Dokaz ovog teorema se može pogledati u [4]. Sljedeći korolar slijedi direktno iz prethodnih rezultata.

**Korolar 7.1.1.** [24]  $|Aut(Q_n)| = n!2^n$ . □

Pojmovi usko vezani uz grupu automorfizama su tranzitivnost po vrhovima, tranzitivnost po bridovima te simetričnost grafa.

Jednostavan graf  $G$  sa skupom vrhova  $V(G)$  i skupom bridova  $E(G)$  je:

- *simetričan* ako  $\forall u, v, w, z \in V(G)$  tako da  $uv, wz \in E(G) \exists g \in Aut(G)$  tako da  $g(u) = w$  i  $g(v) = z$ .  
(Opisno, graf je simetričan ako se bilo koji par susjednih vrhova nekim automorfizmom može preslikati u bilo koji drugi par susjednih vrhova.)
- *tranzitivan po vrhovima* ako

$$\forall u, v \in V(G) \exists g \in Aut(G) \text{ tako da } g(u) = v.$$

(Opisno, graf je tranzitivan po vrhovima ako se bilo koji njegov vrh može preslikati nekim automorfizmom u bilo koji drugi vrh.)

- *tranzitivan po bridovima* ako

$$\forall uv, wz \in E(G) \exists g \in \text{Aut}(G) \text{ tako da } g(uv) = wz.$$

(Opisno, graf je tranzitivan po bridovima ako se bilo koji njegov brid može preslikati nekim automorfizmom u bilo koji drugi brid.)

Napomenimo da djelovanje nekog automorfizma na brid shvaćamo kao njegovo djelovanje na vrhove-krajeve tog brida.

Teorem koji slijedi daje još jedno važno svojstvo hiperkocke  $Q_n$  iz kojeg onda slijede još tri svojstva.

**Teorem 7.2.** *Za  $Q_n$ ,  $n \geq 1$  vrijedi:  $\forall u, v, w, z \in V(Q_n)$  takvi da  $d_{Q_n}(u, v) = d_{Q_n}(w, z) \exists g \in \text{Aut}(Q_n)$  takvi da  $g(u) = w$  i  $g(v) = z$ .*

Svojstvo navedeno u teoremu 7.2 zove se *tranzitivnost po udaljenosti* [24]. Ono povlači svojstvo simetričnosti, a svojstvo simetričnosti dalje povlači tranzitivnost po vrhovima i tranzitivnost po bridovima pa hiperkocka  $Q_n$  ima sva navedena svojstva.



## 8 Nezavisni i dominacijski skupovi, pokrivači

Nezavisnost i dominacija u grafu su usko vezani pojmovi. Dva vrha ili dva brida u grafu su nezavisni ako nisu susjedni, a možemo reći da vrh ili brid dominira nad vrhovima ili bridovima s kojima je incidentan. U ovom odjeljku ćemo definirati nezavisne i dominacijske skupove vrhova i bridova u grafu, a onda vidjeti kakvi su ti skupovi u hiperkocki  $Q_n$ .

**Definicija 8.1.** Podskup  $S \subseteq V(G)$  je *nezavisan* ako u njemu nikoja dva vrha nisu susjedna.

Odmah je jasno da su prazan skup i podskup koji sadrži samo jedan vrh najjednostavniji primjeri nezavisnih skupova. Analogno se definira nezavisan skup bridova u grafu. Njega čine neki bridovi koji nisu susjedni, odnosno nisu incidentni s istim vrhom. Elemente nezavisnog skupa vrhova (bridova) zovemo nezavisnim vrhovima (bridovima).

Kardinalnost najvećeg nezavisnog skupa vrhova zove se *vršna nezavisnost* i označava s  $\beta_v(G)$ . *Bridnu nezavisnost* označavamo s  $\beta_b(G)$ . Dakle,

$$\beta_v(G) = \max\{|S| : S \text{ nezavisan skup vrhova od } G\},$$

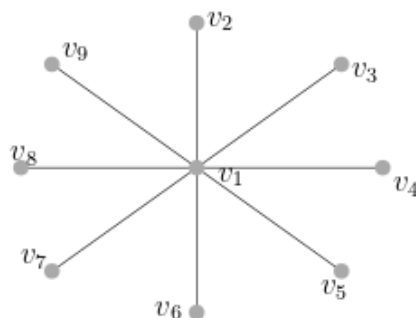
$$\beta_b(G) = \max\{|B| : B \text{ nezavisan skup bridova od } G\}.$$

Uočimo da je nezavisan skup bridova u  $G$  ujedno i sparivanje u  $G$  pa je  $\beta_b(G)$  kardinalnost najvećeg sparivanja u  $G$ .

**Definicija 8.2.** Za podskup  $D \subseteq V(G)$  kažemo da je *dominacijski skup* grafa  $G$  ako je svaki vrh koji nije u  $D$  susjed najmanje jednom vrhu iz  $D$ .

Broj vrhova u najmanjem dominacijskom skupu od  $G$  zove se *dominacijski broj* od  $G$ . Na slici 9 prikazan je potpun bipartitan graf poznat pod nazivom zvijezda. Primjeri nezavisnih skupova u ovom grafu su  $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ ,  $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ , najveći je  $\{v_i : i = 2, 3, \dots, 9\}$ . Jedini dominacijski skup je  $\{v_1\}$ .

Osim dominacije među vrhovima, postoje još tri vrste dominacije: dominacija između bridova, dominacija vrhova nad bridovima te bridova nad vrhovima. Za proizvoljan  $G = (V, E)$  označimo s  $\alpha_v(G)$  najmanji broj vrhova koji dominiraju cijelim skupom  $V(G)$ . Nadalje, neka je  $\alpha_b(G)$  najmanji broj bridova koji dominiraju cijelim skupom bridova od  $G$ ,  $\alpha_{vb}(G)$  najmanji broj vrhova koji dominiraju nad  $E(G)$  i  $\alpha_{bv}(G)$  najmanji broj bridova koji dominiraju nad  $V(G)$ .

Slika 9: Zvijezda  $K_{1,8}$ 

**Definicija 8.3.** *Vršni pokrivač*  $K \subseteq V(G)$  grafa  $G$  je skup vrhova za koji vrijedi da je svaki brid iz  $G$  incidentan s barem jednim vrhom iz  $K$ .

**Definicija 8.4.** *Bridni pokrivač*  $L \subseteq E(G)$  je skup bridova grafa  $G$  za koji vrijedi da je svaki vrh iz  $G$  incidentan s barem jednim bridom iz  $L$ .

Bridni pokrivač postoji samo za grafove koji nemaju izoliranih vrhova. Primijetimo kako je  $\alpha_{vb}(G)$  kardinalni broj najmanjeg vršnog pokrivača grafa  $G$ , a  $\alpha_{bv}(G)$  kardinalni broj najmanjeg bridnog pokrivača grafa  $G$ , tj. vrijedi

$$\alpha_{vb}(G) = \min\{|K| : K \text{ vršni pokrivač od } G\},$$

$$\alpha_{bv}(G) = \min\{|L| : L \text{ bridni pokrivač od } G\}.$$

**Teorem 8.1.** [11] *Za graf  $G = (V, E)$  vrijedi sljedeće:*

$$S \text{ je nezavisan skup u } G \Leftrightarrow V \setminus S \text{ vršni pokrivač od } G.$$

*Dokaz.*  $\Rightarrow$  Pretpostavimo da je  $S$  nezavisan skup od  $G$  i neka je  $e = u_1u_2$  proizvoljan brid u  $G$ . Slijedi da samo jedan od vrhova  $u_1$  i  $u_2$  može biti sadržan u  $S$ , a onda drugi vrh mora biti u  $V \setminus S$ . S obzirom da to vrijedi za bilo koji brid, zaključujemo da je  $V \setminus S$  vršni pokrivač.

$\Leftarrow$  Neka je  $V \setminus S$  vršni pokrivač od  $G$  i neka  $u_1, u_2 \in S$ . Ako bi postojao brid u  $S$  koji bi spajao ta dva vrha, onda on ne bi bio incidentan niti s jednim vrhom u  $V \setminus S$  pa  $V \setminus S$  ne bi bio vršni pokrivač. Dakle, takav brid ne može postojati pa zaključujemo da je  $S$  nezavisan skup.  $\square$

Vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 8.2.** (Gallai [11]) *Neka je  $G = (V, E)$  graf bez izoliranih vrhova. Tada vrijedi*

$$\alpha_{vb}(G) + \beta_v(G) = |V| = \beta_b(G) + \alpha_{bv}(G).$$

Dokaz se nalazi u [11].

Ako primijenimo Gallaijev teorem na graf  $Q_n$ , dobivamo:

$$\alpha_{vb}(Q_n) + \beta_v(Q_n) = 2^n = \beta_b(Q_n) + \alpha_{bv}(Q_n).$$

**Teorem 8.3.** (*Kónig–Egerváry, 1931.*) *U bipartitnom grafu  $G$  broj bridova najvećeg sparivanja jednak je broju vrhova najmanjeg vršnog pokrivača.*

Dokaz se može pogledati u [6].

Kako je  $Q_n$  bipartitan graf, primjenom prethodnog teorema slijedi  $\alpha_{vb}(Q_n) = \beta_b(Q_n)$ , a onda i  $\beta_v(Q_n) = \alpha_{bv}(Q_n)$ . Slijedi teorem.

**Teorem 8.4.**  $\alpha_{vb}(Q_n) = 2^{n-1}$ .

*Dokaz.* Promotrimo  $Q_n$  kao uniju dvije  $(n - 1)$ -dimenzionalne hiperkocke. Najprije svakoj od njih odredimo najmanji vršni pokrivač, a onda spojimo bridovima odgovarajuće vrhove da dobijemo  $Q_n$ , ali pazimo da svaki takav brid bude incidentan sa samo jednim vrhom iz vršnog pokrivača. Primjerice, na slici 6 plavo obojeni vrhovi pripadaju najmanjem vršnom pokrivaču od  $Q_3$ . Za  $Q_4$  pogledati sliku 4 desno: u lijevoj podhiperkocki  $Q_3$  vrhovi najmanjeg vršnog pokrivača su  $\{0001, 0111, 0100, 0010\}$ , a u desnoj su to vrhovi  $\{1011, 1101, 1110, 1000\}$ , što ukupno daje  $8 = 2^{4-1}$  vrhova.

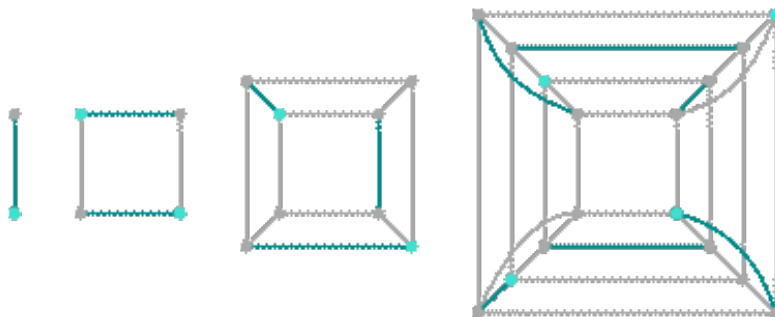
Gornja razmatranja impliciraju da najmanji vršni pokrivač ne može biti veći od  $2^{n-1}$ , tj. vrijedi  $\alpha_{vb}(Q_n) \leq 2^{n-1}$ . Kako bismo pokazali da vrijedi jednakost iskoristimo elementarno svojstvo grafa  $Q_n$ . Znamo da je  $Q_n$   $n$ -regularan, odnosno da je svaki vrh incidentan s  $n$  bridova, a s obzirom da u  $Q_n$  postoji  $n2^{n-1}$  bridova, za vršni pokrivač potrebno je najmanje  $2^{n-1}$  vrhova.  $\square$

Korištenjem Gallaijevog teorema i teorema 8.4, dobivamo:

$$\alpha_{vb}(Q_n) = \beta_v(Q_n) = \beta_b(Q_n) = \alpha_{bv}(Q_n) = 2^{n-1}.$$

Brojevi  $\alpha_v(Q_n)$  i  $\alpha_b(Q_n)$  još uvijek nisu poznati, ali su nađene neke donje i gornje granice. Za  $n = 1, 2, 3, 4$  tražene brojeve je lako odrediti:  $\alpha_v(Q_1) = 1$ ,  $\alpha_v(Q_2) = 2$ ,  $\alpha_v(Q_3) = 2$  i  $\alpha_v(Q_4) = 4$ , te  $\alpha_b(Q_1) = 1$ ,  $\alpha_b(Q_2) = 2$ ,  $\alpha_b(Q_3) = 3$  i  $\alpha_b(Q_4) = 6$ . Na slici 10 prikazane su hiperkocke  $Q_n$ ,  $n = 1, \dots, 4$ , pri čemu plavo obojeni vrhovi i bridovi predstavljaju vrhove iz  $\alpha_v(Q_n)$ , odnosno bridove iz  $\alpha_b(Q_n)$ .

Sada ćemo navesti teorem o donjim i gornjim granicama broja  $\alpha_v(Q_n)$ . Dokaz se nalazi u [15].



Slika 10: Najmanji dominacijski i bridno dominacijski skupovi od  $Q_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$

**Teorem 8.5.** *Neka je  $n \geq 1$ . Tada*

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \alpha_v(Q_n) \leq 2^{n-h}, \quad (10)$$

pri čemu  $h = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ . Za  $n = 2^k - 1$ , donja i gornja granica se podudaraju pa je  $\alpha_v(Q_n) = 2^{n-k}$ .

U [13] su poznate donje i gornje granice za  $\alpha_b(Q_n)$ . Za  $n \geq 3$  vrijedi

$$\frac{n2^n}{3n-1} \leq \alpha_b(Q_n) \leq 3 \cdot 2^{n-3}. \quad (11)$$

Definicija dominacije može se proširiti na proizvoljne podskupove  $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ . Kažemo da  $V_1$  dominira  $V_2$  ako za svaki vrh  $y \in V_2$  postoji  $x \in V_1$  koji dominira  $y$ . Dominacijski broj tada predstavlja najveći red  $D$ -particije i označen je s  $d(G)$ .  $D$ -particija označava particiju skupa  $V(G)$  čije su klase dominacijski skupovi u  $G$ . Dominacijski broj možemo definirati i pomoću specijalnog bojenja grafa tako da proizvoljan vrh obojimo jednom bojom, a za sve ostale boje postoji susjed tog vrha koji je obojen tom bojom. Dominacijski broj grafa definiran je kao najveći broj boja koje smo upotrijebili u ovakvom bojenju. U [23] se nalazi dokaz sljedećeg teorema.

**Teorem 8.6.** *Neka je  $k$  pozitivan cijeli broj. Tada je dominacijski broj za  $Q_{2^k-1}$  i  $Q_{2^k}$  jednak i iznosi*

$$d(Q_{2^k-1}) = d(Q_{2^k}) = 2^k.$$

## 9 Smještenje grafova na hiperkocku

Problem smještenja grafova odnosi se na pronalaženje preslikavanja između dva grafa koje čuva određena topološka svojstva. Postoji nekoliko tipova smještenja grafova na hiperkocku, a ovdje ćemo razmotriti izomorfno i izometrijsko. Ovakvi problemi imaju veliku primjenu u teoriji kodiranja, prijenosu podataka i lingvistici.

### 9.1 Izomorfno smještenje

Definirajmo izomorfizam među grafovima  $G$  i  $H$ .

**Definicija 9.1.** Grafovi  $G$  i  $H$  su izomorfni ako postoje bijekcije  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  i  $g : E(G) \rightarrow E(H)$  koje čuvaju incidenciju, tj. vrh  $v$  je incidentan s bridom  $e$  u  $G$  ako i samo ako je  $f(v)$  incidentan s  $g(e)$  u  $H$ . Pišemo  $G \cong H$ . Uređeni par  $(f, g)$  zove se izomorfizam s  $G$  u  $H$ .

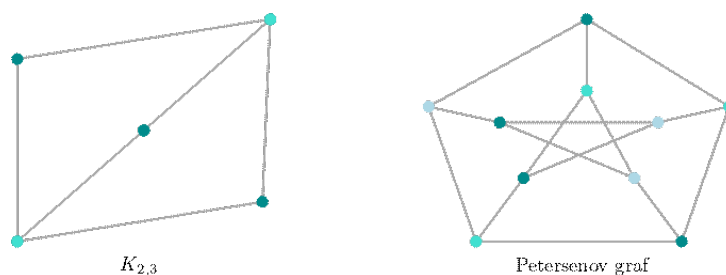
**Definicija 9.2.** Graf  $M$  je izomorfno smjestiv na  $G$  ako postoji izomorfizam  $f : M \rightarrow H$ , pri čemu  $H \subseteq G$ .

Drugim riječima, izomorfno smještenje je funkcija  $f : V(M) \rightarrow V(G)$  koja čuva susjednost: ako su dva vrha susjedna u  $M$ , njihove slike će biti susjedni vrhovi u  $G$ .

**Definicija 9.3.** Za graf kažemo da je *kubni* ako ga je moguće izomorfno smjestiti na graf  $Q_n$  za neki  $n \in \mathbb{N}$ .

S obzirom da je hiperkocka bipartitan graf, a kubni graf je izomorfan s podgrafom hiperkocke, onda i on mora biti bipartitan. Treba napomenuti da obrat ne vrijedi, postoje grafovi koji su bipartitni, ali nisu kubni. Primjer takvog grafa je potpun bipartitan graf  $K_{2,3}$ . Kubni graf ne treba poistovjetiti s kubičnim grafom: kubični graf je 3-regularan. Primjer grafa koji je kubični, ali nije kubni je Petersenov graf. Na slici 11 lijevo nalazi se potpun bipartitan graf u kojem jednoj particiji pripadaju tamnoplavi vrhovi, a drugoj svijetloplavi. Desno na slici nalazi se Petersenov graf. Niti jedan od ta dva grafa nije kubni graf, tj. nije ga moguće izomorfno smjestiti na graf hiperkocke. Primijetimo da su 3-regularan graf sa slike 2 i Petersenov graf izomorfni grafovi, iako na prvi pogled to tako ne izgleda.

**Definicija 9.4.** *Kubna dimenzija* grafa  $G$ , u oznaci  $\dim_c(G)$ , je najmanji  $n$  za koji je  $G$  izomorfno smjestiv u  $Q_n$ .



Slika 11: Primjeri grafova koji nisu kubni

Za proizvoljan povezan kubni graf  $G$  s  $n$  vrhova vrijedi

$$\lceil \log_2 n \rceil \leq \dim_c(G) \leq n - 1, \quad (12)$$

pri čemu se donja granica postiže za put  $P_n$ , a gornja za zvijezdu  $K_{1,n-1}$ . Nadalje, za kubni graf s  $n$  vrhova sa svojstvom da je najmanji stupanj svakog vrha 2 vrijedi

$$\dim_c(G) \leq \frac{2(n-1)}{3}. \quad (13)$$

Prethodna dva rezultata nalaze se u [18].

U nastavku slijedi karakterizacija kubnih grafova i neki važni rezultati, a potom nekoliko primjera ovakvih grafova, kao i najmanja dimenzija hiperkocke na koju ih je moguće smjestiti.

**Definicija 9.5.** Graf  $G$  je kritičan ako je  $\chi(G-v) < \chi(G)$  za svaki  $v \in V(G)$ . Ako je  $G$  kritičan i  $k$ -kromatski, onda kažemo da je  $k$ -kritičan i vrijedi  $\chi(G-v) < k$ , za svaki  $v \in V(G)$ .

Uočimo da je u prethodnoj definiciji  $G-v$  pravi podgraf od  $G$  dobiven uklanjanjem jednog vrha iz  $G$ . Bitna karakteristika kritičnih grafova je povezanost. Svaki kritičan graf je povezan, jer bi u suprotnom postojala neka komponenta povezanosti koja bi imala isti kromatski broj kao čitav graf. Kritični grafovi su u uskoj vezi s kubnim grafovima. O tome govori sljedeći teorem [12].

**Teorem 9.1.** *Graf  $G$  je kubni ako i samo ako ne sadrži kritičan podgraf.*

Dakle, ako pronađemo kritičan podgraf u  $G$ , možemo zaključiti da graf nije kubni. Na primjer, ciklusi neparne duljine su kritični pa ne mogu biti kubni.

Prema [19], još jedna učinkovita metoda ispitivanja je li graf kubni je takozvano  $c$ -bojenje.

**Definicija 9.6.** Bridno bojenje povezanog grafa  $G$  zove se  $c$ -bojenje ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- i. na svakom putu u  $G$  postoji boja koja se pojavi neparan broj puta,
- ii. u svakom ciklusu od  $G$  svaka se boja pojavi paran broj puta.

Prema (i) bridovi proizvoljnog puta  $P_2$  u  $G$  bit će obojeni različitim bojama. Dakle, u  $G$  neće biti susjednih bridova obojenim istom bojom pa zaključujemo da je  $c$ -bojenje ujedno i pravilno bridno bojenje grafa. Sljedeća dva teorema dokazana su u [19].

**Teorem 9.2.** *Povezan graf  $G$  je kubni ako i samo ako dopušta  $c$ -bojenje.*

**Teorem 9.3.** *Neka je  $G$  konačan povezan kubni graf. Tada je  $\dim_c(G)$  najmanji broj boja potrebnih za  $c$ -bojenje u  $G$ .*

U [19] su dokazana još neka važna svojstva kubnih grafova, a tiču se nekih binarnih operacija nad kubnim grafovima. Navest ćemo rezultat o Kartezijevom produktu.

**Teorem 9.4.** *Neka su  $G_1$  i  $G_2$  konačni povezani kubni grafovi. Tada je*

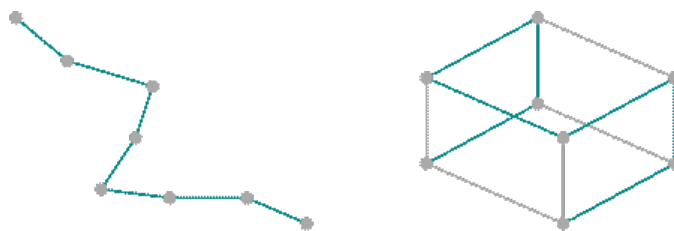
$$\dim_c(G_1 \square G_2) = \dim_c(G_1) + \dim_c(G_2).$$

U nastavku ćemo navesti neke od najvažnijih kubnih grafova, kao i najmanje dimenzije hiperkocke u koju ih je moguće smjestiti:

- Svaki put je kubni graf.

Put  $P_{n+1}$  smjestiv je u  $Q_n$ . Ovo je lako vidjeti jer put ne sadrži kritičan podgraf. Štoviše, put je smjestiv i u hiperkocku puno manje dimenzije (vidi sliku 12). Pretpostavimo da je  $P_m$  smjestiv u  $Q_n$ . Tada vrijedi  $m \leq 2^n$  jer je broj vrhova hiperkocke jednak  $2^n$ . Ako nejednakost logaritmujemo po bazi 2, dobijemo  $\log_2 m \leq n$ . S obzirom da je  $n$  cijeli broj, uzimamo  $n \geq \lceil \log_2 m \rceil$ . Primijetimo da je  $n$  upravo  $\dim_c(P_m)$  pa imamo  $\dim_c(P_m) \geq \lceil \log_2 m \rceil$ . Da bi vrijedila jednakost, morao bi postojati put u  $Q_n$  koji sadrži sve vrhove od  $Q_n$ . Takav put je onda Hamiltonov, a njegovo postojanje dokazano je u poglavlju 4. Zaključujemo da vrijedi

$$\dim_c(P_m) = \lceil \log_2 m \rceil.$$

Slika 12: Smještenje puta  $P_8$  u  $Q_3$ 

- Parni ciklusi  $C_{2k}$  su kubni grafovi.

Parni ciklusi su bipartitni i ne sadrže kritičan podgraf. S druge strane, svaki neparan ciklus je kritičan, stoga ne može biti kubni. Na sličan način kao za put, izračunat ćemo  $\dim_c(C_{2k})$ . Ranije smo pokazali da je hiperkocka  $Q_n$  bipancikličan graf za  $n \geq 2$ , odnosno da sadrži cikluse parnih duljina  $2k$ ,  $\forall 4 \leq k \leq 2^n$ . Prema tome, sadrži i razapinjujući ciklus duljine  $2^n$  i vrijedi  $2k = 2^n$ . Logaritmiranjem slijedi  $\log_2(2k) = n$ , tj.

$$\dim_c(C_{2k}) = \lceil \log_2(2k) \rceil.$$

Na isti način kao na slici 12, možemo smjestiti ciklus  $C_8$  na  $Q_3$ , s razlikom u jednom bridu koji spaja krajnji vrh s početnim.

- Svako stablo je kubni graf.

Ova tvrdnja dokazana je u [19]. S obzirom da su put  $P_n$  i zvijezda  $K_{1,n-1}$  također stabla, donja i gornja granica za  $\dim_c(T)$  slijedi iz nejednadžbe (12). Za stablo  $T$  s  $n$  vrhova vrijedi

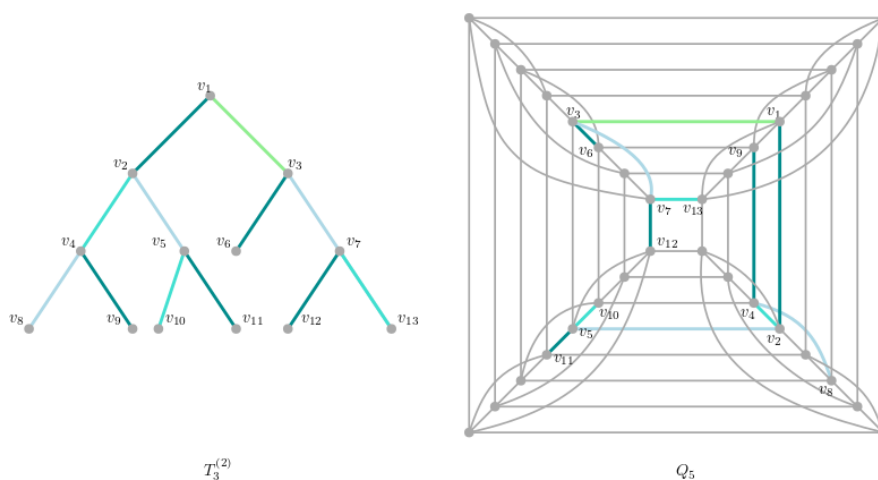
$$\lceil \log_2 n \rceil \leq \dim_c(T) \leq n - 1.$$

Sljedeći rezultat odnosi se na binarno stablo [2].

**Teorem 9.5.** Za binarno stablo  $T_h^{(2)}$  visine  $h$  vrijedi  $\dim_c(T_h^{(2)}) = h + 2$ .

Pokažimo da binarno stablo  $T_3^{(2)}$  dopušta  $c$ -bojenje i pokažimo način na koji može biti smješteno na hiperkocku. Prema teoremu 9.5,  $\dim_c(T_3^{(2)}) = 3 + 2 = 5$  pa će stablo biti smješteno na  $Q_5$ .





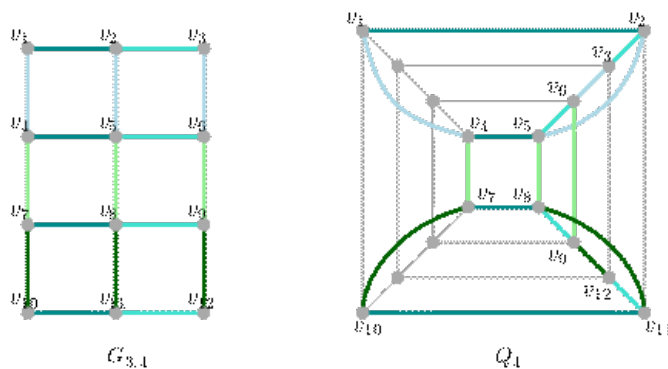
Slika 13:  $C$ -bojenje binarnog stabla visine 3 (lijevo) i smještenje istog na  $Q_5$  (desno)

- Za  $t \geq 2$   $t$ -dimenzionalna mreža  $G_{n_1, n_2, \dots, n_t} = P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots \square P_{n_t}$  je kubni graf jer je kartezijev produkt konačnih putova, koji su također kubni.

Prema teoremu 9.4, kubna dimenzija mreže jednaka je zbroju dimenzija puteva koje sadrži. Na primjer, za dvodimenzionalnu mrežu  $G_{3,4}$  vrijedi:

$$\dim_c(G_{3,4}) = \dim_c(P_3 \square P_4) = \dim_c(P_3) + \dim_c(P_4) = \lceil \log_2 3 \rceil + \lceil \log_2 4 \rceil = 4.$$

Dobili smo da je najmanja hiperkocka na koju je moguće smjestiti ovakvu mrežu  $Q_4$ , a na slici 14 je vidljivo da dopušta  $c$ -bojenje, odnosno da je kubni graf te je prikazan i način na koji ju možemo smjestiti na  $Q_4$ .



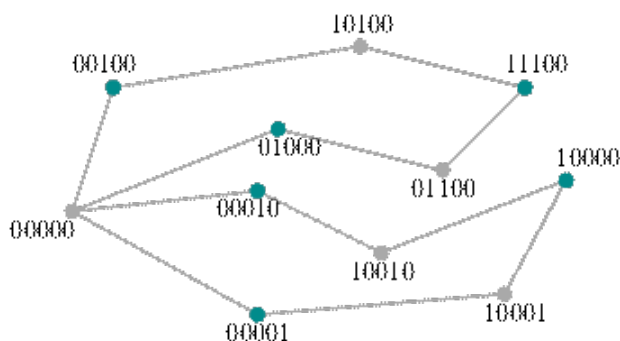
Slika 14:  $C$ -bojenje grafa  $G_{3,4}$  (lijevo) i smještenje na  $Q_4$  (desno)

## 9.2 Izometrijsko smještenje

Izometrijsko smještenje slično je izomorfnom, ali ne čuva susjednost nego udaljenost vrhova.

**Definicija 9.7.** Izometrijsko smještenje grafa  $M$  na graf  $G$  je funkcija  $f_i : V(M) \rightarrow V(G)$  takva da  $\forall u, v \in V(M)$  vrijedi  $d_M(u, v) = d_G(u, v)$ .

Graf  $M$  možemo izometrijski smjestiti na  $G$  ako i samo ako  $M \subseteq G$  i postoji funkcija izometrijskog smještenja. Bitno je napomenuti da nije svaki kubni graf izometrijski smjestiv na hiperkocku. Primjer se nalazi na slici 15. Radi se o bipartitnom grafu, pri čemu istoj particiji pripadaju vrhovi iste boje. Svi vrhovi označeni su uređenom petorkom nula i jedinica tako da se susjedni vrhovi razlikuju u točno jednoj koordinati. Uočimo da u ovom slučaju udaljenost nije sačuvana jer ako pogledamo krajnji lijevi (00000) i krajnji desni vrh (10000), koji se razlikuju u jednom elementu petorke, u hiperkocki bi trebali biti susjedi, a stvarna udaljenost između njih iznosi 3.



Slika 15: Kubni graf koji nije izometrijski smjestiv na hiperkocku

Grafove koji dopuštaju izometrijsko smještenje na graf hiperkocke zvat ćemo parcijalnim kockama.

**Definicija 9.8.** Podgraf  $H$  od  $G$  je izometričan ako vrijedi

$$d_H(u, v) = d_G(u, v) \quad \forall u, v \in V(H).$$

Graf  $G$  koji je izomorfan s nekim izometričnim podgrafom od  $Q_n$  za neki  $n$ , zovemo *parcijalna kocka*. Za takav graf postoji izometrijsko smještenje  $G$  u  $Q_n$ . Najmanji takav  $n$  označimo s  $\dim_i(G)$ . U nastavku ćemo se baviti karakterizacijom parcijalnih kocki, tj. grafova koje je moguće izometrijski smjestiti na graf hiperkocke. Trebat će nam pojam konveksnosti nekog podskupa vrhova grafa.

Podskup  $S$  skupa vrhova je konveksan ako sadrži najkraći put između svaka dva vrha koja su u njemu sadržana.

Neka je  $G = (V(G), E(G))$  bipartitan graf i  $e = uv$  brid u  $G$ . Definirajmo dvije particije od  $V(G)$  na sljedeći način:

$$V_{uv}(G) = \{x \in V; d(x, u) < d(x, v)\} \text{ i } V_{vu}(G) = \{x \in V; d(x, v) < d(x, u)\}$$

i uvedimo reflektivnu i simetričnu relaciju  $\Theta$  na skupu bridova grafa  $G$ . Pišemo  $e\Theta f$  ako  $f$  spaja vrhove iz  $V_{uv}(G)$  s vrhovima iz  $V_{vu}(G)$ .

Sljedeći teorem dokazan u [24] daje karakterizaciju izometrijski smjestivih grafova u hiperkocku.

**Teorem 9.6.** *Neka je  $G$  povezan graf sa skupom vrhova  $V(G)$  i skupom bridova  $E(G)$ . Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- i.  $G$  je izometrijski smjestiv u  $Q_n$  za neki  $n$ ,*
- ii.  $G$  je bipartitan i  $V_{uv}(G), V_{vu}(G)$  su konveksni skupovi  $\forall uv \in E(G)$ ,*
- iii.  $G$  je bipartitan i  $\Theta$  je tranzitivna (a onda i relacija ekvivalencije).*

**Teorem 9.7.** *Za povezan graf  $G$  sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- i.  $G$  je parcijalna kocka,*
- ii.  $G$  je bipartitan i  $d(x, u) = d(y, v)$  i  $d(x, v) = d(y, u)$  za bilo koji  $ab \in E$  i  $xy, uv \in F_{ab}$ , pri čemu je  $F_{ab} := \{uv \in E; u \in V_{ab}, v \in V_{ba}\}$ .*

Dokaz ćemo izostaviti, može se pronaći u [20]. Navedimo neke primjere grafova koji su parcijalne kocke.

- Svaka hiperkocka  $Q_m$  za  $m \leq n$  je izometrijski smjestiva na  $Q_n$ .

Ovo je očito jer se svaka hiperkocka  $Q_n$  može prikazati pomoću dvije kopije hiperkocke  $Q_{n-1}$ , čiji su odgovarajući vrhovi spojeni bridovima.

- Svako stablo je parcijalna kocka.

Ovo se lako pokaže. Uzmimo stablo s  $n$  vrhova i označimo njegovih  $n - 1$  bridova s  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ . Želimo pokazati da je stablo parcijalna kocka, tj. da ga za neki  $n$  možemo smjestiti na  $Q_n$  tako da udaljenost između vrhova ostane sačuvana. U tu svrhu, označimo sve vrhove  $(n - 1)$ -torkama nula i jedinica na način da korijenski vrh sadrži sve nule, a svaki drugi vrh sadrži

jedinice na mjestima  $i$  ukoliko se bridovi  $e_i$  nalaze na putu od korijenskog vrha do njega. Na ovaj način dobit ćemo graf koji se može smjestiti na  $Q_n$  jer je na isti način uređen, tj. tako da se svaki par susjednih vrhova razlikuje u točno jednoj koordinati. Također, ostat će sačuvana udaljenost vrhova jer će se vrhovi spojeni bridom razlikovati u jednoj koordinati. Primjerice, ako put između neka dva vrha sadrži 3 brida,  $(n - 1)$ -torke tih vrhova razlikovat će se u točno 3 koordinate.

- Kartezijev produkt parcijalnih kocki je parcijalna kocka [19].

Za  $t \geq 2$ ,  $t$ -dimenzionalna mreža  $G_{n_1, n_2, \dots, n_t} = P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots \square P_{n_t}$  je parcijalna kocka jer je kartezijev produkt konačnih putova, koji su također parcijalne kocke. Za puteve je jasno da se mogu izometrijski smjestiti na hiperkocku, uz isti način označavanja vrhova kao što je definirano za stabla. Dakle, možemo zaključiti i  $\dim_i(P_n) = n - 1$ .

Sljedeće što nas zanima je  $\dim_i(G)$ , odnosno, koji je najmanji prirodan broj  $n$  za koji se graf  $G$  može izometrijski smjestiti na hiperkocku  $Q_n$ . U nastavku slijedi nekoliko rezultata o ovom problemu, koji su razmatrani u [20].

**Teorem 9.8.** *Neka je  $G = (V, E)$  parcijalna kocka. Tada je*

$$\dim_i(G) = |E/\Theta|,$$

gdje je  $E/\Theta$  skup klasa ekvivalencije od  $\Theta$ .

*Dokaz.*  $E/\Theta$  možemo promatrati kao familiju različitih skupova  $F_{ab}$ . Ako je  $G$  konačan, možemo ga promatrati kao izometričan podgraf grafa  $Q_n$ . Tada su prema teoremu 9.7 bridovi iz svih  $F_{ab}$  paralelni bridovi u  $Q_n$ , što dokazuje tvrdnju.  $\square$

Sljedeći rezultat odnosi se na izometrijsko smještenje Kartezijevog produkta dva grafa na  $Q_n$ .

**Teorem 9.9.** *Za  $n \geq 2$ , neka je  $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$  Kartezijev produkt konačnih parcijalnih kocki  $G_i, i = 1, \dots, n$ . Vrijedi sljedeće:*

$$\dim_i(G) = \sum_{i=1}^n \dim_i(G_i).$$

Dokaz se nalazi u [20].

Navedimo  $\dim_i$  za neke specijalne grafove.

- Za stablo  $T$  s  $n$  vrhova vrijedi

$$\dim_i(T) = n - 1.$$

- Za ciklus parne duljine  $C_{2n}$ ,  $n \geq 2$  imamo

$$\dim_i(C_{2n}) = n.$$

- Za  $t$ -dimenzionalnu mrežu  $G_{n_1, n_2, \dots, n_t} = P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots \square P_{n_t}$ , prema teoremu 9.9 vrijedi

$$\dim_i(G_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_t - 1) = \sum_{i=1}^n n_i - t.$$

## Literatura

- [1] H. Abbot, M. Katchalski, *On the Construction of Snake In The Box Codes*, Utilitas Mathematica 40, 1991.
- [2] F. Afrati, C. H. Papadimitriou, G. Papageorgiou, *The complexity of cubical graphs*, Information and Control, 1985.
- [3] D. Allison, D. Paulusma *New bounds for the Snake-in-the-Box problem*  
URL: <https://arxiv.org/abs/1603.05119>
- [4] M. Aschbacher, *Finite group theory, volume 10*, Cambridge University Press, 2000.
- [5] L. W. Beineke, F. Harary, *The genus of the n-cube*, Canadian Journal of Mathematics, 1965.
- [6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications (volume 290)*, North-Holland, USA, 1976.
- [7] A. Brouwer, W. Haemers, *Spectra of Graphs*, 2012.
- [8] M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of Cuts and Metrics. Algorithms and Combinatorics*, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [9] R. Diestel, *Graph Theory, volume 173*, Springer Heidelberg New York, 2010.
- [10] E. A. Dixon, S. Goodman, *On the number of hamiltonian circuits in the n-cube*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1975.
- [11] T. Gallai, *Maximum-minimum sätze über graphen*, Acta Mathematica Hungarica 9(3-4), 1958.
- [12] M. R. Garey, R. L. Graham, *On cubical graphs*, Journal of Combinatorial Theory Series B, 1975.
- [13] F. Harary, J. P. Hayes, H. Wu, *A survey of the theory of hypercube graphs*, Computers Mathematics with Applications, 1988.
- [14] T. Harju, *Lecture Notes on Graph Theory*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014.
- [15] P. K. Jha, G. Slutzki, *Hypercubes, median graphs and products of graphs: some algorithmic and combinatorial results*, 1990.

- [16] M. Jungerman, *The non-orientable genus of the  $n$ -cube*, Pacific Journal of Mathematics 76, no. 2, 1978.
- [17] S. Klavžar, *Counting hypercubes in hypercubes*, Discrete Mathematics, 306 (22) 2964–2967
- [18] M. Livingston, Q. F. Stout, *Embeddings in hypercubes*, Mathematical and Computer Modelling, 1988.
- [19] S. Ovchinnikov, *Graphs and Cubes*, Springer Science Business Media, 2011.
- [20] S. Ovchinnikov, *Partial cubes: structures, characterizations, and constructions*, Discrete Mathematics, 308(23), 2008.
- [21] M. D. Plummer, L. Lovasz, *Matching Theory*, Elsevier Science, 1986.
- [22] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2000.
- [23] B. Zelinka, *Domatic numbers of cube graphs*, Mathematica Slovaca, 32(2), 1982.
- [24] URL:<http://ktiml.mff.cuni.cz/~gregor/hypercube/hypercube-course.htm>
- [25] *Properties of hypercubes*, 2016.  
URL: <https://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/87083/8/08chapter2.pdf>

## Sažetak

Hiperkocka je graf od velikog značaja u brojnim područjima znanosti jer se koristi kao struktura velikog broja superračunala prilagođenih radu s ogromnom količinom podataka i rješavanju i najkompliciranijih problema. Ovaj graf je  $n$ -povezan,  $n$ -regularan s relativno malim dijametrom. Detaljno su opisana važna svojstva kao bipartitnost, postojanje savršenog sparivanja, specijalni podgrafovi i ostalo. Objasnjena je matrica susjedstva hiperkocke koja se pohranjuje u računala umjesto samog grafa radi jednostavnosti, ako se radi o grafu s jako velikim brojem vrhova. Također, prikazan je način smještanja određenih grafova na hiperkocku.

**Ključne riječi:** hiperkocka, spektar grafa, automorfizmi, problem smještanja



## Hypercube graph

**Summary.** The hypercube is an important graph in many fields of science because it is used as the structure of a large number of supercomputers adapted to work with huge amount of data and solve the most complicated problems. This graph is  $n$ -connected,  $n$ -regular with a relatively short diameter. Important properties such as bipartiteness, egzistence of perfect matchings and special subgraphs and more are described in detail. The adjacency matrix of a hypercube, which is beacuse of simplicity stored in computers instead of the graph itself, is explained for simplicity. Also, it is shown how to embed certain graphs on a hypercube.

**Keywords:** hypercube, regularity, connectivity, embedding problem

## Životopis

Rođena sam 11. ožujka 1993. godine u Osijeku. Od 1999. do 2007. pohađala sam Osnovnu školu "Ivan Goran Kovačić" u Đakovu, a od 2001. do 2007. paralelno i Osnovnu glazbenu školu pri OŠ "Ivan Goran Kovačić" u Đakovu, instrument gitara. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike. Godine 2007. upisala sam Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Đakovu, smjer jezična gimnazija. Nakon završene srednje škole upisala sam Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje 2017. godine stječem akademski naziv prvostupnice matematike uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Kristiana Sabe na završnom radu "Redovi potencija". Iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studija radila sam brojne poslove od kojih bih istaknula posao agenta u službi za korisnike Hrvatskog Telekom, obavljanje administrativnih poslova u Dukat d.d., rad kao asistent u nastavi za učenike s posebnim obrazovnim potrebama u Osnovnoj školi "Vladimir Nazor", Đakovo te obavljanje stručne prakse u Erste banci u Đakovu. U slobodno vrijeme bavim se slikanjem, sviranjem gitare, a od nedavno pohađam i satove klavira u glazbenoj školi "Arija" u Đakovu.