Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi

Jurčić, Antonija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Antonija Jurčić

Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Antonija Jurčić

Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi

Završni rad

Mentor: izv.prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo neke primjene običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda u geometriji, fizici, biologiji te ekonomiji. Navest ćemo različite primjere problema koje ćemo modelirati pomoću diferencijalnih jednadžbi. Za rješavanje takvih problema ključna su dva koraka. Prvi korak je postavljanje jednadžbe koja opisuje vezu među veličinama koje se pojavljuju u tom problemu i zatim njihovo rješavanje pomoću metoda matematičke analize. Na samom početku definirat ćemo neke tipove običnih diferencijalnih jednadžbi koje ćemo koristiti u primjerima prilikom rješavanja samih jednadžbi.

Ključne riječi: diferencijalne jednadžbe, rješenje, modeliranje

Abstract

In this paper, we will study some applications of ordinary first - order differential equations in geometry, physics, biology, and economics. We will aducce different examples of problems that we will model using differential equations. Two steps are crucial to solving such problems.The first step is to set up an equation that describes the relationship between the quantities that appear in that problem and then solve them using the method of mathematical analysis. At the very beginning, we will define some types of ordinary differential equations that we will use in the examples when solving the equations themselves.

Keywords: differential equations, solution, modeling

Sadržaj

Uvod

Diferencijalna jednadžba je matematička jednadžba koja povezuje neku funkciju y (tj. $x \to y(x)$) i neke njene derivacije. Diferencijalna jednadžba je obična ako joj nepoznata funkcija ovisi samo o jednoj varijabli te opisuje vezu između te funkcije i njenih derivacija. Ove jednadžbe su od velike važnosti u prirodnim i tehničkim znanostima. Prirodni zakon može se shvatiti kao nužna veza između sadašnjeg stanja jedne pojave i stanja neposredno nakon toga. Takav zakon prikazujemo diferencijalnom jednadžbom, tj. veza fizikalnih veličina i njihovih promjena u prostoru i vremenu dana je diferencijalnom jednadžbom. Većina diferencijalnih jednadžbi znatno je složenija i teže se rješava.
Primjeri:

1. Diferencijalna jednadžba $y''(x) + siny(x) = 0$ pojavljuje se kod proučavanja gibanja njihala.

2. $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c \cos\omega t$ pojavljuje se kod proučavanja električkih krugova.

3. $y''(x) + xy(x) = 0$ pojavljuje se kod astronomskih istraživanja i na mnogim drugim mjestima.

Samo rješavanje diferencijalnih jednadžbi zauzima pažnju znanstvenika od početka razvoja diferencijalnog računa do danas. Diferencijalne jednadžbe prvog reda uspješno je rješavao švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1655.-1705.). Jednu važnu i vrlo općenitu metodu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi uveo je francuski matematičar Joseph Lagrange (1736.-1813.).

Jacob Bernoulli (1655. - 1705.)

1 Osnovne definicije i neki tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi

Diferencijalnom jednadžbom zovemo jednadžbu koja sadrži derivacije ili diferencijale nepoznate funkcije.
Ako nepoznata funkcija ovisi o jednom argumentu, diferencijalna jednadžba zove se obična, a ako ovisi od nekoliko argumenata pa sadrži parcijalne derivacije te nepoznate funkcije, tada se jednadžba zove parcijalna diferencijalna jednadžba. Red diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koju diferencijalna jednadžba sadrži.
U ovom radu primjeri će sadržavati samo obične diferencijalne jednadžbe prvog reda koje imaju oblik:

$$F(x,y,y')=0,$$

gdje je x argument, a y tražena funkcija.
Diferencijalna jednadžba se često svodi na oblik:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

U tom slučaju možemo za nepoznatu funkciju uzeti y (kao funkciju od x), ali i x (kao funkciju od y).
Funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu zove se *rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe.*
Rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe zove se općim ako sadrži toliko neovisnih konstanti po volji koliki je red diferencijalne jednadžbe. Stoga slijedi da opće rješenje dif. jednadžbe n-tog reda uvijek sadrži n neovisnih konstanti $C_1, C_2, ..., C_n$.
Geometrijski svakom partikularnom integralu diferencijalne jednadžbe odgovara njegova grafička predodžba, tj. graf u obliku ravninske krivulje koja se zove integralna krivulja te jednadžbe. Za određivanje jedne posebne krivulje familije koja odgovara uvjetima konkretnog zadatka potrebno je u opće rješenje uvrstiti početne uvjete, a ti uvjeti su točke $x = x_0, y = y_0$ (koordinate jedne točke za diferenc. jedn. prvog reda) kojom ta krivulja prolazi.
Rješenje diferencijalne jednadžbe koje se ne može dobiti iz općeg rješenja ni za kakvu vrijednost konstante C zove se *singularno rješenje.*

1.1 Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama su one kod kojih su varijable x i y separirane tj. daju se odvojiti. U tom slučaju zadana diferencijalna jednadžba se svodi na sljedeći oblik:

$$f(x)dx=F(y)dy$$

Rješenje te jednadžbe dobivamo tako da integriramo obje njene strane:

$$\int f(x)dx = \int F(y)dy + C$$

Pretpostavka za postojanje rješenja tih integrala jest neprekidnost funkcija f i F. Znamo da nam u tom slučaju Peanov teorem garantira lokalnu rješivost problema, dok nam jedinstvenost rješenja daje Lipschitzovost funkcije f i postojanje parcijalne derivacije druge varijable neprekidne u svakoj točki. Mogućnost integriranja obje strane jednadžbe leži u tome što se varijable x i y mogu razdvojiti - separirati.
Rješavanje diferencijalnih jednadžbi ovog tipa obično se svodi na nekoliko koraka:

1. derivaciju y' napišemo u obliku $\dfrac{dy}{dx}$
2. riješimo se nazivnika
3. diferencijalna jednadžba se podijeli takvim izrazom da se varijable separiraju
4. diferencijalna jednadžba se integrira zasebno po svakoj od separiranih varijabli.

1.2 Homogene diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba oblika y'=f(x,y) zove se *homogena*, ako f(x,y) možemo prikazati kao funkciju omjera varijabli x i y, tj. kao $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, pa jednadžba prima oblik:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

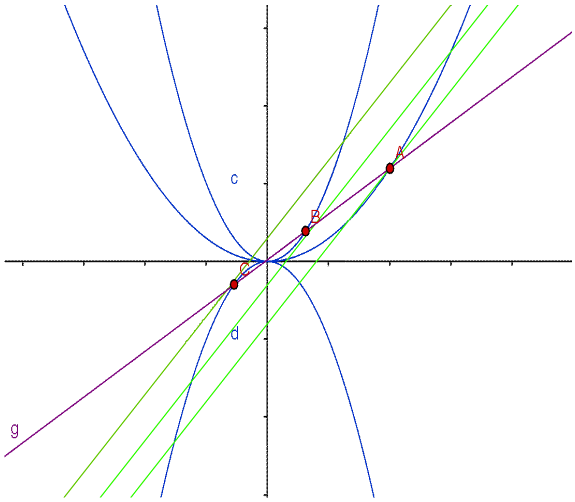
Iz toga slijedi da zbroj eksponenata od x i y u svakom članu homogene diferencijalne jednadžbe oblika P(x,y)dx + Q(x,y)dy=0 mora biti isti.
Rješavajući homogenu diferencijalnu jednadžbu svodimo ju na jednadžbe sa separiranim varijablama i to pomoću supstitucije:

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \text{ i}$$
$$y' = xz' + z$$

2 Primjene diferencijalnih jednadžbi u geometriji

Sama diferencijalna jednadžba prvog reda ima svoje geometrijsko značenje. Iz diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = f(x, y)$ neposredno slijedi da svakoj točki ravnine diferencijalna jednadžba dodjeljuje tangens smjera $y' = \text{tg}\alpha$ u toj točki, tj. određuje polje smjerova u ravnini.

Primjer 2.1. *Odredimo diferencijalnu jednadžbu familije parabola $y = Cx^2$ te skup točaka u kojima sve parabole iz te familije imaju koeficijent smjera tangente jednak 1.*



Slika uz primjer 2.1

Eliminacijom parametra C iz

$$y = Cx^2 \quad \text{i} \quad y' = 2xC$$

dobiva se diferencijalna jednadžba zadane familije parabola:

$$2y - xy' = 0.$$

Preostaje odrediti skup točaka u kojima sve parabole iz te familije imaju koeficijent smjera tangente jednak 1. Iz sustava:

$$y = Cx^2 \quad \text{i} \quad 1 = 2xC$$

zaključujemo da je to pravac $y = \dfrac{x}{2}$. Dakle, za svaki C parabola $y = Cx^2$ u točki presjeka s pravcem $y = \dfrac{x}{2}$ ima koeficijent smjera tangente jednak 1.

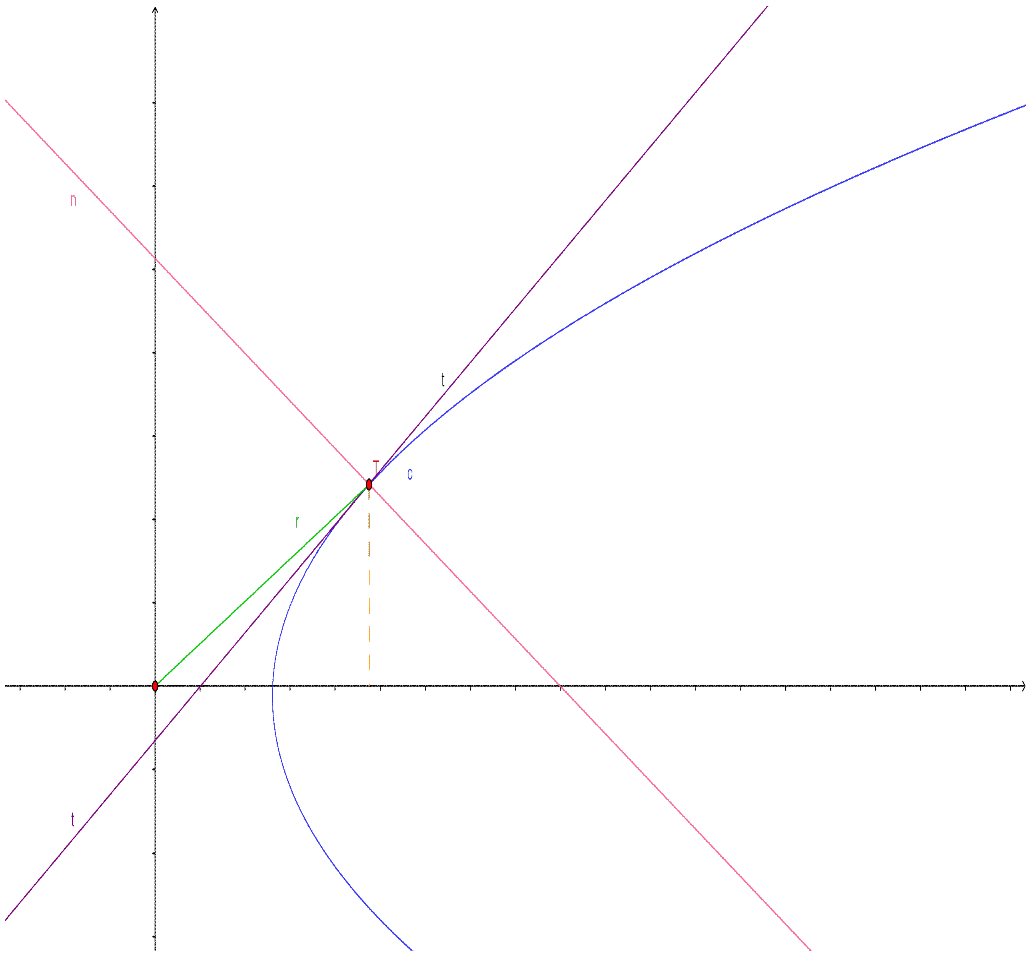
Primjer 2.2. *Odredimo sve krivulje sa svojstvom da je u bilo kojoj točki tih krivulja radijus vektor r jednak duljini odsječka normale između krivulje i osi x.*

Radijus vektor krivulje u nekoj točki T(x,y) je

$$r = |OT| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

dok je duljina odsječka normale od točke T do sjecišta s x-osi

$$N = y\sqrt{1 + y'^2}.$$



Slika uz primjer 2.2

Kako je prema uvjetu zadatka r=N, slijedi

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y\sqrt{1 + y'^2} \ .$$

Kvadriranjem izraza dobivamo

$$x^2 + y^2 = y^2(1 + y'^2)$$
$$x^2 + y^2 = y^2 + y^2 y'^2$$
$$y^2 y'^2 = x^2$$

$$y'^2 = \frac{x^2}{y^2}$$
$$y' = \pm\frac{x}{y}\ .$$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama. Sada promatramo dva slučaja: $y' = \frac{x}{y}$ i $y' = -\frac{x}{y}$.

1. slučaj: Ako je $y' = \frac{x}{y}$, tada imamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$
$$xdx = ydy,$$
$$\int xdx = \int ydy,$$
$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C,$$
$$x^2 - y^2 = C\ .$$

Kao rješenje smo dobili familiju jednakostraničnih hiperbola.

2. slučaj: Ako je $y' = -\frac{x}{y}$, tada imamo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$
$$ydy = -xdx,$$
$$\int xdx = -\int ydy$$
$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$
$$x^2 + y^2 = C\ .$$

U ovom drugom slučaju kao rješenje dobivamo familiju kružnica sa središtem u ishodištu.

3 Primjene diferencijalnih jednadžbi u fizici i biologiji

Diferencijalne jednadžbe omogućuju matematički zapis zakona koji određuju fizikalne fenomene u prirodi kao što su npr. za Newtonov zakon hlađenja, Drugi Newtonov zakon za opis gibanja u polju sile, raspad atoma, zagrijavanje i hlađenje tijela, istjecanje fluida i sl. Navest ćemo neke primjere kroz koje ćemo vidjeti široku primjenu ovih jednadžbi u fizikalnim zakonima.

Primjer 3.1. *Točka mase m giba se pravocrtno pod djelovanjem sile F koja je proporcionalna vremenu t i obrnuto proporcionalna brzini gibanja v. Odredimo ovisnost između brzine v i vremena t ako je točka započela gibanje iz stanja mirovanja.*

Prema drugom Newtonovu zakonu je:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

gdje je $\frac{dv}{dt}$ akceleracija gibanja, pa prema uvjetu zadatka imamo

$$m\frac{dv}{dt} = k\frac{t}{v}\Big|vdt\ .$$

Traženo rješenje dobivamo rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

$$mvdv = ktdt,$$
$$m\int vdv = k\int tdt,$$
$$m\frac{v^2}{2} = k\frac{t^2}{2} + C.$$

Opće rješenje danog problema je:

$$m\frac{v^2}{2} = k\frac{t^2}{2} + C$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta $v = 0$ i $t = 0$ dobivamo C=0, pa je

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Primjer 3.2. *Okrugla pločica rotira u tekućini. Djelovanje trenja na pločicu usporava rotaciju i to proporcionalno kutnoj brzini ω okretaja. Izrazimo kutnu brzinu kao funkciju vremena ovisnu o t ako je poznato da se za 25 sekundi od početka gibanja kutna brzina smanjila od 100 na 50 okretaja u sekundi.*

Označimo li s $\omega(t)$ kutnu brzinu u trenutku t (odnosno broj okretaja pločice u sekundi u trenutku t), tada će $\frac{d\omega}{dt}$ biti promjena kutne brzine u trenutku t. Prema uvjetu zadatka dobivamo:

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti, dok je predznak minus pokazatelj da je funkcija $\omega(t)$ padajuća, pa je $\frac{d\omega}{dt} < 0$. Dobili smo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama koju rješavamo na sljedeći način:

$$\int\frac{d\omega}{\omega} = -k\int dt,$$
$$ln|\omega| = -kt + ln|C|,$$
$$ln\left|\frac{\omega}{C}\right| = -kt,$$
$$\omega = Ce^{-kt}.$$

Uvrštavanjem $\omega = 100$ i t=0 dobivamo $C = 100$, pa je

$$\omega = 100e^{-kt}. \tag{1}$$

Koeficijent proporcionalnosti k ćemo odrediti iz drugog uvjeta $\omega = 50$ i $t = 25$:

$$50 = 100e^{-25k},$$
$$1 = 2e^{-25k},$$

pa slijedi da je

$$k = \frac{ln2}{25} = 0.04ln2.$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo:

$$\omega(t) = 100e^{(-0.04ln2)t}$$

i to je tražena kutna brzina izražena kao funkcija ovisna o t.

Primjer 3.3. *Newtonow zakon hlađenja glasi:"Promjena temperature objekta u nekom trenutku proporcionalna je razlici temperature objekta u tom trenutku i temperature okoline." Koristeći ovaj zakon riješite sljedeći problem: U hotelskoj sobi temperature 20 °C policija je u ponoć otkrila tijelo žrtve. Temperatura tijela bila je 26 °C, a 2h kasnije 24 °C . Kada se otprilike dogodio zločin?*

Označimo: T(t)-temperatura objekta u trenutku t
T_{OK}-temperatura okoline .

$\frac{dT}{dt} = k(T_{objekta} - T_{OK})$ Newtonov zakon u matematičkom zapisu

$T_{OK} = 20$°C , k-konstanta proporcionalnosti
$T(0) = 26$°C
$T(2) = 24$°C
Zanima nas trenutak t kada je T(t)=36.5°C .

$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)/dt/ : (T - 20) \neq 0$

$\int \frac{dT}{T-20} = k \int dt,$

$ln|T - 20| = kt + c \ , c \in \mathbb{R}$
$T - 20 = ce^{kt}, \ c \neq 0$
$\underline{T(t) = 20 + ce^{kt}, \ \ c \in \mathbb{R}}$

$T(0) = 26$°C
$26 = 20 + c \Rightarrow$ c=6
$T(2) = 24$°C
$24 = 20 + 6e^{2k}$

$2 = 3e^{2k}/\ln$
$k = -0.2027$.
Uvrštavanjem k u T(t) dobivamo:
$\underline{T(t) = 20 + 6e^{-0.2027t}}$
$36.5 = 20 + 6e^{-0.2027t}$
$t = -4.98$
$\underline{t \approx 19:00}$ h. (Stoga, zločin se dogodio oko 19:00 sati.)

- **Modeli rasta populacije (primjena u biologiji)**

Malthusov model populacije glasi:"Brzina rasta populacije u trenutku t proporcionalna je broju jedinki u tom trenutku."
Jednadžba modela glasi:

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

gdje je

t-vrijeme,

P(t)-broj jedinki u trenutku t,

k-koeficijent proporcionalnosti.
Riješimo gornju diferencijalnu jednadžbu:

$$\int \frac{dP}{P} = k \int dt,$$

$$ln|P| = kt + C, \Rightarrow P = Ce^{kt} \ .$$

C je konstanta koju možemo odrediti ako znamo početnu populaciju $P(0) = P_0$. Tada iz $P(0) = Ce^0 = C$, pa je rješenje modela populacije dano formulom:

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Primjer 3.4. *Stanovništvo gradića raste proporcionalno postojećem broju stanovnika. Ako se nakon 2 godine broj stanovnika udvostručio, a nakon 3 godine broji 20 000 stanovnika, izračunaj početni broj stanovnika.*

Označimo sa N(t) broj stanovnika u vremenu t i početni broj stanovnika sa N_0. Naša diferencijalna jednadžba ima oblik:

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0, \text{ koja ima rješenje: } N(t) = ce^{kt} \ .$$

Za početne uvjete: t=0, $N(0) = N_0 \Rightarrow N_0 = ce^{k0} \Rightarrow c = N_0$ pa je $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Nakon 2 godine populacija se udvostručuje: $t = 2$, $N(2) = 2N_0 \Rightarrow 2N_0 = N_0 e^{2k}$

$ln2$=2k $lne \Rightarrow k = \frac{1}{2} ln2 = 0.3465 \Rightarrow k \approx 0.3465$.

Dakle, naša diferencijalna jednadžba ima oblik:

$$N(t) = N_0 e^{0.3465t} \ .$$

Broj stanovnika nakon 3 godine iznosi 20 000, tj. za $t = 3$ imamo $N(3) = 20000$.

Stoga, dobivamo $20000 = N_0 e^{3 \cdot 0.3465}$ odnosno: $20000 = N_0 e^{1.0397} = 2.8284 N_0 \Rightarrow N_0 = 7071$.

Gradić je na početku promatranja imao $N_0 = 7071$ stanovnika.

4 Primjena diferencijalnih jednadžbi u ekonomiji

Mnogi ekonomski problemi mogu se formulirati kao ekonomsko-matematički model i zatim rješavati adekvatnim matematičkim metodama. Jedan od mogućih pristupa jest onaj koji se primjenjuje u okviru matematičke ekonomije. Pritom se rješavaju odgovarajuće diferencijalne jednadžbe.

Primjer 4.1. *Štediša je oročio 5000kn uz kamatnu stopu koja se računa kontinuirano, sa* 8.5% *u prvih 4 godine i* 9.25% *za naredne 3 godine. Izračunaj koliko će biti na računu, nakon 7 godina.*

U početku je bilo 5000kn $\Rightarrow N(0) = 5000$ i za prve 4 godine k=0.085.

Naša diferencijalna jednadžba ima oblik: $\dfrac{dN}{dt} - 0.085N = 0$, čije je rješenje:

$$N(t) = ce^{kt} = ce^{0.085t} (0 \leqslant t \leqslant 4).$$

Za početne uvjete: $t = 0 \Rightarrow 5000 = ce^{0 \cdot 0.085} = c \Rightarrow c = 5000$, $N(t) = 5000e^{0.085t}$.

Nakon 4 godine na računu je za t=4, $N(4) = 5000e^{4 \cdot 0.085} = 7024.74kn$.

Vrijednost $7024.74kn$ je početni uvjet za drugi dio zadatka:

U početku je bilo $7024.74kn \Rightarrow N(0) = 7024.74$ i za naredne 3 godine je $k = 0.0925$.

Naša diferencijalna jednadžba ima oblik:

$$\frac{dN}{dt} - 0.0925N = 0$$

koja ima rješenje:

$N(t) = ce^{kt} = ce^{0.0925t} (0 \leqslant t \leqslant 3) \Rightarrow$ Stoga, dobivamo: za t=0,

$7024.74 = ce^{0 \cdot 0.0925} = c \Rightarrow c = 7024.74$, pa je $N(t) = 7024.74e^{0.0925t}$, za $t \in [0, 3]$.

Nakon naredne 3 godine na računu je: $N(3) = 7024.74e^{0.0925 \cdot 3} = 9271.44kn$.

Stoga, nakon 7 godina na računu će biti $9271.44kn$.

Literatura

[1] M. Alić , *Obične diferencijalne jednadžbe* , Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2001.

[2] B. Apsen, *Riješeni zadaci više matematike uz drugi dio repetitorija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.

[3] I. Crnjac, *Obične diferencijalne jednadžbe* , vježbe na Odjelu za matematiku, Osijek 2019.

[4] S. Majstorović, *Populacijska i logistička jednadžba-Primjene diferencijalnog i integralnog računa II* , predavanja na Odjelu za matematiku, Osijek 2019.

[5] M. Vijuga, *Riješeni zadaci iz više matematike* , www.moje-instrukcije.com, 23.8.2020.