# Kronekerov produkt i primjene

**Petrović, Marijeta**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Marijeta Petrović**

# Kroneckerov produkt i primjene

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Marijeta Petrović**

# Kroneckerov produkt i primjene

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2020.

# Sažetak

U ovom završnom radu definirat ćemo Kroneckerov produkt te navesti i dokazati osnovna svojstva istog. Također, definirat ćemo Kroneckerovu sumu i vidjeti kako je ona povezana sa Kroneckerovim produktom. Osim toga, odrediti ćemo svojstvene vrijednosti za Kroneckerov produkt i sumu. Na kraju ćemo pokazati kako nam svojstvene vrijednosti Kroneckerove sume mogu pomoći u rješavanju matričnih jednadžbi.

# Ključne riječi

Kroneckerov produkt, svojstva Kroneckerovog produkta, Kroneckerova suma, vec-operator, Sylvestrova jednadžba, simetrični Kroneckerov produkt

# Kronecker product and applications

# Summary

In this paper, we will define the Kronecker product and list and prove its basic properties. We will also define the Kronecker sum and see how it relates to the Kronecker product. In addition, we will list the eigenvalue expressions for the Kronecker product and the sum. Finally, we will show how the eigenvalues of the Kronecker sum can help us solve matrix equations.

# Key words

Kronecker product, properties of the Kronecker product, Kronecker sum, vec-operator, Sylvester equation, symmetric Kronecker product

# Sadržaj

# 1 Uvod

Kroneckerov produkt dobio je ime po njemačkom matematičaru Leopoldu Kroneckeru, ali ovaj produkt prvi je upotrijebio Johann Georg Zehfuss 1858. godine. Kroneckerov produkt, u oznaci $\otimes$, je produkt dvije proizvoljne matrice koji za rezultat daje blok matricu. Zanimljiva prednost Kroneckerovog produkta u odnosu na standardno množenje matrica je ta što matrice ne moraju biti ulančane.

U Poglavlju 2 ovog završnog rada definirati ćemo Kroneckerov produkt te navesti i dokazati njegova osnovna svojstva. U Poglavlju 3 definirat ćemo Kroneckerovu sumu i vidjeti povezanost sa Kroneckerovim produktom. Primjena Kroneckerovog produkta je raznolika tako se Kroneckerov produkt koristi u linearnoj algebri, matričnom računu, teoriji sustava, ali i u programiranju. U Poglavlju 3 navesti ćemo osnovne ideje rješavanja matričnih jednadžbi i definirati simetričan Kroneckerov produkt.

# 2 Kroneckerov produkt

## 2.1 Definicija

Kroneckerov produkt definira se za dvije proizvoljne matrice nad bilo kojim poljem. S obzirom na standardno množenje matrica, Kroneckerov produkt je općenitiji način na koji možemo pomnožiti neke dvije matrice što možemo uočiti već u samoj definiciji Kroneckerovog produkta.

**Definicija 1** *Neka su $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{F})$ , gdje je $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva. Kroneckerov produkt matrica $A$ i $B$ definira se kao*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{pr\times qs}(\mathbb{F}).$$

Očito je Kroneckerov produkt dijagonalnih matrica opet dijagonalna matrica. Isto vrijedi i za gornjetrokutaste te donjetrokutaste matrice.
Kako bi nam definicija Kroneckerovog produkta bila jasnija navedimo primjer:

**Primjer 1** *Neka su zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} B & 2B & 3B \\ 2B & 3B & 4B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 9 & 6 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 2A & A \\ 3A & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 12 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Iz primjera je vidljivo da Kroneckerov produkt općenito nije komutativan,
tj. $A \otimes B \neq B \otimes A$ iako su produkti $A \otimes B$ i $B \otimes A$ jednakog tipa.
U sljedećim primjerima pogledajmo Kroneckerov produkt jedinične i neke proizvoljne matrice. Taj nam je produkt bitan u definiranju Kroneckerove sume koju ćemo spomenuti nešto kasnije.

**Primjer 2** *Neka je $I_2$ jedinična matrica reda 2 te neka je $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Tada vrijedi:*

$$I_2 \otimes A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

*Ukoliko umjesto $I_2$ upotrijebimo matricu $I_n$, $n > 2$, dobivamo blok dijagonalnu matricu pri čemu se matrica $A$ ponavlja $n$ puta na dijagonali.*

Kako za Kroneckerov produkt ne vrijedi komutativnost pogledajmo $A \otimes I_2$.

**Primjer 3** *Neka je $A$ proizvoljna matrica reda 2. Tada je:*

$$A \otimes I_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

*Proširenje na proizvoljnu matricu $A$ te $I_n, n > 2$ ovdje je očito.*

## 2.2 Svojstva

Kako bi shvatili primjenu Kroneckerovog produkta navest ćemo njegova osovna svojstva i dokazati neka od njih. Kroneckerov produkt ima neka svojstva koja vrijede i kod standardnog množenja matrica kao što su npr. asocijativnost i distributivnost s obzirom na zbrajanje matrica, dok se rezultati kod inverza i transponiranja razlikuju. U sljedećem teoremu navesti ćemo i dokazati nekoliko osnovnih svojstava Kroneckerovog produkta.

**Teorem 1** *Neka je $A \in M_{p\times q}(\mathbb{F})$ , $0_{m\times n}$ nulmatrica, $\alpha \in \mathbb{F}$, gdje je $\mathbb{F}$ neko polje. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

*(1)* $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B), \forall\alpha \in \mathbb{F}, \forall B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$

*(2)* $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$, *za* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}), C \in \mathcal{M}_{s\times t}(\mathbb{F})$

*(3)* $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$, *za* $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$

*(4)* $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$, *za* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F}), C \in \mathcal{M}_{s\times t}(\mathbb{F})$

*(5)* $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, *za* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$

*(6)* $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$, *za* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$

*(7)* $A \otimes 0_{m\times n} = 0_{m\times n} \otimes A = 0_{pm\times qn}$

Dokaz:

Dokaz ovih svojstava se provodi primjenom definicije Kroneckerovog produkta i osnovnih svojstava matričnog množenja.

$$(1)\quad (\alpha A)\otimes B = (\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}) \otimes B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{p1} & \dots & \alpha a_{pq} \end{bmatrix} \otimes B$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}B & \dots & \alpha a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{p1}B & \dots & \alpha a_{pq}B \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix} = \alpha(A\otimes B)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}B & \dots & \alpha a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{p1}B & \dots & \alpha a_{pq}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha B & \dots & a_{1q}\alpha B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}\alpha B & \dots & a_{pq}\alpha B \end{bmatrix} = A\otimes(\alpha B)$$

$$(2)\quad (A\otimes B)\otimes C = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix} \otimes C = \begin{bmatrix} (a_{11}B)\otimes C & \dots & (a_{1q}B)\otimes C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{p1}B)\otimes C & \dots & (a_{pq}B)\otimes C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(B\otimes C) & \dots & a_{1q}(B\otimes C) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(B\otimes C) & \dots & a_{pq}(B\otimes C) \end{bmatrix} = A\otimes(B\otimes C)$$

$$(3)\quad A\otimes(B+C) = \begin{bmatrix} a_{11}(B+C) & \dots & a_{1q}(B+C) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(B+C) & \dots & a_{pq}(B+C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B+a_{11}C & \dots & a_{1q}B+a_{1q}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B+a_{p1}C & \dots & a_{pq}B+a_{pq}C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}C & \dots & a_{1q}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}C & \dots & a_{pq}C \end{bmatrix} = (A\otimes B)+(A\otimes C)$$

$$(4)\quad (A+B)\otimes C = (\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}) \otimes C$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1q}+b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & \dots & a_{pq}+b_{pq} \end{bmatrix} \otimes C = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})C & \dots & (a_{1q}+b_{1q})C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{p1}+b_{p1})C & \dots & (a_{pq}+b_{pq})C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}C+b_{11}C & \dots & a_{1q}C+b_{1q}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}C+b_{p1}C & \dots & a_{pq}C+b_{pq}C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}C & \dots & a_{1q}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}C & \dots & a_{pq}C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}C & \dots & b_{1q}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}C & \dots & b_{pq}C \end{bmatrix} = (A\otimes C)+(B\otimes C)$$

$$(5)\quad (A\otimes B)^T = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \dots & a_{p1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q}B^T & \dots & a_{pq}B^T \end{bmatrix} = A^T \otimes B^T$$

$$(6)\quad (A\otimes B)^* = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}}B^* & \dots & \overline{a_{p1}}B^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1q}}B^* & \dots & \overline{a_{pq}}B^* \end{bmatrix} = A^* \otimes B^*$$

$$(7)\quad A\otimes 0_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}0 & \dots & a_{1q}0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}0 & \dots & a_{pq}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0_{pm\times qn}$$

$$0_{mxn}\otimes A = \begin{bmatrix} 0A & \dots & 0A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0A & \dots & 0A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0_{pm\times qn}$$

$\square$

**Teorem 2** *Neka je $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$, $B \in M_{r\times s}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{q\times v}(\mathbb{F})$ i $D \in M_{s\times u}(\mathbb{F})$. Tada je*

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC \otimes BD$$

.

*Dokaz:*

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(C\otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \dots & c_{1v}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}D & \dots & c_{qv}D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q a_{1i}c_{i1}BD & \dots & \sum_{i=1}^q a_{1i}c_{iv}BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^q a_{pi}c_{i1}BD & \dots & \sum_{i=1}^q a_{pi}c_{iv}BD \end{bmatrix} = AC\otimes BD\end{aligned}$$

$\square$

Sljedeći teorem je vrlo važan za primjenu Kroneckerovog produkta a u njemu su dane svojstvene vrijednosti za Kroneckerov produkt.

**Teorem 3** *Neka su $A \in \mathcal{M}_{q\times q}$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times p}$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_i, i = 1,\ldots,q$ i $\mu_j, j = 1,\ldots,p$, redom. Tada su svojstvene vrijednosti matrice $A \otimes B$ dane s*

$$\lambda_i \cdot \mu_j, i = 1,\ldots,q, j = 1,\ldots,p.$$

**Propozicija 1** *Neka je $A \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{F})$. Skupovi svojstvenih vrijednosti od $A \otimes B$ i $B \otimes A$ su jednaki.*

*Dokaz*: Vidi [4, str. 245]

Osim ovih navedenih i dokazanih svojstava postoje svojstva Kroneckerovog produkta koja vrijede za neke dvije kvadratne matrice.

**Korolar 1** *Ako su $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{m\times m}$ kvadratne matrice redova $n$ i $m$. Onda vrijede sljedeća svojstva:*

1. $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) tr(B)$
2. $\det(A \otimes B) = (\det A)^p (\det B)^q = \det(B \otimes A)$.

*Dokaz*:
1. Trag matrice jednak je sumi svojstvenih vrijednosti matrice. Ako su svojstvene vrijednosti matrice $A$ jednake $\alpha_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ i svojsteve vrijednost od $B$ jednake $\beta_j$ za $j = 1, 2, \ldots, m$, tada

$$tr(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i \beta_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \beta_j = tr(A) tr(B)$$

.

2. Determinanta matrice jednaka je produktu svojstvenih vrijednosti pa imamo da je $det(A \otimes B) = \prod_{i=1}^{mn} \lambda_i$, gdje su $\lambda_i$ svojstvene vrijednosti Kroneckerovog produkta $A \otimes B$. Tada prema Teoremu 3 imamo:

$$det(A \otimes B) = \prod_{i=1}^{mn} \lambda_i = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (\alpha_j \beta_k) = (\prod_{j=1}^{n} \alpha_j^m)(\prod_{k=1}^{m} \beta_k^n) = (detA)^m (detB)^n$$

□

U standardnom matričnom množenju lako je pronaći ne-nul matricu za koju vrijedi $A^2 = 0$, no kod Kroneckerovog produkta to nije slučaj. O tome nam govori sljedeći korolar.

**Korolar 2** *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$. Tada $A \otimes B = 0_{mp\times nq}$ ako i samo ako je $A = 0_{m\times n}$ ili $B = 0_{p\times q}$.*

**Teorem 4** *Ako su $A$ i $B$ normalne, onda je i $A \otimes B$ normalna.*

*Dokaz*:

Kako su prema pretostavci $A$ i $B$ normalne vrijedi $AA^T = A^TA$ i $BB^T = B^TB$. Koristeći se time, svojstvom (5) iz Teorema 1 pa zatim Teoremom 2 slijedi:

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)^T(A \otimes B) &= (A^T \otimes B^T)(A \otimes B) \\
&= A^TA \otimes B^TB \\
&= AA^T \otimes BB^T \\
&= (A \otimes B)(A \otimes B)^T.
\end{aligned}$$

□

**Teorem 5** *Ako su $A \in \mathcal{M}_q$ i $B \in \mathcal{M}_p$ regularne matrice, onda je $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*

Dokaz:
Koristeći Teorem 2 slijedi:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_p \otimes I_q = I_{pq}.$$

□

# 3 Kroneckerova suma

## 3.1 Definicija

Za neke dvije kvadratne matrice možemo definirati Kroneckerovu sumu na sljedeći način:

**Definicija 2** *Neka je $A \in \mathcal{M}_q$ i $B \in \mathcal{M}_p$ . Tada je Kroneckerova suma $A \oplus B$ definirana izrazom:*

$$A \oplus B = I_p \otimes A + B \otimes I_q.$$

Pogledajmo primjer za Kroneckerovu sumu.

**Primjer 4** *Neka su zadane sljedeće matrice: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Tada je :*

$$A \oplus B = (I_2 \otimes A) + (B \otimes I_3) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \oplus A = (I_3 \otimes B) + (A \otimes I_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz primjera možemo zaključiti da općenito komutativnost za Kroneckerovu sumu ne vrijedi, odnosno $A \oplus B \neq B \oplus A$.

Isto tako lako se provjeri da za Kroneckerov produkt i sumu ne vrijedi svojstvo distributivnosti:

$$(A \oplus B) \otimes C \neq (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

$$i$$

$$A \otimes (B \oplus C) \neq (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

**Primjer 5** *Neka je* $A = 1$, $B = 2$, $C = I_2$

$$(A \oplus B) \otimes C = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \otimes I_2 = 3I_2$$

*Pogledajmo desnu stranu:*

$$(A \otimes C) \oplus (B \otimes C) = (1I_2) \oplus (2I_2) = I_2 \otimes (1I_2) + 2I_2 \otimes I_2 = I_4 + 2I_4 = 3I_4$$

Analogno se pokaže i za drugu nejednakost.
Uz navedenu definiciju i neka svojstva važan nam je sljedeći teorem.

**Teorem 6** *Neka je* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ *i* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$. *Tada je*

$$A \otimes B = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B) = (I_m \otimes B)(A \otimes I_q)$$

.

Dokaz: Vidi [3, str. 32]

# 4 Primjene Kroneckerovog produkta

## 4.1 Marične jednadžbe i Kroneckerov produkt

Kroneckerov produkt može se koristiti za rješavanje linearnih jednadžbi u kojima su nepoznanice matrice. Primjeri takvih jednadžbi su:

$$\begin{aligned} AX &= B, \\ AX + XB &= C, \\ AXB &= C, \\ AX + YB &= C. \end{aligned}$$

Kako bi mogli govoriti o primjenama Kroneckerovog produkta potrebno je definirati tzv. vec-operator ili operator vektorizacije. Vektorizacija matrice je linearna transformacija odnosno linearan operator koji pretvara matricu u vektor stupac.

**Definicija 3** *Za matricu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ operator vektorizacije definiran je kao*

$$vec(A) = (a_{11}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn})^T$$

Kako bi bolje shvatili definiciju pogledajmo primjer.

**Primjer 6** *Neka je dana matrica A=* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *. Tada je:*

$$vec(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Svojstva operatora vektorizacije bitna su kod primjene Kroneckerovog produkta na matrične jednadžbe. U sljedećem teoremu navest ćemo ona koja će nam biti potebna da bi objasnili primjenu.

**Teorem 7** *Neka su $A$, $B$ i $C$ matrice jednakih redova te neka su $\alpha$, $\beta$ skalari. Tada vrijedi:*

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B)$$

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B)$$

Primjena Kroneckerovog produkta je raznolika. Najpoznatija primjena je u rješavanju linearnih jednadžbi gdje su nepoznanice matrice. Primjer takve jednadžbe je Sylvestrova jednadžba

$$AX + XB = C,$$

gdje za dane $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i C $\in$ M$_{m\times n}(\mathbb{F})$ želimo pronaći sve $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ koje zadovoljavaju danu jednadžbu. Specijalni slučaj Sylvestrove jednadžbe kad je $m = n$, $B = A^T$ i $C^T = C$, odnosno matrična jednadžba oblika

$$AX + XA^T = C$$

naziva se Lyapunovljeva jednadžba.
Kriteriji egzistencije rješenja Sylvestrove jednažbe dan je u sljedećem teoremu.

**Teorem 8** *Sylvestrova jednadžba AX + XB = C ima rješenje ako i samo ako su matrice*

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{bmatrix} \quad i \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

*slične.*

Koristeći Kroneckerov produkt i operator vektorizacije, te koristeći svojstva operatora vektorizacije Sylvestrovu jednadžbu moguće je pretvoriti u linearni sustav reda $mn \times mn$ oblika

$$Dx = c,$$

gdje je $D = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_m) = B^T \oplus A, x = vec(X)$ i $c = vec(C)$.
Odnosno, zapisano u obliku matrica

$$\begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \dots & b_{n1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \dots & b_{n2}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}I & b_{2n}I & \dots & A + b_{nn}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Ova pretvorba je dobra ali ne i efikasna u rješavanju opće Sylvestrove jednadžbe jer je dobiveni sustav velike dimenzije, ali nam daje nužan i dovoljan uvijet za postojanje jedinstvenog rješenja Sylvestrove jednadžbe. U pronalasku jedinstvenog rješenja biti će nam korisne svojstvene vrijednosti Kroneckerove sume. Jednadžba $Dx = c$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $D$ regularna matrica. Kako su prema Teoremu 5 svojstvene vrijednosti matrice $D$ dane s $\lambda_i + \mu_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ lako se dobiva fundamentalni teorem za egzistenciju i jedinstvenost rješenja Sylvestrove jednadžbe.

**Teorem 9** *Neka je* $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ *. Tada Sylvestrova jednadžba*

$$AX + XB = C$$

*ima jedinsteno rješenje ako i samo ako A i* $-B$ *nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti.*

Pogledajmo jednadžbu oblika

$$AXB = C$$

ovu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C).$$

Sljedeći teorem nam govori o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ove jednadžbe.

**Teorem 10** *Neka su $A, B, C \in \mathcal{M}_m(F)$. Matrična jednadžba $AXB = C$ ima jedinstveno rješenje $X \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ za svaki C ako i samo ako su A i B regularne matrice.*

*Dokaz*: Vidi [1, str. 30]

U sljedećem primjeru pogledajmo kako rješavamo matrične jednadžbe oblika $AXB = C$.

**Primjer 7** *Neka su zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, te neka je $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ nepoznata matrica. Jednadžbu $AXB = C$ zapišemo u obliku $(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C)$ i imamo*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 12 & 4 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Odnosno, dobili smo četiri linearne jednadžbe sa četiri nepoznanice*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 12x_2 + x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

*Rješavanjem sustava dobivamo*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

## 4.2 Simetrični Kroneckerov produkt

Simetrični Kroneckerov produkt ima primjenu u semidefinitnom programiranju. Semidefinitno programiranje je poopćenje linearnog programiranja.

**Definicija 4** *Za bilo koju simetričnu matricu $S \in S_{n\times n}(\mathbb{F})$ definiramo vektor $svec(S)$ koji ima $\frac{1}{2}n(n+1)$ realnih komponenti sa*

$$svec(S) = (s_{11}, \sqrt{2}s_{21}, \ldots, \sqrt{2}s_{n1}, s_{22}, \sqrt{2}s_{32}, \ldots, \sqrt{2}s_{n2}, \ldots, s_{nn})^T.$$

**Definicija 5** *Simetrični Kroneckerov produkt definira se za bilo koje dvije (ne nužno simetrične) matrice $G, H \in M_n \times_n (\mathbb{F})$ kao preslikavanje na vektor $svec(S)$, izrazom:*

$$(G \otimes_s H)svec(S) = \frac{1}{2}svec(HSG^T + GSH^T).$$

Ovo je implicitna definicija simetričnog Kroneckerovog produkta.
Nešto više o simetričnom Kroneckerovom produktu te semidefinitnom programiranju možete pronaći u [2].

# Literatura

[1] B. J. Broxson, *The Kronecker Product*, UNF Graduate Theses and Dissertations, 25, Jacksonville, 2006.

[2] E. de Klerk, *Aspects of Semidefinite Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[3] A. Graham, *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester,, 1981.

[4] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.