

# Prigušenje titranja jednostavnih oscilatora

---

**Bošnjaković, Martina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:636249>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Martina Bošnjaković**

**Prigušenje titranja jednostavnih oscilatora**

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Martina Bošnjaković**

**Prigušenje titranja jednostavnih oscilatora**

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2020.

## **Sažetak**

Cilj ovog završnog rada je opisati gibanje harmonijskog oscilatora, prvo vlastite oscilacije neprigušenog sustava, a zatim slučaj kada u sustavu imamo prigušenje. Zatim ćemo promatrati slučaj kada na sustav djeluje vanjska periodična sila te prikazati specijalan slučaj kada dolazi do pojave rezonancije. Pogledat ćemo primjer kako različite veličine prigušenja utječu na takvo gibanje. Osim toga, pokazat ćemo kako opisati oscilacije u slučaju oscilatora s tri mase.

## **Ključne riječi**

Harmonijski oscilator, oscilacije, rezonancija, prigušenje, oscilator s tri mase

## **Abstract**

The goal of this thesis is to describe the motion of a harmonic oscillator, first the oscillations of the undamped system and then in the case of a damped harmonic oscillator. Next, a case in which the system is affected by an external periodic force will be observed and a special case in which resonance occurs will be shown. An example of how different damping motions affect such a motion will be shown. Finally, the instructions on how to describe oscillations in the case of a three mass oscillator will be given.

## **Key words**

Harmonic oscillator, oscillations, resonance, damping, three mass oscillator

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Harmonijski oscilator</b>	<b>4</b>
2.1	Slobodne oscilacije neprigušenog sustava . . . . .	4
2.2	Slobodne oscilacije prigušenog sustava . . . . .	7
2.3	Prisilne oscilacije . . . . .	10
2.4	Rezonancija . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Oscilator s tri mase</b>	<b>14</b>
3.1	Slobodne vibracije neprigušenog oscilatora s tri mase . . . . .	16
3.2	Slobodne vibracije prigušenog oscilatora s tri mase . . . . .	19

# 1 Uvod

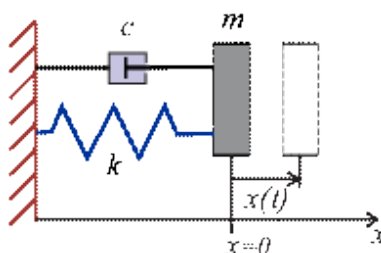
U ovom radu bavit ćemo se titranjem sustava, krenut ćemo s jednostavnim slučajem harmonijskog oscilatora na kojeg ne djeluje vanjska sila, odnosno vlastitim titranjem. Zatim ćemo pogledati što se događa kada na harmonijski oscilator djeluje vanjska periodična sila te kako različite veličine prigušenja utječu na titranje harmonijskog oscilatora. Uvest ćemo pojam rezonancije i na primjeru pokazati kako različite veličine prigušenja djeluju na ukupnu energiju sustava, a posljedično i na samo titranje harmonijskog oscilatora. Općenito, proučavanje titranja je izrazito važno jer se ono jako često javlja u prirodi. Građevine poput mostova i nebodera imaju svoju vlastitu frekvenciju titranja te prirodne pojave poput vjetra mogu utjecati na nju što ponekad može dovesti do katastrofalnih posljedica poput urušavanja. Stoga se prirodno postavlja pitanje kako smanjiti utjecaj vanjskih sila na titranje sustava, što nas dovodi do proučavanja prigušenja. Konačno, opisat ćemo vlastito titranje oscilatora s tri mase bez prigušenja te zatim slučaj kada u sustavu djeluje prigušivač.

## 2 Harmonijski oscilator

Promatramo oprugu čiji je jedan kraju pričvršćen za fiksnu podlogu, a za drugi kraj je pričvršćena masa  $m$  kao na slici 1. Promatramo slučaj kada je masa izvučena iz ravnotežnog položaja te je tada puštena. Opisati gibanje harmonijskog oscilatora znači opisati položaj mase u svakom trenutku,  $x(t)$  će označavati pomak mase od ravnotežnog položaja. Promatramo općeniti slučaj, sustav u kojem se nalazi prigušivač i na masu djeluje vanjska peri-odična sila. Jednadžba titranja glasi

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t) \quad (1)$$

Formula je dobivena iz drugog Newtonovog zakona i Hookeovog zakona. Drugi Newtonov zakon kaže da je  $F = ma$ , gdje je  $a$  akceleracija tijela,  $m > 0$ . Akceleraciju dobivamo iz sljedeće formule  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Sile koje se pojavljuju u sustavu su sila prigušenja, ona iznosi  $-cx'(t)$ , otpor koji opruga pruža gibanju, prema Hookovom zakonu on iznosi  $-kx(t)$ ,  $k > 0$ , te vanjska sila koju ćemo označiti sa  $f(t)$ . Ukupna sila  $F$  je tada jednaka zbroju svih sila koje djeluju na masu, odnosno dobivamo da je sila  $F = f(t) - cx'(t) - kx(t)$ . Stoga, uvrštavanjem dobivenih formula u jednadžbu Newtonovog zakona dobivamo jednadžbu (1). Masa na opruzi s prigušivačem preuzeta je iz [1].



Slika 1: Masa na opruzi s prigušivačem

### 2.1 Slobodne oscilacije neprigušenog sustava

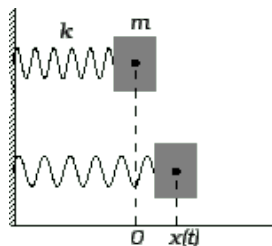
Za početak promatrat ćemo sustav u kojem nema prigušenja i na koji ne djeluje nikakva vanjska sila (prema [3]). Takvo titranje se zove slobodno titranje ili slobodne oscilacije harmonijskog oscilatora. Jednadžba tog gibanja glasi

$$mx''(t) + kx(t) = 0. \quad (2)$$

Podijelimo li jednadžbu s  $m$  prelazimo na oblik

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (3)$$

gdje je  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\omega_0$  je svojstvena ili vlastita frekvencija harmonijskog oscilatora.



Slika 2: Masa na opruzi bez prigušivača

Jednadžba (3) je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Pripadni karakteristični polinom je  $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ , a njegove nultočke su  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$  pa je opće rješenje te jednadžbe

$$x(t) = D_1 e^{i\omega_0 t} + D_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Ako iskoristimo Eulerovu formulu dobivamo izraze

$$\begin{aligned} e^{i\omega_0 t} &= \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t, \\ e^{-i\omega_0 t} &= \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

a kada uvrstimo to nazad u jednadžbu prelazimo na oblik

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Rješenje se može zapisati i ovako

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega_0 t \right).$$

Zbog

$$\left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)^2 + \left( \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right)^2 = 1$$



postoji  $\rho \in [0, 2\pi]$  takav da je

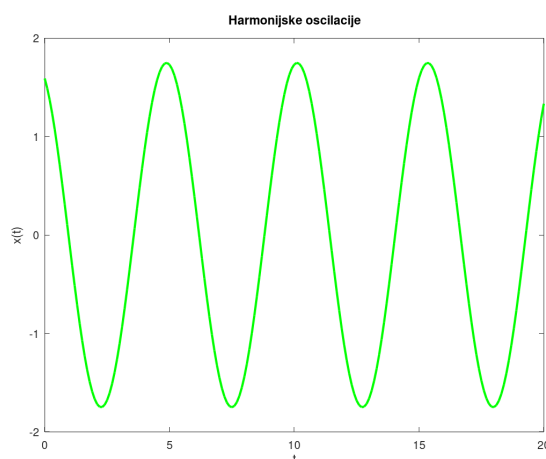
$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \rho,$$

$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \rho.$$

Uvrstimo to nazad u jednadžbu i upotrijebimo trigonometrijski identitet  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  dobivamo sljedeće

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \rho). \quad (4)$$

Dakle, iz gornje jednadžbe vidimo da je gibanje harmonijskog oscilatora periodično s amplitudom  $A$  i pomakom u fazi  $\rho$ .



Slika 3: Slika prikazuje rješenje koje je zadano sa  $x(t)=1.75\sin(1.2t+2)$

Položaj mase je opisan diferencijalnom jednadžbom drugog reda koja ima beskonačno mnogo rješenja koja ovise o dva parametra,  $A$  i  $\rho$ . To znači da položaj mase u svakom trenutku ne možemo jedinstveno odrediti iz opće jednadžbe titranje. Potrebna nam je početna zadaća koja daje informacije o položaju mase u trenutku  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$  te brzini u trenutku  $t = 0$ ,  $x'(0) = v_0$ . Kada imamo početnu zadaću iz tih uvjeta možemo izračunati

koeficijente  $A$  i  $\rho$

$$\begin{aligned}x(0) &= A \sin(\omega_0 0 + \rho) = A \sin(\rho) = x_0 \\x'(0) &= A \omega_0 \cos(\omega_0 0 + \rho) = A \omega_0 \cos(\rho) = v_0\end{aligned}$$

Sada jednostavno kvadriranjem dobivamo da je:

$$\sin^2(\rho) = \frac{x_0^2}{A^2} \quad \cos^2(\rho) = \frac{v_0^2}{A^2 \omega_0^2}$$

zatim te formule uvrstimo u  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  i dobijemo formulu za amplitudu

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (5)$$

pa kada vratimo to u formule za  $\sin(\rho)$  i  $\cos(\rho)$  i dobivamo

$$\sin(\rho) = \frac{\omega_0 x_0}{\sqrt{(\omega_0 x_0)^2 + v_0^2}}, \quad \cos(\rho) = \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 x_0)^2 + v_0^2}}. \quad (6)$$

Dakle, uz poznavanje početnih uvjeta možemo jedinstveno odrediti obje nepoznanice u jednadžbi titranja, a time je položaj mase potpuno određen.

## 2.2 Slobodne oscilacije prigušenog sustava

Sada ćemo pogledati što se događa kada se u sustav doda prigušivač (prema [1]). Ako jednadžbu (1) podijelimo s  $m$ , uz pretpostavku da je vanjska sila  $f(t) = 0$ , dobivamo

$$x''(t) + \bar{c}x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (7)$$

gdje je  $\bar{c} = \frac{c}{m}$ ,  $c > 0$ , a  $\omega_0^2$  kao i prije  $\frac{k}{m}$ . Dakle, imamo homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima. Karakteristični polinom ove jednadžbe je

$$\lambda^2 + \bar{c}\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

a njegove nultočke su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\bar{c} \pm \sqrt{\bar{c}^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Kod proučavanja nultočki kvadratne jednadžbe imamo tri važna slučaja koji bitno utječu na rješenje promatrane diferencijalne jednadžbe. Stoga, promatramo tri slučaja:

1. Nultočke karakterističnog polinoma su realne i međusobno različite, tj. razlika pod korijenom je veća od nule, odnosno  $\bar{c} > 2\omega_0$ , ako vratimo početne oznake  $c > 2\sqrt{km}$ , to odgovara slučaju velikog prigušenja. Rješenje je onda dano izrazom

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Koeficijente  $C_1, C_2$  možemo dobiti iz početnih uvjeta

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 e^{\lambda_1 0} + C_2 e^{\lambda_2 0} = C_1 + C_2 = x_0 \\ x'(0) &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 0} = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = v_0 \end{aligned}$$

Nultočke zapišemo u obliku

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\bar{c}}{2} \pm q, \quad q = \sqrt{\frac{\bar{c}^2}{4} - \omega_0^2}$$

i uvrstimo u sustav, a zatim  $C_1$  i  $C_2$  zapišemo kao

$$C_1 = \frac{2v_0 + \bar{c}x_0 + 2x_0q}{4q}, \quad C_2 = \frac{-2v_0 - \bar{c}x_0 + 2x_0q}{4q}.$$

Onda konačno rješenje u ovom slučaju glasi

$$x(t) = \frac{2v_0 + \bar{c}x_0 + 2x_0q}{4q} e^{\lambda_1 t} + \frac{-2v_0 - \bar{c}x_0 + 2x_0q}{4q} e^{\lambda_2 t}. \quad (8)$$

2. Nultočka je realna i dvostruke kratnosti,  $\bar{c} = 2\omega_0$ , odnosno  $c = 2\sqrt{km}$ . Ovaj slučaj nazivamo kritičnim prigušenjem. Rješenje je onda dano jednadžbom

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Odredimo koeficijente iz početnih uvjeta kao gore i dobivamo jednadžbu

$$x(t) = x_0 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \left( v_0 + x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}. \quad (9)$$

3. Nultočke su kompleksne, tj.  $\bar{c} < 2\omega_0$ , odnosno  $c < 2\sqrt{km}$ . Dakle, koeficijent prigušenja je mali. Svojstvene vrijednosti su  $\lambda_{1,2} = -\frac{\bar{c}}{2} \pm \bar{\omega}i$ , gdje je  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \bar{c}^2/4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . I tada je rješenje jednadžbe

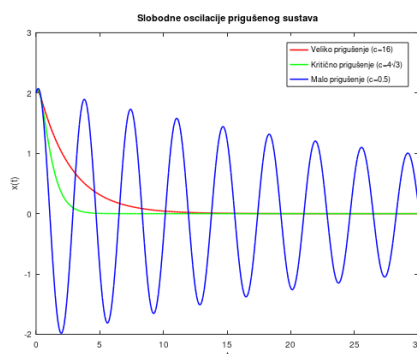
$$x(t) = e^{-\frac{\bar{c}}{2}t} (C_1 \sin(\bar{\omega}t) + C_2 \cos(\bar{\omega}t))$$

gdje su  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Kao i prije, iz početnih uvjeta odredimo  $C_1$  i  $C_2$  te korištenjem trigonometrijskih identiteta dobivamo

$$x(t) = Ae^{-\frac{\bar{c}}{2}t} \sin(\bar{\omega}t + \rho) \quad (10)$$

$A \in \mathbb{R}$  i  $\rho \in [-\pi, \pi)$  određeni s

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\bar{c}x_0 + 2v_0}{2\bar{\omega}}\right)^2}, \quad \sin \rho = \frac{x_0}{A}, \quad \cos \rho = \frac{\bar{c}x_0 + 2v_0}{2\bar{\omega}A}.$$



Slika 4: Prikaz rješenja  $x(t)$  za konfiguraciju parametara:  $m = 2$ ,  $k = 6$ ,  $x_0 = 2$ ,  $v_0 = 1$

Na gornjem grafu je prikazano titranje harmonijskog oscilatora za tri različita stupnja prigušenja. Kao što je i bilo očekivano, kada imamo slabo prigušenje vrijeme relaksacije, odnosno period koji je potreban da se harmonijski oscilator zaustavi u ravnotežnom položaju je najdulji. No iz grafova druge dvije krivulje vidimo da veće prigušenje ne dovodi do kraćeg vremena relaksacije nego da graf najbrže trne prema nuli u slučaju kritičnog prigušenja.

## 2.3 Prisilne oscilacije

Nakon što smo odredili rješenje homogenog slučaja, odnosno vlastitog titranja harmonijskog oscilatora, pogledat ćemo što se događa kada na sustav djeluje vanjska sila. Dakle, promatramo prisilne oscilacije sustava. Vraćamo se na jednadžbu (1) i pretpostavimo da na harmonijski oscilator djeluje vanjska periodična sila, odnosno  $f(t) = F \cos(\omega t)$ . Jednadžba koju sada imamo je

$$x''(t) + \bar{c}x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos(\omega t) \quad (11)$$

Moramo još odrediti partikularno rješenje, a to možemo napraviti metodom neodređenih koeficijenata. Kada je  $\omega \neq \omega_0$  rješenje tražimo u obliku

$$x_p(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t). \quad (12)$$

Slučaj  $\omega \approx \omega_0$  ćemo razmatrati u sljedećem poglavlju. Koeficijente  $A_1$  i  $A_2$  odredimo tako da  $x_p$  deriviramo i uvrstimo u jednadžbu (11). Ako u sustavu nema prigušenja, odnosno  $c = 0$ , dobivamo:

$$A_1 = \frac{F}{m(\omega_0^2 + \omega^2)}, \quad A_2 = 0$$

Dakle, partikularno rješenje je

$$x_p(t) = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

pa je ukupno rješenje onda

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \rho) + \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (13)$$

Ako u sustavu imamo prigušivač  $A_1$  i  $A_2$  prema [1] glase:

$$A_1 = \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2)/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\bar{c}\omega)^2}, \quad A_2 = \frac{F\bar{c}\omega/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\bar{c}\omega)^2},$$

a partikularno rješenje možemo zapisati kao

$$x_p(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = \tilde{A} \sin(\omega t + \phi) \quad (14)$$

pri čemu su

$$\tilde{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\bar{c}\omega)^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\bar{c}\omega)^2}}$$

$$\cos(\phi) = \frac{\bar{c}\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\bar{c}\omega)^2}}$$

Konačno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog rješenja

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

pri čemu računanje funkcije  $x_h(t)$  ovisi o  $\bar{c}$ .

## 2.4 Rezonancija

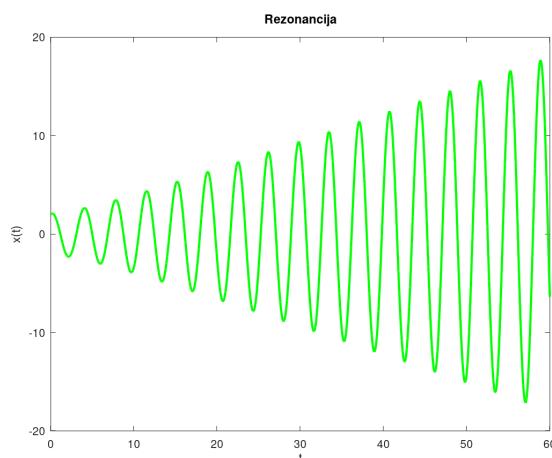
Vratimo se sada na formulu (13). Amplitude ovog gibanja su  $A$  i  $\frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$  koja ovisi o vanjskoj sili i poprima velike vrijednosti ako je ili  $F$  velik ili je  $\omega \approx \omega_0$ . Kada su te vrijednosti jednake, odnosno kada je frekvencija vanjske sile jednaka svojstvenoj frekvenciji sustava dolazi do pojave rezonancije. Tada partikularno rješenje ne možemo tražiti u obliku (12) nego moramo koristiti sljedeću formulu

$$x_p(t) = t(A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)).$$

Istim postupkom kao ranije računamo koeficijente  $A_1 = 0$  i  $A_2 = \frac{F}{2m\omega}$  te dobivamo formulu za pomak

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \rho) + \frac{Ft}{2m\omega} \sin(\omega t). \quad (15)$$

Imamo superpoziciju dva gibanja i vidimo da amplituda partikularnog rješenja linearno raste s vremenom, odnosno pomak od ravnotežnog položaja je sve veći i veći, kao što možemo vidjeti na slici. Takvo nekontrolirano povećanje amplitude titranja stvara problem jer dovodi do sve većih oscilacija koje posljedično mogu dovesti do kidanja materijala od kojeg je harmonijski oscilator napravljen.



Slika 5: Prikaz rješenja  $x(t)$  za konfiguraciju parametara:  $m = 2$ ,  $k = 6$ ,  $x_0 = 2$ ,  $v_0 = 1$ ,  $F = 2$ ,  $\omega = \sqrt{3}$

Rezonanciju ćemo promatrati koristeći kriterij ukupne energije sustava te ćemo vidjeti kako različite veličine prigušenja utječu na sustav. Jačinu harmonijskog odgovora sustava možemo mjeriti pomoću sljedeće formule

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} ||x(t)||^2 dt \quad (16)$$

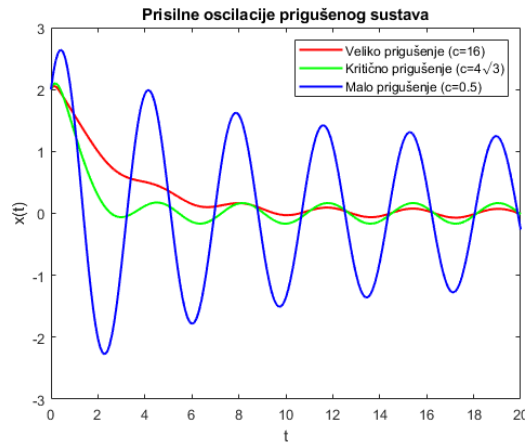
gdje je  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  period. Korijen tog iznosa je prosječna amplituda pomaka (eng. average displacement amplitude), više o tome možete pronaći u knjizi profesora Veselića, [2].

Pogledajmo primjer, masa  $m = 2$  pričvršćena je oprugom elastičnosti  $k = 6$ , izvučemo je iz ravnotežnog položaja za 2, dakle  $x_0 = 2$  i poguramo na titranje početnom brzinom  $v_0 = 1$ . Vanjska sila koja djeluje na sustav je  $\cos(\sqrt{3}t)$ , tj.  $F = 1$ , a frekvencija vanjske sile  $\omega = \sqrt{3}$ . Jednadžba tog titranja je sljedeća

$$x''(t) + \frac{c}{2}x'(t) + 3x(t) = \cos(\sqrt{3}t)$$

- Veliko prigušenje,  $c = 16$

$$x''(t) + 8x'(t) + 3x(t) = \cos(\sqrt{3}t)$$



Slika 6: Prikaz rješenja  $x(t)$  za konfiguraciju parametara:  $m = 2$ ,  $k = 6$ ,  $x_0 = 2$ ,  $v_0 = 1$ ,  $F = 2$ ,  $\omega = \sqrt{3}$  za različite veličine prigušenja

Koristeći formule (8) i (14) dobivamo rješenje

$$x(t) = \frac{26 + 9\sqrt{13}}{26}e^{(-4+\sqrt{13})t} + \frac{26 - 9\sqrt{13}}{26}e^{(-4-\sqrt{13})t} + \frac{\sqrt{3}}{24}\sin(\sqrt{3}t).$$

Uvrstimo li tu funkciju u formulu (16) dobivamo iznos energije sustava koji je u ovom slučaju 1.6674.

- Kritično prigušenje,  $c = 4\sqrt{3}$

$$x''(t) + 2\sqrt{3}x'(t) + 3x(t) = \cos(\sqrt{3}t).$$

Koristeći formule (9) i (14) dobivamo rješenje

$$x(t) = 2e^{(-\sqrt{3})t} + (1 + 2\sqrt{3})te^{(-\sqrt{3})t} + \frac{1}{6}\sin(\sqrt{3}t).$$

U ovom slučaju iznos energije je 1.1270, dakle manja je nego u slučaju velikog prigušenja.

- Malo prigušenje,  $c = 0.5$

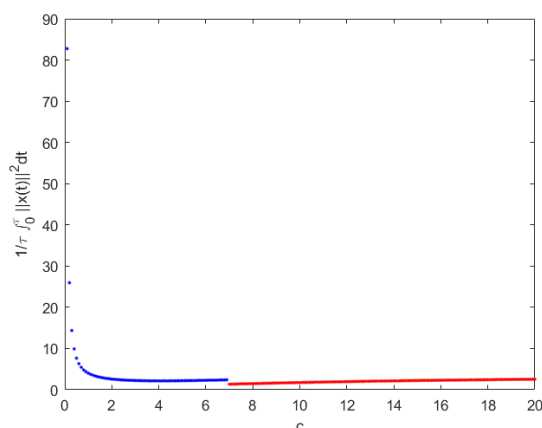
$$x''(t) + 0.25x'(t) + 3x(t) = \cos(\sqrt{3}t)$$

Koristeći formule (10) i (14) dobivamo rješenje

$$x(t) = 2.12686e^{-0.125t} \sin\left(\frac{\sqrt{191}}{8}t + 1.22366\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t)$$



Energija u ovom slučaju iznosi 7.6579, dakle najviše, a to možemo vidjeti i iz sljedećeg grafa.



Graf prikazuje kako se iznos integrala mijenja obzirom na stupanj prigušenja sustava. Malo prigušenje je prikazano plavom, a veliko crvenom bojom. Možemo vidjeti da za jako malo prigušenje, kada se približavamo nuli s desna, vrijednost integrala je sve veća, odnosno dolazi do jako velikih amplituda. Kako se  $c$  povećava, sve do  $4\sqrt{3}$ , vrijednost integrala opada. Za  $4\sqrt{3}$  imamo kritično prigušenje i tu vrijednost integrala naglo padne, prelazimo u slučaj velikog prigušenja i tu ponovo počinje rasti. Dakle, iz ovog prikaza, kao i iz gornjeg računa, možemo zaključiti da veće prigušenje ne dovodi do većeg smanjenja titranja sustava. Zato stupanj prigušenja treba biti prilagođen svojstvenoj frekvenciji danog sustava u kojem djeluje tako da ukupna energija titranja bude što manja.

### 3 Oscilator s tri mase

Sada ćemo promotriti oscilator s tri mase koje su povezane oprugama. Mase  $m_1$  i  $m_3$  pričvršćene su za fiksnu podlogu oprugama koeficijenta elastičnosti  $k_1$  i  $k_4$ . Masa  $m_2$  je povezana s  $m_1$  oprugom elastičnosti  $k_2$  te s  $m_3$  oprugom elastičnosti  $k_3$ . Na masu  $m_1$  je stavljen i prigušivač koeficijenta prigušenja  $c$ . Promatramo slobodne oscilacije, odnosno slučaj kada nema utjecaja vanjskih sila.

S  $x_i(t)$  označavamo otklon mase  $m_i$  od ravnotežnog položaja u trenutku  $t$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Promjene duljina opruga  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  iznose redom  $x_1$ ,  $x_2 - x_1$ ,  $x_3 - x_2$  te  $-x_3$ . Sada ponovno, kao kod harmonijskog oscilatora, iskoristimo Newtonov zakon i Hookeov zakon te dobivamo sljedeći sustav jednadžbi

$$m_1 x_1''(t) + c x_1'(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \quad (17)$$

$$m_2 x_2''(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_3 x_3(t) = 0 \quad (18)$$

$$m_3 x_3''(t) - k_3 x_2(t) + (k_3 + k_4)x_3(t) = 0 \quad (19)$$

Dakle, dobili smo sustav tri obične diferencijalne jednadžbe s tri nepoznanice,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  te ga možemo zapisati u matricnom obliku

$$\mathbf{M}\mathbf{x}''(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (20)$$

gdje su

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

matrica mase,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrica prigušenja,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

matrica krutosti, a vektor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$  je vektor nepoznatih funkcija.

Osim ovih podataka, da bismo odredili jedinstveno rješenje, potrebno je dodati podatke o početnom položaju i brzini tijela,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{v}_0$ .

### 3.1 Slobodne vibracije neprigušenog oscilatora s tri mase

Prvo ćemo se baviti sustavom u kojem nema prigušenja, tj. kada je  $c = 0$ . Sustav tada glasi

$$\mathbf{M}\mathbf{x}''(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0. \quad (21)$$

Želimo ovaj problem povezati s problemom harmonijskog oscilatora, a prema [1] to ćemo napraviti tako da uvedemo generalni svojstveni problem matičnog para, u ovom slučaju matrica  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$ .

Općenito, generalni svojstveni problem sastoji se od određivanja parova  $(\mu, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  za koje vrijedi

$$\mathbf{A}\phi = \mu\mathbf{B}\phi, \quad \phi \neq 0$$

pri čemu su matrice  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zadane. Skalar  $\mu$  nazivamo svojstvena vrijednost matičnog para  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , a vektor  $\phi \in \mathbb{R}^n$  nazivamo svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\mu$ . Svojsvenu vrijednost računamo kao nultočku pripadnog karakterističnog polinoma matičnog para  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  koji glasi  $\det(\mathbf{A} - \mu\mathbf{B})$ . Primjetimo da je standardni svojstveni problem zapravo specijalan slučaj generalnog svojstvenog problema za  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ .

Primjenimo li ovo na matični par  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dobivamo slijedeći svojstveni problem

$$\mathbf{K}\phi = \mu\mathbf{M}\phi \quad (22)$$

i pripadni karakteristični polinom

$$p(\mu) = \det(\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}).$$

Ako raspišemo determinantu dobivamo sljedeći polinom trećeg stupnja

$$\begin{aligned} p(\mu) = & -m_1m_2m_3\mu^3 \\ & + [k_1m_2m_3 + k_2(m_1m_3 + m_2m_3) + k_3(m_1m_2 + m_1m_3) + k_4m_1m_2]\mu^2 - \\ & [(k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4)m_1 + (k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4)m_2 + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)m_3]\mu \\ & + k_1k_2k_3 + k_1k_2k_4 + k_1k_3k_4 + k_2k_3k_4, \end{aligned}$$

a rješavanjem ovog polinoma dobivamo svojstvene vrijednosti. Ovakav polinom možemo riješiti primjerice formulom za kubnu jednadžbu ili možemo

odrediti približno rješenje nekom numeričkom metodom, npr. Newtonovom metodom. Nakon što odredimo svojstvene vrijednosti i uvrstimo ih u jednadžbu (22) dobivamo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice te rješavanjem tog sustava dobivamo pripadne svojstvene vektore.

Postoji i drugi način za određivanje svojstvenih vektora, a zasniva se na pozitivnoj definitnosti matrica  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$ . Naime, svojstvene vrijednosti pozitivno definitnih matrica su pozitivne te ih stoga možemo zapisati kao  $\mu_i = \omega_i^2$ ,  $\omega_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Uvodimo sljedeće oznake

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \quad (23)$$

i

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Svojstveni vektori  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$  mogu se odrediti tako da vrijedi

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega}^2, \quad (25)$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}. \quad (26)$$

Više detalja o egzistenciji i jedinstvenosti matrice  $\mathbf{\Phi}$  može se pronaći u [2]. Za proizvoljnu simetričnu pozitivnu matricu  $\mathbf{B}$  postoji matrica  $\mathbf{C}$  takva da je  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^2$ , takvu matricu  $\mathbf{C}$  zovemo korijenom matrice  $\mathbf{B}$  i koristimo oznaku  $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}$ . Pošto je matrica  $\mathbf{M}$  simetrična pozitivno definitna matrica postoji simetrična pozitivno definitna matrica  $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$  koja je njezin korijen.

$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  je također simetrična pozitivno definitna matrica te za nju možemo odrediti ortogonalnu matricu  $\mathbf{Q}$  i dijagonalnu matricu  $\mathbf{\Lambda}$  koja na dijagonali ima svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{K}_1$  tako da vrijedi formula

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}.$$

Dodatno, svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{\Lambda}$  su pozitivne jer je matrica  $\mathbf{K}_1$  pozitivno definitna matrica. Sada radimo supstituciju  $\mathbf{\Phi} := \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}$  i direktnim uvrštavanjem dobivamo formule (25) i (26)

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I},$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{Q} = \Lambda.$$

Pošto je  $\Lambda$  dijagonalna matrica s pozitivnim elementima možemo ju zapisati kao  $\Omega^2$ . Više detalja vezanih uz ove tvrdnje može se pronaći u [5].

Nakon što smo odredili svojstvene vektore  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$ , odnosno matricu  $\Phi$ , sljedeći korak je uvođenje supstitucije  $\hat{\mathbf{x}}(t) = \Phi^{-1} \mathbf{x}(t)$ . Ako to uvrstimo u jednadžbu (21) dobivamo sljedeće

$$\mathbf{M} \Phi \hat{\mathbf{x}}''(t) + \mathbf{K} \Phi \hat{\mathbf{x}}(t) = 0.$$

Pomnožimo li tu jednadžbu s  $\Phi^T$  s lijeva dobivamo

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \hat{\mathbf{x}}''(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \hat{\mathbf{x}}(t) = 0$$

te iskoristimo formule (25) i (26) i dolazimo do sustava

$$\hat{\mathbf{x}}''(t) + \Omega^2 \hat{\mathbf{x}}(t) = 0$$

tj.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1''(t) \\ \hat{x}_2''(t) \\ \hat{x}_3''(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 \hat{x}_1(t) \\ \omega_2^2 \hat{x}_2(t) \\ \omega_3^2 \hat{x}_3(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Postigli smo da se problem titranja tri mase svede na problem titranja neprigušenog harmonijskog oscilatora s frekvencijama  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$ . Istim postupkom kao ranije dobili bismo rješenja tih jednadžbi u obliku

$$\hat{x}_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \rho_i),$$

$i = 1, 2, 3$ . Konstante  $A_i$  i  $\rho_i$  se određuju iz početnih uvjeta, ali zbog uvedene supstitucije sada imamo

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \Phi^{-1} \mathbf{x}_0, \quad \hat{\mathbf{x}}'(0) = \Phi^{-1} \mathbf{v}_0.$$

Ako sada iskoristimo formule (5) i (6) dobivamo

$$A_i = \sqrt{(\Phi^{-1} \mathbf{x}_0)_i^2 + \left( \frac{(\Phi^{-1} \mathbf{v}_0)_i}{\omega_i} \right)^2},$$

$$\cos \rho_i = \frac{(\Phi^{-1} \mathbf{x}_0)_i \omega_i}{\sqrt{(\Phi^{-1} \mathbf{x}_0)_i^2 \omega_i^2 + (\Phi^{-1} \mathbf{v}_0)_i^2}},$$

$$\sin \rho_i = \frac{(\Phi^{-1} \mathbf{v}_0)_i}{\sqrt{(\Phi^{-1} \mathbf{x}_0)_i^2 \omega_i^2 + (\Phi^{-1} \mathbf{v}_0)_i^2}},$$

$i=1,2,3$ . Konačno rješenje dobivamo kao

$$x(t) = \Phi \hat{x}(t) = \hat{x}_1(t)\phi_1 + \hat{x}_2(t)\phi_2 + \hat{x}_3(t)\phi_3.$$

### 3.2 Slobodne vibracije prigušenog oscilatora s tri mase

Kako bismo riješili problem slobodnih vibracija oscilatora s tri mase s prigušenjem jednadžbu (20) ćemo zapisati u obliku ekvivalentnog sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Ponovno ćemo koristiti supstituciju  $x(t) = \Phi \hat{x}(t)$  te  $y_1(t) = \Omega \hat{x}(t)$  i  $y_2(t) = \hat{x}'(t)$  pa prema [1] sustav (20) možemo zapisati u sljedećem obliku

$$y'(t) = \mathbf{A}y(t)$$

pri čemu su

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Phi^T \mathbf{C} \Phi \end{bmatrix},$$

a  $\Phi$  i  $\Omega$  su kao u (23) i (24). Rješenje dobivenog sustava možemo zapisati u obliku

$$y(t) = e^{At} y_0.$$

$y_0$  je vektor početnih uvjeta, a matrica  $e^{At}$  je  $e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!}$ . O metodama rješavanja matrice eksponencijalne funkcije  $e^{At}$  možete pronaći u [6]. Nakon što odredimo  $y$ ,  $x$  se izračuna kao

$$x(t) = \Phi \hat{x}(t) = \Phi \Omega^{-1} y_1(t).$$

Dodavanje vanjske sile zahtjeva analizu i partikularnog rješenja, a pojava rezonancije se slično manifestira. U ovom slučaju možemo promatrati ukupnu energiju sustava definiranu sa (16), ali se analiza znatno komplicira. Naime, već računanje matrice eksponencijalne funkcije  $e^{At}$  je numerički vrlo zahtjevan problem. Računanje rješavanja i optimizacija prigušenja zahtjevaju složeniju analizu te općenito nije jednostavno postići kritično prigušenje. Više o svemu tome može se pronaći u [1] i [2].

## Literatura

- [1] K. BURAZIN, Z. TOMLJANOVIĆ, I. VUKSANOVIĆ, *Prigušenje mehaničkih vibracija*, Math.e : hrvatski matematički elektronski časopis 24, 2014.
- [2] KREŠIMIR VESELIĆ, *Damped oscillations of linear systems — a mathematical introduction*, Springer, 2011.
- [3] <http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node30.html> (rujan, 2020.)
- [4] MATKO MILIN, *Opća fizika 3: titranja i valovi*, Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015.
- [5] NINOSLAV TRUHAR, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2010.
- [6] MLADEN ALIĆ, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Matematički odjel Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1994.