Kvaternioni i prostorne rotacije

Stehlik, Petra

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij Financijske matematike i statistike

Petra Stehlik

Kvaternioni i prostorne rotacije

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij Financijske matematike i statistike

Petra Stehlik

Kvaternioni i prostorne rotacije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Skup kvaterniona je skup brojeva nastao zbog težnje da se geometrija kompleksnih brojeva u dvodimenzionalnom prostoru poopći na geometriju u trodimenzionalnom prostoru. Sredinom 19. stoljeća, irski matematičar William Rowan Hamilton otkrio je i definirao posebno proširenje skupa kompleksnih brojeva koje je nazvao kvaternioni jer se ispostavilo da se radi o četverodimenzionalnom vektorskom prostoru te se njemu u čast taj skup označava sa $\mathbb{H}$.

U prvom poglavlju objasnit ćemo motivaciju, ideju i povijesni nastanak skupa kvaterniona. U drugom poglavlju bazirat ćemo se na algebarska svojstva ovog skupa te navesti neke istaknute podskupove. Treće poglavlje će se odnositi na geometriju povezanu s kvaternionima. Počevši od rotacija u ravnini povezanih sa skupom kompleksnih brojeva, prikazat ćemo rotacije u prostoru te ih povezati s kvaternionima.

1 Ideja i povijesni razvoj

Otkriće kvaterniona pripisujemo irskom matematičaru Sir Williamu Rowanu Hamiltonu. On je, poznavajući svojstva i ulogu kompleksnih brojeva u geometriji ravnine, nastojao konstruirati skup koji bi imao sličnu ulogu u geometriji prostora. U 19. stoljeću počinje proučavati tročlane algebraske izraze da bi kasnije uvidio kako se tražena struktura sastoji od četiri istaknuta dijela te ih naziva kvaternionima.

U nastavku ćemo se prisjetiti definicije kompleksnih brojeva i njihove veze s koordinatnim sustavom u ravnini, a zatim ćemo ukratko opisati što je poznatog matematičara dovelo do otkrića kvaterniona.

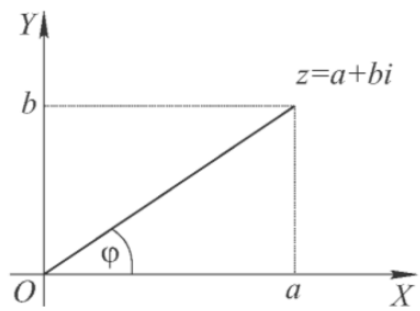
1.1 Odnos skupa $\mathbb{C}$ i dvodimenzionalnog prostora

Definicija 1. *Skup kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$ *je skup svih uređenih parova* (a, b) *realnih brojeva na kome su definirane operacije zbrajanja i množenja:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva zadovoljavaju aksiome polja, pa uz $(0, 0)$ kao neutralni element za zbrajanje i $(1, 0)$ kao neutralni element za množenje, uređena trojka $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ čini polje kompleksnih brojeva. Kompleksni broj obično označavamo sa $z = (a, b)$ i zapisujemo ga u algebarskom obliku $z = a + bi$, pri čemu je i imaginarna jedinica, $i = (0, 1)$ te vrijedi $i^2 = -1$.

Koordinatna ravnina u kojoj prikazujemo kompleksne brojeve naziva se Gaussova ili kompleksna ravnina. Tako broju $z = a + bi$ pridružujemo točku ravnine (a, b) kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1: Kompleksan broj u ravnini

Os X se naziva realna os, a os Y imaginarna os pa je broj a realni te broj b imaginarni dio kompleksnog broja z i pišemo $a = \mathrm{Re}(z)$ i $b = \mathrm{Im}(z)$. Kut koji radijvektor točke (a, b) zatvara s realnom osi označavamo s $\arg(z) = \varphi$ i zovemo **argument** od z, a udaljenost točke (a, b) do ishodišta koordinatnog sustava nazivamo **modul** od z i označavamo sa $|z|$ te ga računamo kao

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

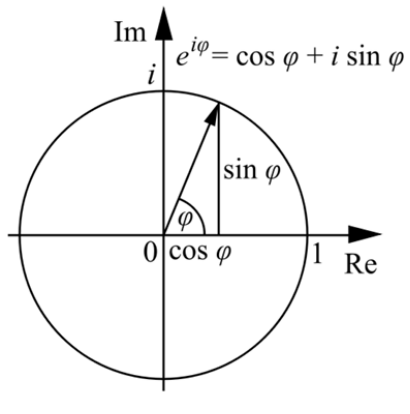
Za kompleksan broj modula 1 kažemo da je **jedinični**. Spomenimo još **kompleksno-konjugirani broj** broja $z = a + bi$:

$$\overline{z} = a - bi.$$

Zahvaljujući švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru postoji i drugi način zapisivanja kompleksnih brojeva koji pojednostavljuje operacije množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva. On je dokazao formulu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

koja se po njemu naziva Eulerova formula, a govori nam da broj $e^{i\varphi}$ leži na jedniničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini te s realnom osi zatvara kut φ, kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2: Kompleksan broj na jediničnoj kružnici

Broj $e^{i\varphi}$ je modula 1, a pomnožimo li ga realnim brojem r, dobit ćemo kompleksan broj z istog argumenta, ali modula r:

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ovakav zapis zovemo **trigonometrijski zapis** kompleksnog broja z i iz njega lako iščitavamo modul i argument od z. Koristeći ovakav zapis, umnožak dva kompleksna broja $z_1 = re^{i\varphi}$ i $z_2 = se^{i\theta}$ bit će

$$z_1 \cdot z_2 = re^{i\varphi} \cdot se^{i\theta} = rse^{i(\varphi+\theta)}, \tag{1}$$

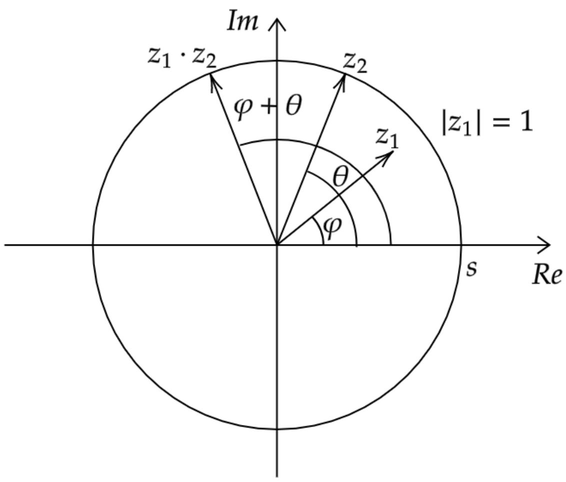
a kvocijent ćemo računati uz uvjet $z_2 \neq 0$ po formuli

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Primijetimo da je rezultat dobiven u (1) kompleksan broj modula $|z_1 \cdot z_2| = rs$ i argumenta $\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi + \theta$. Uzmemo li da je z_1 modula $r = 1$, imamo

$$z_1 \cdot z_2 = e^{i\varphi} \cdot se^{i\theta} = se^{i(\varphi+\theta)},$$

što je kompleksan broj modula $|z_1 \cdot z_2| = s = |z_2|$ i argumenta $\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi + \theta$. Možemo reći da je rezultat kompleksan broj z_2, ali rotiran za kut φ oko ishodišta u kompleksnoj ravnini (slika 4). Stoga aritmetičku operaciju množenja jediničnim kompleksnim brojem $e^{i\varphi}$ možemo interpretirati kao geometrijsku operaciju rotacije u ravnini.



Slika 3: Grafički prikaz: množenje jediničnim kompleksnim brojem $z_1 = e^{i\varphi}$

1.2 Trodimenzionalni analogon

Irski matematičar i fizičar William Rowan Hamilton, fasciniran ulogom skupa $\mathbb{C}$ u geometriji dvodimenzionalnog prostora, pokušavao je dobiti algebarsku strukturu koja bi bila proširenje skupa kompleksnih brojeva i imala sličnu ulogu u tri dimenzije pa je u tu svrhu počeo proučavati izraze oblika

$$u = a + bi + cj,$$

pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, a i i j imaginarni te vrijedi $i^2 = -1$ i $j^2 = -1$ kako bi se zadovoljilo množenje na skupu kompleksnih brojeva odnosno za točke oblika $(a, b, 0)$ i $(a, 0, c)$. Tim brojevima pokušao je predstaviti točke s koordinatama (a, b, c) u prostoru $\mathbb{R}^3$.

Zbrajanje i množenje definirao je, dakle, analogno kao u skupu kompleksnih brojeva i to mu nije predstavljalo problem, ali kod dijeljenja bi uvijek stao: nije znao kako odrediti kvocijent dvije točke u prostoru.

Definiravši konjugirano kompleksni element od u analogno kao u skupu $\mathbb{C}$ sa $\overline{u} = a - bi - cj$, Hamilton je uočio da vrijedi

$$u \cdot \overline{u} = \overline{u} \cdot u = a^2 + b^2 + c^2 - (ij + ji)bc,$$

te bi trebalo vrijediti $ij + ji = 0$. Kako množenje treba biti komutativno, slijedi $2ij = 0$ odnosno $ij = ji = 0$.

Nadalje, kako je Hamilton za cilj imao definirati algebarsku strukturu u kojoj vrijedi

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j)(a_2 + b_2 i + c_2 j) = A + Bi + Cj$$

i time $A^2+B^2+C^2 = (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)$, što neće vrijediti kada je $ij = ji = 0$, morao je taj uvjet izostaviti. Odnosno, morao je izostaviti komutativnost množenja i pisati $ij = -ji = k$ pa je umnožak dobio oblik

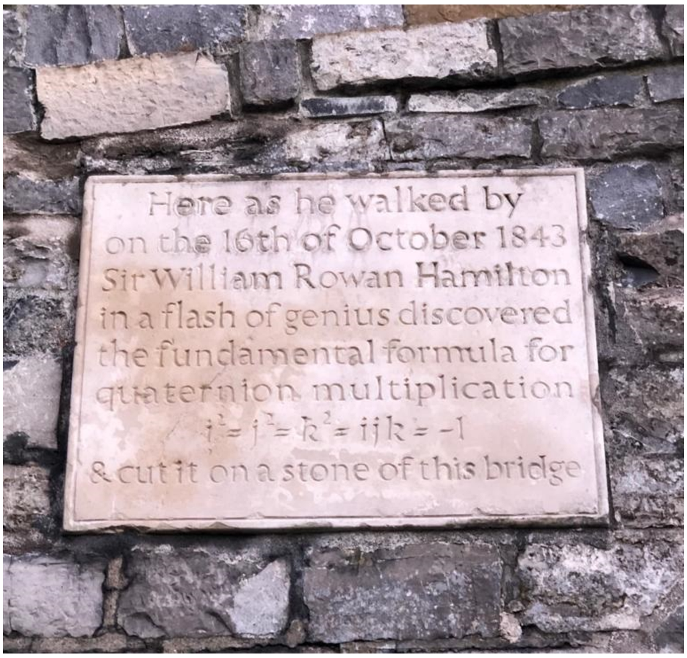
$$(a_1 + b_1 i + c_1 j)(a_2 + b_2 i + c_2 j) = A + Bi + Cj + Dk.$$

Zaključio je kako realan vektorski prostor dimenzije 3 nije pogodan za konstrukciju takve algebarske strukture, te je krenuo proučavati realne vektorske prostore dimenzije 4.

Do rješenja problema Hamilton je došao 16. listopada 1843. godine u Dublinu. Kako priča kaže, na putu do *Irske kraljevske akademije*, hodajući u društvu svoje žene, sinula mu je ideja. Hodajući u blizini mosta *Broom Bridge* (ili kako ga je Hamilton nazivao *Brougham Bridge*), došao je do koncepta koji prethodi otkriću skupa koji je kasnije nazvao skupom kvaterniona. Točnije, došao je do formule za množenje elemenata tog skupa. Odmah je uklesao fundamentalnu formulu u kamen mosta:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Danas se na spomenutom mostu može vidjeti ploča u spomen ovog otkrića (Slika 4).



Slika 4: Spomen ploča u Dublinu, Broom Bridge

2 Algebarska svojstva kvaterniona

U ovom dijelu rada definiramo skup kvaterniona te osnovne operacije na tom skupu, definiramo modul i inverz kvaterniona te ćemo prikazati koje poznatije algebarske strukture čini skup kvaterniona uz određene operacije. Zatim ćemo definirati specifičnu algebarsku strukturu koju nazivamo *algebra s dijeljenjem* te ćemo zaključiti da skup kvaterniona čini realnu algebru s dijeljenjem. Na kraju ćemo reći nešto o poznatim podskupovima skupa kvaterniona, kvadratnom korijenu broja -1 u skupu kvaterniona te metrici na prostoru $\mathbb{H}$.

2.1 Osnovne operacije i svojstva

Definicija 2. *Skup kvaterniona je skup*

$$\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

gdje su i, j, k međusobno različiti imaginarni elementi za koje vrijedi

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Uz prvu komponentu stoji jedinica, što govori da prva komponenta predstavlja realni dio. Hamilton je realni dio kvaterniona q nazvao *skalar*, a imaginarni dio koji se sastoji od preostale tri komponente *vektor*, pa se kvaternion često piše i u obliku zbroja $q = a + \mathbf{v}$. Možemo izdvojiti dva posebna podskupa od kojih prvi sadrži sve kvaternione oblika $a1 + 0i + 0j + 0k$ koje nazivamo *čisti skalari*, a drugi podskup je skup svih kvaterniona oblika $0 \cdot 1 + bi + cj + dk$ koje nazivamo *čisti kvaternioni* ili *čisti vektori*, a često i *imaginarni kvaternioni.*

Prisjetimo se osnovnih algebarskih struktura te definirajmo osnovne operacije na skupu $\mathbb{H}$.

Ako je G neprazan skup, binarna operacija na G je funkcija $G \times G \to G$. U sljedećoj definiciji se koristi multiplikativna notacija te se rezultat djelovanja binarne operacije na element (a, b) označava s ab.

Definicija 3. ***Polugrupa*** *je neprazan skup G zajedno s binarnom operacijom na G koja je*

(i) asocijativna: $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in G$;

monoid *je polugrupa koja sadrži*

(ii) neutralni element $e \in G$ takav da $ae = ea = a$, $\forall a \in G$.

Grupa *je monoid G takav da*

(iii) za svaki $a \in G$ postoji inverzni element a^{-1} takav da $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Za polugrupu G se kaže ***Abelova*** *ili* ***komutativna*** *ako je njena binarna operacija*

(iv) komutativna: $ab = ba$, $\forall a, b \in G$.

Definicija 4. *Neka su $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Binarna operacija zbrajanja $+$ na skupu $\mathbb{H}$ definira se na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \end{aligned}$$

Očito je da vrijedi asocijativnost ove operacije jer se svodi na asocijativnost operacije zbrajanja u skupu $\mathbb{R}$ te zaključujemo da je $(\mathbb{H}, +)$ polugrupa.
Neutralni element za zbrajanje kvaterniona bit će $0 = 0 \cdot 1 + 0i + 0j + 0k$, što će nam dati strukturu monoida, a inverzni element kvaterniona $q = a1 + bi + cj + dk$ bit će $-q = -a1 - bi - cj - dk$. Vrijedi i komutativnost operacije zbrajanja kvaterniona jer se svodi na komutativnost zbrajanja u skupu $\mathbb{R}$, stoga vrijedi i sljedeća lema.

Lema 2.1. *Algebarska struktura $(\mathbb{H}, +)$ gdje je $+$ zbrajanje u skupu $\mathbb{H}$ čini Abelovu grupu.*

Definicija 5. *Operaciju $* : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ množenja kvaterniona skalarom iz polja $\mathbb{R}$ definiramo za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{H}$ s:*

$$\alpha * q = \alpha(a1 + bi + cj + dk) = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k.$$

Teorem 2.2. *Skup kvaterniona $\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ s operacijom zbrajanja $+$ i operacijom množenja kvaterniona skalarom $*$ definiranima s:*

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ \alpha * q &= \alpha(a1 + bi + cj + dk) = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k \end{aligned}$$

čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.

Dokaz. Kako prema prethodnoj lemi vrijedi da je skup $\mathbb{H}$ Abelova grupa uz zbrajanje $+$, vrijede aksiomi vezani za operaciju zbrajanja: asocijativnost, postojanje neutralnog elementa, postojanje inverznog elementa te komutativnost. Ostali aksiomi vektorskog prostora: kvaziasocijativnost, distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno zbrajanju kvaterniona te $1 * q = q, \forall q \in \mathbb{H}$, slijede direktno iz definicije navedenih operacija. $\square$

Vektorski prostor kvaterniona nad poljem $\mathbb{R}$ označavamo s $(\mathbb{H}, +, *)$. Kako je prema definiciji svaki element skupa $\mathbb{H}$ oblika $a1 + bi + cj + dk$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, moguće ga je prikazati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju elemenata $1, i, j, k$, što znači da skup $\{1, i, j, k\}$ čini bazu za $\mathbb{H}$. Stoga je dimenzija ovog vektorskog prostora $\dim(\mathbb{H}) = 4$.

U nastavku će se radi jednostavnosti koristiti zapis kvaterniona bez jedinice, odnosno pisat ćemo $q = a + bi + cj + dk$.

Da bismo definirali množenje kvaterniona, u obzir moramo uzeti relacije iz definicije 2

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

uz pretpostavke asocijativnosti množenja i jedinice 1 kao neutralnog elementa za množenje. Primijetimo da te relacije određuju sve moguće umnoške elemenata i, j, k. Krenimo na primjer od

$$ijk = -1.$$

Ako obje strane jednakosti istovremeno pomnožimo zdesna elementom k, dobivamo:

$$\begin{aligned} (ijk)k &= -k \\ ij(kk) &= -k \\ -ij &= -k \\ ij &= k. \end{aligned}$$

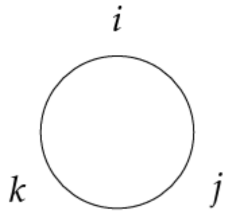
Sve ostale mogućnosti pri množenju elemenata i, j, k možemo dobiti na sličan način. Imamo:

$$\begin{aligned} ij &= k, \quad & ji &= -k \\ jk &= i, \quad & kj &= -i \\ ki &= j, \quad & ik &= -j. \end{aligned} \tag{2}$$

Dakle, množenje ovih elemenata nije komutativno, a predznak umnoška možemo lakše zapamtiti ako zamislimo da su tri elementa i, j, k posložena ciklički kao na slici 5. Ako pozicije dva elementa pri množenju odgovaraju smjeru kazaljke na satu, predznak će biti plus, u suprotnom će predznak biti minus.

Množenje elemenata (2) možemo prikazati i Caylejevom tablicom:

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1



Slika 5: Množenje elemenata i, j, k

Iskoristimo Caylejevu tablicu i aksiome vektorskog prostora $(\mathbb{H}, +, *)$ pri množenju dva kvaterniona:

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= a_1 \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + b_1 i \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&+ c_1 j \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + d_1 k \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 a_2 i + b_1 b_2 ii + b_1 c_2 ij + b_1 d_2 ik \\
&+ c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + c_1 c_2 jj + c_1 d_2 jk + d_1 a_2 k + d_1 b_2 ki + d_1 c_2 kj + d_1 d_2 kk \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 a_2 i - b_1 b_2 + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j \\
&+ c_1 a_2 j - c_1 b_2 k - c_1 c_2 + c_1 d_2 i + d_1 a_2 k + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i - d_1 d_2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\
&+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k.
\end{aligned}$$

Stoga imamo sljedeću definiciju.

Definicija 6. *Neka su $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Binarna operacija množenja kvaterniona $\cdot$ definirana je na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\
&+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\
&+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\
&+ (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k.
\end{aligned}$$

Množenje kvaterniona bit će asocijativno ako i samo ako je množenje elemenata i, j, k asocijativno. Isto vrijedi i za svojstvo komutativnosti. No, pogledamo li Caylejevu tablicu množenja baznih elemenata, primijetit ćemo da ona nije simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu pa množenje tih elemenata nije komutativno. Stoga je množenje kvaterniona asocijativna operacija koja nije komutativna, te struktura $(\mathbb{H}, \cdot)$ čini polugrupu. Neutralni element za množenje je kvaternion $q = 1 + 0i + 0j + 0k = 1$, pa dobivamo i strukturu monoida. Da bi monoid $(\mathbb{H}, \cdot)$ činio grupu, potrebno je utvrditi da za svaki element skupa $\mathbb{H}$ postoji inverz.

Definicija 7. *Za kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ definiramo njegov **konjugat***

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk.$$

Po definiciji će očigledno vrijediti $\overline{(\overline{q})} = q$, a imamo i sljedeću lemu.

Lema 2.3. *Neka su $q_1 = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ i $q_2 = a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ dva proizvoljna kvaterniona iz skupa $\mathbb{H}$. Tada vrijedi:*

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} \qquad i \qquad \overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}.$$

Dokaz. Na osnovu definicije zbrajanja i konjugiranja imamo

$$\begin{aligned}
\overline{q_1 + q_2} &= \overline{(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)} \\
&= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k} \\
&= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i - (c_1 + c_2)j - (d_1 + d_2)k \\
&= (a_1 - b_1i - c_1j - d_1k) + (a_2 - b_2i - c_2j - d_2k) \\
&= \overline{q_1} + \overline{q_2}.
\end{aligned}$$

Slično se dokazuje i druga relacija, koristeći definiciju množenja kvaterniona. Imamo

$$\begin{aligned}
\overline{q_1 \cdot q_2} &= \overline{(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)} \\
&= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2)i} \\
&\overline{+(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k} \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2)i \\
&- (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k.
\end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}
\overline{q_2} \cdot \overline{q_1} &= (a_2 - b_2i - c_2j - d_2k) \cdot (a_1 - b_1i - c_1j - d_1k) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2)i \\
&- (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k,
\end{aligned}$$

a sada uspoređivanjem zadnjih dviju relacija imamo jednake izraze na desnim stranama, što znači da su i lijeve strane jednake pa je time tvrdnja dokazana. $\square$

Neka je sada $q = a+bi+cj+dk$ proizvoljan kvaternion i neka je $\overline{q} = a-bi-cj-dk$ njemu konjugirani kvaternion. Njihov umnožak je

$$q \cdot \overline{q} = (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

što je nenegativan realan broj pa uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 8. ***Modul*** *ili* ***normu*** *kvaterniona $q = a + bi + cj + dk$ označavamo s $|q|$ te definiramo kao*

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Za kvaternion q kažemo da je ***jedinični*** *kvaternion ako je $|q| = 1$.*

Prema definiciji slijedi

$$|\overline{q}| = \sqrt{\overline{q}\overline{\overline{q}}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = |q|,$$

jer je

$$\overline{q} \cdot q = (a - bi - cj - dk) \cdot (a + bi + cj + dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Također koristeći definiciju imamo

$$|q\overline{q}| = \sqrt{(q\overline{q})\overline{(q\overline{q})}} = \sqrt{q\overline{q}}\sqrt{q\overline{q}} = |q||q| = |q|^2 = |q||\overline{q}|,$$

a vrijedi i sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4. (Multiplikativnost norme)
Za sve $p, q \in \mathbb{H}$ vrijedi

$$|pq| = |p||q|.$$

Iz $q \cdot \overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2$, slijedi formula za računanje inverza kvaterniona dana sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.5. *Svaki nenul kvaternion $q \in \mathbb{H}$ je invertibilan i inverz je*

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2},$$

te vrijedi $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

Lema 2.6. *Algebarska struktura $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ gdje je $\mathbb{H}$ skup svih kvaterniona, a operacija $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona, čini grupu. Zbog nekomutativnosti operacije $\cdot$ u skupu $\mathbb{H}$, ta grupa nije Abelova.*

Definicija 9. ***Prsten*** *je neprazan skup R zajedno s dvije binarne operacije (obično označeno kao zbrajanje $+$ i množenje $\cdot$) takve da:*

(i) $(R, +)$ je Abelova grupa;

(ii) $(ab)c = a(bc)$, za sve $a, b, c \in R$ (asocijativnost množenja)

(iii) $a(b+c) = ab+ac$ i $(a+b)c = ac+bc$ (zakoni lijeve i desne distributivnosti).

Ako dodatno vrijedi:

(iv) $ab = ba$, za sve $a, b \in R$,

onda za R kažemo da je ***komutativni prsten****.*

Ako R sadrži element 1_R takav da je

(v) $1_R a = a 1_R$ za sve $a \in R$,

onda za R kažemo da je ***prsten s jedinicom****.*

Skup $\mathbb{H}$ uz operaciju zbrajanja prema lemi 2.1 čini Abelovu grupu, a već smo utvrdili da je množenje kvaterniona asocijativna operacija koja nije komutativna te je neutralni element za množenje kvaternion $q = 1$. Također, iz definicija zbrajanja kvaterniona i množenja kvaterniona možemo dokazati da vrijede lijeva i desna distributivnost množenja prema zbrajanju, odnosno da $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ vrijedi

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3 \quad i \quad (q_1 + q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot q_3 + q_2 \cdot q_3.$$

Time smo pokazali sljedeći teorem.

Teorem 2.7. *Algebarska struktura $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ gdje je $+$ binarna operacija zbrajanja kvaterniona i $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona čini nekomutativni prsten s jedinicom.*

Navedimo još i jednu posljedicu:

Posljedica 2.8. *Za proizvoljne realne brojeve a_1, b_1, c_1, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2 postoje realni brojevi A, B, C i D takvi da vrijedi*

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

Dokaz. Neka su a_1, b_1, c_1, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2 proizvoljni realni brojevi. Tada oni određuju dva kvaterniona $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Prema definiciji inverza kvaterniona iz propozicije 2.5 imamo:

$$(q_1 \cdot q_2)^{-1} = \frac{\overline{q_1 \cdot q_2}}{|q_1 \cdot q_2|^2}.$$

Iskoristimo li lemu 2.3 po kojoj vrijedi $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$, slijedi:

$$|q_1 \cdot q_2|^2 (q_1 \cdot q_2)^{-1} = \overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1} = |q_1|^2 |q_2|^2 q_2^{-1} q_1^{-1}.$$

Kako je $(q_1 \cdot q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1}$, imamo:

$$|q_1|^2 |q_2|^2 = |q_1 \cdot q_2|^2.$$

Kvaternione q_1 i q_2 definirali smo kao $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ te nam iz zadnje jednakosti slijedi

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

pri čemu je kvaternion $q_1 \cdot q_2 = A + Bi + Cj + Dk$. Time je tvrdnja u cijelosti dokazana. □

2.1.1 Algebra s dijeljenjem

Definicija 10. *(**Asocijativna**) **algebra** A nad poljem F, ili **F-algebra** je neprazan skup A, zajedno s tri operacije koje se nazivaju **zbrajanje**, **množenje** i **množenje skalarom** za koje vrijede sljedeća svojstva:*
1) A je vektorski prostor nad poljem F, uz operacije zbrajanja i množenja skalarom
2) A je prsten s jedinicom, uz operacije zbrajanja i množenja
3) Ako je $r \in F$ i $a, b \in A$, onda

$$r(ab) = (ra)b = a(rb).$$

*Algebra je **konačnodimenzionalna** ako je konačnodimenzionalna kao vektorski prostor. Algebra je **komutativna** ako je A komutativan prsten. Element $a \in A$ je **invertibilan** ako postoji $b \in A$ za koji je $ab = ba = 1$.*

Definicija nam zahtijeva da A ima jedinicu za množenje (neutralni element). Takve algebre se zovu **unitalne** algebre.

Definicija 11. *Asocijativna algebra D nad poljem F je **algebra s dijeljenjem** ako je svaki element različit od nule invertibilan.*

Prema teoremu 2.2 vrijedi da je $(\mathbb{H}, +, *)$ realan vektorski prostor, gdje $+$ predstavlja operaciju zbrajanja kvaterniona, a $*$ predstavlja množenje skalarima. Također, prema teoremu 2.7 vrijedi da $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ čini nekomutativan prsten s jedinicom, pri čemu operacija $\cdot$ predstavlja množenje kvaterniona. Algebarska struktura $(\mathbb{H}, +, \cdot, *)$ predstavlja **asocijativnu algebru**. Kako smo također utvrditi da svaki element skupa $\mathbb{H}$ različit od nule ima inverz, ona predstavlja i **algebru s dijeljenjem**. Dimenzija vektorskog prostora je 4, pa je ova algebra s dijeljenjem konačnodimenzionalna.

Ako se radi o algebri (s dijeljenjem) nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, onda ju još zovemo **realna** algebra (s dijeljenjem). Frobenius je pokazao da postoje samo tri konačnodimenzionalne realne algebre s dijeljenjem.

Teorem 2.9. (Frobenius, 1877.)
Ako je D konačnodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem, onda

$$D = \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{C} \quad \textit{ili} \quad D = \mathbb{H}.$$

Preciznije, svaka konačnodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem izomorfna je nekoj od tri navedene algebre. Moguće dimenzije realnih algebri s dijeljenjem su $\dim(\mathbb{R}) = 1$, $\dim(\mathbb{C}) = 2$ i $\dim(\mathbb{H}) = 4$. Primijetimo da za algebre $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ vrijedi komutativnost množenja, dok za $\mathbb{H}$ ne vrijedi.

2.1.2 Oktonioni

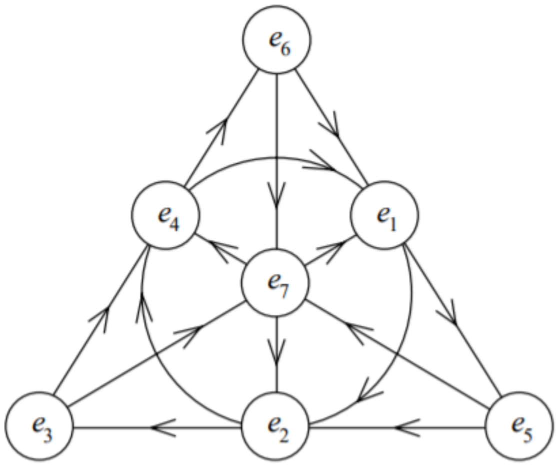
Ako u definiciji 10 izostavimo svojstvo asocijativnosti množenja, dobivamo **neasocijativnu algebru**, označimo ju s A. Takva algebra je algebra s dijeljenjem ako za dane $a, b \in A$ za koje je $ab = 0$ slijedi da je $a = 0$ ili $b = 0$. Ekvivalentno, takva algebra je algebra s dijeljenjem ako su operacije množenja nenul elementom slijeva i zdesna invertibilne.

Primjer takve algebre je algebra oktoniona. Skup **oktoniona** $\mathbb{O}$ je skup elemenata oblika

$$x = x_0 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7,$$

pri čemu su $x_0, \ldots, x_7 \in \mathbb{R}$ te skup $\{1, e_1, \ldots e_7\}$ čini bazu realnog vektorskog prostora $\mathbb{O}$ dimenzije 8, uz operaciju zbrajanja i operaciju množenja skalarima iz polja $\mathbb{R}$ definiranima na uobičajen način (po komponentama). Elemente baze nazivamo imaginarnim elementima te se njihov produkt definira i lakše pamti korištenjem Fanove ravnine. Gino Fano bio je talijanski matematičar i po njemu je ova struktura dobila ime, a koristimo ju kako bi lakše pamtili produkte elemenata $e_1, \ldots e_7$; slično kao što smo kod skupa kvaterniona množenje elemenata i, j, k pamtili tako što smo ih poredali na kružnicu (slika 5).

Fanova ravnina sastoji se od 7 točaka (čvorova) i 7 „pravaca”. Pravci su stranice trokuta, visine trokuta i kružnica koja trokut siječe u polovištima njegovih stranica. Točke su elemeti $e_1, \dots e_7$. Svake dvije različite točke leže na samo jednom pravcu. Svaki pravac sadrži tri točke, pri čemu su te tri točke ciklički poredane i smjer je označen strelicama (slika 6).



Slika 6: Fanova ravnina

Ako su e_i, e_j i e_k ciklički poredane tim redom, onda

$$e_ie_j = ek, \quad e_je_i = -e_k.$$

Zajedno s pravilima:

- 1 je neutralni element za množenje,
- $e_1, \dots e_7$ su kvadratni korijeni broja -1,

u potpunosti je opisana algebarska struktura oktoniona. S ovako zadanim množenjem, skup oktoniona čini neasocijativnu realnu algebru s dijeljenjem. Više o množenju i konstrukciji skupa oktoniona može se naći u [2].

Definicija 12. ***Normirana algebra s dijeljenjem*** *je algebra A (konačnodimenzionalna, moguće neasocijativna) koja je također normirani vektorski prostor gdje vrijedi*

$$|ab| = |a||b|, \; \forall a, b \in A.$$

Algebre $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ su normirane algebre s dijeljenjem. Sljedeći teorem tvrdi da su to i jedine takve algebre.

Teorem 2.10. (Hurwitz, 1898.)
$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ su jedine normirane algebre s dijeljenjem.

Primijetimo da se teorem odnosi samo na normirane algebre s dijeljenjem. Postoji još algebri s dijeljenjem koje nisu normirane.

Sljedeći teorem je dokazao Kervaire i nezavisno od njega, Bott i Milnor, 1958.

Teorem 2.11. *Sve algebre s dijeljenjem imaju dimenzije* 1,2,4 *ili* 8.

2.2 Kvadratni korijen broja -1 u skupu kvaterniona

Množenje kvaterniona nije komutativna operacija, što ima neke neočekivane posljedice. Jedna od njih je da polinomijalne jednadžbe nad kvaternionima mogu imati više različitih rješenja od stupnja polinoma. Vrijedi sljedeća lema:

Lema 2.12. *Jednadžba $z^2 + 1 = 0$ u skupu kvaterniona $\mathbb{H}$ ima beskonačno mnogo rješenja i skup svih rješenja je skup svih jediničnih imaginarnih kvaterniona.*

Dokaz. Neka je $q = a+bi+cj+dk$ proizvoljan kvaternion koji zadovoljava jednadžbu $z^2 + 1 = 0$. Kako je

$$q^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2abi + 2acj + 2adk,$$

mora vrijediti

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 &= -1 \\ 2ab &= 0 \\ 2ac &= 0 \\ 2ad &= 0. \end{aligned}$$

Imamo dvije mogućnosti: ili je $a = 0$ ili su b, c i d jednaki 0. Ako pogledamo drugi slučaj, vidimo da je on nemoguć jer bi za $b = 0$, $c = 0$ i $d = 0$ iz prve jednadžbe slijedilo da je $a^2 = -1$, što ne može vrijediti jer je a realan broj. Zaključujemo da je rješenje slučaj gdje je $a = 0$ te je $b^2+c^2+d^2 = 1$. Tada će biti $|q|^2 = b^2+c^2+d^2 = 1$ pa je $|q| = 1$. Drugim riječima, kvaternion je rješenje jednadžbe $z^2 + 1 = 0$ ako i samo ako je jedinični imaginaran kvaternion. $\square$

2.3 Metrika na prostoru kvaterniona

Ranije smo definirali normu kvaterniona $q = a + bi + cj + dk$ sa

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Ovo je nenegativan realan broj, a kako je $\mathbb{H}$ izomorfno s $\mathbb{R}^4$ (kao dva realna vektorska prostora jednakih dimenzija), može ih se identificirati izomorfizmom vektorskih prostora pa je $|q|$ jednako euklidskoj normi. Množenjem kvaterniona nekim realnim brojem, njegova norma množi se apsolutnom vrijednošću tog broja. Ako je α realan broj, tada vrijedi

$$|\alpha q| = |\alpha||q|.$$

Ovo je specijalan slučaj multiplikativnosti norme $|pq| = |p||q|$ za dva proizvoljna kvaterniona p i q (propozicija 2.4). Norma definirana na taj način omogućuje definiranje **udaljenosti** $d(p, q)$ između kvaterniona p i q kao normu njihove razlike

$$d(p, q) = |p - q|.$$

Ovako definirana funkcija naziva se **metrika** inducirana normom i zajedno sa skupom $\mathbb{H}$ predstavlja jedan metrički prostor.

2.4 Hurwitzovi kvaternioni

Hurwitzovi kvaternionioni ili **Hurwitzovi cijeli brojevi** su kvaternioni čije su sve komponente ili cijeli brojevi ili polu-cijeli brojevi, tj. polovine neparnih cijelih brojeva (jedno isključuje drugo). Dakle, skup Hurwitzovih kvaterniona je

$$\mathcal{H} = \left\{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ \ ili \ \ a, b, c, d, e \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Može se pokazati da je skup $\mathcal{H}$ zatvoren na zbrajanje i množenje kvaterniona i u odnosu na njih predstavlja jedan potprsten prstena svih kvaterniona $\mathbb{H}$.

Lipschitzovi kvaternionioni ili **Lipschitzovi cijeli brojevi** su kvaternioni čije su komponente cijeli brojevi. Skup svih Lipschitzovih kvaterniona

$$\mathcal{L} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

predstavlja potprsten prstena Hurwitzovih kvaterniona $\mathcal{H}$.

3 Rotacije

Kvaternione povezujemo s rotacijama u trodimenzionalnom prostoru, bilo da se radi o rotiranju referentnog sustava ili rotiranju objekta u zadanom fiksnom referentnom sustavu. U ovom poglavlju prvo ćemo predstaviti vezu između rotacija u dvodimenzionalnom prostoru, odnosno pripadnih rotacijskih matrica, i kompleksnih brojeva. Nakon toga, predstavit ćemo rotacijske matrice pridružene rotacijama u trodimenzionalnom prostoru te ćemo ih povezati s kvaternionima. U nastavku ćemo još koristiti oznake 2D i 3D kada se govori o dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prostoru, rotaciji ili pripadnoj rotacijskoj matrici.

3.1 2D rotacije

Rotacije u dvodimenzionalnom prostoru se provode djelovanjem 2×2 ortogonalnih matrica determinante 1. Te matrice su oblika

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdje je θ kut za koji rotiramo dani vektor ili točku. Lako vidimo da determinanta matrice R_2 iznosi 1:

$$\det R_2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Također, lako provjerimo da je matrica R_2 i ortogonalna:

$$R_2 \cdot R_2^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Rotiramo li vektor ravnine $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, za kut θ oko ishodišta koordinatnog sustava, koordinate vektora nakon rotacije dobijemo na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_2(\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Povežimo to sa kompleksnim brojevima. U potpoglavlju 1.1 predstavili smo kompleksne brojeve i operaciju množenja te primjetili da operacija množenja kompleksnim brojem $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ predstavlja rotaciju u ravnini, odnosno, imamo:

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ z' &= e^{i\theta}(x + iy) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta), \end{aligned}$$

što u matričnom zapisu točno odgovara matrici dobivenoj u (4).

3.1.1 Forma polovičnog kuta

Iskoristimo sljedeći zapis matrice R_2:

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Stavimo li da je $A = a^2 - b^2$ i $B = 2ab$, možemo uočiti da za $a = \cos(\theta/2)$ i $b = \sin(\theta/2)$ dobijemo upravo matricu $R_2(\theta)$ iz (3). Imamo:

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos\theta, \\ B &= 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) = \sin\theta, \end{aligned}$$

pa stoga oblik rotacijske matrice ostaje nepromijenjen:

$$R_2 = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Primijetimo, kako je $\det R_2 = A^2 + B^2 = 1$, računanjem determinante matrice dobivamo

$$\det R_2(a,b) = (a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 = 1.$$

U nastavku ćemo vidjeti da se uređeni par (a, b) može interpretirati kao najjednostavniji specijalni slučaj kvaterniona.

Pri eksponencijanom zapisu kompleksnog broja imamo

$$\begin{aligned} e^{i(\theta/2)} &= \cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2) \\ &= a + ib, \end{aligned}$$

te je $e^{i(\theta/2)}e^{i(\theta/2)} = e^{i\theta}$. Stoga vidimo da je $e^{i(\theta/2)}$ kvadratni korijen kompleksnog broja $e^{i\theta}$ koji predstavlja rotaciju u ravnini.

3.2 3D rotacije

Kao i u dvodimenzionalnom slučaju, za rotacijske matrice R_3 u trodimenzionalnom prostoru vrijedi:

$$\begin{aligned} R_3 \cdot R_3^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3, \\ \det R_3 &= 1. \end{aligned}$$

No postoje i dva nova svojstva koja se pojavljuju u trodimenzionalnom slučaju.

- **Ovisnost o redoslijedu**: produkt dvije R_3 matrice S i T može ovisiti o redoslijedu kojim množimo. To znači da (osim u specijalnim slučajevima) imamo:

$$S \cdot T \neq T \cdot S.$$

- **Jedan realni svojstveni vektor**: R_3 ima jedan realni svojstveni vektor i stoga se sve 3D rotacijske matrice (i njihovi produkti) mogu zapisati korištenjem rotacijske matrice $R_3(\theta, \hat{n})$ koja određeni vektor prostora ostavlja fiksnim:

$$R_3(\theta, \hat{n}) \cdot \hat{n} = \hat{n}.$$

  Kako $\hat{n}$ ostaje fiksan, $R_3(\theta, \hat{n})$ izražava sve moguće 3D rotacije za kut θ oko $\hat{n}$.

Drugo svojstvo slijedi iz Eulerovog rotacijskog teorema. Matematičar Leonhard Euler, kojeg smo već spomenuli, također je proučavao i rotacije krutih tijela u prostoru. Naime, poziciju nekog objekta u prostoru moguće je dobiti provođenjem više uzastopnih rotacija oko fiksnih osi - obično osi pripadnog koordinatnog sustava. Pripadne matrice ćemo navesti u nastavku. Nije odmah jasno da kompozicija više rotacija oko različitih osi odgovara rotaciji oko samo jedne osi. U razdoblju 1775.-1776. Euler je objavio rezultat koji tvrdi da je u trodimenzionalnom prostoru svakoj rotaciji sfere oko svog središta pridružena jedna os, te je naveo geometrijsku konstrukciju za određivanje te osi. Ovdje ćemo Eulerov teorem formulirati korištenjem rotacijskih matrica te navesti dokaz koji povezujemo s drugim svojstvom koje smo prethodno naveli.

Teorem 3.1. (Eulerov teorem o osi trodimenzionalne rotacije)
Ako je R ortogonalna 3×3 matrica ($R^T R = RR^T = I$) te vrijedi $\det R = +1$, tada postoji nenul vektor $\hat{v}$ za kojeg vrijedi $R \cdot \hat{v} = \hat{v}$.

Dokaz. Ako je A matrica, tada netrivijalna rješenja sustava $A \cdot v = \lambda \cdot \hat{v}$ odgovaraju svojstvenim vrijednostima matrice A, odnosno korijenima karakterističnog polinoma matrice A:

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

Također, $\chi_A(0) = \det(A)$ odgovara umnošku svih svojstvenih vrijednosti od A. Karakteristični polinom realne 3×3 matrice A je polinom stupnja 3 s realnim koeficijentima te postoje dva moguća slučaja koji se međusobno isključuju:

(1) χ_A ima tri realna korijena, $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$;

(2) χ_A ima realni korijen $r_1 \in \mathbb{R}$ te dva kompleksna korijena $r_2, r_3 \in \mathbb{C}$, $r_3 = \overline{r_2}$.

Svaka svojstvena vrijednost ortogonalne matrice je (kompleksnog) modula 1. U slučaju (1) to nam znači da je $r_j = \pm 1$, $j = 1, 2, 3$, a u slučaju (2) imamo $r_2 r_3 = 1$. Kako determinanta matrice R iznosi 1, umnožak triju svojstvenih vrijednosti mora biti 1, pa je u slučaju (1) skup svojstvenih vrijednosti $\{+1, +1, +1\}$ ili $\{+1, -1, -1\}$. U slučaju (2) je $r_1 = 1$. Kako je u oba slučaja $+1$ svojstvena vrijednost, uvijek postoji netrivijalno rješenje sustava $R \cdot \hat{v} = \hat{v}$. □

Radi jednostavnosti ćemo pisati $R_3 = R$. Uvedimo tri rotacijske matrice koje predstavljaju rotaciju trodimenzionalnog prostora oko fiksne osi koordinatnog sustava za kut θ. To su jednostavno rotacije u ravnini (dvodimenzionalnom prostoru) određenoj s preostale dvije osi.

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ove matrice izvode rotacije fiksirajući koordinatne osi određene baznim vektorima $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$ i $\hat{z} = (0, 0, 1)$, tim redom. Matrica R_x rotira yz ravninu oko svog ishodišta, R_y rotira zx ravninu, a R_z rotira xy ravninu.

Također, sljedećim koracima možemo eksplicitno odrediti rotacijsku matricu $R(\theta, \hat{n})$, kojom se vrši prostorna rotacija oko proizvoljne osi određene svojstvenim vektorom $\hat{n}$.

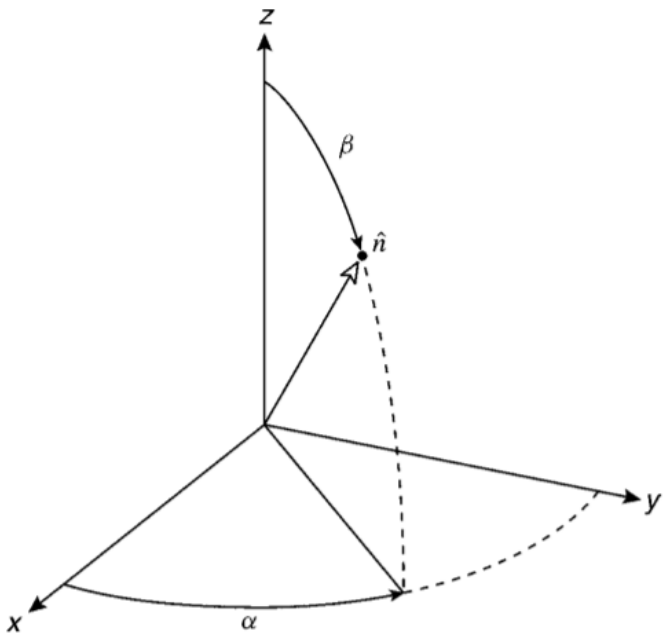
1) Označimo sa $\hat{n} = (\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\beta)$, pri čemu su $0 \leq \alpha < 2\pi$ i $0 \leq \beta \leq \pi$, fiksiranu os svojstvenog vektora oko kojeg želimo vršiti rotaciju (slika 7).

2) Definirajmo $\hat{z}$ kao vektor stupac $(0, 0, 1)^T$, te uočimo da je

$$\hat{n} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \hat{z}.$$

3) Da bismo konstruirali rotacijsku matricu koja rotira oko $\hat{n}$, potrebno je transformirati $\hat{n}$ u $\hat{z}$ koristeći transformaciju obrnutu prethodno navedenoj, zatim provesti rotaciju oko $\hat{z}$ za kut θ koristeći elementarnu matricu $R_z(\theta)$ i na kraju vratiti $\hat{z}$ nazad u $\hat{n}$ (kao u početnoj situaciji):

$$R(\theta, \hat{n}) = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\theta) \cdot R_y(\beta)^T \cdot R_z(\alpha)^T.$$



Slika 7: Polarne koordinate za konstruiranje normale $\hat{n}$ na jediničnu sferu S^2 u prostoru

Korištenjem oznaka

$$\hat{n} = (\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\beta) = (n_1, n_2, n_3),$$

dobivamo željenu matricu rotacije gdje je fiksirana os smjera $\hat{n}$

$$R(\theta, \hat{n}) = \begin{bmatrix} c + (n_1)^2(1-c) & n_1 n_2(1-c) - s n_3 & n_1 n_3(1-c) + s n_2 \\ n_2 n_1(1-c) + s n_3 & c + (n_2)^2(1-c) & n_2 n_3(1-c) - s n_1 \\ n_3 n_1(1-c) - s n_2 & n_3 n_2(1-c) + s n_1 & c + (n_3)^2(1-c) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

pri čemu je $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ i $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ po konstrukciji. Način na koji se pojavljuje svojstveni vektor $\hat{n}$ direktno se vidi računanjem

$$\begin{aligned} R(\theta,\hat{n})\cdot\hat{n} &= \begin{bmatrix} n_1c + n_1(n_1)^2(1-c) + n_1(n_2)^2(1-c) + n_1(n_3)^2(1-c) \\ n_2(n_1)^2(1-c) + n_2c + n_2(n_2)^2(1-c) + n_2(n_3)^2(1-c) \\ n_3(n_1)^2(1-c) + n_3(n_2)^2(1-c) + n_3c + n_3(n_3)^2(1-c) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_1(c+1-1) \\ n_2(c+1-1) \\ n_3(c+1-1) \end{bmatrix} \\ &= \hat{n}. \end{aligned}$$

3.2.1 Kvaternioni i polovični kutovi

Prisjetimo se forme polovičnog kuta za 2D slučaj i primijetimo da za svaku 2D ravninu mora postojati 3D rotacija koja odgovara formi polovičnog kuta. Na primjer, za $n_1 = n_2 = 0$ bit će $n_3 = 1$, te je stoga

$$\begin{aligned} R_z &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -n_3\sin\theta & 0 \\ n_3\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2-b^2 & -2ab & 0 \\ 2ab & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

gdje su $a = \cos\theta/2$, $b = \sin\theta/2$. Čini se da bi matricu $R(\theta,\hat{n})$ općenito mogli zapisati u termimima polovičnog kuta, a ne samo u specijalnim slučajevima kartezijevih koordinata kao u prethodnom primjeru. Stoga ćemo pokušati zapisati tu matricu u terminima $\theta/2$ koristeći $a = \cos(\theta/2)$ i $b = \sin(\theta/2)$ radi zgodnijeg zapisa. Faktor $(1-c)$ u jednadžbi (5) ne poprima odmah oblik koji očekujemo, nego moramo uzeti u obzir da vrijedi $a^2+b^2 = 1$. Uvedemo li supstituciju $1-c = (a^2+b^2)-(a^2-b^2) = 2b^2$ dobivamo osobito važan izraz

$$\begin{aligned} R(\theta,\hat{n}) &= \begin{bmatrix} a^2-b^2+(n_1)^2(2b^2) & 2b^2n_1n_2 - 2abn_3 & 2b^2n_3n_1 + 2abn_2 \\ 2b^2n_1n_2 + 2abn_3 & a^2-b^2+(n_2)^2(2b^2) & 2b^2n_2n_3 - 2abn_1 \\ 2b^2n_3n_1 - 2abn_2 & 2b^2n_2n_3 + 2abn_1 & a^2-b^2+(n_3)^2(2b^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+b^2(n_1^2-n_2^2-n_3^2) & 2b^2n_1n_2 - 2abn_3 & 2b^2n_3n_1 + 2abn_2 \\ 2b^2n_1n_2 + 2abn_3 & a^2+b^2(n_2^2-n_3^2-n_1^2) & 2b^2n_2n_3 - 2abn_1 \\ 2b^2n_3n_1 - 2abn_2 & 2b^2n_2n_3 + 2abn_1 & a^2+b^2(n_3^2-n_1^2-n_2^2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ovdje smo također iskoristili relaciju $n_1^2+n_2^2+n_3^2 = 1$ te uveli supstituciju:

$$\begin{aligned} -b^2 + 2b^2(n_1)^2 &= -(n_1^2+n_2^2+n_3^2)b^2 + 2b^2(n_1)^2 \\ &= b^2(n_1^2-n_2^2-n_3^2) \end{aligned}$$

te analogno za izraze $-b^2 + 2b^2(n_2)^2$ i $-b^2 + 2b^2(n_3)^2$.

Prethodna matrica se može zapisati i u terminima komponenti jediničnog kvaterniona $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, korištenjem sljedeće parametrizacije:

$$\begin{aligned} q_0 &= a = \cos(\theta/2), \\ q_1 &= n_1 b = n_1 \sin(\theta/2), \\ q_2 &= n_2 b = n_2 \sin(\theta/2), \\ q_3 &= n_3 b = n_3 \sin(\theta/2). \end{aligned} \tag{7}$$

Taj se kvaternion može još zapisati i kao $q(\theta, \hat{n}) = (\cos\frac{\theta}{2}, \hat{n}\sin\frac{\theta}{2})$.

Korištenjem navedene parametrizacije, dobivamo krajnji rezultat

$$R(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Uvrstimo li kvaternion zadan sa (7) u jednakost (8), dobivamo uobičajenu matricu $R(\theta, \hat{n})$ iz jednakosti (5) koja predstavlja rotaciju za kut θ u ravnini okomitoj na $\hat{n}$ pri čemu je $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$, odnosno $\hat{n}$ je jedinični vektor u prostoru te leži na jediničnoj sferi, a za kut θ vrijedi $0 \leq \theta < 4\pi$. Dakle, matrice u (5) i (8) su identične,

$$R(\theta, \hat{n}) \equiv R(q),$$

a (7) predstavlja vezu između 3D rotacija i kvaterniona. Primijetimo da je raspon vrijednosti kuta θ proširen do 4π. To nam omogućuje da vrijednosti kvaterniona q dosegnu sve točke na jediničnoj hipersferi S^3.

Sfere postoje u svim dimenzijama, a općenito za prirodan broj n i pozitivan broj r sa S^n označavamo sferu u $(n+1)$-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ i ona predstavlja skup svih točaka $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ za koje vrijedi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2.$$

Sferu S^3 zovemo i hipersfera. Jedinična sfera je sfera radijusa $r = 1$. Primjerice, u trodimenzionalnom prostoru jedinična sfera S^2 predstavlja skup svih točaka prostora čija je euklidska udaljenost od ishodišta jednaka 1.

3.2.2 Dvostruke vrijednosti

Zbog načina na koji se komponente kvaterniona q pojavljuju u matrici (8), ona zadovoljava

$$R(q) = R(-q).$$

To znači da kvaternioni q i $-q$ generiraju istu matricu 3D rotacije.

3.2.3 Veza s kompleksnim brojevima

Ukoliko promatramo kvaternione s proizvoljnom komponentom q_0 te samo jednom od preostalih komponenti različitom od nula (samo $q_1 \neq 0$, samo $q_2 \neq 0$ ili samo $q_3 \neq 0$), nećemo ih moći razlikovati od kompleksnih brojeva. Stoga zaključujemo da kvaternion može biti ekvivalentan kompleksnom broju na tri različita načina. Promatramo li to u smislu veze kompleksnih brojeva s 2D rotacijama vidimo da ta tri slučaja odgovaraju kvaternionskoj reprezentaciji 3D rotacija restringiranih na sljedeća tri nezavisna 2D potprostora:

- $q_0 + q_1 i$: ostavlja $\hat{x}$ fiksnom (rotacije u yz ravnini)
- $q_0 + q_2 j$: ostavlja $\hat{y}$ fiksnom (rotacije u zx ravnini)
- $q_0 + q_3 k$: ostavlja $\hat{z}$ fiksnom (rotacije u xy ravnini)

Usporedno s eksponencijalnim zapisom kompleksnog broja, imamo kvaternionski izraz koji očigledno odgovara kompleksnom izrazu za 2D rotacije:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \hat{n}(\theta/2)} &= \cos(\theta/2) + i \cdot \hat{n} \sin(\theta/2) \\ &= q_0 + i \cdot \mathbf{q} \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k. \end{aligned}$$

Stoga za svaku komponentu dobivamo točno $e^{i(\theta/2)}$, što je doslovno kvadratni korijen kompleksne reprezentacije 2D rotacije i to je podskup 3D rotacija.

3.3 Vraćanje θ i $\hat{n}$

Ukoliko nam je zadana rotacijska matrica M, moguće je iz nje direktnim izračunavanjem odrediti svojstveni vektor $\hat{n}$ oko kojeg se vrši rotacija i iznos kuta θ za koji rotiramo.

1. **Određivanje osi**

   Ako je $\sin\theta \neq 0$ i dovoljno velik kako ne bi došlo do numeričkih grešaka, $\hat{n}$ možemo izračunati ako od matrice R oduzmemo njoj transponiranu matricu, koristeći matricu iz (5). Dobivamo

$$\begin{aligned} R - R^T &= \begin{bmatrix} 0 & -2n_3 \sin\theta & +2n_2 \sin\theta \\ +2n_3 \sin\theta & 0 & -2n_1 \sin\theta \\ -2n_2 \sin\theta & +2n_1 \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Brojevi a, b, c su nam poznati (izračunati iz dane matrice) pa jednostavno izračunamo i $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2 \sin\theta$ te normaliziramo kako bi dobili rezultat

$$\hat{n} = (a/d, b/d, c/d).$$

2 Izračunavanje kuta

Opet koristimo matricu iz (5) kojoj sada računamo trag

$$t = \mathrm{Tr}(R) = 1 + 2\cos\theta.$$

Kako nam je konkretna matrica R poznata, možemo izračunati t. Stoga iznos kuta dobijemo korištenjem

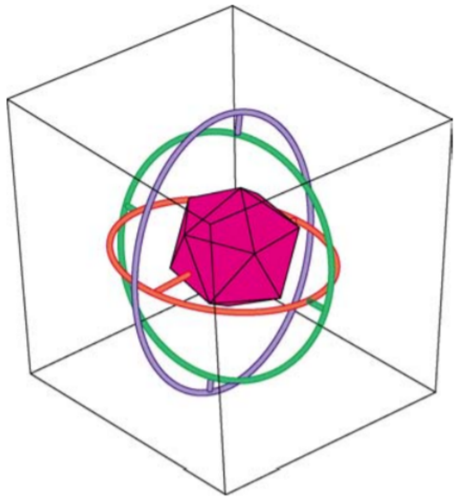
$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(t-1), \\ \sin\theta &= +\sqrt{1 - \cos^2\theta}. \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti i zbog $R(\theta, \hat{n}) = R(-\theta, -\hat{n})$, možemo uzeti pozitivan predznak korijena.

Ovo je osnovni način na koji izračunavamo parametre rotacije, θ i $\hat{n}$, ukoliko nam je dana konkretna matrica rotacije. Jasno je da se iz navedenog mogu dobiti i komponente kvaterniona q koji predstavlja istu rotaciju. Ovaj način ima svoje nedostatke te nećemo uvijek doći do rezultata, kao u slučaju gdje je, na primjer, $\theta = \pi$ što je savim legitiman rotacijski parametar, ali pri tome matrica $R - R^T$ neće biti korisna. Više o općenitijem pristupu može se naći u [3].

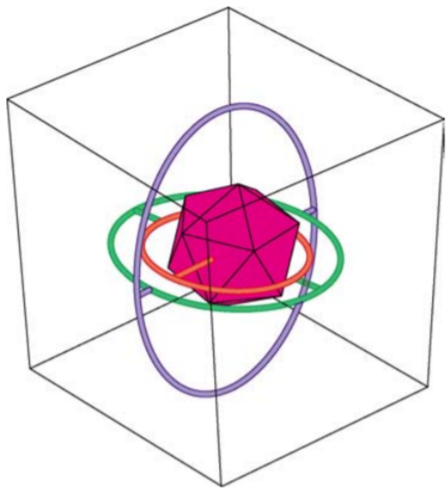
3.4 *Gimbal lock*

Jedan od klasičnih problema pri korištenju 3×3 matrica za prikaz rotacija je mogućnost pojave koja se naziva ***gimbal lock***. Da bismo objasnili o čemu se radi, promotrimo sliku 8.



Slika 8: Osnovni mehanizam, s tri ortogonalne rotacijske osi koje odgovaraju elementarnim rotacijama oko osi XYZ Kartezijevog sustava.

Sustav se sastoji od tri koncentrična rotirajuća prstena koji se obično nalaze unutar inercijskog upravljačkog sustava. Postoji vrlo specifičan mehanički problem koji se događa ukoliko se dvije osi poklope. To znači da se dva prstena nalaze u istoj ravnini, kao što je prikazano na slici 9.



Slika 9: Gimbal lock se pojavi kada se koncentrični prsteni zarotiraju u takvu konfiguraciju gdje je stupanj slobode izgubljen.

U tom slučaju, kada su prsteni komplanarni, svaka rotacija oko osi koja je okomita na ravninu u kojoj se nalaze ti prsteni prouzročiti će zakretanje upravljačkog sustava. Ovo je ozbiljan problem jer bi se rotacijski prsteni trebali kretati slobodno te spriječiti bilo kakvo zakretanje upravljačkog sustava. U tom trenutku će ili upravljački sustav ili vozilo (letjelica) pretrpjeti destruktivnu silu jer se upravljački sustav ne može prilagoditi pokušaju promjene smjera bez primjene ogromnog zakretnog momenta na sustav koji ga okružuje.

U fizici, ovaj fenomen se pojavljuje kada pratimo kontinuirane promjene orjentacije nekog objekta u trodimenzionalnom prostoru. Kada imamo niz orjentacija koje se glatko mijenjanju i taj niz u nekom trenutku dostigne točku u kojoj se fiksirane osi rotacije poklope u istoj ravnini, tada ne postoji način na koji možemo izvršiti rotaciju oko osi koja je okomita na tu ravninu.

3.5 Eulerovi kutovi i kvaternioni

Postoji više načina parametrizacije standardnih 3×3 rotacijskih matrica. Do sada smo se usredotočili na standardnu verziju pomoću osi i kuta $R(\theta, \hat{n})$ iz jednakosti (5) te pripadnog kvaterniona

$$q(\theta, \hat{n}) = (\cos(\theta/2), \hat{n}\sin(\theta/2)),$$

gdje se svojstveni vektor matrice R može parametrizirati kao točka na sferi S^2

$$\hat{n} = (\cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\beta).$$

Ovakav oblik ne dovodi do pojave *gimbal lock* anomalija.

U mnogim se primjenama rotacije promatraju kao nizovi više uzastopnih rotacija oblika $R(\theta, \hat{n})$, što je jedan izvor pojave *gimbal lock* anomalija. Nizove od tri takve rotacije obično nazivamo prikazima pomoću **Eulerovih kutova**, te ih također možemo povezati s pripadajućim kvaternionima. Navest ćemo dva najčešća niza koja se pojavljuju u literaturi i primjenama, a to su XYZ te ZYZ.

3.5.1 Niz rotacija XYZ

U ovom slučaju se radi o tri rotacije oko tri različite bazne osi X, Y, Z koordinatnog sustava u prostoru. Eksplicitno, odgovarajuću matricu zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} &R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha, \hat{x}) \cdot R(\beta, \hat{y}) \cdot R(\gamma, \hat{z}) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pripadajući kvaternion $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ koji predstavlja ovu rotaciju dan je s

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2} - \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2},\\
q_1 &= \sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2} + \cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2},\\
q_2 &= \cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2} - \sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2},\\
q_3 &= \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Promotrimo li komponente kvaterniona q, možemo uočiti da za $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, dobivamo funkcije u varijabli $\alpha + \gamma$ ili $\alpha - \gamma$, respektivno, odnosno

$$q(\alpha, \pm\tfrac{\pi}{2}, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\alpha \pm \gamma}{2}, \sin\frac{\alpha \pm \gamma}{2}, \pm\cos\frac{\alpha \pm \gamma}{2}, \pm\sin\frac{\alpha \pm \gamma}{2}\right).$$

To nam znači da smo izgubili jedan stupanj slobode, te smo u *gimbal lock* problemu.

3.5.2 Niz rotacija ZYZ

Ova konvencija tradicionalno je korištena u klasičnoj i kvantnoj fizici, kako bi se parametriziralo gibanje krutog tijela koje se vrti. Pripadna matrica je oblika

$$\begin{aligned}
&R_{zyz}(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha, \hat{z}) \cdot R(\beta, \hat{y}) \cdot R(\gamma, \hat{z}) = R(\gamma, \hat{c}) \cdot R(\beta, \hat{b}) \cdot R(\alpha, \hat{z})\\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

gdje je $\hat{c} = (\cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\beta)$ i $\hat{b} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$.

Pripadajući kvaternion $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ koji predstavlja ovu rotaciju dan je s

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\gamma}{2},\\
q_1 &= \sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma-\alpha}{2},\\
q_2 &= \sin\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma-\alpha}{2},\\
q_3 &= \cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha+\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Ovdje uočavamo da za $\beta = 0$ dobivamo funkciju samo u $\alpha + \gamma$, a za $\beta = \pi$ funkciju u $\alpha - \gamma$, što je također smanjenje stupnja slobode i to uzrokuje *gimbal lock* problem.

Literatura

[1] M. Ben-Ari, *A Tutorial on Euler Angles and Quaternions*, 2017. URL: `https://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/sites/sci-tea.benari/files/uploads/softwareAndLearningMaterials/quaternion-tutorial-2-0-1.pdf`

[2] J. C. Baez, *The Octonions*, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 39(2001), 145-205

[3] A. J. Hanson, *Visualizing Quaternions*, Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier, 2006.

[4] T. W. Hungerford, *Algebra, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag New York, 1980.

[5] J. Huerta, *Introducing The Quaternions* URL: `https://math.ucr.edu/~huerta/introquaternions.pdf`

[6] M. P. Johnson, *Exploiting Quaternions to Support Expressive Interactive Character Motion*, Massachusetts Institute of Technology, 2003 URL: `http://people.csail.mit.edu/jbarry/spring2011PR2/readings/mpjthesis.pdf`

[7] V. J. Katz, *A History of mathematics, An Introduction*, Third Edition, Pearson Education, 2009.

[8] J. B. Kuipers, *Quaternions and rotation Sequences: Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*, Princeton University Press, Princeton New Yersey, 1999.

[9] B. Palais, R.Palais, S. Rodi, *A Disorienting Look at Euler's Theorem on the Axis of a Rotation*, Am. Math. Mon. 116(2009), 892-909

[10] I. R. Porterous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge University Press, 1995.

[11] S. Roman, *Advanced Linear Algebra, Graduate Texts in Mathematics*, Third Edition, Springer, 2008.

Sažetak i ključne riječi

Sažetak. Otkriće skupa kvaterniona pripisujemo irskom matematičaru i fizičaru Williamu Rowanu Hamiltonu koji je, motiviran ulogom skupa kompleksnih brojeva u geometriji ravnine, nastojao dobiti algebarsku strukturu koja bi imala sličnu ulogu u geometriji prostora. Njemu u čast se skup kvaterniona označava s $\mathbb{H}$.

Osim što skup kvaterniona čini realan vektorski prostor, uz množenje koje nije komutativno čini i nekomutativan prsten s jedinicom. Skup kvaterniona tvori i specifičnu algebarsku strukturu koju nazivamo algebra s dijeljenjem. Ta algebra s dijeljenjem je realna i dimenzije 4, a prema Frobeniusovom teoremu postoje točno tri konačnodimenzionalne realne algebre s dijeljenjem: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$. Dodatno, sve algebre s dijeljenjem imaju dimenzije $1, 2, 4$ ili 8, no jedine normirane algebre s dijeljenjem su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$, pri čemu je $\mathbb{O}$ skup oktoniona - normirana algebra s dijeljenjem dimenzije 8 s neasocijativnim množenjem.

Kvaternione povezujemo s 3D rotacijama, a one se obično provode djelovanjem ortogonalnih 3×3 matrica determinante 1. Matrice elementarnih rotacija oko fiksnih osi koordinatnog sustava dovoljne su kako bi se objekt doveo u željeni položaj u prostoru, no niz tih rotacija može dovesti do ozbiljnog problema koji se naziva *gimbal lock*. Iz Eulerovog teorema slijedi da se sve 3D rotacijske matrice (i njihovi produkti) mogu zapisati korištenjem jedne rotacijske matrice $R_3(\theta, \hat{n})$ koja vektor $\hat{n}$ ostavlja fiksnim. Njoj pridružujemo jedinični kvaternion $q(\theta, \hat{n}) = (\cos\frac{\theta}{2}, \hat{n}\sin\frac{\theta}{2})$. Ovakav oblik ne dovodi do pojave *gimbal lock* anomalija.

Ključne riječi: kvaternion, vektorski prostor, prsten, normirana algebra s dijeljenjem, rotacija, rotacijska matrica, Eulerov teorem, *gimbal lock*, Eulerovi kutovi

Quaternions and spatial rotations

Summary. We accredit discovery of quaternions to the Irish mathematician and physicist William Rowan Hamilton who, motivated by the role of the set of complex numbers in plane geometry, sought to obtain an algebraic structure that would have a similar role in space geometry. In his honor, the set of quaternions is denoted by $\mathbb{H}$.

Besides that set of quaternions forms a real vector space, it also forms a non-commutative unital ring, as quaternion multiplication is not commutative. The set of quaternions forms a specific algebraic structure called a division algebra. Quaternion division algebra is 4-dimensional real algebra and according to Frobenius' theorem there are exactly three real division algebras: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$. In addition, all division algebras have dimensions $1, 2, 4$ or 8, but the only normed division algebras are $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ and $\mathbb{O}$, where $\mathbb{O}$ denotes set of octonions - an 8-dimensional normed division algebra with nonassociative multiplication.

Quaternions are associated with 3D rotations, which are usually implemented by the action of 3×3 orthogonal matrices with determinant 1. Elementary rotation matrices about fixed axes of the coordinate system are sufficient to bring an object to desired position in space, but a series of these rotations can lead to serious problem called gimbal lock. It follows from Euler's theorem that every 3D rotation matrix (and products of these) can be written in terms of a rotation matrix $R_3(\theta, \hat{n})$ which leaves the vector $\hat{n}$ fixed. It has a connection with the unit quaternion $q(\theta, \hat{n}) = (\cos \frac{\theta}{2}, \hat{n} \sin \frac{\theta}{2})$. This form does not lead to gimbal lock anomalies.

Keywords: quaternion, vector space, ring, normed division algebra, rotation, rotation matrix, Euler's theorem, gimbal lock, Euler angles

Životopis

Rođena sam 25. prosinca 1994. u Požegi, a živjela sam u Resniku kod Pleternice. 2009. godine završila sam Osnovnu školu fra Kaje Adžića u Pleternici, a 2013. godine završila sam i prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Požega. Zatim sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Po završetku stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike, te upisujem Diplomski studij Financijska matematika i statistika s početkom u 2017. godini. Kroz navedeno razdoblje studiranja uglavnom sam živjela u Osijeku. Tijekom studija sam bila demonstrator iz nekoliko kolegija na Odjelu.

U srpnju 2017. godine sam sudjelovala na međunarodnom matematičkom natjecanju IMC u Blagoevgradu u Bugarskoj i osvojila počasno priznanje. U prosincu 2019. godine sam započela stručnu ERASMUS praksu u gradu Belfastu u Sjevernoj Irskoj, te sam ondje živjela i radila narednih 7 mjeseci.